

Universidade do Estado do Rio de Janeiro Centro de Tecnologia e Ciências Instituto de Física Armando Dias Tavares

Francisco Bento Lustosa

Relaxamento para o equilibrio quântico em osciladores harmônicos acoplados

> Rio de Janeiro 2019

Francisco Bento Lustosa

Relaxamento para o equilibrio quântico em osciladores harmônicos acoplados

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Santiago Esteban Perez Bergliaffa

CATALOGAÇÃO NA FONTE UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

L972r	Lustosa, Francisco Bento. Relaxamento para o equilíbrio quântico em osciladores harmônicos acoplados / Francisco Bento Lustosa. – 2019. 109 f. : il.
	Orientador: Santiago Esteban Perez Bergliaffa. Tese (doutorado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.
	1. Teoria quântica – Matemática – Teses. 2. Osciladores harmônicos – Teses. 3. Função de onda – Teses. 4. Teoria cinética da matéria – Métodos de simulação – Teses. 5. Schrödinger, Equação de – Soluções numéricas – Teses. I. Perez Bergliaffa, Santiago Esteban (Orient.). II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Física Armando Dias Tavares. III. Título.
	CDU 530.145:51

Bibliotecária: Teresa da Silva CRB7/5209

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Francisco Bento Lustosa

Relaxamento para o equilibrio quântico em osciladores harmônicos acoplados

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 12 de abril de 2019. Banca Examinadora:

> Prof. Dr. Santiago Esteban Perez Bergliaffa (Orientador) Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Nelson Pinto-Neto Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Prof. Dr. Marcelo Chiapparini Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Marcelo Guimarães Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Dr. Sandro Dias Pinto Vitenti Universidade de Brasília

DEDICATÓRIA

Dedico esta tese à minha maior apoiadora, incentivadora e protetora em todos os momentos, minha mãe, Isabel Lustosa.

AGRADECIMENTOS

Ao longo dos ultimos anos fui levado à descobrir novas interpretações e teorias e com isso enfrentar diferentes desafios tanto acadêmicos como práticos do viver. Foi através desse caminho tortuoso que esse trabalho foi desenvolvido, com a colaboração fundamental de várias pessoas e com o apoio e incentivo indispensáveis da família e amigos. Aqui agradeço especificamente algumas dessas pessoas:

A minha incansável mãe, Isabel Lustosa da Costa, que enquanto realizava uma carreira acadêmica de imenso sucesso teve tempo de me dar carinho e nutrir meu intelecto, me incentivar em cada sucesso e me apoiar por cada dificuldade, me pressionando sempre à ser a melhor versão de mim mesmo;

Ao meu pai, César Duarte Pereira, pela sua contribuição na minha educação, pelas discussões estimulantes e pelo cuidado e preocupação constantes com meu sucesso profissional e feliciade pessoal;

As minhas segundas mães, Clélia Lustosa, Socorro Lustosa e Lucia de Souza Melo, por estarem sempre me apoiando quando necessitei e por me darem o mesmo carinho materno que dariam aos seus filhos;

À minha companheira, Arielle Sena de Andrade, por ter sido a fonte constante de amor, carinho e sorrisos por momentos tão difíceis e desgastantes, por ter me dado o apoio e incentivos necessários para superar esse desafio;

Ao meu orientador, Prof. Santiago Perez Bergliaffa, por ter se disposto a trabalhar este tema comigo, por ter sido sempre presente e profissional ao tentar entender e discutir as questões teóricas mais complicadas e por me dar o apoio e confiança fundamentais nos momentos de dificuldade;

Ao Prof. Antony Valentini, primeiramente por ter me apresentado pela primeira vez para uma teoria quântica que eu pudesse compreender por inteiro e, em segundo lugar, pela colaboração, disponibilidade e amizade.

Também gostaria de agradecer à outras pessoas que, de forma direta ou indireta, foram também responsáveis por influenciar e transformar a minha jornada de vida que me trouxe até este ponto de minha carreira:

Ao meu primeiro mestre na física, meu professor de ensino médio Antonio Cesar, sem o qual não teria percebido a relação essencial entre as maravilhas da natureza e as leis da física que me levam sempre a repetir o seu lema: "Física é vida!";

Também aos meus outros muitos professores de ensino médio no Centro Educacional Anísio Teixeira (CEAT) que sempre me incentivaram a expandir a mente e explorar as diferentes formas do conhecimento, entre eles, o professor Cláudio Veloso, a professora de biologia Elcy, o grande Marcelo Sá Correa na matemática, professor Leon na sua Geografia revolucionária, entre tantos outros; Às minhas primeiras e grandes amizades na cidade de Fortaleza, Marilia Ceres, Mariana Bandeira, Louise Félix e Giulianna Cacacce agradeço pela irmandade e por terem expandido meus horizontes sociais e me ajudado a abrir toda uma grande avenidade de conexões sociais que continua a crescer até hoje;

Aos meus primeiros orientadores pelas avenidas quânticas na Universidade Federal do Ceará, o professor Ramos e meu primeiro orientador Carlos Alberto Almeida, que me ajudaram a entender e descobrir as dificuldades e mistérios dos problemas que até hoje me interessam;

Aos meus muitos amigos dos tempos Universitários, entre os companheiros de boemia Cearense - João Ernesto, Rogério Santiago, Bernardo Mendes, Matheus Valente, Vitor Barbosa, Israel - e também os companheiros de movimento estudantil - Cecília Feitoza, Rodigo Santaella, Louise Santana, Livia Dias, Rafael Potiguar, Julio Holanda todos contribuíram para uma vivência incrível que modificaram e expandiram a minha visão de mundo de forma irreparável.

À minha orientadora, Maria Emília Xavier Guimarães, e aos meus ótimos professores do Instituto de Física da UFF agradeço pela acolhida e pelos ensinamentos nos primeiros passos na comunidade acadêmica carioca.

Ao meu eterno mestre, José Hellayel, pelo incrível entusiasmo, humildade e brilhantismo com que sempre ensinou e deu exemplo para mim e todos os seus alunos, serei sempre grato por tudo.

Ao meu primeiro orientador na UERJ, Henrique Oliveira, pela disponibilidade e entusiasmo com que me recebeu e pela tranquilidade que me deu quando anunciei minha mudança de rumos.

Aos funcionários da Secretaria do PPGF-UERJ pela super disposição para resolver todos os meandros burocráticos que apareceram pelo caminho e pela simpatia com que o fizeram.

Aos meus colegas de Clemson, Adithya Kandhadai (a.k.a. P. K.), Nick Underwood, Indrajit Sen e Lea Marcotulli pela incrível hospitalidade, amizade e inesquecíveis discussões que me desafiaram sempre à rever meus conceitos e avançar minha pesquisa.

À Samuel Colin, por sua enorme ajuda nos problemas computacionais e sua incrível disposição em responder em detalhes cada uma de minhas dúvidas.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

the main point here is that we regard all theories as approximations with limited domains of validity. Some theories may be more nearly determinate, while others less so. The way is open for the constant discovery of new theories, but ultimately these must be related coherently. B. J. Hilley

RESUMO

LUSTOSA, F. B. *Relaxamento para o equilibrio quântico em osciladores harmônicos acoplados.* 2019. 109 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

Nesta tese abordamos o problema da interpretação dos fenômenos quânticos através da Teoria da Onda Piloto, desenvolvida inicialmente por Louis de Broglie e consolidada por David Bohm. Inicialmente os paradoxos fundamentais da Interpretação de Copenhagen e as discussões em torno da questão das variáveis ocultas são apresentados. O desenvolvimento histórico da Teoria da Onda Piloto é descrito, demonstrando como esta teoria resolve o problema da medida sem violar as condições impostas pelos resultados experimentais. A formulação completa da teoria e sua aplicação aos problemas básicos da mecânica quântica também são apresentadas. No contexto da Teoria da Onda Piloto a regra de Born não é postulada e para explicar a validade da mesma um argumento estatístico, análogo ao teorema H da mecânica estatística clássica, foi desenvolvido para descrever a igualdade entre distribuição e o módulo quadrado da função de onda como um estado de equilíbrio. O desenvolvimento da versão clássica do teorema é descrito brevemente para introduzir posteriormente a construção do teorema H quântico. E demonstrado como, para sistemas que violem a regra de Born - fora do equilíbrio quântico -, as desigualdades de Heisenberg não são respeitadas e a transmissão de sinais instantâneos se torna possível. O decaimento para o equilíbrio é analisado através de simulações numéricas em sistemas simples inicialmente fora do equilíbrio quântico.O objetivo central desta tese é analisar o decaimento para o equilíbrio quântico de um sistema composto por dois osciladores unidimensionais acoplados por um potencial dependente do tempo. Através da realização de simulações numéricas foram discutidos os efeitos da variação da constante de acoplamento, do número de modos e das fases da função de onda do sistema no tempo de decaimento. Por fim, alguns cenários cosmológicos em que o não-equilíbrio possa ter existido e as possíveis formas de encontrá-lo experimentalmente são descritas.

Palavras-chave: Mecânica Quântica. Teoria de de Broglie-Bohm. Equilíbrio Quântico. Cosmologia.

ABSTRACT

LUSTOSA, F. B. *Relaxation to quantum equilibrium in coupled harmonic oscillators*. 2019. 109 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

In this thesis we approach the problem of the interpretation of quantum phenomena through the Pilot Wave Theory, initially developed by Louis de Broglie and consolidated by David Bohm. Initially the paradoxes of the Copenhagen Interpretation and the discussions around the hidden variables question are presented. The historical development of the Pilot Wave Theory is described, demonstrating how the theory solves the measurement problem without violating the conditions imposed by experimental results. The complete formulation of the theory and it's applications are also presented. In the context of the Pilot Wave Theory the Born rule is not postulated and to explain it's validity an statistical argument, analogous to the classical H theorem was developed to describe the equality between the distribution and the square module of the wave function as an equilibrium state. The development of the classical version of the theorem is briefly described to introduce the construction of the quantum H theorem. It is demonstrated how, for systems that violate the Born rule - out of quantum equilibrium -, the Heisenberg inequalities do not hold and the instantaneous sending of signals becomes possible. The decay to equilibrium is analysed through numerical simulations made for simple systems initially out of equilibrium. The central objective of this thesis is to analyse the decay to equilibrium of a quantum system composed by two one-dimensional oscillators coupled by a time-dependent potential. Through the realization numerical simulations effects of the variation of the coupling constant, the number of modes and the phases of the initial on the decay time wave function were discussed. Finally, some cosmological scenarios where non-equilibrium may have existed and the possible ways it can be found experimentally are described.

Keywords: Quantum Mechanics. de Broglie-Bohm Theory. Quantum Equilibrium. Cosmology.

LISTA DE FIGURAS

Figura	1 - Trajetórias para o oscilador harmônico unidimensional	44
Figura	2 - Conjunto de trajetórias para a superposição finita de estados esta-	
	cionários do oscilador unidimensional	46
Figura	3 - Acúmulo de elétrons em uma tela no experimento da dupla fenda	46
Figura	4 - Trajetórias para o experimento da dupla fenda . $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	48
Figura	5 - "Potencial quântico" visto a partir do Detector	49
Figura	6 - Distribuição de probabilidade para o experimento da dupla fenda a uma distância (a) $x = 1.5cm$ das fendas (b) $x = 35cm$ das fendas	50
Figura	7 - O módulo quadrado R^2 da função de onda para o efeito Aharonov-Bohm.	54
Figura	8 - Duas trajetórias para o oscilador harmônico bidimensional com posições iniciais diferentes. azul = $[x(0) = 1.0, y(0) = 1.0]$ e vermelho = $[x(0) = 1.0, y(0) = 1.0]$	
	1.1, y(0) = 1.0]	54
Figura Figura	9 - $\rho(x, 0) \in \psi(x, 0) ^2$ para a caixa unidimensional de comprimento $L = 100$. 10 - $\rho(x, 120) \in \psi(x, 120) ^2$ para a caixa unidimensional de comprimento	71
-	$L = 100. \dots $	72
Figura	11 - $\overline{H}(t)$ para a caixa unidimensional	72
Figura	12 - $\ln \overline{H}(t)$ para o poço de potencial bidimensional	75
Figura	13 - Evolução da distribuição suavizada do oscilador harmônico quântico	
	comparada ao módulo quadrado da função de onda	77
Figura	14 - Decaimento da função $\bar{H}(t)$ para três redes diferentes, no caso do osci-	
	lador com 16 modos em superposição.	79
Figura	15 - Três trajetórias com condições iniciais diferentes: i) $(x_a(0), x_b(0)) = (0.24, 0.32)$, ii) $(x_a(0), x_b(0)) = (-2.89, -2.90)$ e iii) $(x_a(0), x_b(0))$ e iii) $(x_a(0), x_b(0)) = (-2.89, -2.90)$ e iii) $(x_a(0), x_b(0)) = (-2.89, -2.90)$ e iii) $(x_a(0), x_b(0))$ e iii) $(x_a(0), x_b(0))$ e iii) e iii) $(x_a(0), x_b(0))$ e iii) e iii) e iii) e iii) (x_a(0), x_b(0)) e iii) e iiii) e iii) e i	
	(1.0, -1.0).	82
Figura	16 - Três trajetórias com condições iniciais diferentes: i) $(x_a(0), x_b(0)) =$ $(0.24, 0.32), \text{ ii) } (x_a(0), x_b(0)) = (-2.89, -2.90) \text{ e iii) } (x_a(0), x_b(0)) =$	
	(1.0, -1.0).	85
Figura	17 - Três trajetórias com posições iniciais próximas para $M = 4,25e49$	86
Figura	18 - Distribuição $\rho(x_a,x_b,t)$ e $ \psi(x_a,xb,t) ^2$ para o caso de M = 9 e 625	
	células	88
Figura	19 - Distribuição $\rho(x_a,x_b,t)$ e $ \psi(x_a,xb,t) ^2$ para o caso de M = 25 e 625	
	células de <i>coarse-graining</i>	90
Figura	20 - As funções $\ln(\bar{H}(t))$ são superpostas com funções exponenciais do tipo	
	$H(t) = H_0 \exp(-t/t_c)$, geradas a partir de um ajuste com os dados	
	obtidos nas simulações.	91

LISTA DE TABELAS

Tabela	1 - Conjunto de tempos críticos para $M = 16. \dots \dots \dots \dots \dots \dots$	92
Tabela	2 - Conjunto de tempos críticos para $M = 25. \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	92
Tabela	3 - Conjunto de tempos críticos para $M = 36. \dots \dots \dots \dots \dots \dots$	93
Tabela	4 - Conjunto de tempos críticos para $M = 49. \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$	93
Tabela	5 - Valores médios para $\ln(t_c)$	94

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	12
1	A TEORIA DA ONDA PILOTO	34
1.1	A Teoria da Onda Piloto para uma Partícula Não Relativística	34
1.2	Equações de Onda e de Partícula	36
1.2.1	Contextualidade, Continuidade e Probabilidade	38
1.3	A Teoria da Onda Piloto para Muitos Corpos	41
1.4	Aplicações da Teoria da Onda Piloto	43
1.4.1	Oscilador Harmônico Unidimensional	43
1.4.1.1	Superposição Finita de Estados Estacionários	45
1.4.2	Experimento da Dupla Fenda	45
1.4.2.1	Trajetórias	47
1.4.2.2	Partícula, Onda, Contextualidade	50
1.4.3	O Efeito Aharonov-Bohm	52
1.4.4	Oscilador Harmônico Bidimensional	53
1.5	Não-Localidade	55
2	EMERGÊNCIA DINÂMICA DA REGRA DE BORN	58
2.1	O Teorema H Clássico	58
2.2	Origem Dinâmica de Probabilidades Quânticas	62
2.3	Três "Conspirações"	66
2.4	Primeiras Simulações Numéricas	69
2.4.1	Poço de Potencial Unidimensional	70
2.4.2	Poço de Potencial Bidimensional	73
2.5	Simulações Numéricas: Oscilador Harmônico Quântico	76
3	INTERAÇÕES DEPENDENTES DO TEMPO E O EQUILÍBRIO	
	QUÂNTICO	80
3.1	Introdução	80
3.2	Caso Clássico	81
3.3	Caso Quântico	82
3.3.1	Simulações Numéricas	84
3.4	Possíveis Sistemas Fora do Equilíbrio	96
	CONCLUSÃO	99
	REFERÊNCIAS	104

INTRODUÇÃO

But in 1952 I saw the impossible done. It was in papers by David Bohm. Bohm showed explicitly how parameters could indeed be introduced, into nonrelativistic wave mechanics, with the help of which the indeterministic description could be transformed into a deterministic one. More importantly, in my opinion, the subjectivity of the orthodox version, the necessary reference to the 'observer,' could be eliminated.^a [1] John S. Bell

^a Mas em 1952 eu vi o impossível ser feito. Foi nos artigos de David Bohm. Bohm demonstrou explícitamente como parâmetros poderiam de fato ser introduzidos, na mecânica de ondas nãorelativística, com a ajuda das quais a descrição indeterminista poderia ser transformada em uma deterministíca. Mais importante, na minha opinião, a subjetividade da versão ortodoxa, a referência necessária ao "observador", poderia ser eliminada. (Tradução nossa.)

No início do século XX a Física entrou em um ritmo acelerado de revoluções teóricas e descobertas experimentais que transformou completamente a forma como vemos o mundo. Por um lado, a Teoria da Relatividade mudou nossa compreensão sobre o espaço e o tempo, a relação entre matéria e energia, e o movimento de corpos no Universo. Por outro, a confirmação da existência dos quanta, a teoria do efeito fotoelétrico e o modelo atômico de Bohr deram início à um debate sobre a física do mundo microscópico que continua até hoje e revolucionou inteiramente diversas áreas da ciência e da tecnologia.

Nesse contexto, vários novos fenômenos, conhecidos hoje como quânticos, foram descobertos e colocaram no caminho do rápido desenvolvimento da física moderna diversos paradoxos. Esses fenômenos e os conseqüentes debates e interpretações acerca dos mesmos culminaram na famosa conferência de Solvay de 1927. À essa altura tanto a relatividade especial quanto à geral pareciam completamente estabelecidas mas as evidências de uma nova área da física já eram o centro das discussões. Nesse encontro, ocorrido em Bruxelas com a presença dos maiores físicos daquele momento, três teses foram apresentadas na tentativa de explicar de forma coesa e coerente todos os fenômenos recém descobertos: a onda piloto, em conjunto com o conceito de dualidade onda-partícula, foi discutida por Louis de Broglie, a mecânica quântica apresentada por Max Born e Werner Heisenberg,

e a mecânica de ondas de Erwin Schrödinger. As três teses foram amplamente discutidas durante a conferência, especialmente a mecânica quântica de Born e Heisenberg e a onda piloto de de Broglie. Os principais temas envolvidos nas discussões foram o processo de medida, o determinismo, a não-localidade, a subjetividade e o fenômeno da interferência [2].

Nas discussões finais da conferência a confusão de ideias era tão grande que o físico austríaco Paul Ehrenfest escreveu a seguinte citação bibíblica no quadro [2]:

And they said one to another: Go to, let us build us a tower, whose top may reach unto heaven; and let us make us a name. And the Lord said: Go to, let us go down, and there confound their language, that they may not understand one another's speech.¹

Foi a partir desta conferência, e da famosa palestra dada por Niels Bohr em 1927 e publicada no ano seguinte na revista Nature [3], que se estabeleceu o que conhecemos hoje como a Interpretação de Copenhagen da Mecânica Quântica, ou - como muitos livros à apresentam - simplesmente Mecânica Quântica. O sucesso dessa teoria é amplamente conhecido, sendo considerado até hoje um dos maiores, se não o maior, sucesso da física moderna em termos do acordo entre previsões teóricas e resultados experimentais, além dos diversos desenvolvimentos que se sucederam (e ainda se sucedem) em diversos campos do conhecimento, decorrentes dessa teoria.

Ainda assim, a Interpretação de Copenhagen também levantou diversas discussões que permanecem válidas. Apesar do que muitos físicos foram levados a acreditar, a conferência de Solvay não marcou o fim do debate acerca dos fenômenos quânticos e de suas possíveis explicações. Einstein foi até o fim de sua vida um dos maiores críticos desta interpretação, apresentando de forma elaborada argumentos que ele já tinha formulado em termos gerais no encontro de 1927 no seu famoso artigo descrevendo o paradoxo EPR [4]. Além dele, Schrödinger também permaneceu em oposição à crescente onda de adesão à visão de Bohr, Heisenberg e Born, apresentando dois argumentos fundamentais com seu famoso paradoxo envolvendo o gato [5] e o fenômeno do emaranhamento quântico [6].

Apesar disso, os defensores dos conceitos propostos por Bohr e seus colaboradores se tornaram - mesmo que em meio a discordâncias entre eles - um grupo coeso e hegemônico ao longo dos anos. As razões para isso não estão só em fatos científicos, como foi discutido a fundo por James T. Cushing em [7], mas se devem também à postura combativa e muitas vezes arrogante dos fundadores da Interpretação de Copenhagen frente aos questionamentos lógicos apresentados por aqueles interessados em uma visão completa

¹ E eles disseram um ao outro: Vá, edifiquemos uma torre, cujo topo pode alcançar o céu; e façamo-nos um nome. E o Senhor disse: Vá, desçamos e confundamos ali sua lingua, para que não entendam um a lingua do outro. (Tradução nossa.)

dos fenômenos físicos de forma unificada. No entanto, os últimos 50 anos têm visto um crescimento constante do questionamento da impossibilidade de ir além dos limites impostos pela compreensão de Bohr e Heisenberg, especialmente após o incansável trabalho de John S. Bell [1], impulsionado em grande parte pelos artigos de David Bohm [8, 9]. Não só parece haver hoje um renovado interesse em explorar em detalhe os paradoxos levantados pela própria Interpretação de Copenhagen, como também há interesse crescente em teorias e interpretações alternativas como a Interpretação de Muitos Mundos de Everett [10], a Teoria da Onda Piloto de de Broglie-Bohm [8, 9], e as chamadas teorias de colapso [11], entre muitas outras.

Neste trabalho nos concentraremos na Teoria da Onda Piloto e em algumas de suas aplicações. No entanto, é importante descrever em detalhes as principais controvérsias e paradoxos levantados pela Interpretação de Copenhagen, à qual nos referiremos também como Mecânica Quântica Ortodoxa. Primeiro, é preciso ressaltar que mesmo entre aqueles que são apontados como defensores dessa teoria, não havia acordo completo sobre qual seria a base de conceitos que a fundamentam. Enquanto para uns, como Pauli, Rosenfeld e Jordan, o conceito de complementaridade [3] era fundamental para conectar os diferentes aspectos dos fenômenos quânticos para outros, especialmente Dirac e Wigner, o princípio de incerteza de Heisenberg [12] era suficiente para eliminar os problemas encontrados até ali pelo que ficou conhecida como a "velha teoria quântica" [13]. Ao longo das duas décadas seguintes, diversas interpretações filosóficas diferentes foram atribuídas ao pensamento de Bohr [14], que, nas palavras de Heisenberg, "era primeiramente um filósofo, não um físico" [15].

Em paralelo à essas discussões, John von Neumann se dedicou a colocar em termos rigorosos um formalismo matemático único que reunisse de forma geral as descrições matemáticas já existentes em termos de matrizes, ondas e álgebras de operadores. Foi ele também o responsável por incluir um postulado à respeito da redução do pacote de onda, evitando, em parte, o problema da medida [16]. É interessante notar, porém, que a própria ideia de que seja possível descrever a transformação do sistema quântico durante o processo de medida é rejeitada pela lógica de Bohr, como fica explícito nas palavras de um de seus maiores adeptos, Leon Rosenfeld [17]:

By wrongly shifting the emphasis on the measuring process, one obscures the true significance of the argument and runs into difficulties, which have their source not in the actual situation, but merely in the inadequacy of the point of view from which one attempts to describe it. This error of method has its origin in v. Neumann's book 'Foundations of Quantum Mechanics' $(...)^2$

A ideia por trás dessa afirmação é a de que é impossível analisar diretamente o processo de medida, que é uma interação entre um aparelho clássico e um sistema quântico. A hipótese da redução do pacote de onda, por exemplo, indica que um determinado processo quântico - o colapso - ocorre no momento em que um aparelho de medida age sobre um sistema quântico. Para testar essa hipótese seria necessário um outro aparelho que observaria o processo de medida mas isso que alteraria a configuração do sistema original que, em tese, entraria em colapso novamente durante o novo processo de medida. Esse ponto de vista coloca uma barreira intransponível na tentativa de descrever diretamente os processos quânticos.

O processo de medida, mesmo quando considerado a partir do argumento de complementaridade, coloca uma ambiguidade fundamental no centro de toda a estrutura da mecânica quântica. Se existe uma diferença fundamental entre a física do aparelho de medida e do observador clássicos e a dinâmica dos sistemas microscópicos sendo observados, onde se define a fronteira ou como se dá a transição entre o clássico e o quântico? Enquanto na experiência cotidiana e em todas as áreas da física, à parte da teoria quântica, o estado real dos sistemas é bem definido e determinado exatamente de forma inequívoca, no âmbito dos sistemas microscópicos como analisados pela Interpretação de Copenhagen não só as propriedades não são completamente definidas em todo os momentos como o próprio conceito de estado como descrição objetiva da realidade perde completamente o sentido. Como afirmado por Bohr [17]:

There is no quantum world. There is only an abstract physical description. It is wrong to think the role of physics is to find how nature is. Physics concerns what we can say about nature.³

Mesmo que não se acredite estritamente na compreensão específica explicitada na citação acima, onde deveríamos definir a fronteira entre o mundo clássico e o quântico? Mesmo que existam estados microscópicos definidos mas seja impossível defini-los exatamente devido às desigualdades de Heisenberg, a física definida pela equação de Schrödinger e pelas regras estatistícas da mecânica quântica é fundamentalmente diferente de todas as outras áreas da ciência e não há, dentro do escopo da Interpretação de Copenhagen,

² Ao deslocar erroneamente a ênfase para o processo de medição, obscurece-se o verdadeiro significado do argumento e se depara com dificuldades, que têm sua origem não na situação real, mas apenas no ponto de vista inadequado a partir do qual se tenta descrevê-lo. Este erro de método tem sua origem no livro de v. Neumann 'Fundamentos de Mecânica Quântica' (...) (Tradução nossa.)

³ Não existe mundo quântico. Só existe uma descrição física abstrata. É errado pensar que o papel da física é descobrir o que a natureza é. A física diz respeito ao que podemos dizer sobre a natureza. (Tradução nossa.)

uma definição explícita de onde termina o domínio quântico e onde começa o clássico. Colocando de outra forma, não há uma descrição unificada da física envolvida em uma medida.

Um problema diretamente relacionado ao descrito acima ficou evidenciado com o desenvolvimento da cosmologia quântica [18]. Tendo em vista que todas as versões relacionadas ao que Heisenberg se referiu como o *espirito de Copenhagen* [13] precisam assumir, de uma forma ou de outra, um nível clássico necessário para a observação do sistema quântico, quando se passa a tentar estudar o Universo como um todo não há nenhum outro nível superior. Nesse caso, a física do problema só pode ser entendida com uma interpretação completamente diferente em que possamos definir um estado real para todas as coisas. Como colocado por Everett [10],

How is one to apply the conventional formulation of quantum mechanics to the space-time geometry itself? The issue becomes especially acute in the case of a closed universe. There is no place to stand outside the system to observe it. There is nothing outside it to produce transitions from one state to another. (...) No way is evident to apply the conventional formulation of quantum mechanics to a system that is not subject to external observation. The whole interpretative scheme of that formalism rests upon the notion of external observation.⁴

O problema da medida é uma das questões centrais em torno da mecânica quântica, portanto deu vazão à uma extensa literatura [2, 17] relativa às tentativas de superar os paradoxos mencionados, especificamente, a abordagem de von Neumann [16] e a proposta chamada de "descoerência" [19, 20].

Outra questão que dominou os primeiros anos de desenvolvimento da mecânica quântica foi a levantada por Einstein, Podolsky e Rosen [4] em conexão com as desigualades de Heisenberg [12]. Para Einstein, essas relações ao invés de demonstrarem a inexistência de propriedades definitivas, representavam na verdade uma indeterminação no conhecimento à respeito do estado completo do sistema. Com o objetivo de demonstrar que existem formas de medir propriedades conectadas à observáveis que não comutam, Einstein e colaboradores desenvolveram diversos exercícios de pensamento que foram discutidos extensamente com Bohr, apenas para que este demonstrasse diversas vezes que as desigualdades de Heisenberg eram sempre respeitadas, levando em conta todos os as-

⁴ Como aplicar a formulação convencional da mecânica quântica à própria geometria do espaço-tempo? A questão se torna especialmente aguda no caso de um universo fechado. Não há lugar para ficar fora do sistema para observá-lo. Não há nada fora dele que produza transições de um estado para outro. (...) Não há como aplicar a formulação convencional da mecânica quântica a um sistema que não está sujeito à observação externa. Todo o esquema interpretativo desse formalismo repousa sobre a noção de observação externa. (Tradução nossa.)

pectos envolvidos. Isso não quer dizer que o debate em torno das questões levantadas por Einstein tenha sido inútil ou mesmo completamente superado, mesmo enquanto se estabelecia a hegemonia de Copenhagen entre o começo dos anos 30 e o final da Segunda Guerra Mundial. As principais motivações de Einstein eram relacionadas à completude da teoria quântica como defendida pela escola de Copenhagen e à capacidade desta teoria de manter o conceito de localidade como compreendido por ele. Como foi demonstrado por Bell teóricamente [21] e mais recentemente comprovado experimentalmente [22], um dos problemas com a lógica estava ligado justamente a presunção de que efeitos quânticos respeitam estritamente a localidade relativística. Juntamente com o histórico artigo de Schrödinger [6], no qual o termo *emaranhamento* foi cunhado, foi o artigo EPR que iniciou o debate acerca de um dos aspectos mais revolucionários da mecânica quântica: a não-localidade para estados emaranhados.

Vamos descrever em algumas linhas o argumento geral contido em [4] para em seguida introduzir os contra-argumentos de Bell que, como veremos, foram simultâneamente incentivados por e motivaram a Teoria da Onda Piloto. Como o próprio título do artigo explicíta, "Can the quantum-mechanical description of reality be considered complete?", o objetivo dos autores foi demonstrar, sem necessidade de experimentos, que a teoria quântica era incompleta. O argumento se baseia em duas definições: i) Uma teoria é completa se todo elemento de realidade física tiver uma contra-partida na teoria; ii) Se, sem perturbar o sistema de forma alguma, pudermos dizer com certeza (isto é, com probabilidade igual à unidade) o valor de uma quantidade física, então existe um elemento de realidade física correspondendo à esta quantidade física.

A discussão do artigo EPR pode ser feita analisando muitos sistemas, contanto que eles possam ser descritos por um típico estado emaranhado. Suponhamos que uma partícula qualquer de spin nulo decaia em outras duas, cada uma com spin 1/2 [23, 17] com velocidades em direções opostas. O estado relacionado ao spin desse sistema é dado pelo vetor

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\mathbf{n}_{+}\rangle_{1} \otimes |\mathbf{n}_{-}\rangle_{2} - |\mathbf{n}_{-}\rangle_{1} \otimes |\mathbf{n}_{+}\rangle_{2} \right), \tag{1}$$

onde

$$|\mathbf{n}_{\pm}\rangle_{(1,2)} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \exp\left(\mp i\frac{\phi}{2}\right) |\mathbf{z}_{\pm}\rangle_{(1,2)} \pm \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \exp\left(\pm i\frac{\phi}{2}\right) |\mathbf{z}_{\mp}\rangle_{(1,2)}, \qquad (2)$$

representa os autoestados correspondentes aos dois autovalores $\pm \hbar/2$, na direção do vetor unitário arbitrário **n** para cada partícula (1, 2). Se as duas partículas forem afastadas por uma distância suficientemente grande para considerarmos que ambas estão "isoladas" e em cada uma das regiões onde elas se encontrem há um experimentador com artefatos de Stern-Gerlach, podemos analisar as correlações entre as medidas dos dois sistemas. Se o experimentador A medir o spin da partícula 1 na direção \mathbf{z} , por exemplo, encontrando o autovalor = $\hbar/2$, a função de onda completa (1) colapsa para

$$|\psi\rangle = |\mathbf{z}_{+}\rangle_{1} \otimes |\mathbf{z}_{-}\rangle_{2}, \qquad (3)$$

o que significa que, mesmo sem fazer uma medida (ou seja, sem perturbar o sistema), o experimentador B pode prever com probabilidade igual a 1 que a partícula 2 tem spin igual à $-\hbar/2$ na direção \mathbf{z} , ou seja, "existe um elemento de realidade física correspondendo à quantidade física" spin na direção \mathbf{z} . Por outro lado, o experimentador A mede o spin na direção \mathbf{x} encontrando novamente o autovalor $+\hbar/2$ mas agora na direção \mathbf{x} . Da mesma maneira que na medida na direção \mathbf{z} , isso implica que podemos atribuir um elemento de realidade física ao spin da partícula 2, agora na direção \mathbf{x} , portanto o spin nas duas direções possuem realidade física simultânea. Mas de acordo com a Mecânica Quântica Ortodoxa, os vetores no espaço de Hilbert que representam os estados de spin da partícula 2 das duas direções não estão definidos ao mesmo tempo. Dessa forma, de acordo com a definição i) do artigo EPR a teoria é incompleta.

Outra possível conclusão, que nem Einstein nem Bohr poderíam aceitar antes dos trabalhos de Bell, é a de que a ação de medir alguma propriedade da partícula 1 realmente possa afetar as propriedades da partícula 2 de forma não-local, mesmo que isso não se dê através de uma força ou campo como conhecidos na física clássica ou nas teorias da relatividade. Existem duas maneiras de responder à questão da incompletude sem abandonar o princípio de localidade (ambas insatisfatórias). Primeiro, se o estado não representa uma realidade física em si mas suas *potencialidades* ou o conhecimento que temos sobre ela a definição i) não se aplica à esse elemento da teoria. Em segundo lugar, existe o argumento da complementaridade de Bohr, que afirma que apesar de não haver uma influência mecânica no sistema B pelas medidas feitas em A pode "haver uma influência nas condições que definem os tipos possíveis de previsão a respeito do futuro comportamento do sistema" [24]. Isso quer dizer que o termo "realidade física" estaria relacionado ao que podemos conhecer à respeito de um sistema mas não às partes da natureza em si. Essa noção, no entanto, contradiz a justificativa apresentada por Heisenberg sobre seu princípio de incerteza, de que este estaria relacionado à uma interação do sistema quântico com o aparelho de medida. Como colocado por Nelson Pinto-Neto [17]:

Este princípio deveria ser visto, na verdade, como uma indeterminação fundamental da natureza, um elemento irredutível de chance e acaso nas leis físicas, sem conexão com as eventuais interações mecânicas entre aparelho de medida e sistema observado.

A discussão em torno do artigo EPR se manteve relativamente distante do tópico da localidade, tendo em vista que seus dois protagonistas antagônicos não estavam dispostos a abandoná-la enquanto conceito fundamental para todas as áreas da física. Foi inicialmente Schrödinger [6] o único a notar a importância fundamental da inseparabilidade de estados quânticos emaranhados. Considerando que a conexão expressa por um estado físico não separável é independente da distância entre as partículas e sistemas descritos por estes, esta é, como já afirmamos, uma das características mais revolucionárias da teoria quântica.

A centralidade da discussão cada vez mais metafísica entre Bohr e Einstein certamente contribuiu para que outros físicos mais jovens se concentrassem em outras questões relativas à aplicação da teoria quântica que acumulava, ao final da década de 40, centenas de sucessos experimentais e já havia causado enorme impacto político, econômico e cultural com a invenção da bomba atômica. Foi justamente no pós guerra que o físico americano David Bohm publicou um livro-texto muito elogiado sobre a Mecânica Quântica Ortodoxa [23]. O livro causou forte impressão em Einstein, como relatado por Murray Gell-Mann acerca de conversas que teve com Bohm após a publicação do livro [25]:

When I met David a day or two later [after promising to arrange an interview with Einstein] and started to tell him I was working on an appointment with Einstein, he interrupted me excitedly to report that it was unnecessary. His book had appeared and Einstein had already read it and telephoned him to say that David's was the best presentation he had ever seen of the case against him, and they should meet to discuss it. Naturally, when next I saw David I was dying to know how their conversation had gone, and I asked him about it. He looked rather sheepish and said, 'He talked me out of it. I'm back to where I was before I wrote the book.'⁵

Onde estava antes era em dúvida sobre se os argumentos de Bohr à respeito dos paradoxos apresentados no artigo EPR eram suficientes para fazer com que a Mecânica Quântica Ortodoxa fosse uma teoria completa. Foi com esse espirito que ele publicou seus famosos artigos de 1952 [8, 9], em que era apresentada uma teoria quântica alternativa, explícitamente não-local, onde o indeterminismo tinha origem na indeterminação das posições iniciais das partículas quânticas.

Os artigos de Bohm causaram forte reação dos defensores da Interpretação de Copenhagen [26, 27], como descreveremos em algum detalhe mais a frente, mas para o jovem

⁵ Quando conheci David um ou dois dias depois [depois de prometer marcar uma entrevista com Einstein] e comecei a lhe dizer que estava trabalhando em um encontro com Einstein, ele me interrompeu, entusiasmado, para dizer que era desnecessário. Seu livro havia aparecido e Einstein já o havia lido e telefonou para ele para dizer que a apresentação de David foi a melhor que ele já tinha visto do caso contra ele, e que eles deveriam se reunir para discuti-lo. Naturalmente, da próxima vez que vi David, estava morrendo de vontade de saber como foi a conversa deles e perguntei a ele sobre isso. Ele pareceu um pouco envergonhado e disse: 'Ele me convenceu a desistir. Estou de volta onde estava antes de escrever o livro. ' (Tradução nossa.)

John S. Bell eles serviram de inspiração para estudar profundamente o conceito de localidade com relação à mecânica quântica e os teoremas de von Neumman à respeito das chamadas "variáveis escondidas" [1]. Depois de buscar construir uma teoria alternativa à de Bohm mas que respeitasse o princípio de localidade, Bell se dedicou a investigar se a violação desse princípio não seria uma necessidade para os sistemas quânticos em geral e chegou à um de seus teoremas mais conhecidos [21]. Nesse teorema foi demonstrado que, mesmo ao adicionarmos variáveis extras (ou escondidas), à descrição de dois sistemas emaranhados muito distantes, o processo de medida em um deles necessariamente influencia o resultado da medida no outro, de maneira não-local. Desde a apresentação desse teorema, diversos experimentos foram desenvolvidos para testar a não-localidade em sistemas quânticos, comprovando a validade dos argumentos de Bell [28, 22, 29] e a impossibilidade de uma teoria local compatível com os resultados da mecânica quântica mesmo com variáveis adicionais.

Além do teorema sobre a não-localidade de estados emaranhados, Bell também estudou a questão da contextualidade para estados genéricos [30], demonstrando que essa é outra característica fundamental para a construção de uma teoria quântica consistente. O mesmo teorema foi desenvolvido independentemente por Kochen e Specker [31]. Para sistemas quânticos, o valor assumido por um determinado observável depende do contexto em que se realiza a medida deste observável. Desta maneira, se um sistema possui um conjunto de proriedades A, B, C descritas por operadores hermitianos (que podem ou não comutar entre si), o resultado obtido por uma medida de A está relacionado às medidas de B e C, ou seja, se essas medidas são todas feitas em conjunto ou em ordem diferentes. O contexto em que se faz uma medida pode influenciar diretamente o resultado da mesma.

Os teoremas de Bell são muitas vezes vistos como provas da incompatibilidade dos resultados da mecânica quântica com a possibilidade da inclusão de variáveis escondidas. No entanto, o que eles provam é que, se uma teoria de variáveis escondidas existir, ela deve respeitar a contextualidade para todos os estados quânticos e a não-localidade para estados emaranhados. Dessa forma, como fica claro pela citação utilizada no início deste capítulo, para Bell a Teoria da Onda Piloto era o exemplo perfeito de uma teoria capaz de reproduzir os resultados já conhecidos da mecânica quântica sem violar os teoremas descritos acima. Tendo apresentado os principais problemas e paradoxos levantados pela Mecânica Quântica Ortodoxa, veremos a seguir como se deu o desenvolvimento da teoria de Broglie e Bohm.

A história da onda piloto começa com os trabalhos de Louis de Broglie no início da década de 1920 [32, 33, 34, 35, 36]. Durante esse período, de Broglie estudou pri-

meiramente o comportamento dual de raios X⁶, tratando os fótons como partículas de massa muito pequena mas diferente de zero, presumindo pela primeira vez que partículas massivas poderiam ter comportamento ondulatório. A partir dessa ideia, ele ficou convencido de que a radiação consistia tanto de partículas como de ondas. Depois desse primeiro passo, de Broglie estendeu suas ideias para o comportamento de elétrons, inspirado simultâneamente pela analogia mecânico-ótica e pela presença de números inteiros nas condições de quantização [37]. Os trabalhos publicados durante 1923 e 1924 culminaram em sua tese de doutorado, onde ele propôs uma nova forma de dinâmica para a matéria, abandonando a primeira lei de Newton e substituindo-a por uma combinação dos princípios de Maupertuis para a mecânica e o de Fermat para a ótica. Nessa dinâmica, toda partícula material teria sua velocidade determinada pelo gradiente da fase de uma onda que a acompanha. O objetivo deste trabalho era incluir na dinâmica geral dos corpos os fenômenos recém descobertos acerca dos átomos, em especial a quantização dos níveis atômicos e a natureza dual da radiação. Essa proposta foi capaz de descrever corretamente esses fenômenos e ainda prever o fenômeno da interferência e difração para elétrons, feito que lhe rendeu o prêmio Nobel de 1929. Em sua tese, bem como nos trabalhos que a sucederam, está claro que apesar de desenvolver um argumento claro e lógico em favor de um comportamento dual da matéria, o esquema apresentado ainda continha problemas fundamentais, um dos mais evidentes a falta de uma equação de onda geral que descrevesse todos os problemas abordados até ali. Além disso, embora se refira repetidamente à sua teoria como uma unificação dos princípios básicos da mecânica corpuscular e da ótica ondulatória, em nenhum momento ele se refere à uma onda material associada às partículas, descrevendo vagamente o que hoje chamamos de onda piloto de "onda de fase" ou de "fenômeno periódico". Em suas próprias palavras [36]:

I have deliberately left rather vague the definition of the phase wave, and of the periodic phenomenon of which it must in some sense be the translation, as well as that of the light quantum. The present theory should therefore be considered as one whose physical content is not entirely specified, rather than as a consistent and definitively constituted doctrine.⁷

Outro ponto a ser notado, é o da interferência e difração de elétrons. Apesar de ter sugerido em [33] que seria possível testar sua teoria com a difração de elétrons por um cristal, ele não forneceu demais explicações sobre o fenômeno em sua tese. Ainda assim,

⁶ O irmão de L. de Broglie, Maurice de Broglie, era um físico experimental que nessa época estudava exatamente este tema [2].

⁷ Eu deliberadamente deixei bastante vaga a definição da onda de fase e do fenômeno periódico do qual ela deve, em certo sentido, ser a tradução, assim como o do quanta de luz. A presente teoria deve, portanto, ser considerada como uma cujo conteúdo físico não é inteiramente especificado, ao invés de uma doutrina consistente e definitivamente constituída. (Tradução nossa.)

pouco tempo depois, os físicos americanos Davisson e Germer [38] confirmaram suas previsões. Os padrões de interferência obtidos no experimento da dupla fenda de Young para fótons também são outra questão em aberto nos trabalhos de de Broglie por não compreender a exata natureza da onda guia e sua relação com o campo eletromagnético. No entanto, em [39] é dada uma explicação baseada na interferência clássica de ondas em que ele trata a "onda de fases" como uma representação do campo eletromagnético, sendo esta uma guia dos fótons para as regiões onde a interferência é construtiva.

Em 1925, Einstein citou a tese de doutorado de de Broglie em seu segundo artigo sobre a teoria quântica de gases ideais [40], relacionando a "onda de matéria" com um dos termos nas flutuações associadas ao condensado de Bose-Einstein. Foi a partir deste trabalho que Schrödinger passou a conhecer as ideias de de Broglie e a partir delas passou a tentar construir uma equação de onda e, depois de algumas tentativas equivocadas, construiu o que ultimamente se tornou uma das mais importantes contribuições para a mecânica quântica [41]. No entanto, Schrödinger não aceitou a ideia de que as partículas materiais poderiam ser acompanhadas por uma onda e eliminou as trajetórias de sua teoria. Por sua vez, em 1927 de Broglie [42] aprofundou sua solução dupla baseada nos princípios de Fermat e Maupertuis utilizando a equação de onda de Schrödinger, escolhendo, no entanto, manter sua descrição baseada no espaço tridimensional. Neste trabalho, fica claro que a evolução da função de onda no espaço de configurações é considerada como uma representação abstrata da evolução de partículas e suas ondas associadas no espaço tridimensional. Apesar de sua descrição ser consistente e coerente para o caso de uma partícula, sua definição de partículas como singularidades de um "fenômeno ondulatório" no espaço tridimensional e suas respectivas equações ondulatórias teriam resultados incompatíveis com a função de onda descrita pela equação de Schrödinger, que evoluiria no espaço de configurações. Em [42], no entanto, é afirmado o contrário e se assume que a fase da função de onda está diretamente relacionada à solução das equações de onda acopladas desenvolvidas por de Broglie para três dimensões. Embora baseado em um equívoco, no mesmo artigo de Broglie afirma que os resultados de sua teoria são equivalentes à postular a existência conjunta de uma partícula material no espaço físico e de uma onda contínua evoluindo de acordo com a equação de Schrödinger (esses dois postulados formam as bases para a Teoria da Onda Piloto como a conhecemos hoje). Em sua apresentação alguns meses depois na conferência de Solvay, o físico francês escolhe focar seus argumentos nas aplicações de sua teoria evitando fazer menção à partículas como singularidades de ondas evoluindo no espaço 3D. Durante sua palestra fica claro [2] que ele não se sentia confortável em afirmar que a onda piloto poderia ser considerada mais do que uma representação matemática de um processo físico subjacente, chegando a se referir à Ψ como "fictícia". Como colocado por Bacciagaluppi e Valentini [2]:

Judging by de Broglie's comments about a physical representation requiring N waves in 3-space, and his characterisation of Ψ as a "fictitious" wave, it seems

clear that he still regarded his new dynamics as an effective, mathematical theory only $(...)^8$

Como podemos ver, apesar de ser mais conhecido pelo desenvolvimento da equação para o comprimento de onda de partículas materiais, Louis de Broglie foi muito além, desenvolvendo uma dinâmica capaz de descrever diversos fenômenos quânticos. No entanto, ao fim de 1927 ainda não havia uma explicação para o processo de medida na Teoria da Onda Piloto e diversas aplicações da mesma ainda precisavam ser esclarecidas. A questão do papel duplo da função de onda, como guia e representante de probabilidades, também permaneceria em aberto. Estas questões só vieram a ser discutidas novamente com o ressurgimento da Teoria da Onda Piloto 25 anos depois através dos trabalhos de David Bohm [8, 9, 43].

Nos anos que se seguiram à conferência de Solvay de Broglie gradualmente abandonou seus esforços em construir uma teoria quântica completa, desencorajado principalmente por não conseguir definir o caráter da função de onda e por não conseguir dar uma descrição satisfatória para os processos de medida. Ao mesmo tempo, a mecânica quântica baseada na àlgebra de matrizes de Heisenberg evitava completamente os dois problemas ao assumir a onda como artefato matemático e se utilizar do postulado a respeito do colapso da função de onda e do princípio da incerteza para definir o processo de medida como impossível de ser analisado. No entanto, quando Bohm abordou novamente a questão da onda piloto ele o fez baseando-se na ideia de que a função de onda é um "campo guia" [44] físico que evolui no espaço de configurações, e que as trajetórias das partículas existem sempre, inclusive durante a medida. Descreveremos agora os aspectos gerais da Teoria da Onda Piloto e como eles se aplicam aos paradoxos discutidos até aqui. No Capítulo 1 daremos um tratamento matemático completo e desenvolveremos aplicações aos fenômenos básicos da mecânica quântica.

Considerando o caso simples de uma Hamiltoniana não-relativística usual com um potencial arbitrário V para um sistema de N partículas sem spin guiada pór uma função de onda $\Psi = \Psi(q, t)$, onde $q = q(x_1..x_N, t)$ representa um ponto no espaço de configurações, podemos escrever a equação de Schrödinger como

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left[-\sum_{a=1}^{N}\nabla_{a}^{2} + V(q,t)\right]\Psi.$$
(4)

onde ∇_a^2 é o operador correspondente à partícula a. A corrente de probabilidade quântica

⁸ A julgar pelos comentários de de Broglie sobre uma representação física que exige N ondas no espaço tridimensional e sua caracterização de Ψ como uma onda "fictícia", parece claro que ele ainda considerava sua nova dinâmica como apenas uma teoria matemática efetiva (...) (Tradução nossa.)

relacionada à trajetória de cada partícula é definida por,

$$\vec{j}_a = \frac{\imath\hbar}{2m_a} \left[\Psi^* \nabla_a \Psi - \Psi \nabla_a \Psi^* \right]. \tag{5}$$

Já em 1924, com argumentos baseados na sua solução dupla, de Broglie propôs uma relação direta entre a trajetória das partículas e uma corrente padrão relacionada à sua onda piloto através da equação

$$\frac{d\vec{x}_a}{dt} = \frac{\vec{j}_a}{|\Psi|} = \frac{\hbar}{m_a} Im\left(\frac{\nabla_a \Psi}{\Psi}\right),\tag{6}$$

conhecida como a equação guia que, dada uma função de onda e uma posição iniciais, determina a posição da partícula para todo o tempo t.

Se expressarmos a função de onda na forma polar

$$\Psi = R\cos(S/\hbar) + i\sin(S/\hbar) = R\exp^{iS/\hbar},\tag{7}$$

onde R = R(q, t) é uma função de amplitude real e S = S(q, t) é uma função de fase real, podemos reescrever a equação guia

$$\vec{p}_a = m_a \frac{d\vec{x}_a}{dt} = \vec{\nabla}_a S. \tag{8}$$

Em todas as equações acima consideramos a função de onda já normalizada. Por outro lado, na forma apresentada por Bohm [8], se substituirmos a função de onda $\Psi = R \exp(iS/\hbar)$ na equação de Schrödinger (4), obtemos uma "versão quântica" da teoria de Hamilton-Jacobi clássica para um sistema de N partículas com momentos determinados pelas equações guia e sujeito à um potencial total dado por

$$V - \sum_{a=1}^{N} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\vec{\nabla}_a^2 R}{R}.$$
(9)

No caso em que o segundo termo do potencial tende a zero, o limite clássico é recuperado e assim a teoria não sofre do problema de divisão da física em dois "mundos". Esse termo pode ser chamado de potencial quântico. Outra consequência dessa analogia é o surgimento de uma equação de continuidade para R^2 , que nos permite interpretar essa quantidade como uma probabilidade. Assim, foi postulado que para um conjunto de sistemas de N partículas a densidade de probabilidade para que o sistema esteja em determinada configuração q no tempo t deve ser dada por $R^2(q, t)$, o que implica diretamente na regra de Born; $P = R^2 = |\Psi|^2$.

Esse ponto merece atenção, o papel da função de onda na Teoria da Onda Piloto é duplo: dinâmico e probabilístico. No entanto, diferente da versão ortodoxa, a probabilidade não está associada à uma indeterminação da natureza em si mas à uma impossibilidade na observação da dinâmica microscópica durante o processo de medida, quantificada pelo princípio da incerteza de Heisenberg. Bohm considerava a necessidade de postular a regra de Born um problema e tentou dar uma explicação estocástica para o surgimento dinâmico da igualdade entre o módulo quadrado da função de onda e a probabilidade [43, 45]. Mais recentemente, Antony Valentini forneceu uma outra derivação a partir da construção de uma estatística quântica baseada nessa teoria [46, 47], que descreveremos em detalhe ao longo desta tese. Para reproduzir os resultados da Mecânica Quântica Ortodoxa, no entanto, precisamos assumir que a regra de Born é válida.

Como já foi afirmado, os teoremas de Bell foram fortemente inspirados por essa teoria e demonstraram que ela é compatível com as exigências relacionadas aos fenômenos quânticos. A não-localidade da teoria fica evidente para funções de onda não fatorizáveis. Considerando o caso de duas partículas, por exemplo, a fase de uma onda representando estados emaranhados depende simultâneamente das coordenadas das duas partículas, o que significa que as equações guia (8) são acopladas e uma trajetória depende diretamente da outra. Como já afirmamos, a teoria é determinista, causal e explícitamente não-local.

Para deixar claro o caráter contextual da teoria, é interessante discutirmos como uma medida é descrita nesse contexto. Uma das diferenças fundamentais entre a Teoria da Onda Piloto e a Mecânica Quântica Ortodoxa é a possibilidade de uma descrição unificada do mundo, ou seja, não há divisão entre um nível clássico e um quântico. Os aparelhos de medida e os sistemas observados por estes devem obedecer às mesmas leis físicas: a equação de Schrödinger e a equação guia para posições ou configurações.

Consideremos então um sistema simples de uma partícula em um estado puro ψ_0 , com distribuição de possíveis posições iniciais dada por $|\psi_0|^2$ [48]. Assumimos que o aparelho de medida escolhido sirva para medir uma propriedade qualquer $A(\mathbf{x}, t)$ representada por um operador $\hat{A}(\mathbf{x}, t)$. Por sua vez, o aparelho de medida é representado por um pacote de onda $\phi_0(y)$ e a coordenada $y(t, y_0)$ representa a posição de um ponteiro que determina o resultado da medida. O sistema completo é descrito por uma Hamiltoniana de interação

$$\hat{H} = g\hat{A}\hat{p}_y,\tag{10}$$

onde g é uma constante de acoplamento e \hat{p}_y o momento associado a variável y. Como, inicialmente, $\psi(\mathbf{x})$ é independente de $\phi(y)$, a função de onda total pode ser escrita como

$$\Psi_0(\mathbf{x}, y) = \psi_0(\mathbf{x})\phi_0(y),\tag{11}$$

e a equação de Schrödinger é dada por

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, y, t)}{\partial t} = i\hbar \hat{A} \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, y, t)}{\partial y}.$$
(12)

A solução dessa equação depende das duas funções de onda e deixa explícito o caráter contextual da teoria como um todo. Para soluciona-la, reescrevemos a função de onda total como uma expansão em termos das autofunções do operador \hat{A} com autovalor a:

$$\Psi(\mathbf{x}, y, t) = \sum_{a} f_a(y, t) \psi_a(\mathbf{x}).$$
(13)

Substituindo essa forma na equação (12) e utilizando a ortonormalidade das autofunções ψ_a , obtemos

$$\frac{\partial f_a(y,t)}{\partial t} = -ga\frac{\partial f_a(y,t)}{\partial y}.$$
(14)

Assumimos que a interação entre o aparelho de medida e o sistema observado é do tipo impulsiva, sendo o período do impulso T. Além disso, expandindo a função de onda inicial em termos das autofunções do operador podemos definir $f_a(y,0) = c_a \phi_0(y)$ onde c_a são as constantes que determinam a probabilidade associada à cada autofunção $\psi_a(\mathbf{x})$. Dessa forma podemos obter $f_a(y,T) = c_a \phi_0(y - gaT)$ e a função de onda total ao final da interação é dada por

$$\Psi(\mathbf{x}, y, T) = \sum_{a} c_a \psi_a(\mathbf{x}) \phi_0(y - gaT).$$
(15)

Essa função de onda é claramente emaranhada e representa a correlação entre o autovalor a relativo ao observável \hat{A} e a posição y do ponteiro do aparelho de medida. Dessa forma, durante a interação, os pacotes de onda ϕ_0 se movem centrados em posições dadas por $y_a = gat$ e ao término da interação cada um dos pacotes estará separado por uma distância equivalente à diferença entre dois autovalores. Ao final de uma medida completa os pacotes estão separados por distâncias maiores do que suas larguras δy e a função de onda total é separada em um conjunto de funções que não se superpõem no espaço de configurações. O sistema observado é guiado por uma dessas funções fazendo com que o ponteiro vá para a posição y_a associada à mesma, ou seja,

$$\Psi \to c_a \psi_a(\mathbf{x}) \phi_0(y - gaT). \tag{16}$$

As coordenadas do sistema são guiadas por essa função que é separada das demais por regiões onde $\Psi = 0$, pois nessas regiões as trajetórias não são bem definidas (ver equação (6)), o que faz com que seja impossível para que o observável assuma outros valores. Ou

seja, ao observarmos a posição do ponteiro y = Y podemos inferir que o sistema observado está no estado dado pela função de onda "colapsada" descrita pela equação acima. Como os demais ramos da onda estão "vazios" e separados, uma medida subsequente revelaria novamente o mesmo valor, confirmando assim os resultados obtidos pela Mecânica Quântica Ortodoxa.

Toda a descrição feita até aqui é completamente causal e determinística, estando indeterminados apenas as posições iniciais $\mathbf{x}_0 \in y_0$. Durante a interação, a probabilidade de que o sistema esteja em determinada configuração ($\mathbf{x}(t), y(t)$ é conservada e quando os pacotes se separam a densidade de probabilidade no espaço de configurações é dada por,

$$|\Psi(\mathbf{x}, y, T)|^2 \approx \sum_a |c_a|^2 |\psi_a(\mathbf{x})|^2 |\phi_0(y - gaT)|^2,$$
(17)

sendo a aproximação devido à possibilidade pequena de que as caudas dos pacotes de onda possam apresentar pequena interferência, pois nessas regiões o valor de Ψ é aproximadamente 0. A probabilidade de que o sistema se encontre em uma determinada região d^3xdy onde o valor a é significativo é dada por,

$$P_a d^3 x dy = |c_a|^2 |\psi_a(\mathbf{x})|^2 |\phi_0(y - gaT)|^2 d^3 x dy.$$
(18)

A partir do raciocínio acima, fica claro que, em geral, as propriedades físicas de um determinado sistema sempre dependem do contexto em que estas são medidas. Isso decorre do fato natural de que, nesta teoria, o processo de medida é apenas um caso especial de uma interação e, como todas as outras interações, é incluído na descrição do problema analisado através da função de onda. Diferentes contextos implicam em diferentes funções de onda.

Existe, portanto, uma teoria quântica, causal e determinística, que está de acordo com as exigências derivadas dos teoremas de Bell e que está de acordo com as previsões estatísticas da Mecânica Quântica Ortodoxa. Além disso, a teoria evita alusões subjetivas à um observador e dá uma descrição detalhada de fenômenos físicos independente da realização de aparelhos de medida. Em outras palavras, a teoria oferece uma descrição objetiva e unívoca da realidade em todos os níveis com um limite clássico claro (quando o "potencial quântico" tende à zero).

Ainda assim, somente nos anos noventa a Teoria da Onda Piloto ganhou uma descrição completa e detalhada em livros-texto [44, 48] e mesmo hoje em dia ela é amplamente ignorada por uma parcela considerável de físicos e estudantes de física. Não nos deteremos na descrição detalhada da já citada ascensão da "hegemonia de Copenhagen" [2, 7], e tampouco descreveremos os diversos argumentos levantados contra a Teoria da Onda Piloto após a comprovação de sua aplicabilidade ao problema da medida e para sistemas de muitos corpos nos anos 50 [49]. Mas consideremos uma das principais objeções que pode ser feita à Teoria da Onda Piloto: se esta teoria produz os mesmos resultados que os obtidos através da utilização dos algoritmos da chamada Mecânica Quântica Ortodoxa porque estudá-la se esta última já está estabelecida e é de conhecimento comum de qualquer jovem físico com um curso completo de graduação? Abaixo detalhamos três possíveis respostas para essa pergunta que deixarão claras as motivações para esse e para outros trabalhos que continuam a surgir em torno desta teoria:

- Primeiramente, como já foi descrito acima, a teoria de de Broglie e Bohm fornece uma explicação completa de eventos individuais, além de possibilitar uma clara derivação para o limite clássico, o que elimina certos paradoxos, tornando possível a aplicação de seus conceitos para sistemas em que a teoria usual simplesmente não pode ser usada (por exemplo, mas não exclusivamente, sistemas cosmológicos [17]). Pensar sobre os sistemas quânticos nesse contexto facilita a possibilidade de estender conceitos que são limitados na visão usual a sistemas fechados e a compreender o papel da mecânica quântica na natureza como um todo.
- Em segundo lugar, uma das vantagens da Teoria da Onda Piloto sobre a Mecânica Quântica Ortodoxa está na sua capacidade de descrever consistentemente certos processos que na visão usual são descritos utilizando analogias incorretas. Por exemplo, é possível encontrar descrições da dinâmica de elétrons nos livros-texto que adotam a Interpretação de Copenhagen que incluem frases como "um elétron atravessa uma barreira de potencial e interage com outro elétron dentro do poço", mas essa afirmação não é estritamente verdadeira no contexto da visão ortodoxa dos processos quânticos. No entanto, essa mesma frase faz sentido no contexto da Teoria da Onda Piloto. Neste e em muitos outros casos, a existência de trajetórias e a descrição exata da dinâmica de elementos quânticos de sistemas pode ser muito útil para sua melhor compreensão [50].
- Além dos pontos mencionados acima, não é *inteiramente* verdadeiro afirmar que a Teoria da Onda Piloto produz os mesmos resultados que a Mecânica Quântica Ortodoxa em *todos* os cenários. Já nos artigos de 1952 de Bohm e em diversos trabalhos posteriores [44, 46, 47] a chamada regra de Born, a relação entre o módulo do quadrado da função de onda e a distribuição deprobabilidades para posições de partículas ($P(q,t) = |\Psi(q,t)|$, é tratada como um estado específico dos sistemas quânticos e não como um postulado *ad hoc*. Essa relação é válida para o "estado de equilíbrio" dos sistemas quânticos e apenas quando os sistemas estão neste estado os resultados usuais da mecânica quântica são encontrados. Sistemas fora do equilíbrio podem gerar resultados físicos bem diferentes dos esperados em vários cenários teóricos [51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59]. Apesar disso, ainda é um desafio encontrar sistemas que estejam fora do equilíbrio e há certa controvérsia sobre se esses sistemas existem hoje ou se existiram no passado, desafio que este e os trabalhos

citados acima pretendem abordar.

Este trabalho busca explorar a possibilidade descrita neste ultimo item e, portanto, dedicaremos alguns parágrafos aqui para discutir esta questão que será aprofundada nos capítulos 2 e 3.

Como fica explícito na descrição do processo de medida e já foi ressaltado anteriormente, a Teoria da Onda Piloto só reproduz os resultados experimentais observados nos fenômenos quânticos se, inicialmente, a distribuição de probabilidades no espaço de configurações para que o sistema esteja em determinado estado ou configuração seja igual ao módulo quadrado da função de onda. Esse fato não passou despercebido por de Broglie no início da década de 1920 nem tampouco deixou de ser abordado por Bohm quando seus artigos foram publicados em 1952 e em seus trabalhos subsequentes [43, 45, 44].

Mas foi apenas no início dos anos 90 que uma dedução matemática plausível e completa do processo de relaxamento ao equilíbrio quântico foi desenvolvida por Antony Valentini [46, 47]. Mais recentemente, diversas simulações computacionais foram realizadas no intuito de corroborar a ideia central em seus trabalhos [60, 61, 52, 62, 54].

Afim de explicar a relação entre um elemento dinâmico da teoria, a função de onda, e um elemento probabilístico, a distribuição de probabilidades, Valentini demonstrou que se um determinado sistema quântico está inicialmente fora do "equilíbrio quântico" (viola a regra de Born), a dinâmica inerente a este faz com que ele tenda ao equilíbrio após determinado tempo. A dedução realizada por Valentini se baseia em uma analogia simples com o teorema *H* clássico de Boltzman [63, 64]. Devido a proximidade entre o formalismo da Teoria da Onda Piloto e ao da mecânica clássica descrita pela teoria de Hamilton-Jacobi, é possível pensar na probabilidade quântica e na função de onda como dois fluidos, ambos obedecendo às mesmas equações de continuidade. Se os dois, inicialmente, estão em estados (ou configurações) diferentes a dinâmica das trajetórias faz com que eles se misturem de forma análoga à dois gases em estados termodinâmicos diversos. Conforme o sistema evolui, a densidade de probabilidades se modifica tendendo a igualar o valor do módulo quadrado da onda piloto.

Naturalmente, essa analogia com fluidos é apenas isso, uma analogia. Para Valentini, a principal motivação para buscar uma origem dinâmica para as probabilidades quânticas está na aparente "conspiração" da natureza, através da qual a não-localidade intrínseca à mecânica quântica não pode ser utilizada para a transmissão de sinais devido ao caráter estatístico da observação desses fenômenos. Dessa forma, é possível supor que a regra de Born não é fundamental, mas apenas caracteriza um estado de equilíbrio no qual a não-localidade está escondida por um ruído estatístico. Retornando à analogia, da mesma maneira em que para um gás em equilíbrio térmico é impossível converter calor em trabalho, para um universo que esteja em equilíbrio quântico não é possível utilizar a não-localidade para enviar sinais instântaneos.

Se considerarmos, por outro lado, sistemas quânticos emaranhados que estejam

em um estado de não equilíbrio - $P_0(x_A, x_B) \neq |\Psi_0(x_A, x_B)|^2$ - é possível obter sinais instântaneos no nível estatístico. Esse resultado é válido para qualquer teoria determinística de variáveis escondidas que reproduza os resultados usuais da mecânica quântica [65]. Não só a transmissão de sinais com velocidade maior do que a velocidade da luz é possível fora do equilíbrio mas também o princípio da incerteza pode ser violado nesses casos, fazendo com que o nível das "variáveis escondidas" deixe de ser inacessível.

No entanto, considerando os resultados experimentais relacionados à mecânica quântica é preciso questionar a existência de cenários em que esses efeitos possam ser observados. Se o equilíbrio quântico é uma característica da física no presente, é possível imaginar que inicialmente a função de onda total do universo não respeitasse a regra de Born e tenha evoluido para o estado atual devido à dinâmica dos diversos sistemas em interação. Também podemos considerar que, da mesma maneira que gases em equilíbrio térmico possam ter flutuações locais para fora dele, em determinadas regiões distantes seja possível encontrar sistemas para os quais $P \neq |\Psi|^2$. Nesse sentido é necessário determinar qual o processo que descreve a evolução de sistemas fora do equilíbrio quântico para atingir o mesmo.

Para isso foi construída uma análise estatística da evolução de ensembles de sistemas quânticos análoga ao teorema H clássico. No caso clássico, uma densidade de probabilidades P e o elemento de volume $d\Omega$ do espaço de configurações são preservados ao longo de trajetórias, o que faz com que a função $H(t) = \int d\Omega P \log P$ seja constante no tempo. Por outro lado, se considerarmos a densidade *coarse-grained* \bar{P} e assumirmos que $\bar{P}_0 = P_0$ inicialmente, obtemos o teorema H coarse-grained como desenvolvido por Paul e Tatyana Ehrenfest [66, 64, 67].

Considerando o caso quântico, podemos descrever um *ensemble* de sistemas de muitos corpos, cada um descrito pela função de onda Ψ e com configuração X, distribuídos de acordo com a densidade de probabilidade P. Ambas, $|\Psi|^2$ e P, obdecem às mesmas equações de continuidade assim como o elemento $|\Psi|^2 dX$. Dessa forma, se substituirmos $P \rightarrow P/|\Psi|^2$ e $d\Omega \rightarrow |\Psi|^2 dX$ na definição da função H clássica, obtemos a função H sub-quântica

$$H = \int dX P \log P / |\Psi|^2.$$
⁽¹⁹⁾

Assim como no caso clássico, essa quantidade é conservada no tempo. Procedendo ao processo de *coarse-graining*, dividimos o espaço de configuração em células e calculamos as médias $|\bar{\Psi}|^2$ e \bar{P} para definirmos uma função *H coarse-grained*. O trabalho de Valentini demonstrou que, ao assumirmos a condição análoga à condição clássica

$$\bar{P}_0 = P_0, |\bar{\Psi}_0|^2 = |\Psi_0|^2, \tag{20}$$

obtemos o teorema H sub-quântico:

$$\bar{H}(t) \le \bar{H}(0),\tag{21}$$

para todo t. A função só atinge seu valor mínimo, $\bar{H} = 0$, se e somente se $|\bar{\Psi}|^2 = \bar{P}$, ou seja, ela se aproxima desse valor conforme a distribuição tende ao valor do módulo quadrado da função de onda. Voltamos então à analogia com fluidos: o processo de decaimento ao equilíbrio quântico correponde à "mistura" de dois fluidos guiados pelo mesmo campo de velocidade \dot{X} . Temos então um mecanismo plausível através do qual é possível descrever como a evolução de uma densidade de probabilidades pode chegar ao valor determinado pela regra de Born. Além disso, diversas simulações em sistemas simples foram realizadas, confirmando uma tendência geral de aproximação ao equilíbrio [52, 54, 55, 56, 57].

Por outro lado, as previsões estatísticas da mecânica quântica e da teoria quântica de campos foram confirmadas inúmeras vezes. De que forma, então, poderíamos encontrar evidências experimentais que comprovem a existência de sistemas fora do equilíbrio hoje ou no passado? Primeiramente, é preciso ressaltar que todos os sistemas observados atualmente têm uma longa e violenta história astrofísica, durante à qual houve diversas interações complexas que poderiam ser responsáveis pelo processo de relaxamento quântico. Dado nosso conhecimento da história do Universo, é completamente esperado que a maioria dos sistemas físicos estudados hoje esteja em equilíbrio. De acordo com esse raciocínio, é natural buscar evidências de violações da regra de Born em cenários cosmológicos próximos ao período inflacionário.

Uma possibilidade estaria nas flutuações quânticas primordiais do inflaton que seriam responsáveis pelas inomogeneidades observadas na radiação cósmica de fundo (CMB) [68, 69]. Se o inflaton ou algum grau de liberdade do vácuo relacionado à outros campos estivesse fora do equilíbrio antes da inflação, ou ainda se fosse possível que efeitos gravitacionais na escala de Planck pudessem gerar desvios em relação ao equilíbrio durante o período inflacionário, é plausível que isto causasse efeitos observacionais no CMB [70, 71]. Recentemente simulações foram realizadas no intuito de fornecer uma janela experimental para testar esses efeitos [72]. Além disso, as partículas produzidas logo após o término da inflação também podem ser afetadas pelos desvios do equilíbrio. Se algumas delas alcançarem o tempo de desacoplamento antes de completarem o processo de relaxamento, é possível supor que existam (mesmo que em quantidade muito pequena) espécies produzidas nesse momento que apresentem comportamento diferente do previsto pela teoria quântica usual [73]. De fato, previsões específicas de quais seriam os resultados observados para o espectro desse tipo de partícula também já foram desenvolvidas [58, 59].

Por fim, pode-se supor também que efeitos gravitacionais possam gerar não-equilíbrio quântico, especificamente no caso de buracos negros [74]. A perda de informação que de-

corre da evaporação de buracos negros poderia ser evitada caso a radiação de Hawking consistisse de partículas fora do equilíbrio, considerando que o estado final poderia conter mais informação do que o estado quântico final convencional. De acordo com esse raciocínio, é natural supor também que se uma parte de um sistema emaranhado for absorvido por um buraco negro a outra evoluíria para longe do estado de equilíbrio. Isso poderia ocorrer nos discos de acreção através do decaimento atômico e poderia levar à efeitos observáveis [74].

Através dos desenvolvimentos que decorreram do teorema H sub-quântico estamos mais próximos de um teste experimental que diferencie os resultados da Teoria da Onda Piloto daqueles obtidos pela Mecânica Quântica Ortodoxa. Mas essas são apenas algumas das razões porque consideramos que essa teoria pode ser útil para o desenvolvimento futuro, não só da mecânica quântica mas da física como ciência em geral.

Este trabalho tem como objetivo final analisar um sistema constituído por dois osciladores harmônicos quânticos com um acoplamento dependente do tempo e sua evolução a partir de um estado fora do equilíbrio. A aplicação do teorema H quântico para este sistema tem duas motivações fundamentais: i) testar a hipótese do relaxamento para um sistema emaranhado com dependência explícita temporal e ii) observar os efeitos da variação da intensidade do acoplamento no decaimento. Os resultados obtidos para esse sistema podem ter consequências observacionais relevantes, especificamente na possibilidade de produção de partículas em estados que violem a regra de Born ao fim do período inflacionário mencionada acima (ver Seção 3.4).

Organizamos esta tese da seguinte forma: no Capítulo 1 descrevemos os postulados gerais da Teoria da Onda Piloto e as equações básicas utilizadas na mesma, posteriormente aplicando essa teoria à diversos problemas básicos como o oscilador harmônico, o experimento da dupla fenda e o efeito Aharonov-Bohm. Também discutimos com mais detalhe as questões relativas à contextualidade e localidade descritas acima.

Em seguida, no Capítulo 2 apresentamos uma descrição detalhada do desenvolvimento do teorema H clássico e, subsequentemente, apresentamos em detalhe a formulação matemática do teorema H subquântico. Apresentamos também as provas matemáticas com respeito a transmissão instântanea de sinais e a violação do princípio da incerteza de Heisenberg para sistemas fora do equilíbrio. Ainda no Capítulo 2 descrevemos com detalhe as primeira simulações computacionais realizadas nesse contexto, especificamente para o problema do poço de potencial em uma e duas dimensões e também para o oscilador harmônico bidimensional.

Por fim, no capítulo 3 apresentaremos a solução completa e exata da equação de Schrödinger para o caso de dois osciladores com um acoplamento dependente do tempo do tipo $k(t)x_1x_2$ e também uma descrição do código desenvolvido para calcular a evolução de um ensemble de trajetórias que nos permite calcular a evolução da função $\bar{H}(t)$ para esse problema específico. Demonstramos também os resultados obtidos através desse código para diversos parâmetros relacionados à distribuição e à função de onda, analisando em seguida quais as possíveis informações relevantes que podemos obter desse modelo. Ao final do capítulo, descrevemos brevemente cenários realistas de campos em um *background* em expansão que podem servir de exemplo para futuras aplicações dos resultados do nosso trabalho na busca de efeitos observacionais para comprovar a existência de sistemas fora do equilíbrio. Na Conclusão analisamos as possíveis correlações entre os resultados obtidos em nossas simulações e os cenários teóricos descritos ao fim do Capítulo 3, apresentando diversas perspectivas futuras para o nosso trabalho.

1 A TEORIA DA ONDA PILOTO

Neste capítulo apresentaremos os aspectos fundamentais da Teoria da Onda Piloto, criada a partir das ideias seminais de Louis de Broglie apresentadas na Conferência de Solvay de 1927 [2] e consolidada nos artigos de David Bohm de 1952 [8, 9]. Inicialmente discutiremos a motivação para continuar buscando uma teoria quântica alternativa em face das dificuldades não superadas pela chamada Interpretação de Copenhagen. Depois descreveremos os postulados e as equações dinâmicas que compõem a Teoria da Onda Piloto, discorrendo brevemente sobre como ela se propõe a analisar o processo de medida [48] e as principais propriedades do problema da não-localidade nesse contexto, além de demonstrar alguns exemplos básicos de problemas quânticos em termos de trajetórias que surgem das equações introduzidas por de Broglie.

1.1 A Teoria da Onda Piloto para uma Partícula Não Relativística

O experimento da dupla-fenda demonstra de forma clara o problema central em torno dos sistemas quânticos. Uma sequência de elétrons é emitida na direção de uma barreira com apenas duas pequenas aberturas, e um padrão de interferência é formado em um detector colocado a certa distância da barreira demonstrando o caráter dual do movimento do conjunto de elétrons que passa pelas aberturas. O padrão de interferência só é visível após um determinado número de elétrons atingir o detector, sendo a posição individual de cada elétron aparentemente aleatória. A função de onda determina corretamente a probabilidade para as possíveis posições finais dos elétrons. Assumindo o ponto de vista da Mecânica Quântica Ortodoxa, esta é a unica informação que a função de onda pode nos dar, não sendo possível dizer nada a respeito do movimento dos elétrons antes que estes alcancem o detector.

No entanto, não há nada que proíba que a função de onda desempenhe outro papel. O que determina o movimento das partículas para que elas formem esse padrão ondulatório? Se os elétrons possuem uma realidade individual, o que determina que eles sigam um determinado caminho e não outro? Na Teoria da Onda Piloto uma resposta para essas perguntas é oferecida através de um papel para a função de onda além do seu aspecto probabilístico. Desse ponto de vista, há uma conexão causal entre o movimento individual de cada elétron e a forma da função de onda relacionada.

Assumindo a existência desse agente causal **e** das partículas individualmente é possível construir um cenário coeso em que o movimento de cada elétron é descrito individualmente e no qual os resultados coletivos estatísticos podem ser descritos. O movimento de sistemas quânticos pode ser assim explicado de forma causal, completa e consistente
dando conta dos resultados experimentais. Para construir a teoria que descreve o problema da dinâmica de um corpo começamos a partir dos postulados básicos da Teoria da Onda Piloto [48]:

- Um sistema físico individual consiste de uma onda propagando no espaço-tempo e de uma partícula pontual que se move continuamente guiada pela onda;
- A onda é descrita por uma solução da equação de Schrodinger determinada pela Hamiltoniana do sistema;
- O movimento da partícula é determinado pela solução $\mathbf{x}(t)$ da equação de movimento

$$\dot{\mathbf{x}} = (1/m) \mathbf{Im} \left(\frac{\nabla \psi(\mathbf{x}, t)}{\psi(\mathbf{x}, t)} \right) |_{x=x(t)}.$$
(22)

Para resolver essa equação precisamos apenas da posição inicial $\mathbf{x}(0)$. Um conjunto de posições iniciais dá o conjunto de movimentos possíveis para a mesma função de onda.

Esses postulados constituem a base necessária para construir a Teoria da Onda Piloto para um corpo. Como veremos no capítulo seguinte, a regra de Born é consequência da dinâmica de sistemas em certo estado, o equilíbrio quântico [46, 47]. Para que os resultados dos experimentos usuais sejam reproduzidos é necessário considerar que eles sejam realizados em sistemas dentro do equilíbrio quântico, ou seja, sistemas em que a probabilidade de que uma partícula *esteja* entre $\mathbf{x} \in \mathbf{x} + d\mathbf{x}$ seja dada por

$$P = \left|\psi\left(\mathbf{x},t\right)^{2}\right| d^{3}\mathbf{x}.$$
(23)

Essa relação tem o efeito de escolher entre todos os possíveis movimentos relacionados à equação guia aqueles que sejam consistentes com uma distribuição inicial $|\psi(\mathbf{x}, 0)^2|$. Diferentemente da interpretação usual de probabilidades na mecânica quântica, na Teoria da Onda Piloto as probabilidades se relacionam a estados de existência objetiva da partícula e não de estados relacionados exclusivamente a um determinado processo de medida. O processo de medida pode ser descrito como um caso especial da teoria em que a interação com determinado instrumento de medida altera a função de onda e portanto as probabilidades relacionadas ao estado da partícula [8, 48].

Os postulados acima se referem a quaisquer sistemas físicos que possam ser considerados individualmente, não tendo quaisquer restrições de escala. Os aspectos ondulatórios, no entanto, são geralmente - mas não exclusivamente - observáveis apenas em sistemas microscópicos. Os casos de sistemas físicos individuais (um corpo apenas) podem ser considerados como específicos da teoria mais geral e só são apresentados inicialmente por motivos de simplicidade. O caso de muitos corpos será tratado mais a frente, especialmente quando discutirmos o problema da não-localidade.

1.2 Equações de Onda e de Partícula

A motivação para a equação guia da partícula pode ser derivada à partir de uma simples decomposição da função de onda em uma forma polar:

$$\psi(\mathbf{x},t) = R(\mathbf{x},t)\cos(S(\mathbf{x},t)/\hbar) + iR(\mathbf{x},t)\sin(S(\mathbf{x},t)/\hbar).$$
(24)

A função R(x,t) é uma função real (de amplitude) e a função S(x,t) determina a fase de ψ . A onda então é formada por um par de campos reais acoplados pela equação de onda:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi.$$
(25)

Inserindo a equação (3) na equação de Schrödinger acima e multiplicando por $e^{-iS/\hbar}$ obtemos

$$i\hbar \left[\frac{\partial R}{\partial t} + \left(\frac{iR}{\hbar}\right)\frac{\partial S}{\partial t}\right] = -\frac{\hbar^2}{2m} \{\nabla^2 R - \left(\frac{R}{\hbar^2}\right)(\nabla S)^2 + i\left[\left(\frac{2}{\hbar}\right)\nabla R \cdot \nabla S + \left(\frac{R}{\hbar}\right)\nabla^2 S\right]\} + VR. \quad (26)$$

Separando a equação (5) em suas partes imaginária e real obtemos um par de equações acopladas para $S \in R$, cujas soluções são equivalentes as da equação de Schrödinger, desde que sejam impostas condições equivalentes a ψ [48]. A parte real pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} + V = 0, \qquad (27)$$

enquanto a parte imaginária pode ser dada como

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{R^2 \nabla S}{m}\right) = 0. \tag{28}$$

Sob essas formas, a interpretação física da equação de Schrödinger como uma equação de onda se torna mais simples, especialmente se considerarmos a equação (6) em comparação com a equação clássica de Hamilton-Jacobi. Para uma Hamiltoniana usual, a equação de

Hamilton-Jacobi para a ação S é dada por:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V = 0.$$
⁽²⁹⁾

É possível, na teoria clássica, considerar S como um campo que causa o movimento de uma partícula cujas equações de movimento são obtidas a partir da equação acima (seção 2.7 da referência [48]). Assumindo o mesmo ponto de vista na teoria quântica do movimento, ao associarmos uma partícula de massa m e posição $\mathbf{x}(t)$ podemos ver a equação (6) como um tipo de equação de Hamilton-Jacobi com um termo extra, muitas vezes chamado de "potencial quântico"⁹. O paralelo com a teoria clássica pode nos levar a definir um campo vetorial $\mathbf{p} = \nabla S$ e assumir que \mathbf{p}/m define em cada ponto do espaço a cada momento a tangente a uma *possível* trajetória passando por aquele ponto. Para cada região do espaço em que $R \neq 0$ é possível definir uma trajetória a partir da função contínua S(x, t)que é solução da equação (6). As trajetórias são ortogonais as superfícies definidas por S = constante e podem ser obtidas integrando as equações

$$\dot{\mathbf{x}} = (1/m) \,\nabla S(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)} \tag{30}$$

associadas à cada condição inicial $\mathbf{x}(0)$. Continuando com a analogia clássica podemos definir então a energia total da partícula como

$$E(x,t) = -\frac{\partial S(\mathbf{x},t)}{\partial t}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)},\tag{31}$$

dividida em sua parte cinética;

$$\frac{(\nabla S)^2}{2m}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2\tag{32}$$

e sua parte potencial;

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R} + V\right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} = V(\mathbf{x},t) + Q(\mathbf{x},t)$$
(33)

onde $Q(\mathbf{x}, t)$ é o "potencial quântico".

A partir dessas equações é possível determinar completamente o estado da partícula dado uma função de onda inicial ψ_0 e uma posição inicial $\mathbf{x}(0)$. A função de onda inicial

⁹ A formulação sugerida por Bohm para a teoria de de Broglie dá enfase à este ponto, criando uma formulação de segunda ordem para a equação (1) que faz um paralelo com a 2^a Lei de Newton. Neste trabalho focaremos na formulação de primeira ordem, tendo em vista que as duas têm consequências diferentes para a discussão do equílibrio quântico dos próximos capítulos [75].

determina por sua vez as velocidades iniciais para cada posição, e estas só são definidas onde o campo $R(\mathbf{x}, 0) \neq 0$. Portanto, a onda ψ pode ser vista¹⁰ como composta de dois campos reais R e S acoplados que são agentes causais no movimento de uma partícula de massa m cuja trajetória é determinada pela equação (9). Diversas propriedades do movimento da partícula podem ser derivadas das funções acima e a interpretação destas ressalta tanto os resultados semelhantes como as conclusões discordantes da Interpretação de Copenhagen da mecânica quântica, deixando claro que a Teoria da Onda Piloto é uma teoria coerente (e não apenas uma interpretação alternativa).

1.2.1 Contextualidade, Continuidade e Probabilidade

A função de onda ψ depende de um conjunto de parâmetros associado às propriedades da partícula e ao ambiente em que a onda se desenvolve. No experimento da dupla-fenda, por exemplo, a largura das fendas e o espaçamento entre elas define a onda em todo o ambiente considerado. Além disso, a massa, carga, momento magnético e outras propriedades da partícula também podem alterar a solução da equação de Schrödinger. Diferente de outros campos, não há uma fonte para a onda, ela é definida em todo o espaço-tempo como uma componente do sistema. Parâmetros do ambiente influenciam então diversas possíveis trajetórias para a partícula, assim como propriedades variadas da partícula, podem mudar a forma da função de onda. Portanto, em cada ponto do espaço e do tempo a onda é definida de acordo com o contexto. Naturalmente, essa propriedade pode ser chamada de contextualidade.

Essa característica fundamental da teoria nos permite compreender melhor certos efeitos quânticos considerados misteriosos na visão ortodoxa. Uma partícula livre da ação de campos clássicos está sujeita à alterações nas condições de contorno - no contexto - que definem, por sua vez, seu movimento através da função de onda. Dessa forma, trajetórias são definidas pela "equação guia" que transfere informação do ambiente para o movimento da partícula mesmo que esta ultima não "interaja" clássicamente com, por exemplo, a fenda em uma barreira. Por outro lado, se existe um campo clássico atuando em determinado ambiente, por mais que sua ação clássica deva ser mediada por um potencial, seu efeito de modificar a forma da função de onda causa efeitos dinâmicos nas trajetórias das partículas mesmo em lugares onde o potencial é zero (como veremos mais a frente, isso fica explícito no efeito Aharonov-Bohm).

Se a função de onda é definida totalmente pela equação de Schrödinger, que possui

¹⁰ Não é o objetivo deste capítulo nem deste trabalho definir em detalhes o que \acute{e} , ontologicamente, a função de onda. No entanto, existem várias discussões a respeito deste assunto [76].

informações a respeito da partícula, dos campos que atuam sobre ela e do contexto onde esta se encontra, e as soluções dessa equação são contínuas no espaço e no tempo, como explicar os valores discretos relacionados aos auto-estados de operadores na Mecânica Quântica Ortodoxa? Primeiramente, como pode ser visto no caso do átomo de hidrogênio [48], o fato de que apenas determinados valores dos níveis de energia podem ser encontrados está relacionado à propriedades da estabilidade da matéria que não impedem que, ao serem excitados, elétrons em determinados níveis de energia passem continuamente para outros níveis. Ao alterar a função de onda do contexto onde determinado átomo está inserido, a dinâmica do sistema se altera e os elétrons podem se movimentar entre as camadas de acordo com as trajetórias permitidas pela onda do sistema como um todo, ou seja, não há o chamado "salto quântico". Em segundo lugar, os operadores utilizados na Mecânica Quântica Ortodoxa estão relacionados a processos de medida específicos. A transformação de uma função de onda que é uma superposição de auto-estados de um determinado operador em uma que representa apenas um desses estados não se dá de forma arbitrária ou simplesmente probabilística. A interação entre o aparelho de medida e o sistema medido determina os possíveis valores que certas propriedades do sistema podem assumir, e essa interação altera continuamente a trajetória das partículas para que essas interajam com o aparelho de medida, transferindo assim as informações que este fornece ao experimentador. Dessa maneira, o processo de medida é apenas um caso específico de uma interação, assim como é a interação entre o próton e o elétron em um átomo de hidrogênio estável, e essas interações determinam os valores discretos das propriedades físicas.

A teoria que emerge da função de onda e de uma única trajetória que esta guia é completamente determinista. No entanto, como equações diferenciais com derivadas temporais, tanto a equação de onda como a equação de movimento da partícula estão sujeitas a condições iniciais. Dadas a função de onda e a posição inicial, seus valores estão completamente determinados em tempos futuros. A função de onda inicial é escolhida livremente (contanto que respeite as condições do contexto e de continuidade), ou seja, um mesmo sistema pode ter um conjunto de funções que respeitem essas condições e a escolha de cada uma levará a trajetórias possíveis diferentes. Além disso, as possíveis posições iniciais também são "arbitrárias" (não podendo estar apenas onde R(x,0) = 0, ou seja, onde a função $\nabla S(x,0)$ não é definida). Ao fixar essas quantidades, temos uma descrição completa, em princípio, para qualquer problema físico encontrado. No entanto, nosso conhecimento a respeito das condições iniciais de um sistema é limitado, devido à questões práticas de observação como a precisão do aparelho de medida. A limitação do experimentador ou observador gera então um conjunto de possibilidades de escolha para esses valores iniciais. Nesse sentido, podemos conceber um conjunto de sistemas físicos indistingüíveis objetivamente por obedecerem a mesma equação de onda e a mesma equação de movimento. Podemos então assumir a existência de uma função de densidade que determine quantos sistemas com determinada função de onda inicial $\psi_i \ e$ cujas posições iniciais estejam dentro de um determinado volume d^3x em torno de um ponto **x**. Só existe de fato um sistema com um único ψ e uma única posição inicial, essa função de densidade oferece apenas uma avaliação numérica sobre as possibilidades relacionadas à limitação da experiência objetiva de observação das condições iniciais. Assim, podemos criar uma função $P_0(\mathbf{x}, i)$ normalizada que determine a probabilidade de que um sistema esteja em determinado estado i e que tenha posição inicial **x**. Ao exigir que essa função seja normalizada para todo t podemos afirmar que a expressão $P(\mathbf{x}, t, i)d^3x$ determina a probabilidade de um estado em qualquer tempo t. Essa função nos dá informação quantitativa sobre o que ocorre com determinado sistema individual ao fazermos vários experimentos com as mesmas condições objetivamente conhecidas inicialmente. O caráter estatístico se dá apenas em um conjunto de testes e aparece apenas quando reconhecemos a limitação da precisão da observação do sistema.

Assumindo que temos conhecimento máximo sobre as condições iniciais do sistema podemos afirmar que $P_0(x)$ determina a distribuição de possíveis posições iniciais, obedecendo a condição de que seja zero nas regiões em que $\nabla S(x, 0)$ não é definido (também conhecidas como regiões nodais [48]). Todas essas posições passam então a representar um *ensemble* de partículas fictícias determinadas pela mesma onda piloto para todo tempo, portanto, é natural assumir que $P(\mathbf{x}, t)$ obedeça uma equação de continuidade relacionada a esta onda;

$$\partial P/\partial t + \nabla \cdot (P\nabla S/m) = 0 \tag{34}$$

onde S é a fase da função de onda. Assim, dada a probabilidade P(x, 0) inicial, $P(\mathbf{x}, t)$ está determinada para todo t. Além disso, a condição de normalização também é conservada no tempo se for satisfeita em um determinado tempo t.

A função de probabilidade reflete apenas a ignorância do observador sobre o estado inicial do sistema, não tendo qualquer relação fundamental com a dinâmica dos sistemas individuais. Discutiremos nos capítulos seguintes as consequências de uma escolha arbitrária para a função $P(\mathbf{x}, 0)$ nos possíveis resultados experimentais para a Teoria da Onda Piloto. No entanto, para reproduzir os resultados da Mecânica Quântica Ortodoxa é preciso fazer uma escolha específica para a distribuição inicial do sistema. Assumindo que a onda piloto inicial é normalizável;

$$\int |\psi(\mathbf{x},0)^2| d^3x = 1,\tag{35}$$

postulamos que a probabilidade de encontrar uma partícula inicialmente em um volume d^3x em torno da posição ${\bf x}$ é dada por

$$P(\mathbf{x},0) = |\psi(\mathbf{x},0)^2|.$$
(36)

O módulo quadrado da função de onda obedece a equação (7) e, portanto, se a relação (15) é válida inicialmente ela se conserva para todo tempo t.

A escolha de uma determinada forma para a distribuição de probabilidade inicial não advém naturalmente da dinâmica da Teoria da Onda Piloto. A função $R^2(\mathbf{x}, 0)$ tem as mesmas propriedades gerais que são impostas a uma função de probabilidade arbitrária $P(\mathbf{x}, 0)$ (é normalizável, obedece a uma equação de conservação e é zero nas regiões nodais) mas não é a unica escolha possível. A principal razão para que ela seja escolhida aqui é a mesma que aquela que motiva a regra de Born na Mecânica Quântica Ortodoxa, sua concordância com os resultados experimentais. A função R tem papel duplo na teoria apresentada aqui; ao mesmo tempo nos dá informação sobre o estado real de um sistema individual e sobre nosso conhecimento a respeito das possibilidades desse sistema. Esse papel dual é consistente com a Teoria da Onda Piloto mas não deriva diretamente dela. No capítulo seguinte discutiremos como podemos descrever a origem dinâmica das probabilidades como consequência dessa teoria ao descrevermos o teorema H subquântico proposto por Valentini [46, 47].

1.3 A Teoria da Onda Piloto para Muitos Corpos

Um sistema de muitos corpos é definido na Teoria da Onda Piloto como aquele composto por *n* partículas guiadas por uma função de onda ψ ($\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n, t$). A definição de um sistema individual (tanto no caso de um corpo como no caso de muitos) passa por um processo de abstração das outras partes do Universo, imaginando que seja possível negligenciá-las ou tratá-las como potenciais externos ao sistema que estamos estudando. Como observamos no início da seção anterior, a Teoria da Onda Piloto deixa explícita a dependência do contexto através do papel ativo da função de onda. Sendo assim, estendê-la para um sistema de muitos corpos (e ultimamente para o Universo como um todo) é um processo natural. A simples substituição das variáveis fundamentais ($\mathbf{x} \to \mathbf{x}_i$ e $\psi(\mathbf{x}, t) \to \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n, t)$) nos dá a teoria para um sistema de muitos corpos. No entanto, é importante ressaltar algumas consequências conceituais dessa substituição.

Primeiramente, a função de onda de um sistema de muitos corpos é definida em um espaço de configurações com 3n dimensões. Isso significa que os sistemas físicos nessa teoria tem sua evolução descrita nesse espaço. Na Mecânica Quântica Ortodoxa um sistema composto é definido como um produto de espaços de Hilbert e a função de onda correspondente nos permite descrever as duas partes do sistema simultâneamente, é apenas no processo de medida e através do colapso postulado que encontramos a relação com o espaço tridimensional euclidiano. No caso da Teoria da Onda Piloto, o sistema composto é definido pela função de onda no espaço de configurações e pelas partículas que existem no espaço tridimensional em conjunto. O segundo ponto importante a notar é o carater altamente acoplado das trajetórias. Um conjunto de n partículas nas posições \mathbf{x}_i tem suas trajetórias definidas pelo conjunto de equações de movimento:

$$\dot{\mathbf{x}}_{i} = (1/m_{i}) \nabla_{i} S(\mathbf{x}_{1}, \mathbf{x}_{2}, ..., \mathbf{x}_{n}, t) |_{\mathbf{x}_{j} = \mathbf{x}_{j}(t)}, i, j = 1, 2..., n.$$
(37)

As equações só podem ser resolvidas conjuntamente, e uma escolha de posição inicial diferente para uma partícula \mathbf{x}_i muda efetivamente a trajetória da partícula \mathbf{x}_i . Esse fato (conjuntamente com a contextualidade característica da teoria) é responsável pelas correlações não locais entre as partículas. Modificações na trajetória de uma partícula implicam em condições iniciais diferentes para todo o sistema. Essas modificações, apesar de surgirem no espaço tridimensional em uma determinada região, tem seu efeito transmitido para o espaço de configurações como um todo. Não há relação à uma propriedade específica de uma partícula ou à distância entre partículas, portanto, não há limitação sobre as possíveis consequências de uma alteração em uma parte do sistema com relação à distância entre as partes deste. Como um sistema é definido não só pelas partículas no espaço euclidiano mas também por sua função de onda, é natural esperar que o efeito de uma perturbação ou alteração em uma parte do sistema modifique a forma de toda a função de onda instantaneamente. Discutiremos esse ponto em detalhe mais a frente, mas há na Teoria da Onda Piloto uma explicação muito clara para essa conexão não-local que advém do simples fatos de considerarmos a existência conjunta das partículas e da função de onda como entidades reais e inseparáveis.

A teoria de muitos corpos também não tem, fundamentalmente, nenhuma informação estatística. A introdução da probabilidade se dá da mesma maneira que no caso de um corpo. Postulando a relação entre o módulo quadrado da função de onda e a distribuição de probabilidade sobre as posições das partículas obtemos os resultados da Mecânica Quântica Ortodoxa.

Naturalmente, essas são apenas algumas das características gerais da Teoria da Onda Piloto. Assim como acontece quando se assume o ponto de vista da Interpretação de Copenhagen, cada característica específica deve ser analisada e interpretada de acordo com o contexto teórico escolhido. Assumir que sistemas são compostos por uma entidade dual (ou duas entidades intrínsecamente conectadas) é o ponto central da teoria aqui apresentada. A partir deste postulado e com a ajuda da equação de Schrödinger e da equação guia é possível descrever consistentemente todos os problemas da Mecânica Quântica Ortodoxa e ainda estender sua abrangência para sistemas em que esta última não se aplica, como o Universo. Na seção a seguir apresentamos alguns exemplos que reforçam esse argumento, demonstram explícitamente algumas das peculiaridades da teoria já mencionadas e salientam outros ainda não mencionados.

1.4 Aplicações da Teoria da Onda Piloto

Nesta seção apresentaremos algumas aplicações básicas da Teoria da Onda Piloto para sistemas quânticos conhecidos. É importante lembrar que as aplicações da teoria não se dão, necessariamente, em cenários em que uma medida ocorre. A teoria descreve sistemas interagentes, sendo o processo de medida um tipo de interação específica. A principal vantagem dessa teoria, como esperamos demonstrar, é que ela dá uma explicação completa e intuitiva de problemas que parecem "absurdos" ou "misteriosos" quando vistos do ponto de vista da Mecânica Quântica Ortodoxa.

1.4.1 Oscilador Harmônico Unidimensional

O oscilador harmônico unidimensional é descrito pela hamiltoniana

$$\hat{H} = -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$
(38)

As soluções para a equação de Schrödinger correspondente à essa hamiltoniana são os estados estacionários $u_n(x)e^{-iE_nt/\hbar}$, onde as funções $u_n(x)$ são proporcionais aos polinômios de Hermite [48]. A equação de movimento para as trajetórias correspondentes a esses estados tem solução trivial,

$$\nabla S(x,t) = 0. \tag{39}$$

Se fizermos uma superposição apropriada de estados estacionários podemos obter trajetórias não triviais. O movimento oscilatório usual pode ser obtido, no entanto, se formarmos um pacote gaussiano com a seguinte superposição [48]

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n u_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}.$$
(40)

Escolhendo a constante A_n apropriada para um pacote gaussiano centrado em torno de x = a no tempo t = 0,

$$A_n = (m\omega/\hbar)^{n/2} a^n (2n!)^{-1/2} e^{-m\omega a^2/4\hbar},$$
(41)

Figura 1 - Trajetórias para o oscilador harmônico unidimensional.



Fonte: HOLLAND, 1995, p. 167.

a função de onda (40) é equivalente à

$$\psi(x,t) = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4} \exp\{-(m\omega/2\hbar) (x - a\cos\omega t)^2 - \left(\frac{i}{2}\right) \left[\omega t + (m\omega/\hbar) \left(2xa\sin\omega t - \frac{1}{2}a^2\sin 2\omega t\right)\right]\}.$$
 (42)

Nesse caso, temos um pacote que oscila com amplitude *a*. A fase não é mais independente da posição e temos um equação para a trajetória dada por

$$m\dot{x} = -m\omega a \sin \omega t,\tag{43}$$

que tem a solução oscilatória

$$x(t) = x_0 + a(\cos\omega t - 1).$$
(44)

Toda trajetória é dependente da posição inicial x_0 e quaisquer duas trajetórias que comecem em pontos diferentes não se cruzam. Mostramos na Figura (1) três trajetórias para o caso simples $a = \omega = 1$.

Nesse caso, a energia total da partícula não é conservada (a não ser para o caso $x_0 = a$). De acordo com a equação (31) a energia total é dada por

$$E(x,t) = \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 + m\omega^2 (x_0 - a)\cos\omega t.$$
 (45)

Essa característica é derivada da parte "quântica" do potencial que atua sobre a partícula e que depende explícitamente do tempo [48].

1.4.1.1 Superposição Finita de Estados Estacionários

Alternativamente ao pacote gaussiano, podemos construir uma superposição finita de estados estacionários. Ao contrário do que ocorre para cada um dos estados individualmente, as trajetórias obtidas não são estáticas. A função de onda, neste caso, é dada por

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} e^{-i\hbar\omega(n+\frac{1}{2})t}.$$
(46)

Reescrevendo a função de onda como $\psi(x,t) = R(x,t)e^{iS(x,t)/\hbar}$, a equação de movimento vem dada por

$$\dot{x} = \frac{1}{m} \nabla S(x, t) = \Im \left(\frac{\nabla \psi(x, t)}{m \psi(x, t)} \right).$$
(47)

Resolvendo numéricamente essa equação para um conjunto de posições iniciais podemos observar na Figura (2) o caráter oscilatório das trajetórias que iniciam próximo a origem, no entanto, conforme nos afastamos da origem as trajetórias se tornam retilíneas. Isso decorre da influência conjunta dos potenciais quântico e clássico [48].

1.4.2 Experimento da Dupla Fenda

No experimento da dupla fenda um feixe de partículas é emitido na direção de uma tela com duas pequenas aberturas. A função de onda que descreve este feixe é então separada em duas e após atravessar a barreira o efeito de interferência se torna aparente ao observarmos o acúmulo de partículas em um detector localizado à uma distância finita das fendas. Uma característica importante, que só pode ser notada com a evolução das técnicas experimentais para comprovar a característica quântica dual do feixe de partículas, é a necessidade do acúmulo de partículas para que seja observado o padrão ondulatório de interferência no detector [77]. De fato, é possível detectar, por exemplo, elétrons individualmente e observar o padrão de interferência se estabelecer lentamente, comprovando que a manifestação empírica do comportamento ondulatório da matéria é, nesse caso, meramente estatística (Figura (3)). No entanto, a posição final dos elétrons - e das partículas em geral - não corresponde ao que se esperaria do movimento de uma partícula clássica. No caso em que a tela tenha apenas uma abertura, acontece um efeito de difração característico do movimento ondulatório demonstrado pelo padrão obtido após o acúmulo de partículas no detector. A questão é, então, não por onde passa a partícula no experimento da dupla fenda, mas qual novo agente é responsável pelas trajetórias

Figura 2 - Conjunto de trajetórias para a superposição finita de estados estacionários do oscilador unidimensional.



Fonte: O autor, 2019.

Figura 3 - Acúmulo de elétrons em uma tela no experimento da dupla fenda.



Fonte: TONOMURA, 1989, p. 118.

exóticas observadas.

Na Teoria da Onda Piloto se propõe que a função de onda não nos dá apenas informação sobre a estatística de um conjunto de experimentos, mas na verdade que cada partícula emitida é acompanhada por uma onda guia que passa pelas duas fendas e, após um conjunto de partículas ser emitido com posições iniciais minímamente diferentes, o padrão de interferência é observado pelo caráter estatístico da informação a respeito das posições iniciais. A interferência se dá, na verdade, entre as duas frentes de onda que são geradas pela função de onda. Como veremos, mesmo em apenas uma fenda há um efeito de difração da que só pode ser explicado (caso escolhamos preservar o conceito de uma partícula pontual) se considerarmos o sistema físico que atravessa a fenda como composto também por uma função de onda.

1.4.2.1 Trajetórias

Assumimos que exista uma fonte emitindo elétrons à uma distância d de um anteparo A com duas fendas com largura $2\sigma_0 \ll d$, e que está a uma distância $D \gg 2\sigma_0$ de um detector A'. Admitimos duas condições que não são estritamente necessárias mas simplificam a descrição matemática do problema: que as funções de onda de cada elétron emitido são idênticas e que as bordas das fendas são suaves, evitando as complexidades associadas à difração de Fresnel. Nesse caso, uma função de onda que atinge o anteparo A no tempo t = 0 é separada em duas frentes de onda com perfis gaussianos idênticos [48]. Posicionando as duas fendas ao longo do eixo y nas posições a e -a, consideramos ainda que o movimento na direção x não é afetado pelas fendas e que a onda incidente sobre as fendas é plana. Podemos descrever as duas ondas resultantes da passagem pelo anteparo pelas duas equações

$$\psi_{\pm a} = \alpha \left(2\pi\sigma_0^2\right)^{-1/4} \exp\left\{\frac{-(y\mp a)^2}{4\sigma_0^2} + i\left[\mathbf{k}_1 x \pm \mathbf{k}_2(y\mp a)\right]\right\},\tag{48}$$

onde $u_1 = \hbar k_1/m$ e $u_2 = \hbar k_2/m$ são as componentes $x \in y$ da velocidade (de grupo) das funções de onda (compostas por um pacote Gaussiano na direção y e uma onda plana na direção x). Os pacotes atravessam as fendas e se espalham até se recombinar, gerando o padrão de interferência. A evolução temporal então é dada pela soma de duas soluções da equação de Schrödinger para o pacote de onda livre multiplicadas por uma constante de normalização N:

$$\psi_{\pm a} = \alpha \left(2\pi s_t^2\right)^{-1/4} \exp\left\{-\frac{\left(y \mp a \mp u_2 t\right)^2}{4\sigma_0 s_t} + i \left[k_1 x \pm k_2 \left(y \mp a \mp \frac{1}{2} u_2 t\right) - \frac{m u_1^2 t}{2\hbar}\right]\right\},\tag{49}$$



Figura 4 - Trajetórias para o experimento da dupla fenda.

Fonte: PHILIPIDDIS; HILLEY, 1979, p. 15.

onde $s_t = \sigma_0 (1 + i\hbar t/2m\sigma_0^2)$. A função de onda é fatorizável, o que significa que os movimentos nas direções x e y são independentes. Isso implica que as equações guias são independentes, na direção x obtemos um movimento uniforme e retilíneo $x = u_1 t$ e na componente y temos a influência do potencial quântico que gera as trajetórias 'exóticas'. A Figura (5) mostra um conjunto de trajetórias com posições iniciais distribuídas uniformemente ao longo de cada uma das duas fendas [78]. Podemos ver que as trajetórias se afastam umas das outras e se concentram em algumas regiões, fazendo desvios quando encontram regiões nodais da função de onda. Cada uma dessas trajetórias se realiza individualmente e é o acúmulo delas que gera o padrão de interferência observado no detector. As regiões em que elas desviam correspondem a acelerações na direção y que coincidem com regiões onde estão os mínimos (ou poços) do potencial quântico como podemos ver na Figura (6). Os platôs do potencial coincidem com as regiões onde as trajetórias se concentram e que formam as franjas de interferência no detector.

Outra maneira de observar a formação do padrão de interferência é calcular a amplitude quadrada da função de onda total, dada por

$$R^{2}(y,t) = \alpha^{2} N^{2} (2\pi |s_{t}|^{2})^{-1/2} e^{-\left[y^{2} + (a+u_{2}t)^{2}\right]/2|s_{t}|^{2}} \times \left\{ e^{y(a+u_{2}t)/|s_{t}|^{2}} + e^{-y(a+u_{2}t)/|s_{t}|^{2}} + 2\cos\left[2k_{2}y - (a+u_{2}t)y\hbar t/2m\sigma_{0}^{2}|s_{t}|^{2}\right] \right\}.$$
(50)





Fonte: PHILIPIDDIS; HILLEY, 1979, p. 15.

Figura 6 - Distribuição de probabilidade para o experimento da dupla fenda a uma distância (a) x = 1.5cm das fendas (b) x = 35cm das fendas.



Fonte: HOLLAND, 1995, p. 179.

Os nodos aparecem nas regiões definidas pelas condições $t = -a/u_2$ e $y = (n + \frac{1}{2})\pi/k_2$. Usando essa função com valores utilizados em experimentos [77, 48] podemos observar o formato da amplitude próximo do anteparo (x = 1.5cm) e no detector (x = 35cm) na Figura (7) e ver que inicialmente os picos coincidem com a posição das fendas e posteriormente eles evoluem para o padrão de interferência esperado.

1.4.2.2 Partícula, Onda, Contextualidade

Uma das diferenças essenciais entre a Teoria da Onda Piloto e a interpretação ortodoxa da mecânica quântica é a admissão da existência da partícula, independente da realização de uma medida. O caráter "misterioso" do experimento da dupla-fenda só aparece se admitimos que não é possível saber se há uma partícula com uma trajetória definida realizando um movimento entre o emissor e o detector. No entanto, fica claro na observação dos experimentos mais recentes [77] que cada evento de medida do detector acontece individualmente e evidencia algo que só podia ser ignorado sem esse tipo de visualização: o padrão de interferência ocorre para um conjunto de eventos, demonstrando que o caráter estatistíco da função de onda só explica parte do problema referente a esse conjunto, mas não determina como cada um desses eventos ocorre. Ao considerarmos a função de onda como parte de um sistema composto também por uma partícula, podemos prever um conjunto de trajetórias possíveis, todas de acordo com uma equação determinística, cujo caráter estatístico está contido apenas na indeterminação associada às condições iniciais. No entanto, permanece a dúvida sobre qual trajetória de fato foi percorrida e se seria possível medi-la diretamente. Se o sistema que percorre a trajetória é composto simultaneamente pela partícula e pela onda guia, o sistema como um todo atravessa as duas fendas ao mesmo tempo. Porém, ao afirmarmos que a partícula percorre uma trajetória determinada afirmamos que cada partícula atravessa apenas uma das fendas. Então, de que forma poderíamos determinar qual fenda cada partícula que atinge o detector realmente atravessou?

Primeiramente, do caráter das trajetórias descritas acimas podemos inferir que todas as partículas que atingem a parte de cima do detector (y > 0) passaram pela fenda superior e vice-versa. Isso acontece devido a influência do potencial quântico que impede que as trajetórias cruzem o eixo de simetria x. O conjunto de eventos é uma função dos eventos individuais, portanto, podemos associar probabilidades condicionais a subconjuntos (como o subjconjunto de partículas que passou por uma ou outra fenda). Ainda assim, como é possível provar empíricamente mesmo essa predição?

A questão central é admitir que qualquer aparelho de medida introduzido no sistema transforma o sistema como um todo, mudando assim o formato da função de onda e o caráter das trajetórias individuais por consequência. Se modificamos o tamanho de uma das fendas, o padrão de interferência é modificado de acordo. Se, como sugerido por Einstein [14], as fendas estão em uma tela sobre um suporte móvel uma medida do momento da tela antes e depois da passagem das partículas poderia determinar qual caminho tomado pela partícula. Novamente, esse tipo de alteração implica em uma alteração fundamental da determinação da função de onda. Nesse caso, teríamos que incluir a tela como um segundo corpo com um conjunto de posições iniciais possíveis e que levaria a uma função de onda fundamentalmente diferente da estudada acima. Como demonstrado na seção anterior, em um sistema de muitos corpos as trajetórias de cada corpo são influenciadas por todo o conjunto do sistema.

No caso do experimento da dupla-fenda podemos ver como dois conceitos próximos podem ser interpretados de forma radicalmente diferente a respeito do que de fato é possível descobrir a partir dos fatos observados. O argumento de Bohr relativo à complementaridade se justifica porque cada tentativa de inserir algum método de medida no sistema leva a um problema novo, diferente fundamentalmente do anterior. Na interpretação de de Broglie e Bohm essa é a mesma razão pela qual a tentativa de medir as trajetórias é um problema complicado, cada inserção leva a um contexto diferente e a uma função de onda diferente. A diferença essencial está na conclusão: Bohr assumia então que a causa do efeito "exótico" de interferência é impossível de ser analisada, enquanto na Teoria da Onda Piloto assume-se que a causa está na definição do sistema físico que está sendo estudado, que consiste de uma partícula intrínsecamente ligada a uma função de onda que é determinada pelo contexto. Contextualidade e complementaridade são conceitos muito próximos, mas as presunções que advém dos postulados a respeito do que consiste o sistema físico mudam radicalmente as conclusões que podemos obter.

1.4.3 O Efeito Aharonov-Bohm

Vejamos mais um exemplo que apresenta uma descrição alternativa de um problema bem estudado do ponto de vista da Mecânica Quântica Ortodoxa. Um feixe de elétrons é separado em dois feixes parciais que, ao serem recombinados produzem o efeito de interferência descrito acima para o caso do experimento da dupla-fenda. Se, entre os dois feixes parciais, for introduzido um solenóide infinito pelo qual passa uma corrente elétrica contínua um campo magnético **B** é produzido dentro do solenóide, com fluxo dado por

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}.$$
(51)

C pode ser qualquer círculo contendo o solenóide e **A** é o potencial vetor, definido pelo rotacional do campo magnético. O campo magnético é nulo fora do solenóide mas o potencial vetor deve ter algum valor finito em algum ponto do círculo. No entanto, **A** respeita uma simetria de calíbre, ou seja, seu valor pode variar sem alterar o valor do fluxo. Dessa simetria deriva o suposto "mistério" em torno do efeito Aharonov-Bohm, pois com a introdução do solenóide entre os feixes parciais carregados o padrão de interferência obsevado quando os feixes se recombinam é deslocado por um fator δ proporcional ao fluxo do campo magnético dentro do solenóide. Isso indica algum tipo de interação entre os feixes e o campo magnético que não pode ser explicada pela descrição clássica do campo e do potencial vetor.

Na descrição quântica do problema, no entanto, fica claro que a introdução do potencial vetor na equação de Schrödinger levará a uma alteração da função de onda. Quando há uma corrente passando pelo solenóide a função de onda de cada feixe é alterada por uma fase proporcional ao fluxo do campo magnético [48]. Escolhendo o potencial vetor como $\mathbf{A} = (\Phi/2\pi r)\hat{\theta}$, a função de onda total quando os feixes se recombinam é

$$\psi = N \left[\psi_a + \psi_{-a} e^{\mathbf{i} e \Phi / c \hbar} \right] e^{\frac{\mathbf{i} e}{c \hbar} \int_a \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}},\tag{52}$$

que exibe o deslocamento das franjas de interferência pelo fator $\delta = e\Phi/c\hbar$. Se escolhermos uma fase fixa $\delta = -\pi/2$ para o caso das fendas gaussianas da seção anterior, obtemos o deslocamento observado na Figura (7) para o módulo quadrado da função de onda. Do ponto de vista da Teoria da Onda Piloto, a alteração na função de onda implica em uma alteração na equação guia para o movimento das partículas que compõem os feixes e explica de forma simples e completa o deslocamento do padrão de interferência. Na realidade, o efeito quântico de um potencial clássico é o mesmo que ocorre no experimento da dupla-fenda (onde o "potencial" clássico representa a presença das duas fendas): a alteração do contexto em que as partículas se movem altera a equação de Schrödinger e por consequência altera o movimento das partículas. No entanto, considerando que a força de Lorentz é zero sobre os feixes, que o potencial vetor depende do calibre e que a função de onda tem apenas caráter estatístico, o problema se torna mais um "mistério" introduzido pela Mecânica Quântica Ortodoxa. Não há uma maneira coesa de conectar os efeitos quânticos de potenciais clássicos se não há nenhum caráter dinâmico na função de onda.

A introdução da fase correspondente ao efeito do potencial vetor na função de onda leva a uma alteração no potencial quântico Q(x, t). Novamente utilizando o caso do experimento da dupla fenda descrito na ultima seção, a introdução do solenóide causa um deslocamento dos platôs e poços do potencial demonstrado na Figura (4), fazendo com que a franja central se desloque para um dos lados do eixo de simetria e, consequentemente, que mais partículas de uma fenda contribuam para a franja central. Nesse sentido, podemos explicar o efeito Aharonov-Bohm em termos do conceito de contextualidade como fizemos até agora com todos os problemas, sem necessidade de incluirmos nesse problema a ideia de não-localidade que normalmente é associada à ele [77]. Qualquer alteração clássica no contexto de um problema quântico pode alterar a função de onda, mas a mesma pode ser entendida como um agente local em todos os pontos do espaço-tempo em que ela está definida.

1.4.4 Oscilador Harmônico Bidimensional

Nos exemplos discutidos até agora as trajetórias não podem se cruzar, isso ocorre para todos os sistemas unidimensionais [44]. No entanto, em sistemas com duas ou mais dimensões o movimento se torna mais complexo e, para alguns deles, caminhos com diferentes condições iniciais mas a mesma função de onda podem se cruzar. Além disso, em sistemas desse tipo trajetórias que iniciam muito próximas podem se afastar grandes distâncias ou ficar confinadas em uma pequena região. Essas características das trajetórias podem servir para a compreensão do conceito de caos na mecânica quântica que não existe na Mecânica Quântica Ortodoxa [48].

Para analisar brevemente essas características utilizaremos o exemplo do oscilador





Fonte: HOLLAND, 1995, p. 191.

Figura 8 - Duas trajetórias para o oscilador harmônico bidimensional com posições iniciais diferentes. azul = [x(0) = 1.0, y(0) = 1.0] e vermelho = [x(0) = 1.1, y(0) = 1.0].



Fonte: O autor, 2019.

harmônico em duas dimensões. É um estado particular do sistema

$$\psi(x,y,t) = \sum_{i=0}^{M} \sum_{j=0}^{M} e^{\theta_{i,j}} \frac{1}{2^{j} j!} \frac{1}{2^{i} i!} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} H_i(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x) H_j(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}y) e^{-\frac{m\omega(x^2+y^2)}{2\hbar}} e^{-i\hbar\omega(i+j+1)t},$$
(53)

onde as fases $\theta_{i,j}$ são escolhidas aleatóriamente¹¹ e definimos M = 4 para os cálculos nessa seção. Para encontrar as trajetórias precisamos resolver um sistema de equações guia para $\dot{x}(t) \in \dot{y}(t)$, definidas pela equação (26). Resolvemos esse conjunto de equações para duas trajetórias utilizando o método numérico Runge-Kutta 45 com o Maple, usando unidades $m = \hbar = \omega = 1$ entre os tempos t = 0 e $t = 8\pi$. As trajetórias são geralmente irregulares e possuem muitos regiões em que elas mudam de direção bruscamente (Figura (8)).

O movimento é extremamente rápido em regiões onde o módulo quadrado da função de onda é próximo de zero, essas regiões são chamadas de 'quasi-nodais' por indicarem uma proximidade com nodos (onde a velocidade não é definida pois $|\psi(x, y, t)|^2 = 0$). As trajetórias mostradas na Figura 8 têm posições iniciais com distância de 0.1 e em $t = 8\pi$ a distância vetorial entre os pontos chega à 3.779822467, mostrando a divergência de partículas inicialmente próximas. Essa divergência nas trajetórias na Teoria da Onda Piloto já foi estudada e trajetórias caóticas foram encontradas para uma variedade de sistemas [52].

1.5 Não-Localidade

A formulação ortodoxa da mecânica quântica trata principalmente de experimentos e resultados experimentais. É só através de uma medida que os elementos microscópicos do "mundo quântico" se relacionam com a realidade espaço-temporal macroscópica do "mundo clássico". Dessa forma, a relação desses elementos microscópicos com os conceitos de causalidade e localidade pode se tornar paradoxal em determinadas montagens experimentais que explicitam as correlações entre medidas em diferentes regiões do espaçotempo. Essa questão foi demonstrada por John S. Bell [1] na construção do teorema que leva seu nome, baseado na análise de uma montagem experimental específica. Assumimos

¹¹ Os valores escolhidos para as fases nos gráficos a seguir foram $\theta_{0,0} = 1.581869302, \theta_{0,1} = 5.161255391, \theta_{0,2} = 6.244301281, \theta_{0,3} = 1.809094426, \theta_{0,4} = 9.451185402, \theta_{1,0} = 8.412421905, \theta_{1,1} = 4.427838553, \theta_{1,2} = 2.275731771, \theta_{1,3} = 1.020544909, \theta_{1,4} = 5.777998714, \theta_{2,0} = 9.067798189, \theta_{2,1} = 4.427077306, \theta_{2,2} = 6.205175372, \theta_{2,3} = 8.221384230, \theta_{2,4} = 3.039073006, \theta_{3,0} = 1.746745227, \theta_{3,1} = 4.747053250, \theta_{3,2} = 1.640439652, \theta_{3,3} = 9.564458969, \theta_{3,4} = 8.825014938, \theta_{4,0} = 5.832623175, \theta_{4,1} = 7.402031176, \theta_{4,2} = 3.850164008, \theta_{4,3} = 9.809907465, \theta_{4,4} = 9.746448575.$

que um par de partículas de spin 1/2 sejam produzidas em uma região do espaço-tempo e sejam enviadas em direções opostas para dois detectores Stern-Gerlach localizados em regiões separadas. Em ambos os sistemas existem contadores que registram ± 1 para detecções de spin pra cima ou pra baixo, respectivamente. De acordo com a formulação ortodoxa, há uma correlação entre os resultados dos dois contadores que é independente da distância entre as regiões. É essa propriedade explícitamente não-local da mecânica quântica que gerou as maiores críticas de Einstein [4] e o levaram à conclusão de que essa teoria é essencialmente incompleta. No famoso artigo EPR os autores sugerem que para tornar a formulação completa variáveis adicionais deveriam ser introduzidas para restaurar a causalidade e a localidade. Nesse sentido, a contribuição de Bell é fundamental por dois motivos: primeiro, ele conseguiu demonstrar que para concordar com as previsões experimentais, a introdução de variáveis adicionais não modifica o problema da localidade, isto é, uma medida realizada em uma região influencia a outra medida de forma independente da distância; segundo, ele demonstrou que se existir uma teoria quântica com variáveis adicionais estas necessariamente seriam não-locais e a teoria não poderia respeitar a invariância de Lorentz.

Historicamente, o teorema de Bell tem sido usado para afirmar a vitória da Interpretação de Copenhagen sobre as objeções de Einstein e outros. Na realidade, ao se interessar pelo problema de variáveis adicionais e localidade na mecânica quântica, o físico irlandes queria provar a possibilidade de uma versão completa da mecânica quântica que concordasse com as previsões experimentais e evitasse as menções vagas à "experimentador" e "aparato experimental". É nesse espírito que os trabalhos reunidos em [1] demonstram suas tentativas nessa direção e sua apreciação pelos sucessos alcançados pela teoria desenvolvida por de Broglie e Bohm. A conclusão de Bell a partir de seu teorema não foi a de que teorias com variáveis adicionais seriam impossíveis, mas que estas só seriam possíveis caso fossem explícitamente não-locais.

Analisando o problema das duas partículas de spin 1/2 do ponto de vista da teoria de de Broglie-Bohm a não-localidade fica explícita. O estado quântico das duas partículas é representado por uma função de onda $\psi_{ij}(r_1, r_2)$, onde *i* e *j* são índices de spin e r_1 e r_2 as posições das partículas. Essa função obedece uma equação de Schrödinger que pode ser escrita como

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i \left\{ -\frac{\partial^2}{\partial r_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial r_2^2} + V(r_1 - r_2) + a\sigma_1 \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r_1}) + b\sigma_2 \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r_2}) \right\} \psi.$$
(54)

O campos magnéticos dos dois contadores são representados por **H**, V é o potencial entre as duas partículas e as variáveis escondidas são dois vetores de posição das mesmas que representam os resultados das medidas de spin (cada medida é feita pela deflexão para cima ou para baixo da partícula ao passar pelo detector Stern-Gerlach). As variáveis são chamadas "escondidas" pois não podem ser observadas evoluindo durante o experimento, mesmo tendo a evolução temporal determinada completamente pelas equações guia:

$$d\mathbf{X}_1/dt = \rho(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{Im} \sum_{ij} \psi_{ij}^*(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) (\partial/\partial \mathbf{X}_1) \psi_{ij}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2),$$
(55)

$$d\mathbf{X}_2/dt = \rho(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{Im} \sum_{ij} \psi_{ij}^*(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) (\partial/\partial \mathbf{X}_2) \psi_{ij}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2),$$
(56)

onde $\rho(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) = \sum_{ij} |\psi_{ij}(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2})|^2$ é a densidade de probabilidade no espaço de configuração das variáveis $\mathbf{X_1} \in \mathbf{X_2}$. Em geral, a função de onda é não separável e as equações (34) e (35) são explícitamente não-locais, ou seja, o valor da variável $\mathbf{X_1}$ depende do valor de $\mathbf{X_2}$ em todo t. Assim, existe um mecanismo dentro da teoria que explica através das chamadas "variáveis escondidas" a conexão não-local entre os resultados das duas medidas, "resolvendo" o paradoxo EPR ao excluir a necessidade de localidade.

Nos termos do teorema de Bell, a teoria de Broglie-Bohm é uma teoria de variáveis "ocultas" explícitamente não-local que reproduz os resultados experimentais da mecânica quântica, demonstrando que é de fato possível ter uma teoria de variáveis escondidas, contanto que ela seja não-local.

Tendo apresentado a forma geral da Teoria de de Broglie-Bohm, no próximo capítulo introduziremos um mecanismo que descreva a emergência da regra de Born. Já observamos que nesse contexto, a igualdade entre a distribuição de partículas e o módulo quadrado da função de onda não emerge naturalmente. Como demonstrado por Bohm [43], a dinâmica das trajetórias pode fazer com que uma distribuição se aproxime de $|\psi|^2$. Em 1990 Antony Valentini formalizou essa ideia [46, 47] utilizando uma analogia com o teorema H clássico [64]. A seguir, descreveremos em detalhe o desenvolvimento dessas questões, demonstrando a validade teórica dessa tese com simulações numéricas para sistemas simplificados.

2 EMERGÊNCIA DINÂMICA DA REGRA DE BORN

No capítulo anterior ressaltamos a capacidade preditiva e a descrição determinística da abordagem da Teoria da Onda Piloto. Ainda assim, observamos várias vezes que há também um caráter probabilístico em todos os problemas abordados pela quântica, relacionado a "liberdade" na escolha de condições iniciais. Esse aspecto estatístico é fundamental nas teorias quânticas, mas para que ele seja introduzido de maneira coerente com a interpretação de de Broglie e Bohm não é possível aceitá-lo como uma lei numérica que prediz resultados de experimentos. Neste capítulo, discutiremos como é possível desenvolver uma mecânica estatística da onda piloto. A partir dos trabalhos seminais de Antony Valentini [46, 47], demonstraremos como é possível traçar uma analogia entre conceitos da teoria estatística clássica e a teoria de de Broglie-Bohm, desenvolvendo assim um teorema H sub-quântico, baseado na ideia de que a lei de probabilidades da mecânica quântica a regra de Born - caracteriza um estado de equilíbrio quântico. Nesse sentido, é possível inferir que existam (ou tenham existido) sistemas físicos que estejam fora do equilíbrio quântico e violem a igualdade entre distribuição de probabilidades e o módulo quadrado da função de onda. O teorema H nesse contexto é a ideia que motiva a investigação central desse trabalho, pois a existência de sistemas fora do equilíbrio seria um aspecto evidentemente contraditório à versão ortodoxa da mecânica quântica, a Interpretação de Copenhagen.

2.1 O Teorema H Clássico

Após o "descobrimento" do que hoje é conhecido como a Segunda Lei da Termodinâmica diversas tentativas foram feitas na direção de entender e definir o conceito de entropia e porque é possível haver na natureza uma quantidade que tenha uma direção única de crescimento. O primeiro grande sucesso nessa direção foi feito por Ludwig Boltzmann [63] em 1877.

Na tentativa de entender o comportamento dos gases, Boltzmann desenvolveu uma teoria estatística para a mecânica microscópica dos gases. A derivação do teorema H de Boltzmann, que por muitos é vista mesmo hoje como a prova da Segunda Lei da Termodinâmica, parte da ideia inicial de que analisando a distribuição de posição e momento das partículas de um gás podemos descobrir como a energia térmica do gás evolui. No entanto, é impossível especificar através de qualquer experimento propriedades individuais de todas as partículas de um determinado gás simultaneamente. Para ultrapassar este obstáculo, Boltzmann fez uso do seguinte modelo; considerando um conjunto isolado de N partículas distribuídas uniformemente em um volume V, a configuração miscroscópica do sistema é dada pelo conjunto de coordenadas de posição q_i e de momento p_i para cada uma das partículas. Podemos então associar à cada partícula um ponto num espaço μ com dimensão 6. A evolução exata desses pontos não pode ser conhecida já que, mesmo considerando um gás diluído, o número N é extremamente grande (10^{23}) partículas por grama em um mol). Assim sendo, Boltzmann dividiu esse espaço μ em células, grandes o suficiente para serem observadas por algum tipo de experimento mas ainda pequenas o suficiente para serem consideradas infinitesimais no contexto macroscópico. Nesse contexto, a quantidade relevante se torna o número de partículas em cada célula, que pode ser estudado através da evolução da densidade de pontos no espaço μ , descrita pela função de distribuição $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)d^3pd^3q$. Integrando f sobre todo o espaço obtemos o número macroscópico N.

A evolução da função $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ é então o foco no tratamento de Boltzmann da estatística dos gases, e ela motiva o desenvolvimento da famosa equação de Boltzmann [64]. Definindo a função S(f) como o conjunto de pontos no espaço μ onde $f \neq 0$, podemos vizualizar essa função como um fluido no evoluindo μ e usando algumas presunções a respeito do comportamento geral dos gases (especificamente: (i) a ausência de microestrutura no estado inicial e (ii) o caos molecular ¹²), foi possível desenvolver a equação que dá a forma de f,

$$\ln f = -\beta (\mathbf{v} - \mathbf{v_0})^2 + \ln C, \tag{57}$$

onde as constantes podem ser consideradas arbitrárias e \mathbf{v} é o valor médio das velocidades de todas as partículas [64]. Como as presunções utilizadas por Boltzmann podem ser consideradas gerais, as distribuições que as respeitam seriam as mais prováveis e, portanto, todos os gases tenderíam ao equilíbrio como resultado das colisões. Nesse ponto, Boltzmann introduz sua função H como

$$H(t) = \int f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \ln f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) d^3q d^3p,$$
(58)

onde a integral é tomada sobre todo o espaço μ . A partir da derivação da equação (58), Boltzmann foi capaz de demonstrar que a quantidade H(t) sempre decresce para um gás que respeite a condição de caos molecular, e que quando este gás atinge o equilíbrio H(t)terá o seu valor mínimo. A semelhança entre as propriedades matemáticas de H e da entropia, levou à dedução de que as duas podem ser de alguma forma equivalentes. No

¹² (i) Essa ausência implica que, inicialmente, a distribuição de partículas em uma célula suficientemente pequena seja uniforme. (ii) O caos, nesse caso, advém da presunção de que as velocidades das partículas do gás não são correlacionadas.

entanto, essa equivalência (e todo o desenvolvimento do teorema H) é discutida até hoje [67]. Diversos argumentos surgiram ao longo dos anos contestando a validade da dedução de Boltzmann e foi demonstrado que a função H não é necessariamente decrescente [64, 79].

Apesar das diversas contestações, a ideia geral de Boltzmann indicou o caminho para estudar o comportamento estatístico dos gases e como poderíamos ganhar *insights* nas questões relacionadas à entropia e à transição para o equilíbrio de certos sistemas. A partir do ponto de vista da mecânica estatística, Gibbs criou um outro modo de analisarmos o teorema H.

Ao invés de trabalharmos no espaço μ , um novo espaço deve ser considerado consistindo de todas as 3N coordenadas e 3N momentos das N partículas na caixa. Esse espaço com 6N dimensões do sistema será chamado de Γ . A configuração completa do sistema em determinado tempo é representada por um ponto nesse espaço e, conforme o sistema evolui, esse ponto se movimenta no espaço. A distribuição a ser considerada nesse caso não será a das partículas na caixa, mas a de um *ensemble* de sistemas no espaço Γ que fornecem os mesmo valores de valores médios das magnitudes físicas consideradas. Esse conjunto de sistemas é representado por um conjunto de pontos que se movem independentemente no espaço Γ , pois cada ponto representa uma "cópia mental" do sistema. O estudo estatístico nesse caso, se concentra na evolução temporal da distribuição $\rho(q_1, ...q_{3N}; p_1, ...p_{3N}, t)$.

O estudo da evolução temporal da função ρ se assemelha muito ao da função f da derivação de Boltzmann. Considerando a movimentação do conjunto de pontos no espaço Γ , Gibbs demonstra que estes podem ser descritos como um fluido incompressível que obedece a equação de Liouville, a partir da qual ele pode definir a condição de conservação de probabilidade como [64]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{59}$$

Aqui não entramos, novamente, nos detalhes matemáticos das derivações de Gibbs. O fato que nos interessa é saber se há, nesta versão da mecânica estatística, uma versão do teorema H que nos leve a um entendimento sobre como um sistema se aproxima do equilíbrio. Além disso, vale ressaltar, que a derivação das propriedades da distribuição ρ não recorre às presunções sobre a física dos gases ou das moléculas, apenas a presunções mais genéricas estatísticas que podem ser aplicadas a todos os sistemas. Ainda assim, na tentativa de recriar o teorema H um obstáculo claro se impõe no contexto da mecânica estatística: se definirmos uma quantidade σ como

$$\sigma(t) = \int \rho \ln \rho dq_1 \dots dp_{3N},\tag{60}$$

que é minimizada quando ρ obedece a condição de equilíbrio, ao ser derivada, esta, não apresenta o mesmo comportamento que a função H de Boltzmann, e nesse caso não há qualquer tendência evidente de progresso para o equilíbrio [64].

Neste ponto, a contribuição de Ludwig Boltzmann se mostra importante. Paul e Tatiana Ehrenfest introduziram uma quantidade que representa a evolução para o equilíbrio ao definir o conceito de *coarse-graining* [66], que se aproxima muito do conceito de células ao qual aludimos anteriormente. A posição exata de um ponto no espaço Γ representa a configuração microscópica exata de todo um sistema, nosso conhecimento macroscópico do sistema está contido na função definida por Boltzmann, $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, no espaço μ . A função f especifica o número n_i de pontos em cada célula do espaço μ , e cada conjunto de números $\{n_i\}$ que descrevem o sistema corresponde a uma região no espaço Γ , que chamaremos de *estrela*. A região representa as diferentes permutações dentro de cada estrela no espaço μ que podem ser feitas sem alterar o estado macroscópico do sistema e conforme este evolui, o ponto que representa esse estado se move no espaço Γ de uma estrela pra outra.

A partir dessa divisão do espaço em estrelas iguais de volume Λ , podemos definir uma distribuição P coarse-grained como

$$P = \Lambda^{-1} \int_{\Lambda} \rho dq_1 \dots dp_{3N},\tag{61}$$

onde a integral é tomada sobre o volume da estrela. A função H coarse grained será dada por

$$\overline{H}(t) = \int P \ln P dq_1 \dots dp_{3N},\tag{62}$$

e também é minimizada pela condição de equilíbrio estatístico. Para analisar a evolução temporal da função acima, assumimos que uma observação macroscópica sobre determinado sistema é feita num tempo t_1 cuja distribuição fine-grained p é escolhida como sendo constante nas regiões de Γ consistentes com a observação e zero em todo resto, fazendo com que $\overline{P} = P$. Nesse caso, a função H coarse-grained é

$$\overline{H}(t_1) = \int \rho_1 \ln \rho_1 dq_1 \dots dp_{3N} \tag{63}$$

em $t = t_1$. Se ρ_1 for uma distribuição de equilíbrio, ela se manterá assim indefinidamente. No caso contrário, ρ evoluirá para uma distribuição mais uniforme do que a inicial, levando a um valor diferente para $\overline{H}(t)$. A função ln P é constante dentro das estrelas individuais, assim podemos escrever a função coarse-grained H em um tempo t_2 como

$$\overline{H}(t_2) = \int \int \rho_2 \ln P_2 dq_1 \dots dp_{3N}.$$
(64)

A mudança entre os tempos t_1 e t_2 nas funções acima pode ser obtida pela subtração de uma pela outra. Além disso, como as distribuições *fine-grained* não mudam ao longo do tempo, temos que $\rho_1 \ln \rho_1 = \rho_2 \ln \rho_2$ e a diferença $P_2 - \rho_2$ quando colocada na integral sobre todo o espaço Γ é zero. Reunindo esses fatores podemos escrever

$$\overline{H}(t_1) - \overline{H}(t_2) = \int \left\{ \rho_2 \ln(\frac{\rho_2}{P_2}) + P_2 - \rho_2 \right\} dq_1 \dots dp_{3N}.$$
(65)

Como $x \ln(\frac{x}{y}) + y - x \ge 0$, a diferença entre H_1 e H_2 é sempre positiva, exceto quando $P_2 = \rho_2$.

Assim, demonstramos (de forma esquemática) como o teorema H coarse grained foi desenvolvido. Os pontos fundamentais que devem ser ressaltados aqui são: i) a mudança de um conjunto de pontos que representam cada uma das partículas no espaço μ para um conjunto de pontos que representam um *ensemble* de possíveis sistemas no espaço Γ e ii) a necessidade de incluir a limitação da observação microscópica do sistema seja com as células no espaço μ ou as estrelas do espaço Γ . Esses dois pontos são cruciais na analogia que faremos a seguir, na descrição do desenvolvimento de uma versão do teorema H que descreva a emergência dinâmica da regra de Born [52].

2.2 Origem Dinâmica de Probabilidades Quânticas

O status da função de onda nas diferentes interpretações da mecânica quântica é, invariavelmente, confuso. Na versão ortodoxa, para muitos, a função de onda é apenas um artefato matemático para o cálculo de probabilidades. Ainda assim, qual a relação exata desse artefato com o processo chamado de "colapso" é absolutamente obscura. No caso da Teoria da Onda Piloto, a confusão persiste mas por outro ângulo. Nessa interpretação, a função de onda no espaço de fases é um tipo de campo que guia físicamente as partículas no espaço 3D. Deixaremos de lado no momento a discussão sobre as propriedades físicas desse campo e suas diferenças fundamentais com outras entidades que conhecemos como campos na física [76, 48], nos concentrando na relação entre a função de onda e a distribuição de probabilidades. Não há, em princípio, nada na teoria desenvolvida por de Broglie e Bohm que indique porque deveria haver uma relação entre essas duas quantidades. Se mostra fundamental, para a manutenção da consistência desta teoria que se desenvolva um mecanismo dinâmico para explicar as probabilidades observadas experimentalmente e sua relação com a função de onda.

Esse mecanismo foi desenvolvido por Antony Valentini [46, 47], utilizando uma analogia com o desenvolvimento do teorema H clássico. Se não há nada que force a relação $\rho = |\psi|^2$, pode-se esperar que esta igualdade seja válida para um determinado estado do sistema. A validade, até o momento, absoluta desta igualdade em situações experimentais leva a crer que todos os sistemas testados até hoje estejam nesse estado, que a partir de agora chamaremos de *estado de equilíbrio quântico*. A questão inicial então se torna: como uma função de onda que não respeita essa igualdade inicialmente passa a respeitá-la depois? Colocando de outra forma, como ocorre a evolução do estado fora do equilíbrio para o estado de equilíbrio? Essa pergunta, claramente, é a mesma posta por Boltzmann, Gibbs e os Ehrenfest para o caso da mecânica estatística clássica.

No contexto da Teoria da Onda Piloto, um sistema é completamente descrito pela função de onda e a equação de movimento associada. Para a construção da nossa analogia, portanto, trabalharemos no espaço 3N de configurações ao invés do espaço de fases. Consideramos novamente um *ensemble* de sistemas com distribuição de probabilidades $\rho(X,t)$ em que cada sistema tem a mesma função de onda ψ , mas não a mesma configuração X (X sendo um ponto no espaço de configurações 3N). Para medir a relação entre a distribuição e a função de onda introduzimos uma função f(X,t) definida por

$$\rho(X,t) = |\psi(X,t)|^2 f(X,t).$$
(66)

Na mesma direção das deduções descritas anteriormente, aqui é central a evolução temporal da "distribuição". A função de onda evolui de acordo com a equação de Schrödinger, e por outro lado, a distribuição de probabilidades obedece a uma equação de continuidade;

$$\frac{\partial \rho(X,t)}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\rho(X,t)\dot{X} \right] = 0.$$
(67)

A velocidade \dot{X} é determinada pela equação guia, que por sua vez é determinada por $\psi(X,t)$. Assim, se soubermos a distribuição de probabilidades inicial, a equação acima determina $\rho(X,t)$ para todo t. Uma consequência da equação de Schrödinger é a equação de continuidade para o módulo quadrado de $\psi(X,t)$, absolutamente similar a equação acima. Como ressaltado por Bohm [43], isso implica que a função f(X,t) é conservada ao longo das trajetórias do sistema:

$$\frac{df(X,t)}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{X} \cdot \nabla f = 0.$$
(68)

A partir da ideia de que a evolução da função de onda até o valor esperado pela regra de Born é alguma forma de decaimento para o equilíbrio, procuramos agora uma quantidade análoga ao H da mecânica estatística clássica. Tal quantidade deve ter propriedades parecidas com as encontradas no H clássico, ou seja, variar com o tempo até um determinado valor mínimo que corresponda ao estado de *equilíbrio quântico*, caracterizado pela igualdade $\rho(X,t) = |\psi(X,t)|^2$. Além disso, assim como a distribuição clássica segue o teorema de Liouville, a função f(X,t) é conservada ao longo das trajetórias. Segue-se da equação de continuidade para ρ , no caso clássico, que dH/dt = 0, mas vimos que com o processo de *coarse-graining* é possível descrever corretamente (ou seja, de acordo com o que é observado) o processo de decaimento para o equilíbrio de sistemas termodinâmicos. Ainda há, no entanto, mais um ingrediente que precisamos da teoria clássica para completar a analogia; a presunção de que a densidade inicial exata (*fine-grained*) seja igual a densidade inicial *coarse-grained*. Existe uma extensa discussão no campo da mecânica estatística [67] à respeito da validade desta presunção, mas para o objetivo deste trabalho assumimos apenas que esta condição signifique a ausência de microestrutura no estado inicial dos sistemas.

Além da distribuição clássica de probabilidades p_{class} , o elemento $dq_1...dp_{3N}$ do espaço Γ também respeita o teorema de Liouville e é conservado ao longo das trajetórias clássicas. Como já ressaltamos, a quantidade f tem a mesma propriedade, o que sugere a substituição $p_{class} \leftrightarrow f$. Além disso, o número de sistemas que ocupa um determinado elemento de volume do espaço de configurações $d^{3N}X$ é constante no tempo o que significa que $\rho(\mathbf{X}, t)d^{3N}X = |\psi(\mathbf{X}, t)|^2 f d^{3N}X$, logo, a quantidade $|\psi(\mathbf{X}, t)|^2 d^{3N}X$ também é preservada ao longo das trajetórias. Dessa forma, podemos definir o equivalente quântico da função H;

$$H(t) = \int d^{3N} X |\psi(\mathbf{X}, t)|^2 f \ln f, \qquad (69)$$

que pode ser definida também como

$$H(t) = \int d^{3N} X \rho \ln(\rho/|\psi|^2).$$
 (70)

Pelas mesmas razões do caso clássico, a derivada da função H neste caso também é nula e o processo de *coarse-graining* é necessário. Como todos os sistemas, clássicos ou quânticos, tem uma limitação na observação podemos dividir o espaço de configurações em células de tamanho δV e definir a distribuição *coarse-grained* como

$$\overline{\rho} = (\delta V)^{-1} \int_{\delta V} d^{3N} X \rho, \tag{71}$$

de forma que $\overline{\rho}$ é constante em cada célula. De maneira análoga definimos o coarsegraining para o módulo quadrado da função de onda e a função $\tilde{f} = \overline{\rho}/|\overline{\psi}|^2$. Assim, temos

$$\overline{H} = \int d^{3N} X \overline{\rho} \ln \tilde{f}.$$
(72)

Para a prova do teorema H neste caso, começamos com a presunção de que no

tempo t = 0 as quantidades *coarse-grained* e exatas são iguais. Temos, então a diferença

$$\overline{H}(0) - \overline{H}(t) = \int d^{3N} X \overline{\rho}(0) \ln \tilde{f}(0) - \int d^{3N} X \overline{\rho}(t) \ln \tilde{f}(t).$$
(73)

Usando a ausência de micro estrutura inicial e o fato de que H é constante no tempo, podemos escrever

$$\int d^{3N} X \overline{\rho}(0) \ln \tilde{f}(0) = \int d^{3N} X \rho(0) \ln f(0) = \int d^{3N} X \rho \ln f.$$
(74)

Além disso, como \tilde{f} é constante em cada célula $\int d^{3N} X \overline{\rho} \ln \tilde{f} = \int d^{3N} X \overline{\rho} \ln f$. A variação de \overline{H} pode então ser redefinida,

$$\overline{H}(0) - \overline{H}(t) = \int d^{3N} X \rho \ln(f/\tilde{f}) = \int d^{3N} X |\psi|^2 f \ln(f/\tilde{f}).$$
(75)

Usando mais uma vez o fato de que \tilde{f} é constante em cada célula, é possível demonstrar que $\int d^{3N} X |\psi|^2 \left(\tilde{f} - f\right) = 0$, e com isso

$$\overline{H}(0) - \overline{H}(t) = \int d^{3N} X |\psi|^2 \left[f \ln(f/\tilde{f}) + \tilde{f} - f \right].$$
(76)

Agora usamos a relação matemática $x\ln(\frac{x}{y})+y-x\geq 0$ válida para todo xey, provando que

$$\bar{H}(0) \ge \bar{H}(t),\tag{77}$$

ou seja, a função $\overline{H}(t)$ é descrescente:

$$\frac{d\overline{H}}{dt} \le 0. \tag{78}$$

Isso confirma que a versão quântica da função H obedece ao que passaremos a chamar de teorema H quântico (que não deve ser confundido com a aplicação clássica do teorema H para sistemas quantizados [67]). Existem outras possíveis definições de uma função análoga ao H clássico nesse contexto, mas a derivação acima traz as propriedades que esperávamos: uma função que ao passar pelo processo de coarse-graining diminua com o tempo até atingir um valor mínimo quando $\overline{P} = |\psi|^2$, o que é suficiente para definirmos a origem dinâmica da regra de Born.

Se é possível derivar uma origem dinâmica para as probabilidades quânticas, é plausível acreditar que existam consequências físicas que violem os resultados experimentais conhecidos da mecânica quântica. Na seção seguinte descreveremos os possíveis efeitos da violação da regra de Born em relação a dois pilares fundamentais da física moderna.

2.3 Três "Conspirações"

O desenvolvimento das leis da física não se dá de forma uniforme. Na tentativa de encontrar um conjunto de leis e equações que descrevam de forma consistente um determinado conjunto de fenômenos, o físico é confrontado frequentemente com limites da natureza que parecem não ser totalmente coerentes com a teoria idealizada em princípio. No caso da mecânica clássica, ao observar as equações de Newton encontra-se uma simetria temporal, ou seja, não parece haver uma direção preferencial para o transcorrer do tempo. Não há nas hipóteses da mecânica de Newton nenhuma razão para que o tempo tenha uma direção preferencial, mas a experiência objetiva impõe ao cientista que se desenvolva alguma explicação para esse fenômeno. Até hoje, a explicação dada advém da lei da entropia, que pode ser vista como um teorema de impossibilidade sobre a direção da seta do tempo. Ainda assim, o "fluxo do tempo" ou o crescimento obrigatório da entropia de um sistema isolado pode ser visto como um tipo de "conspiração" da natureza [46, 64].

No contexto da mecânica quântica, podemos considerar outros dois fenômenos como conspirações: i) a "localidade de sinais", ou seja, apesar de observarmos conexões claramente não-locais entre entidades quânticas essas conexões não podem ser usadas para transmissão de sinais mais rápidos do que a luz; ii) o princípio da incerteza, que impõe uma barreira na capacidade de observação simultânea de algumas propriedades quânticas. Nos dois casos, a natureza nos impõe regras de impossibilidade que não advém diretamente dos postulados da teoria quântica (seja na versão ortodoxa ou na Teoria da Onda Piloto). Demonstraremos agora como esses dois limites sobre os fenômenos quânticos dependem diretamente da regra de Born e, caso esta seja violada, os dois não se sustentam.

Assumiremos, para fins teóricos, que seja possível saber a distribuição $\rho(\mathbf{x}, t)$ mesmo quando $\rho \neq \psi$. Para analisar a possibilidade de sinais não-locais consideramos um conjunto de dois sistemas isolados **A** e **B**, a um distância arbitrária. Os dois sistemas estão "emaranhados", ou seja, suas funções de onda não são fatorizáveis. Suponhamos que os dois sistemas sejam compostos de partículas aprisionadas em caixas e cada um desses dois sistemas tem dois níveis de energia acessíveis, $\mathbf{E}_0 \in \mathbf{E}_1$. O estado inicial do conjunto de sistemas em t = 0 pode ser definido como

$$|\psi_0\rangle = \left(\alpha^2 + \beta^2\right)^{-1/2} \left(\alpha \left| E_0 E_1 \right\rangle + \beta \left| E_1 E_0 \right\rangle\right).$$
(79)

Para testar se a correlação imposta pelo "emaranhamento" da função de onda pode ser usado para o envio de sinais precisamos também definir uma distribuição inicial e analisar sua evolução com o tempo. Primeiramente, supomos que a distribuição obedece a regra de Born, ou seja, $\rho(X_A, X_B, 0) = |\psi_0(X_A, X_B)|^2$. O que introduziremos como "sinal" neste exemplo pode ser descrito como uma alteração em uma das caixas (o movimento de uma parede, por exemplo) que possa influenciar a outra instantaneamente. A equação de continuidade garante que, se a distribuição inicial é igual ao módulo quadrado da função de onda para t = 0, ela continuará igual para todo t. Se a hamiltoniana da caixa **B** sofre uma alteração instântanea $(H_B \to H_B')$, o estado do sistema pode ser agora escrito como [47]

$$|\psi(t)\rangle = (\alpha^{2} + \beta^{2})^{-1/2} \{\alpha \exp[-(i/\hbar) E_{0}t] | E_{0}\rangle \exp[-(i/\hbar) H_{B}'t] | E_{1}\rangle + \beta \exp[-(i/\hbar) E_{1}t] | E_{1}\rangle \exp[-(i/\hbar) H_{B}'t] | E_{0}\rangle\}, \quad (80)$$

onde $H_B' | E_i \rangle \neq E_i | E_i \rangle$. Se houvesse a possibilidade de que uma modificação no sistema **B** pudesse resultar em um sinal recebido pelo sistema **A**, a distribuição individual do sistema A, dada por $\rho(X_A, t)$, dependeria explicitamente da hamiltoniana modificada H_B' . Utilizando o fato de que o operador de evolução temporal é unitário, podemos calcular

$$\int dX_B \left| \langle X_A X_B | \psi(t) \rangle \right|^2 = \left(\alpha^2 + \beta^2 \right)^{-1} \left(\alpha^2 \left| \langle X_A | E_0 \rangle \right|^2 + \beta^2 \left| \langle X_A | E_1 \rangle \right|^2 \right)$$
(81)

demonstrando que a distribuição na caixa A é completamente independente de H_B' . Isso não quer dizer que a posição da partícula X_A seja independente do que acontece na caixa **B**, mas sim que a distribuição de um conjunto hipotético de sistemas não é afetada, o que é suficiente para impedir que seja possível criar sinais não locais nesse caso.

Agora, suponhamos que a regra de Born não seja imposta inicialmente a esse sistema. Isso significa que não basta obter a evolução temporal do estado do sistema, mas também a evolução da distribuição $\rho(X_A, t)$. Para tanto, integraremos para todo X_B a equação de continuidade para a distribuição total $\rho(X_A, X_B, t)$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial X_A} \dot{X}_A + \frac{\partial \rho}{\partial X_B} \dot{X}_B = 0, \tag{82}$$

obtendo então

$$\frac{\partial \rho(X_A, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial X_A} \int \mathbf{d} X_B \rho(X_A, X_B, t) \dot{X_A}.$$
(83)

Para demonstrar que a distribuição do subsistema A é afetada por uma alteração em B precisamos provar que o lado direito da equação acima é diferente de 0 quando $H_B \neq H_B'$. Começamos assumindo que o intervalo de tempo t no qual ocorre a mudança em um dos sistemas é infinitesimal e escrevendo a equação para $\dot{\mathbf{X}}_{\mathbf{A}}$ em termos da fase da função de onda,

$$\dot{X}_A = \frac{1}{m} \frac{\partial S(X_A, X_B, t)}{\partial X_A}.$$
(84)

Escrevendo a função de onda do sistema total em termos das funções $R(X_A, X_B, t)$ e

 $S(X_A, X_B, t)$, e definindo

$$\langle X_B | \exp\left[-\left(i/\hbar\right) H_B' t\right] | E_i \rangle = R_i(X_B, t) \exp\left[\left(i/\hbar\right) S_i(X_B, t)\right],\tag{85}$$

obtemos

$$\tan(S/\hbar) = \frac{\alpha \langle X_A | E_0 \rangle R_1 \sin\left[(S_1 - E_0 t)/\hbar \right] + \beta \langle X_A | E_1 \rangle R_0 \sin\left[(S_0 - E_1 t)/\hbar \right]}{\alpha \langle X_A | E_0 \rangle R_1 \cos\left[(S_1 - E_0 t)/\hbar \right] + \beta \langle X_A | E_1 \rangle R_0 \cos\left[(S_0 - E_1 t)/\hbar \right]}.$$
(86)

Agora, podemos usar $t=\epsilon \rightarrow 0$ para redefinir a equação (85) como,

$$R_i(X_B, t) \exp\left[(i/\hbar) S_i(X_B, t)\right] = \langle X_B | E_i \rangle - \epsilon \frac{i}{\hbar} \langle X_B | H_B' | E_i \rangle$$
(87)

e assim, podemos assumir que S_i e ${\cal R}_i$ são

$$R_i(X_B, \epsilon) = R_i(X_B, 0) = \langle X_B | E_i \rangle, \qquad (88)$$

$$S_i(X_B,\epsilon) = -\frac{\epsilon \langle X_B | H_B' | E_i \rangle}{\langle X_B | E_i \rangle}.$$
(89)

O objetivo é calcular o lado direito da equação (83), o que faremos aqui até a primeira ordem em ϵ . Nesse caso, $\tan(S/\hbar)$ e \dot{X}_A são de ordem ϵ , e podemos simplificar o lado direito da equação para $\dot{\rho}(X_A, t)$,

$$\dot{\rho}(X_A,\epsilon) = -\frac{\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial X_A} \left(\int \mathbf{d} X_B \rho(X_A, X_B, 0) \frac{\partial \tan(S/\hbar)}{\partial X_A} \right).$$
(90)

Substituindo (45) e (46) em (43), obtemos

$$\dot{\rho}(X_A,\epsilon) = -\frac{\epsilon}{2m} \frac{\partial}{\partial X_A} \left(F(X_A) \int \mathbf{d}X_B G(X_B) \frac{\rho(X_A, X_B, 0) - |\psi(X_A, X_B, 0)|^2}{|\psi(X_A, X_B, 0)|^2} \right), \tag{91}$$

onde

$$F(X_A) = (\langle X_A | E_1 \rangle)^2 \frac{\partial}{\partial X_A} \frac{\langle X_A | E_0 \rangle}{\langle X_A | E_1 \rangle},\tag{92}$$

$$G(X_B) = \langle E_1 | X_B \rangle \langle X_B | H_B' | E_0 \rangle - \langle E_1 | H_B' | X_B \rangle \langle X_B | E_0 \rangle + (E_1 - E_0) \langle E_1 | X_B \rangle \langle X_B | E_0 \rangle.$$
(93)

Em geral, se há uma modificação no sistema B $(H_B^{'}\neq H_B)$ e $\rho_0\neq |\psi_0|^2,\,\dot{\rho}(X_A,\epsilon)\neq$

0, ou seja, sinais podem ser enviados de B para A. No caso de que $(\rho_0 - |\psi_0|^2)/|\psi_0|^2$ seja diferente de 0 mas não dependa explicitamente de X_B , a distribuição de A não muda com o tempo, o que significa que modificações em B não podem resultar em um sinal em A. No entanto, é possível mandar sinais de A para B, já que a derivada de $\rho(X_B, t)$ não será necessáriamente zero.

Os exemplos acima nos permitem afirmar que se a distribuição inicial for conhecida e diferente da postulada pela regra de Born, é possível utilizar o emaranhamento para mandar sinais instântaneos se e somente se $\rho_0 \neq |\psi_0|^2$. Apesar de os exemplos terem se utilizado apenas de funções das posições, é possível demonstrar que para medidas de momento a condição para transmissão de sinais instântaneos é a mesma [47].

Passamos agora ao caso do princípio da incerteza, que sabemos é válido se $\rho = |\psi|^2$. Assumimos novamente a existência de uma partícula em uma caixa com uma função de onda fundamental $\psi_0(x)$ e que a distribuição para um conjunto hipotético de sistemas similares é centrada em torno de uma posição $X = x_0$. Escolhemos a posição x_0 de forma que quando a caixa é aberta $X \to -\infty$ conforme t vai para infinito. O processo de abrir a caixa pode ser utilizado para obter uma medida do momento, que neste caso teria o valor definido $p = -(2mE_0)^{1/2}$, o que leva a um desvio padrão zero. Se o desvio padrão de posições é finito e o de momento é zero, fica claro que o princípio da incerteza de Heisenberg não é válido neste cenário.

Os dois exemplos acima fornecem a motivação inicial para buscar a existência de sistemas fora do equilíbrio quântico, tendo em vista que, se os mesmos existirem, dariam vazão à fenômenos novos no contexto da mecânica quântica. Ainda assim, o fato de que todos os experimentos realizados até agora respeitam a regra de Born faz com que seja necessário observar de alguma forma como ocorre o decaimento para o equilíbrio de sistemas reais. Neste sentido, foram desenvolvidas várias simulações numéricas em sistemas simples para estudar diretamente o decaimento para o equilíbrio e suas possíveis consequências em cenários reais astrofísicos ou cosmológicos [57, 71, 72, 69]. A seguir descreveremos algumas das simulações que já foram feitas e introduziremos as nossas primeiras contribuições no sentido de estudar o decaimento para o equilíbrio de um sistema de dois osciladores quânticos acoplados.

2.4 Primeiras Simulações Numéricas

A discussão clássica da mecânica estatística permanece repleta de controvérsias. Uma delas está relacionada ao conjunto de condições iniciais de sistemas termodinâmicos que atingem o equilíbrio após certo tempo. Devido à invariância temporal das leis da mecânica, para todo estado inicial que evolui para o equilíbrio existe também um que se afasta dele. Nas discussões acima evitamos essa controvérsia ao assumir que o estado inicial não tem microestrutura e sistemas com essas condições iniciais tendem ao equilíbrio. No contexto da física clássica o teorema H permanece como uma lei empírica ou probabilística [67, 80], utilizada para descrever o comportamento observado de gases que atingem o equilíbrio, já que não há casos observados de gases que contrariem significativamente a lei da entropia.

No caso da mecânica quântica de de Broglie-Bohm tentamos descrever um mecanismo que explique o fato empírico descrito pela regra de Born, ou seja, que os sistemas encontrados até agora estejam no estado que chamamos de *equilíbrio quântico*. Uma possibilidade é que o estado inicial de todos os sistemas do Universo já fosse o de equilíbrio e esse estado tenha sido preservado pela equação de continuidade. Mas essa é apenas uma das possibilidades, existem incontáveis outros estados iniciais que ao passarem pela violenta evolução do nosso Universo podem atingir o estado observado hoje. Mesmo sem nenhuma prova de que existam sistemas que violem a regra de Born hoje, é lógico imaginar que exista um grande número de possibilidades para a distribuição quântica inicial que evoluíram até chegar à $\rho(\mathbf{X}, t) = |\psi(\mathbf{X}, t)|^2$.

A observação da evolução de um $\bar{H}(t)$ quântico pode ser relevante não só para comprovar a possibilidade de estados fora do equilíbrio mas também para estudarmos propriedades do decaimento em sistemas específicos, afim de encontrarmos parâmetros que nos ajudem na busca de fenômenos naturais que violem a regra de Born. Com este fim, foram desenvolvidas diversas simulações numéricas de sistemas simplificados que nos permitem obter vários *insights* sobre o teorema H quântico.

2.4.1 Poço de Potencial Unidimensional

Consideremos, primeiramente, um sistema quântico unidimensional simples: uma partícula em uma caixa. Apesar de pouco realista, esse sistema foi o primeiro passo no desenvolvimento de simulações numéricas para estudo do teorema H quântico [60] e será nosso ponto de partida para o estudo numérico de sistemas mais complicados. Tal sistema é descrito por duas barreiras infinitas de potencial em x = 0 e x = L, sendo os autoestados de energia dados por $\phi_n(x) = \sqrt{(2/L)} \sin(n\pi x/L) \operatorname{com} n = 1, 2, 3...$ e autovalores $E_n = \frac{1}{2}(\pi n/L)^2$. O estudo da distribuição nesse caso se dá com um *ensemble* de partículas independentes guiadas pela mesma função de onda e com posições iniciais ligeiramente diferentes. Se a distribuição inicial for tomada como uniforme em t = 0, temos $\rho(x, 0) = 1/L$. A função de onda inicial deve obedecer às condições de contorno, portanto deve ser alguma superposição de autoestados como

$$\psi(x,0) = \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{\sqrt{M}} \phi_n(x) \exp(i\theta_n), \tag{94}$$
Figura 9 - $\rho(x,0) \in |\psi(x,0)|^2$ para a caixa unidimensional de comprimento L = 100.



Fonte: VALENTINI, 2001, p. 15.

definida com amplitudes de módulo igual e fases θ_n escolhidas aleatóriamente.

Está claro que o estado inicial desse sistema viola a regra de Born (Figura 9), e sua evolução é governada conjuntamente pela equação de Schrödinger e pela equação guia do conjunto de trajetórias dentro da caixa. Em teoria, poderíamos determinar a evolução temporal da distribuição inserindo a equação guia na equação de continuidade para $\rho(x,t)$ (67). Na prática, no entanto, é mais simples resolver as equações para as trajetórias e observar a evolução da distribuição do *ensemble* através da evolução da coordenada x(t).

A função de onda em determinado tempo t é dada por

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{\sqrt{M}} \phi_n(x) \exp(i(\theta_n - E_n t)).$$
(95)

As trajetórias foram calculadas através de soluções numéricas para o conjunto de equações guia $\dot{X} = \nabla S(X, t)/m$ com condições iniciais uniformemente espaçadas entre 0 e L = 100 com M = 10 (Figura 9). A função de onda unidimensional acima é periódica, o que significa que todas as trajetórias recorrem às suas posições iniciais e que o estado inicial fora do equilíbrio também recorre. Mesmo assim, para tempos significativamente menores do que o período podemos observar uma expressiva aproximação ao equilíbrio.

A primeira expressão da evolução na direção do equilíbrio (Figura 10) já pode ser vista na superposição dos picos vistos na distribuição $\rho(x,t)$ (com t = 120, nas unidades $m = \hbar = c = 1$) com os máximos locais de $\psi(x,t)$. Para confirmar a validade, mesmo que limitada pela simplicidade do modelo, do teorema H também foi feito o *coarse-graining* com células de tamanho $\delta x = 1$. A curva (Figura 11) para o $\overline{H}(t)$ mostra um decresci-



Figura 10 - $\rho(x, 120)$ e $|\psi(x, 120)|^2$ para a caixa unidimensional de comprimento L = 100.

Fonte: VALENTINI, 2001, p. 16.

Figura 11 - $\overline{H}(t)$ para a caixa unidimensional.



Fonte: VALENTINI, 2001, p. 17.

mento não monotônico que caracteriza a aproximação ao valor mínimo para tempos muito menores do que o período de recorrência. Depois de certo tempo, naturalmente, $\overline{H}(t)$ volta a crescer até seu valor inicial. Essas limitações não devem ser confundidas com uma falha nas predições do teorema H quântico já que, no sistema analisado até agora além da periodicidade temos também o fato de que as trajetórias não podem se cruzar. Espera-se que em sistemas com mais graus de liberdade, distribuições com mais trajetórias, funções de onda com mais modos ou diferentes tamanhos de células no *coarse-graining* tenhamos informações mais realistas a respeito do teorema H.

2.4.2 Poço de Potencial Bidimensional

Passamos agora à análise do sistema de uma caixa bidimensional estudado em [52], com função de onda dependente do tempo por

$$\psi(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{4} \frac{1}{4} \phi_{mn}(x, y) \exp\left[i\left(\theta_{mn} - E_{mn}t\right)\right],\tag{96}$$

onde $\phi_{mn}(x,y) = \frac{2}{\pi}\sin(mx)\sin(ny)$. Os autovalores de energia são dados por $E_{mn} = \frac{1}{2}(m^2 + n^2)$, e neste exemplo específico foram usados os 16 modos de energia correspondentes à m, n = 1, 2, 3, 4. As fases θ_{mn} foram escolhidas aleatóriamente [52]. A função de onda é fatorizável, o que significa que a equação guia $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \nabla S(x, y, t)$ (onde utilizamos m = 1 e a forma $\psi = |\psi|e^{iS}$) pode ser separada nas duas componentes da velocidade da partícula,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{i}{2|\psi|^2} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right),\tag{97}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{i}{2|\psi|^2} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial y} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial y} \right).$$
(98)

Construindo um ensemble de trajetórias com condições iniciais diferentes constatamos que essas não só podem se cruzar como podem ter caráter altamente complexo, podendo ficar confinadas à pequenas regiões ou sofrer bruscas mudanças de velocidade ao se aproximarem das regiões onde a velocidade toma valores grandes para $|\psi|$ próximo de zero [81]. Como no caso do oscilador harmônico bidimensional que descrevemos no Capítulo 1, trajetórias com condições iniciais muito próximas podem divergir para pontos bem afastados. Essa propriedade de trajetórias na teoria de de Broglie-Bohm e o comportamento dos expoentes de Lyapunov já foi estudado para uma variedade de sistemas e vários destes apresentam as características de sistemas caóticos [82, 83, 52].

Considerando a forma da função H(t), é teóricamente possível obter sua dependência temporal simplesmente calculando a evolução da distribuição a partir da equação de continuidade (46). No entanto é mais conveniente calcular a evolução das trajetórias a partir das equações guia, de onde podemos deduzir a evolução de qualquer distribuição inicial fora do equilíbrio.

A solução das equações (96) e (97) é obtida através do método Runge-Kutta-Fehlberg [84] com um passo - timestep - h adaptável de forma que os erros absolutos para x(t) e y(t) sejam menores que $h\delta$ para um determinado δ . Nas simulações feitas em [52], o valor de δ é inicialmente de 10^{-6} , após o primeiro cálculo a trajetória é novamente calculada para $\delta = 10^{-7}$, se a diferença entre os dois resultados é menor do que 0.01 o resultado mais preciso é mantido, caso contrário um novo cálculo é feito para $\delta = 10^{-8}$ e assim sucessivamente. Para um número reduzido de trajetórias (1 em cada 60000 para $t = 2\pi$) um resultado satisfatório não foi obtido ao atingir $\delta = 10^{-12}$ ou o número máximo de passos 10^{-8} .

No exemplo específico analisado [52], supõe-se que a distribuição inicial seja dada por

$$\rho(x, y, 0) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sin^2 x \sin^2 y.$$
(99)

Definimos então a função

$$f(x, y, t) = \frac{\rho(x, y, t)}{|\psi(x, y, t)|^2}$$
(100)

que é conservada ao longo das trajetórias, ou seja, $f(x, y, t) = f(x_0, y_0, 0)$. Sendo assim, conhecidas a distribuição e a função de onda iniciais podemos escrever a distribuição em determinado tempo t como

$$P(x, y, t) = |\psi(x, y, t)|^2 f(x_0, y_0, 0).$$
(101)

Portanto, dado o mapeamento $(x_0, y_0) \rightarrow (x(t), y(t))$, poderíamos deduzir a evolução da distribuição inicial.

Para o cálculo numérico, é necessário definir uma rede de pontos em determinado tempo t e utilizar as equações guia para obter a distribuição em um outro momento. É possível evoluir a rede tanto para o futuro - 'forward tracking' - como retroceder a rede na direção contrária - 'backtracking' - devido à simetria temporal da teoria. No entanto, ao calcular o desenvolvimento de uma rede de pontos de t = 0 à um determinado t_f esses podem acabar se concentrando em determinadas áreas deixando grandes partes da rede vazias. O método utilizado em [52] estabelece uma rede uniforme de pontos em determinado $t = t_f$ e então se realiza um "bactracking" até t = 0, substituindo os valores encontrados para (x_0, y_0) na equação (100). Assim, se obtém os valores para a distribuição $\rho(x, y, t)$ em uma rede uniforme de pontos. Figura 12 - $\ln \overline{H}(t)$ para o poço de potencial bidimensional.



Fonte: VALENTINI; WESTMAN, 2004, p. 268.

A forma exata da distribuição em qualquer $t \neq 0$ é extremamente irregular e, como discutido na seção 2.2, nunca relaxa exatamente para o valor $|\psi(x, y, t)|^2$. Portanto, o passo final do cálculo numérico consiste no processo de *coarse-graining*. Nesse processo, calculamos a média da distribuição dentro de células de área fixa ϵ^2 ,

$$\frac{1}{\epsilon^2} \int \int_{cell} dx dy \rho,\tag{102}$$

associando o valor obtido ao centro de cada célula. Para o exemplo descrito em [52], as células foram definidas com lado $\epsilon = \pi/32$ e a evolução de $\overline{H}(t)$ foi calculada de t = 0 à $t = 2\pi$ em intervalos de $\pi/4$ (Figura 13). As barras de erro são obtidas calculando $\overline{H}(t)$ para duas redes diferentes, uma com 25x25 pontos em cada célula e outra com 27x27. O relaxamento observado indica um decaimento exponencial do tipo $\overline{H}_0 e^{-t/t_c}$, com tempo crítico $t_c \approx 4$ e tende de forma eficiente ao equilíbrio. Esse resultado corrobora o teorema H subquântico.

E importante ressaltar que, como na mecânica estatística clásssica, para toda distribuição inicial que tende ao equilíbrio deve existir outra que se afaste dele (devido ao caráter de simetria temporal da teoria) e discussões nesse sentido passam necessariamente sobre as condições iniciais [67]. Assumindo a condição de ausência de microestrutura na distribuição inicial evitamos a possibilidade de simplesmente reverter a distribuição final encontrada aqui, mas isso não significa que todos os sistemas que respeitem essa condição decairão ao *equilíbrio quântico*. O teorema H clássico é fortemente suportado por evidências empíricas e o mesmo pode ser dito da regra de Born. Nesse sentido, é importante suplementar os resultados encontrados até aqui com evidências numéricas retiradas de outros exemplos além de seguir buscando cenários astrofísicos e cosmológicos onde sistemas fora do equilíbrio possam ser encontrados.

No entanto, informações úteis podem ser retiradas desse exemplo. A primeira delas tem a ver com o caráter caótico das trajetórias já ressaltado [82]. Associando as duas distribuições $(P(\mathbf{X}, t) \in |\psi|^2)$ à fluidos que se misturam, podemos pensar no relaxamento como análogo a uma homogeneização dessa mistura e a presença de nodos como catalisador desse processo. Além disso, podemos ver que o decaimento ao equilíbrio pode ocorrer mesmo para um sistema de uma só partícula em uma caixa assumindo uma superposição de poucos modos da função de onda. A influência de um número maior de modos bem como de diferentes comprimentos de *coarse-graining* já foi estudada para alguns outros modelos e parâmetros [55, 54, 71, 72, 85], com a motivação dupla de confirmar a validade do teorema H quântico e de encontrar cenários e consequências realistas para a física da transição para o equilíbrio quântico. Nesse sentido, considerando que diversos sistemas naturais podem ser descritos com a ajuda do modelo de osciladores harmônicos é útil analisar como (e se) o relaxamento ocorre em um modelo deste tipo.

Descreveremos agora nossa versão para o estudo do decaimento para o equilíbrio de um oscilador harmônico bidimensional.

2.5 Simulações Numéricas: Oscilador Harmônico Quântico

Nesta seção, estudaremos a evolução de um oscilador quântico bidimensional cuja distribuição de probabilidades inicial ρ_0 é diferente do módulo quadrado da função de onda inicial. A solução da equação de Schrödinger para este sistema já foi descrita na equação (54). Nas simulações que descreveremos a seguir usamos as unidades $\hbar = c = m = \omega = 1$, com M = 3, o que significa que teremos uma superposição de 16 modos na função de onda. Além disso, definiremos a distribuição inicial como

$$\rho_0 = \frac{1}{N\sqrt{\pi}} \exp(-(x^2 + y^2)), \tag{103}$$

onde N é uma constante de normalização.

A partir desse modelo, desenvolvemos¹³ um código numérico para reproduzir resultados análogos à trabalhos já publicados [54, 55, 57], com o intuito de ganhar compreendimento e familiaridade com o processo de construção da simulação antes de abordar o caso de nosso interesse, que discutiremos no próximo capítulo.

O cálculo da evolução temporal procede de forma análoga à descrita no exemplo da

¹³ No desenvolvimento das simulações numéricas do autor, houve colaboração com Antony Valentini, Samuel Collin e Adithya Kandhadai.

Figura 13 - Evolução da distribuição suavizada do oscilador harmônico quântico comparada ao módulo quadrado da função de onda.



Fonte: O autor, 2019.

seção anterior; primeiramente, estabelecemos uma rede uniforme de pontos para os tempos em que desejamos obter a distribuição, calculamos o mapeamento $(x_t, y_t) \rightarrow (x_0, y_0)$ e usando a equação (100) deduzimos a evolução de ρ . Calculamos a evolução de uma quantidade considerável de trajetórias, usando o *backtracking* através do método Runge-Kutta-Fehlberg com o mesmo tipo de ajuste para o *timestep* para resolver as equações guia. Essas trajetórias são distribuídas inicialmente em uma rede uniforme com 400 células de lado $\epsilon = 0.5$.

Na Figura (13) vemos a evolução da distribuição de uma rede com 250000 pontos, nos gráficos usamos o processo de *smoothing*, no qual distribuimos os pontos em células que tem 1/5 de suas áreas superpostas com as células vizinhas. Podemos ver que apesar de começarem no tempo $t = \pi$ com formas razoavelmente distintas - a distribuição $\tilde{\rho}(x, y, t)$ concentrada ainda na região central onde iniciou e a função $|\tilde{\psi}(x, y, t)|^2$ espalhada de forma mais irregular - quando alcançamos $t = 12\pi$ há uma semelhança considerável de ambas as funções.

Devido às irregularidades na forma detalhada da distribuição de trajetórias, diferentes redes podem (em teoria) ter evoluções da função $\bar{H}(t)$ discordantes. Por isso, além de uma rede construída a partir de 250000 pontos, também construímos redes alternativas com 211600 e 291600 pontos, variando o número de pontos por célula. Na Figura (14) exibimos os resultados associados ao cálculo do H *coarse-grained* para as três redes. Como podemos observar, existe uma tendência exponencial que se aproxima suficientemente de 0 para o tempo final 12π , a não ser para um único ponto na rede de 500x500 pontos, corroborando os resultados de [57].

A partir do desenvolvimento do cálculo anterior, podemos passar agora à aplicação do teorema H quântico para um problema original ainda não estudado. Até aqui, vimos apenas sistemas em que as hamiltonianas não dependem explícitamente do tempo. As evidências experimentais existentes até hoje sobre esses sistemas estudados em laboratórios nos levam a conclusão de que, mesmo que seja possível encontrar sistemas fora do equilíbrio quântico em laboratório, é extremamente improvável que isso aconteça fora de situações extremas. Dessa forma, seguimos os trabalhos já citados [72, 60] e procuramos estudar um sistema que se aproxime de forma gradual de certos exemplos em cenários cosmológicos e astrofísicos. No próximo capítulo estudaremos um sistema de dois osciladores quânticos com um acoplamento dependente do tempo que, posteriormente, pode ser utilizado no estudo da interação de campos escalares em um espaço-tempo em expansão [58, 59].

Figura 14 - Decaimento da função $\bar{H}(t)$ para três redes diferentes, no caso do oscilador com 16 modos em superposição.



Fonte: O autor, 2019.

3 INTERAÇÕES DEPENDENTES DO TEMPO E O EQUILÍBRIO QUÂNTICO

Ao longo dos últimos capítulos descrevemos os elementos básicos da Teoria da Onda Piloto e como, a partir deles, podemos obter uma origem dinâmica para a igualdade entre a distribuição de partículas e o módulo quadrado da função de onda. A partir do desenvolvimento desse mecanismo - o Teorema H Quântico - descrevemos os testes de sua aplicação em sistemas simples através de simulações computacionais. No entanto, nos exemplos citados anteriormente, foi estudada a evolução de apenas uma partícula sob o efeito de potenciais externos. Neste capítulo, descreveremos o problema quântico de dois osciladores acoplados por uma interação dependente do tempo. Os objetivos são analisar os efeitos da variação da intensidade do acoplamento, do número de modos e de pontos na rede de pontos sobre os tempos de relaxamento para o equilíbrio quântico. Interessa ainda investigar se o relaxamento é total ou existe um resíduo [54] ou retardamento na velocidade do relaxamento. Além disso, discutiremos possíveis implicações desses resultados em sistemas mais realistas envolvendo campos quânticos em cenários cosmológicos [71, 72, 58, 59].

3.1 Introdução

Os resultados numéricos citados nesta tese [72, 71, 57, 52, 58, 55, 59] corroboram a ideia de que é possível que existam sistemas em que $\rho(\mathbf{x},t) \neq |\psi(\mathbf{x},t)|^2$, e que estes têm uma tendência geral para atingir o equilíbrio. No entanto, essas simulações deixaram claro também que diferentes parâmetros, como o número de modos da função de onda inicial ou o tamanho das células de *coarse-graining*, podem levar a diferentes escalas de tempo para o relaxamento. Além disso, evidências numéricas bem como argumentos teóricos em cenários cosmológicos e astrofísicos [74, 85, 58, 59] indicam que é possível que exista um retardamento ou até o congelamento da tendência $\rho(\mathbf{x},t) \rightarrow |\psi(\mathbf{x},t)|^2$ para certos sistemas [70]. Discutiremos alguns desses cenários ao final deste capítulo.

Uma das situações que não foi analisada numéricamente ainda é a evolução de dois sistemas com uma interação dependente do tempo. Esse caso fornece uma primeira e simplificada descrição de problemas realísticos envolvendo campos quânticos em um espaço-tempo em expansão, além de situações onde há criação de partículas em cenários de altas energias [71, 72, 58, 59]. Neste trabalho, nos atemos à análise de dois osciladores unidimensionais com frequências e massas iguais acoplados por $k(t) = 2\beta t$. A hamiltoni-

ana desse sistema é definida clássicamente como

$$H(x_a, x_b, t) = \frac{p_a^2}{2m} + \frac{p_b^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x_a^2}{2} + \frac{m\omega^2 x_b^2}{2} + 2m\beta t x_a x_b,$$
(104)

onde β é o parâmetro que define a intensidade da interação. Procedemos fazendo transformações de coordenadas,

$$x_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x_1 + x_2 \right), \tag{105}$$

$$x_b = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x_1 - x_2 \right), \tag{106}$$

e de forma análoga transformamos também os momentos, obtendo assim a hamiltoniana

$$H(x_1, x_2, t) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + m(\omega^2 + \beta t)x_1^2 + m(\omega^2 - \beta t)x_2^2.$$
 (107)

Assim, temos uma soma de dois sistemas de osciladores desacoplados, x_1 e x_2 , com frequências dependentes do tempo, $\Omega_1^2 = (\omega^2 + \beta t) \in \Omega_2^2 = (\omega^2 - \beta t)$. Antes de nos focarmos no caso quântico, é interessante analisar as características gerais do caso clássico.

3.2 Caso Clássico

Classicamente, as trajetórias são obtidas através das equações de Hamilton, que aplicadas à hamiltoniana com coordenadas transformadas podem ser escritas como

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m},\tag{108}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -2m\Omega_i^2 x_i.$$
(109)

A substituição usual leva à equação de movimento

$$\ddot{x}_i + 2m\Omega_i^2 x_i = 0, \tag{110}$$

cujas soluções são dadas por

$$x_{i} = C_{i,1} \operatorname{AiryAi} \left(-\frac{\pm 2^{1/3} (\beta t \pm \omega^{2})}{\beta^{2/3}} \right) + C_{i,2} \operatorname{AiryBi} \left(-\frac{2^{1/3} (\beta t \pm \omega^{2})}{\beta^{2/3}} \right),$$
(111)

Onde i = 1, 2 e os sinais que variam são positivos para i = 1 e negativos para i = 2e AiryAi e AiryBi são as funções de Airy, soluções conhecidas da equação de Stokes





Fonte: O autor, 2019.

 $\frac{dy^2}{dx^2} - xy = 0$ [86]. As constantes $C_{i,j}$ são determinadas pelas condições iniciais para as posições e velocidades.

Para o cálculo das trajetórias, naturalmente, é necessário fazer a transformação reversa à feita nas equações (104) e (105), obtendo uma superposição das funções acima. Definimos os parâmetros nesta seção como m = 1, $\omega = 1$ e $\beta = 0.1$. A evolução unidimensional das trajetórias vista na Figura (1) demonstra seu comportamento oscilatório, ao menos para valores de t contidos no intervalo $[0, \omega^2/\beta]$ para os quais Ω_2 é real. Esse afastamento pode ser explicado pelo comportamento da função AiryBi que se torna divergente quando o argumento $\beta t - \omega^2$ muda de sinal.

3.3 Caso Quântico

A quantização se dá da forma usual, para obter como resultado a equação de Schrödinger dada por

$$i\hbar\partial_t\psi(x_1, x_2, t) = (\hat{H}_1 + \hat{H}_2)\psi(x_1, x_2, t), \tag{112}$$

onde

$$\hat{H}_1 = -\frac{\hbar}{2m}\partial_{x_1}^2 + \frac{m}{2}\Omega_1^2(t)x_1^2, \tag{113}$$

$$\hat{H}_2 = -\frac{\hbar}{2m}\partial_{x_2}^2 + \frac{m}{2}\Omega_2^2(t)x_1^2.$$
(114)

Para resolver as equações usamos a expansão da função de onda inicial em termos dos auto-estados $\Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)$ das Hamiltonianas iniciais em t_i ,

$$\Psi(x_1, x_2, t_i) = \sum_{n_1, n_2} c_{n_1, n_2}(t_i) \Phi_1(x_1) \Phi_2(x_2).$$
(115)

Assumindo então que a condição inicial $\psi_{n_r}(q_{n_r}, t_i)$ é conhecida, o problema se resume a solucionar um conjunto de equações de Schrödinger unidimensionais. A solução geral é dada por uma superposição das soluções independentes para $x_1 \in x_2$,

$$\Psi(x_1, x_2, t) = \sum_{n_1, n_2} c_{n_1, n_2}(t_i) \psi_{1, n_1}(x_1, t) \psi_{2, n_2}(x_2, t).$$
(116)

Trabalharemos agora na determinação de $\psi(x_j, t)_{j,n_j}$ exatamente a partir da literatura existente sobre osciladores com hamiltonianas dependentes do tempo [87, 70]. Assumindo $\hbar = 1$, a forma geral para as autofunções das equações de Schrödinger nesse caso é

$$\psi(x_j, t)_{n_j} = \frac{1}{\sqrt{2^{n_j} n_j!}} \left(\frac{\Omega_j(0)}{\pi g_{j,-}(t)}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\imath \frac{g_{j,0}(t)}{2g_{j,-}(t)} x_j^2\right) \exp\left(-\imath (n_j + \frac{1}{2}) \int_0^t dt' \frac{\Omega_j(0)}{m(t')g_{j,-}(t')}\right) \\ \times \exp\left(-\frac{\Omega_j(0)}{2g_{j,-}(t)} x_j^2\right) \mathcal{H}_{n_j}\left(\sqrt{\frac{\Omega_j(0)}{g_{j,-}(t)}} x_j\right). \quad (117)$$

As funções \mathcal{H}_{n_j} são os polinômios de Hermite de grau n_j , e as funções $g_-(t)$, $g_0(t)$ fazem parte de um conjunto de funções que satisfazem as equações diferenciais

$$\dot{g}_{j,-} = -2\frac{g_{j,0}}{m},\tag{118}$$

$$\dot{g}_{j,0} = m\Omega_j^2 g_{j,-} - \frac{g_{j,+}}{m},\tag{119}$$

$$\dot{g}_{j,+} = 2m\Omega_j^2 g_{j,0}, \tag{120}$$

e obedecem as condições iniciais, $g_{j,-}(0) = 1/m$, $g_{j,0}(0) = 0$ e $g_{j,+}(0) = m\Omega_j(0)^2$. A solução geral para $g_-(t)$ é dada pela equação

$$g_{-} = c_1 f_1^2 + c_2 f_1 f_2 + c_3 f_2^2, \tag{121}$$

que por sua vez é determinada pelas soluções independentes f_1 e f_2 de

$$\ddot{f}_j + \frac{\dot{m}}{m}\dot{f}_j + \Omega_j^2 f_j = 0.$$
(122)

As constantes c_1 , c_2 e c_3 devem ser determinadas pelas condições iniciais. A solução acima é geral para osciladores com dependência temporal. No caso de dois osciladores acoplados precisamos construir duas soluções (j = 1, 2). Além disso, nos atemos ao caso em que m(t) = 1 e a frequência $\omega(t) = 1$ são constantes. A equação (94) nesse caso é simplificada como,

$$\ddot{f}_j + \Omega_j^2 f_j = 0. \tag{123}$$

Assumindo que $t \in \left[0, \frac{\omega^2}{\beta}\right]$ - garantindo assim que $\Omega_2^2 \ge 0$ - as soluções podem ser escritas como

$$f_{j,1} = \frac{\sqrt{\Omega_j^2}}{\beta^{1/3}} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \frac{\Omega_j^{3/2}}{\beta}\right),$$
(124)

$$f_{j,2} = \frac{\sqrt{\Omega_j^2}}{\beta^{1/3}} Y_{1/3} \left(\frac{2}{3} \frac{\Omega_j^{3/2}}{\beta}\right).$$
(125)

 $J_{1/3}$ e $Y_{1/3}$ são as funções Bessel de ordem $\frac{1}{3}$. A partir dessas equações e das condições iniciais podemos determinar $g_{j,-}$ e $g_{j,0}$ e por sua vez a função de onda exata.

3.3.1 Simulações Numéricas

A evolução das trajetórias das partículas é definida pelas derivadas $dx_a/dt e dx_b/dt$. Para obter essas equações basta fazer a transformação inversa $(x_1, x_2) \rightarrow (x_a, x_b)$ e utilizar novamente as relações

$$\frac{dx_a}{dt} = \frac{i}{2|\psi|^2} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right),\tag{126}$$

$$\frac{dx_b}{dt} = \frac{i}{2|\psi|^2} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial y} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial y} \right).$$
(127)

A função de onda exata é dada por

$$\Phi(x_a, x_b, t) = \sum_{n=0}^{\sqrt{M}-1} \sum_{m=0}^{\sqrt{M}-1} \left(\frac{2\pi i \theta_{n,m}}{(\sqrt{M}-1)} \psi_n(x_1(x_a, x_b), t) \psi_m(x_2(x_a, x_b), t) \right),$$
(128)



Figura 16 - Três trajetórias com condições iniciais diferentes: i) $(x_a(0), x_b(0)) = (0.24, 0.32)$, ii) $(x_a(0), x_b(0)) = (-2.89, -2.90)$ e iii) $(x_a(0), x_b(0)) = (1.0, -1.0)$.

Fonte: O autor, 2019.

onde as fases $\theta_{n,m}^{14}$ são determinadas aleatóriamente e M é o número total de modos. Definimos para as próximas simulações a constante $\beta = 0.1$), o que nos permite calcular a evolução de trajetórias e distribuições até $t = 10^{15}$.

A análise da evolução de outros sistemas [57, 55, 52] indicou a possibilidade de relacionar o número de modos M com o relaxamento do sistema. Essa relação estaria conectada com o número de nodos (onde $|\psi|^2 = 0$) na definição da função velocidade, e por conseqüência na complexidade das trajetórias. Como já observamos anteriormente, a importância do número de nodos para uma evolução caótica já foi observada para o sistema de uma partícula em um poço potencial bidimensional [82]. Mais recentemente, foi feito um estudo [88] analítico sobre a relação matemática entre a escolha dos estados iniciais, nodos e vórtices baseado em *campos de arrasto* ('drift fields'). Aqui, começamos a análise do sistema de dois osciladores acoplados observando trajetórias com posições iniciais próximas e a relação entre a complexidade das mesmas e o número de modos. As trajetórias foram obtidas de forma análoga às trajetórias demonstradas ao final do Capítulo 2, utilizando um método Runge-Kutta-Fehlberg adaptativo inicialmente com tolerância absoluta fixada em $\delta = 10^{-5}$. Checamos o resultado realizando cálculos subsequenciais para a trajetória com um valor $\delta/4$, comparando os dois resultados e, caso a diferença entre os dois fosse maior do que 0.01, o processo foi repetido até o número de tolerância mínima $\delta = 10^{-15}$.

Antes de analisar aspectos das trajetórias no espaço de configurações, observamos a evolução das mesmas no espaço real unidimensional na figura (16). Calculamos três

 $^{^{14}}$ As fases utilizadas
neste capítulo são geradas utilizando a ferramenta RandomTools
contida no programa Maple^{\rm TM}versão 2017.

 $^{^{15}}$ Utilizamos unidades atômicas com $\hbar=c=1.$



Figura 17 - Três trajetórias com posições iniciais próximas para M = 4,25e49.



É importante ressaltar que não calculamos trajetórias para $t > \omega^2/\beta$ porque numéricamente o tratamento de funções de Bessel com argumentos imaginários ainda não é confiável e os códigos disponíveis se mostraram computacionalmente inviáveis. No entanto, dentro do intervalo $t \in \left[0, \frac{\omega^2}{\beta}\right]$ podemos observar diversas tendências importantes para o estudo deste caso.

Como podemos ver na Figura (17), para o caso M = 4 não há divergência entre trajetórias que iniciam muito próximas. Além disso, as trajetórias apresentadas não se afastam considerávelmente de suas posições originais, o que em [57] foi analisado em detalhes para um conjunto de trajetórias e caracterizado como um confinamento causado pelo pequeno número de nodos na função de onda. Se aumentarmos o número de modos para M = 25, observamos um afastamento maior entre as posições inicial e final e trajetórias com curvas fechadas que indicam a possível presença de nodos próximo às mesmas. Ainda assim, outra característica apontada anteriormente como indicativo de um sistema caótico [52], a divergência de trajetórias inicialmente próximas, não acontece para o caso M = 25. No entanto, se aumentarmos o número de modos totais para 49 podemos observar os três efeitos; distância entre posições iniciais e finais relevante, complexidade das trajetórias e divergência entre posições finais que se iniciaram próximas.

Essa sequência de gráficos é um forte indicativo de que há uma correlação direta entre o número de modos (e consequentemente, de nodos) e a característica caótica das trajetórias. Ainda assim, não é o suficiente para correlacionar esse fato a uma tendência direta para o relaxamento. Além disso, como ressaltado em [57], é importante analisar um grande número de condições iniciais, como posições e fases da função de onda, para obter uma definição sobre essas relações. Mesmo que a relação entre caos e relaxamento para o equilíbrio não seja definitiva, ao analisarmos a evolução de distribuições e da função $\bar{H}(t)$ para números diferentes de modos e para fases diferentes em uma rede com um número considerável de trajetórias podemos tirar conclusões mais gerais sobre essa correlação.

Antes de prosseguirmos para a análise das distribuições, é importante ressaltar um dos pontos controversos da Teoria da Onda Piloto que fica evidente nos gráficos anteriores. Diferente do que acontece nos casos em que estamos lidando com problemas envolvendo uma partícula em um espaço bidimensional, no problema analisado neste capítulo temos uma dimensão espacial e duas partículas. Isso quer dizer que o que nos referimos por "trajetórias" nos parágrafos anteriores, são trajetórias no espaço de configurações formado pelas coordenadas das duas partículas $x_a e x_b$. Em geral, funções de onda que descrevem sistemas de muitas partículas terão a característica fundamental de evoluir nesse mesmo espaço, o que está de acordo com a análise que correlaciona as complexidades das trajetórias com a presença de nodos nas mesmas. Como veremos a seguir, a evolução das distribuições no espaço de configurações também pode ser utilizada para a análise do relaxamento ao equilíbrio quântico.

O cálculo numérico para a evolução da distribuição $\rho(x_a, x_b, t)$ se deu de forma diferente para o caso dependente do tempo, especialmente por questões de tempo de cálculo e capacidade computacional. No método descrito no Capítulo 2 o uso do *backtracking* foi utilizado para evitar dispersões ou concentrações na rede, mas com ele guardar dados referentes à determinados tempos $t = t_f$ depende de realizar cálculos em todo o intervalo $t_f \rightarrow t_i$ para cada conjunto de dados que desejamos coletar. No intuito de obter o maior número de valores para H(t), nas simulações realizadas neste capítulo utilizamos o mapeamento $(x_a(0), x_b(0)) \rightarrow (x_a(t), x_b(t))$ para observar a evolução da distribuição diretamente de alguma escolha inicial. Essa escolha, por sua vez foi feita distribuindo um número Nde partículas aleatóriamente segundo uma gaussiana contida em uma caixa, para cada cálculo realizado a função inicial ρ_0 é numéricamente diferente mas tem a mesma forma geral. Como não temos uma rede fixa de pontos para cada $\rho(x_a, x_b, t)$, o processo de coarse-graining é realizado contando o número de partículas em cada célula e calculando a média de suas posições. O valor do módulo quadrado da função de onda independe da distribuição exata de partículas e sua evolução é governada apenas pela equação de Schrödinger.

Inicialmente, calculamos a evolução de uma rede composta por 25 por 25 células e uma distribuição fora do equilíbrio de 10000 pontos. Na Figura (18) vemos um exemplo em que a onda piloto tem 9 modos e ρ tende à forma da função de onda em um período de tempo ($0 \le t \le 9.99$), no entanto em algumas regiões pode-se perceber uma discrepância maior entre as duas funções indicando que o relaxamento não é completo ou que não houve tempo suficiente para a função $\bar{H}(t)$ relaxar no intervalo de tempo analisado. No



-0

-5

Figura 18 - Distribuição $\rho(x_a,x_b,t)$ e $|\psi(x_a,xb,t)|^2$ para o caso de M = 9 e 625 células.

Fonte: O autor, 2019.

0

entanto, se aumentamos o número de modos para 25 (Figura (19)), a similaridade entre as duas funções se torna mais evidente. As distribuições são um bom indicativo qualitativo do relaxamento ao equilíbrio, tendo em vista que o quociente entre $\rho(x_a, x_b, t)$ e o módulo quadrado da função de onda é o principal elemento responsável pela função $\bar{H}(t)$. Ainda assim, uma análise numérica mais detalhada da função H para os diferentes parâmetros é necessária para confirmarmos o que os resultados apresentados até aqui indicam.

O cálculo de H(t) se dá da forma usual,

$$\bar{H}(t) = \int \int \left(\bar{\rho}(x_a(t), x_b(t), t) \ln(\frac{\bar{\rho}(x_a(t), x_b(t), t)}{|\bar{\psi}(x_a, x_b, t)|^2}) \right) dx_a dx_b,$$
(129)

realizando as integrais numéricas sobre os valores *coarse-grained* em cada célula e utilizando o módulo quadrado da função de onda dada pela equação (116), com os fatores $g_{j,+}, g_{j,0} \in g_{j,-}$ obtidos a partir das funções (123) e (124). Calculamos uma sequência de 500 valores de $\bar{H}(t)$, para diversas combinações de três parâmetros: o números de modos, a constante β e as fases iniciais $\theta_{i,j}$.

Na Figura (19) observamos uma amostra dos resultados que obtemos para uma rede com 200000 pontos. A diminuição do tempo crítico de acordo com o aumento de Mindica a já mencionada relação entre o número de modos o relaxamento quântico (Figura 20a). No caso mais simples possível, M = 4, o relaxamento quase não acontece e isso reforça a ideia de que estados com superposições de poucos modos da função de onda possam ser os melhores candidatos para observação de comportamentos fora do equilíbrio [70].

A variação de β (Figura 20b), por sua vez, mostra o efeito contrário de aumentar, mesmo que levemente, o tempo crítico. Isso significa que quanto maior a intensidade da interação maior o tempo de decaimento e demonstra que a interação poderia ser um fator relevante para evitar que o sistema atinja o equilíbrio quântico ou ao menos para retardá-lo. Outra variação que demonstra um fato interessante, discutido em parte em [57, 59, 88], é a das fases (Figura 20c). Para um mesmo número de modos e o mesmo valor de $\beta = 0.1$ observamos comportamentos bem diversos para a função $\bar{H}(t)$, não só no cálculo de t_c mas também nas oscilações encontradas durante o decaimento. Como já mencionado, as fases são geradas através de um mecanismo aleatório e essa influência considerável nas escalas de relaxamento deve ser levada em consideração na avaliação dos resultados a segiuir.

Além do que podemos observar a partir da variação de parâmetros e analisaremos com mais detalhe nos próximos parágrafos, o primeiro resultado que podemos confirmar em nosso trabalho é o da tendência geral de decaimento para a função $\bar{H}(t)$ e um ajuste exponencial razoável, corroborando assim as conclusões obtidas em trabalhos anteriores [52, 55]. O sistema estudado aqui tende ao equilíbrio quântico para todos os casos estudados através de nossas simulações, a não ser para M = 4.

Figura 19 - Distribuição $\rho(x_a, x_b, t) \in |\psi(x_a, xb, t)|^2$ para o caso de M = 25 e 625 células de coarse-graining.

 $\overline{\psi(0.)^2}$

2

 $\overline{\rho(0.)}^2$







Fonte: O autor, 2019.

Figura 20 - As funções $\ln(\bar{H}(t))$ são superpostas com funções exponenciais do tipo $H(t) = H_0 \exp(-t/t_c)$, geradas a partir de um ajuste com os dados obtidos nas simulações.



(a) Funções $\ln(\bar{H}(t))$, com $\beta = 0.1$ para M = 4, 16e36, respectivamente.



(b) Funções $\ln(\bar{H}(t))$ com M = 25 e $\beta = 0.01, 0.05$ e 0.1, respectivamente.



(c) Funções $\ln(\bar{H}(t))$ com M = 49 e $\beta = 0.1$, mas com três conjuntos de fases iniciais diferentes. Fonte: O autor, 2019.

β	t_c , preset 1	t_c , preset 2	t_c , preset 3
0.010	12.61134572	24.46552608	9.437514847
0.025	12.56660637	26.70231493	11.06667304
0.050	14.71651186	29.41669903	12.11988488
0.075	17.85155105	28.22981740	12.88567370
0.100	16.64248088	35.27814852	15.83375621

Tabela 1 - Conjunto de tempos críticos para M = 16.

Fonte: O autor, 2019.

Tabela 2 - Conjunto de tempos críticos para M = 25.

β	t_c , preset 1	t_c , preset 2	t_c , preset 3
0.010	16.29726772	12.71546130	17.07070582
0.025	16.09702335	12.77966392	17.94195733
0.050	17.14057965	11.32431304	17.64759914
0.075	17.87608279	13.98017535	18.77694708
0.100	20.84185958	15.08810997	23.43999868

Fonte: O autor, 2019.

O objetivo central aqui é analisar os efeitos da interação no tempo de decaimento ao equilíbrio. Se definimos o potencial dependente do tempo como $2\beta k(t)$, ao variarmos o valor de β estamos afetando a intensidade da interação entre as partículas com coordenadas $x_a \in x_b$. Nesse sentido, calculamos diversos tempos críticos para números de modos e $\beta's$ variando os valores das fases iniciais. Chamaremos cada conjunto de $\theta'_{i,j}s$ de presets. Nosso objetivo inicial é confirmar se há de fato uma relação entre o aumento de β e o de t_c . Na Tabela 1 observamos a evolução do tempo crítico com a constante de acoplamento e podemos ver um claro crescimento nas três colunas. O crescimento pode ser visto como oscilatório e não-linear, mas há um aumento - $\Delta t_c \approx 4$ para o preset 1, $\Delta t_c \approx 10$ para o preset 2 e $\Delta t_c \approx 6$ para o preset 3 - entre os valores do tempo crítico para $\beta = 0.01$ e $\beta = 0.1$. Na Tabela 2 observamos o mesmo comportamento para os tempos críticos com uma superposição M = 25 e a mesma ordem de variação, apesar de encontrarmos algumas oscilações mais evidentes no aumento do valor de t_c .

No caso de números maiores de modos, o crescimento se torna menos evidente. Na primeira coluna da Tabela 3 (M = 36), por exemplo, quase não há variação em t_c com o crescimento de β . Ainda assim há um crescimento constante para os dois outros *preset*'s. Para M = 49, tabela 4, todas as colunas têm algum tipo de comportamento oscilatório mas também têm um crescimento entre os valores para $\beta = 0.01$ e $\beta = 0.1$. Como observamos na Figura 20, o decaimento da função $\bar{H}(t)$ não é estrito e as diversas oscilações fazem com que o ajuste exponencial não seja exato. O aumento da maioria dos tempos críticos, com diferentes modos e conjuntos de fases, é forte indicativo de que exista

β	t_c , preset 1	t_c , preset 2	t_c , preset 3
0.010	10.60220981	8.820545032	11.64474341
0.025	11.13737116	8.985045843	11.76654960
0.050	10.77269030	9.693038746	14.24467549
0.075	10.91482036	10.43354165	14.52454740
0.100	9.988931694	11.01442914	15.89168251

Tabela 3 - Conjunto de tempos críticos para M = 36.

Fonte: O autor, 2019.

Tabela 4 - Conjunto de tempos críticos para M = 49.

β	t_c , preset 1	t_c , preset 2	t_c , preset 3
0.010	8.089835363	20.18509102	14.12526210
0.025	7.428747602	17.77999285	14.33585551
0.050	7.936872107	19.26652789	13.79745024
0.075	8.779144865	22.85616237	14.59794181
0.100	9.497044907	30.84923934	15.24428071

Fonte: O autor, 2019.

de fato uma relação entre a intensidade de interação e um retardamento no decaimento para o equilíbrio.

Outra questão que merece ser observada é o efeito da variação das fases sobre o relaxamento quântico. Por exemplo, no caso M = 49 (Tabela 4) temos escalas muito diferentes para o crescimento de $t_c \operatorname{com} \beta$ para diferentes *presets*. Essa divergência implica que sistemas com fases diferentes podem ter tempos de decaimento consideravelmente diversos. As trajetórias são guiadas por funções de onda que diferem apenas nos valores das fases e essa divergência entre as dinâmicas é causada pelo caráter caótico desses sistemas. Portanto, é preciso levar em conta essas variações se for feita uma tentativa de estimativa do tempo de decaimento para sistemas realistas, considerando um conjunto de estados iniciais suficientemente variado, realizando não só mudanças nas fases mas também nas possíveis distribuições.

Em [55] diferentes conjuntos de fases foram utilizados para cálculos da evolução de \bar{H} para o sistema do poço de potencial bidimensional mas eles foram utilizados apenas para construção de barras de erro, mas aqui a variância entre os valores de t_c (τ na notação de [55])) para cada conjunto de $\theta_{i,j}$ é da mesma ordem de grandeza que a variação de acordo com β e com M. Por outro lado, em [88] o efeito de distribuições iniciais muito diferentes da função de onda inicial e uma caracterização para quais parâmetros devem ser levados em consideração foi realizada. Dessa forma, para casos como o nosso - funções de onda iniciais apenas com fases diferentes - os efeitos de mudanças nas fases ainda não foram própriamente estudados analíticamente e numéricamente e deve se dar atenção para essas

β	M = 9	M = 16	M = 25
0.010	3.32753330444258	2.74114936633197	2.73184126574011
0.025	3.19508150112557	2.82010017913205	2.74766922380860
0.050	3.19940237470728	2.93124878681311	2.73247159707928
0.075	3.91673007185517	2.97836639153112	2.82599530204506
0.100	4.17050179474248	3.11727690124758	2.98517622449558
β	M = 36	M = 49	
0.010			
0.010	2.33754991176532	2.64854051891370	
$\frac{0.010}{0.025}$	2.33754991176532 2.36364778678020	2.64854051891370 2.57881675808076	
	2.33754991176532 2.36364778678020 2.44842719587694	2.64854051891370 2.57881675808076 2.61498051530898	
$ \begin{array}{r} 0.010 \\ 0.025 \\ 0.050 \\ 0.075 \\ \end{array} $	2.33754991176532 2.36364778678020 2.44842719587694 2.48137010942795	2.64854051891370 2.57881675808076 2.61498051530898 2.73508692687548	
$ \begin{array}{r} 0.010 \\ 0.025 \\ 0.050 \\ 0.075 \\ 0.100 \\ \end{array} $	2.33754991176532 2.36364778678020 2.44842719587694 2.48137010942795 2.50946492663486	2.64854051891370 2.57881675808076 2.61498051530898 2.73508692687548 2.91940120317061	

Tabela 5 - Valores médios para $\ln(t_c)$.

Fonte: o autor, 2019.

variações em aplicações futuras do teorema H.

A partir das simulações que fizemos, podemos calcular as médias dos valores obtidos para t_c para cada um dos três conjuntos de fases e observar a evolução em relação à M e β na Tabela 5.

Novamente, a relação entre β e t_c não é definitiva, mas todas as colunas apresentam algum crescimento, mesmo que sutil. Por outro lado, observando a evolução dos valores na direção horizontal, de acordo com o aumento de M, vemos que a diminuição de $\ln(t_c)$ ocorre na mesma escala de $t \sim 1$ e com alguma oscilação.

Esses resultados devem ser considerados preliminares por diversos motivos. Primeiramente, o efeito das variações do conjunto de fases é muito mais relevante do que foi mencionado para outros casos estudados [52, 57, 55]. Sendo assim, uma avaliação estatística razoável deveria contar com uma variedade de fases iniciais muito maior para confirmar a tendência que o conjunto aqui estudado. A simulação que desenvolvemos se limita a calcular uma sequência de valores de H(t) para cada conjunto de parâmetros $(M, \beta, \theta[i, j])$, e cada uma dessas sequências requer um custo computacional que torna inviável um cálculo para um número considerável de conjuntos de fases. Pela mesma razão a oscilação no crescimento dos valores de β fica ainda pouco explorada. Mesmo no pequeno intervalo em que calculamos - entre 0.01 e 0.1 - poderíamos fazer cálculos de mais valores intermediários para medir própriamente o crescimento de t_c com a interação. E preciso ressaltar também que a limitação à esse intervalo de $\beta's$ também se dá por conta do limite no intervalo de tempo considerado $t \in [0, \frac{\omega^2}{\beta}]$. Com o intuito de estudarmos a variação da interação de forma que pudessemos observar à evolução dos sistemas por um mesmo período de tempo e garantindo que esse tempo não fosse muito curto ou muito longo, nos atemos ao intervalo [0, 9.99] que nos permitiu aumentar β até 0.1. Tentar elevar esse número faz com que o intervalo de tempo analisado se torne muito curto e os efeitos da evolução do sistema menos evidentes.

A questão numérica foi um fator decisivo nas escolhas de parâmetros feitas nessa tese. O desenvolvimento de um programa original para resolver numéricamente as equações para $x_a \in x_b$, acopladas e com a dependência temporal explícita na função de onda foi extremamente complexo. Para diminuir o tempo de computação das trajetórias, o método Runge-Kutta-Fehlberg foi usado em pequenos sub-intervalos de tempo entre os quais as funções com dependência temporal explicita - $g_{-}(t), g_{0}(t)$, e a integral contida na função de onda (116) - haviam sido calculadas previamente. Somente com esse método foi possível realizar calculos da função $\bar{H}(t)$ e das distribuições $\rho(x_a, x_b)$ para uma quantidade razoável de trajetórias e em tempos que permitissem fazer diversos cálculos variando os parâmetros. Como já mencionamos, o cálculo numérico de funções de Bessel utilizado [84] se limita a valores reais dos argumentos e por isso nosso cálculo teve também a limitação nos intervalos de tempo analisados. Considerando as características das trajetórias clássicas e sua semelhança com o período analisado nas trajetórias quânticas, no entanto, pode-se entender o período contido em $[0, \frac{\omega^2}{\beta}]$ como um período oscilatório depois do qual haverá um afastamento das duas partículas e, sendo assim, a relevância da interação estaria mais evidente neste período.

Por fim, concluímos que a interação pode ser um fator relevante no retardamento do relaxamento quântico. Observamos também que talvez exista uma relação entre o aumento do número de modos e uma desaceleração do crescimento do tempo crítico com a constante β , tendo em vista que para os valores médios na Tabela 5 vemos um $\Delta t_c \approx 0.9$ para M = 9 e $\Delta t_c \approx 0.25$ para M = 49. Isso poderia estar relacionado com o aumento do número de nodos do sistema [82, 88] e pode ser um fator relevante na busca de sistemas que possam ter permanecido fora do equilíbrio de forma a serem detectados hoje, seja no CMB ou em partículas que desacoplaram logo após a inflação e possam ser detectadas hoje [68, 70, 72, 58, 59]. Nossos resultados indicam que sistemas com uma interação maior e poucos modos podem levar mais tempo à decair ao equilíbrio. Desenvolvimentos de simulações para sistemas mais próximos de cenários cosmológicos e de altas energias poderiam nos dar outras informações e um aumento da variação dos parâmetros como mencionado acima também devem ser realizados. Deixamos essa possibilidade aberta para trabalhos futuros.

Na próxima seção descrevemos alguns dos cenários em que poderíamos encontrar sistemas fora do equilíbrio na natureza e discutimos quais são as possíveis janelas experimentais para encontrarmos violações da regra de Born.

3.4 Possíveis Sistemas Fora do Equilíbrio

A partir da ideia de que é possível que existam sistemas que não obedeçam a regra de Born inicialmente, foi demonstrado que sistemas isolados, como o poço potencial e o oscilador harmônico, em geral *tendem* à atingir o equilíbrio em um curto espaço de tempo. Contudo, os resultados encontrados na literatura - corroborados pela discussão e simulações discutidos na seção anterior - também evidenciam algumas situações em que é possível que o relaxamento seja retardado ou não se dê de forma completa [57, 56]. Além disso, o teorema H quântico foi estudado até agora para um conjunto limitado de estados iniciais e apenas muito recentemente a discussão sobre o efeito de estados "extremamente" fora do equilíbrio foi levantada [88]. Por esses motivos, é fundamental discutir a possível existência do não-equilíbrio na natureza, buscar cenários onde este seja detectável experimentalmente e discutir o comportamento desses sistemas para além da questão do relaxamento [58, 70, 69, 74, 59].

O não-equilíbrio quântico pode ter existido no início do Universo, quando o relaxamento possívelmente ainda não tenha acontecido. Efeitos quânticos durante esse período podem deixar traços observáveis no CMB (*Cosmic Microwave Background*) ou em sistemas que desacoplaram logo após o período inflacionário [68]. Se as anisotropias observadas no espectro de temperatura do CMB são geradas por efeitos quânticos antes ou durante a inflação, há a possibilidade de encontrarmos evidências experimentais da violação da regra de Born através da análise das flutuações de temperatura. Já foi demonstrado [68, 70, 71] que em um Universo em expansão dominado por radiação o relaxamento quântico de um campo escalar pode ser suprimido para longos comprimentos (*super-Hubble*) de onda, enquanto acontece de forma eficiente para os demais.

Para analisar os possíveis efeitos do não-equilíbrio no CMB é preciso verificar como o inflaton evoluiria durante a inflação caso estivesse fora do equilíbrio ao início da mesma. Isso foi feito em [69], analisando as trajetórias dos graus de liberdade de um inflaton que esteja inicialmente no vácuo de Bunch-Davies com uma distribuição $\rho(q_{\mathbf{k}r}, 0) \neq \psi(q_{\mathbf{k}r}, 0)$, onde r = 1, 2 indica a decomposição do campo $\phi_{\mathbf{k}} = \frac{\sqrt{V}}{(2\pi)^{3/2}}(q_{\mathbf{k}1}+iq_{\mathbf{k}2})$. Em termos do tempo conforme $\eta = -1/Ha$, a função de onda correspondente é um produto $\Psi(q_{\mathbf{k}r}, \eta) = \prod_{\mathbf{k}r} \psi_{\mathbf{k}r}(q_{\mathbf{k}r}, \eta)$ de pacotes gaussianos [69] que se contraem com o tempo. A solução da equação guia neste caso é dada por

$$q_{\mathbf{k}r}(\eta) = q_{\mathbf{k}r}(0)\sqrt{1+k^2\eta^2}.$$
(130)

Substituindo esse resultado na equação de continuidade para a distribuição obtemos

$$\rho_{\mathbf{k}r}(q_{\mathbf{k}r},\eta) = \frac{1}{\sqrt{1+k^2\eta^2}} \rho_{\mathbf{k}r}(q_{\mathbf{k}r}/\sqrt{1+k^2\eta^2},0)$$
(131)

Portanto, a evolução temporal resulta em uma contração para qualquer distribuição inicial com largura dada por $D_{\mathbf{k}r}(\eta) = D_{\mathbf{k}r}(0)\sqrt{1+k^2\eta^2}$. A função de onda, por sua vez, evolui como um pacote gaussiano contraindo com largura dada por $\delta_k(\eta) = \delta_k(0)\sqrt{1+k^2\eta^2}$. Assumindo que $D_{\mathbf{k}r}$, assim como δ_k , não depende de r e da direção de \mathbf{k} , podemos definir uma quantidade que quantize o desvio do equilíbrio ao início da inflação para cada modo k como

$$\frac{D_k(t)}{\delta_k(t)} = \sqrt{\xi(k)},\tag{132}$$

que é constante no tempo. Esse resultado pode ser reescrito como

$$\xi = \frac{\langle |\phi_{\mathbf{k}}|^2 \rangle}{\langle |\phi_{\mathbf{k}}|^2 \rangle_{QT}} \tag{133}$$

em termos da variância fora do equilíbrio e a prevista pela teoria quântica ortodoxa $\langle |\phi_{\mathbf{k}}|^2 \rangle$. Desta maneira, se $\xi \neq 1$ ao início da inflação esta diferença será preservada ao longo da mesma. Como as perturbações do inflaton nesse período podem afetar as perturbações do espectro de curvatura primordial observado no CMB [89], uma previsão teórica a respeito do valor de $\xi(k)$ pode ser comparada com valores observados para o espectro angular (*angular power spectrum*). Estimativas para o valor teórico que $\xi(k)$ pode assumir já foram feitas [71, 72] e estão atualmente sendo comparadas com resultados experimentais.

Se é possível que o inflaton carregue não equilíbrio da era pré-inflacionária até o fim da mesma, devemos considerar que os produtos do decaimento em outras partículas primordiais possam carregar esse efeito. Tendo em vista que a maioria dos modelos cosmológicos aceitos atualmente prevê que toda a matéria foi gerada nesse processo, é razoável estudar a transferência de não-equilíbrio entre o inflaton e os produtos do decaimento [58].

Durante a inflação o inflaton pode ser descrito pela soma de uma parte homogênea mais uma pequena perturbação

$$\phi(\mathbf{x},t) = \phi_0(t) + \phi(\mathbf{x},t). \tag{134}$$

Como já descrevemos, as perturbações não relaxam neste período e, além disso, a expansão exponencial do espaço pode transferir o não equilíbrio para escalas macroscópicas. Em um cenário com uma etapa de pré-aquecimento (*preheating*), a parte homogênea do inflaton $(\phi_0(t))$ age sobre o vácuo de outros campos quânticos excitando-os por ressonância paramétrica. Como $\phi_0(t)$ age essencialmente como um campo externo clássico, esse processo não deve gerar transferência de não-equilíbrio para seus produtos. Durante o período de reaquecimento (*reheating*) o decaimento perturbativo do inflaton pode ocorrer, e portanto as partículas criadas a partir desse processo podem estar fora do equilíbrio. É durante essa etapa que a interação pode se tornar importante para a detecção de partículas que não respeitem a regra de Born. Um dos cenários em que o reaquecimento acontece, envolve o acoplamento do inflaton com um campo bosônico Φ e um fermiônico ψ descrito pela Hamiltoniana de interação

$$\mathcal{H}_{int} = a\phi\Phi^2 + b\phi\bar{\psi}\psi,\tag{135}$$

onde $a \in b$ são constantes [90]. Ainda nesse processo, a parte homogênea é dominante e tratada como um campo clássico com uma correção dada pela perturbação quântica. Dessa forma, mesmo que ocorra o processo de transferência de não equilíbrio pelo inflaton ele será percebido como uma pequena perturbação no estado total dos campos. Por outro lado, a distribuição de probabilidade dos produtos do decaímento deriva-se do estado total inicial, que inclui não só o inflaton mas os estados de vácuo do campo bosônico e fermiônico. Como as perturbações durante a inflação não relaxam, pode-se esperar que os graus de liberdade do vácuo dos outros campos também estejam fora do equilíbrio ao fim desse período (apesar de um tratamento téorico completo dessa hipótese ainda não existir). Uma outra condição ainda deve ser atendida para que se possa observar violações da regra de Born nesse cenário; as partículas devem ser criadas após o tempo de desacoplamento das mesmas, para que colisões e interações não causem o rápido relaxamento. No entanto, tendo em vista os resultados da seção anterior é importante conceber a possibilidade de que determinadas interações possam não ser totalmente prejudiciais para a preservação do não-equilíbrio. É possível que determinados pares criados e ainda interagindo com outras partículas possam ter mais resistência que outros ao decaimento. Um tratamento teórico da criação de pares fora do equilíbrio e sua subsequente interação também deve ser levado em consideração.

Apesar de aparentemente improváveis, as condições para que possamos observar estados fora do equilíbrio quântico existem. Considerando que os modelos e simulações para sistemas realísticos ainda são escassos, que os modelos cosmológicos ainda permitem diversas interpretações sobre as observações experimentais obtidas até agora e especialmente que o efeito de interações sobre a evolução da função H(t) ainda não foi estudado propriamente¹⁶, essa possibilidade está em aberto e merece uma investigação aprofundada. É com esse objetivo que produzimos esta tese: iniciar uma investigação teórica e numérica na evolução para o equilíbrio de sistemas em interação. O desenvolvimento de um tratamento teórico para um sistema com interação e em um cenário cosmológico, bem como simulações para avaliar a evolução da função H(t) serão assunto de desenvolvimentos futuros baseados no estudo e nos resultados aqui apresentados.

¹⁶ A não ser por um modelo simplificado com dois campos de Klein-Gordon [58].

CONCLUSÃO

" To try to stop all attempts to pass beyond the present viewpoint of quantum physics could be very dangerous for the progress of science and would furthermore be contrary to the lessons we may learn from the history of science. This teaches us, in effect, that the actual state of our knowledge is always provisional and that there must be, beyond what is actually known, immense new regions to discover."^a[17]

Iniciamos esta tese apresentando a história da mecânica quântica e da interpretação de Copenhagen. Discutimos os principais paradoxos associados em geral aos fenômenos quânticos e demonstramos como a visão ortodoxa em torno do formalismo extremamente poderoso criado por Born, Heisenberg, Bohr, Dirac, von Neumann e muitos outros não é inescapável. Seguindo os questionamentos de Einstein e inspirado pelos trabalhos de David Bohm, que por sua vez foi inspirado por de Broglie, John Bell foi capaz de demonstrar não só que as chamadas "variáveis escondidas" eram possíveis mas também que já existia uma teoria que respeitava todas as restrições impostas pela natureza dos resultados experimentais [1].

A Teoria da Onda Piloto teve seu início em 1927 com as ideias de de Broglie mas só teve sua fundação completa com Bohm em 1952, que à colocou em termos de postulados e à aplicou diretamente à experimentos já conhecidos comprovando sua completa validade enquanto teoria. Da mesma maneira que os adeptos a escola de Copenhagen, no entanto, de Broglie e Bohm encontraram dificuldades em descrever a exata natureza da função de onda, definindo-a amplamente como um campo-guia mas sempre ressaltando sua diferença essencial em relação aos demais campos conhecidos da natureza. A interpretação ontológica de Bohm [44] naturalmente o obrigava a encontrar uma explicação para o papel

^a Tentar parar todas as tentativas de passar além do ponto de vista atual da física quântica poderia ser muito perigoso para o progresso da ciência e seria, além disso, contrário às lições que aprendemos com a história da ciência. Isso nos ensina que o estado real do nosso conhecimento é sempre provisório e devem existir, além do que é realmente conhecido, imensas novas regiões para descobrir. (Tradução nossa.)

dual da função de onda e foi o que deu início à busca por uma origem dinâmica para o comportamento estatístico da onda piloto [45].

Conectando a necessidade de uma descrição dinâmica para a origem de probabilidades quânticas e a aparente "conspiração" em volta da localidade de sinais em contraposição à não-localidade da mecânica quântica, Antony Valentini [46, 47] desenvolveu uma versão quântica para o teorema H. Esse desenvolvimento permitiu uma visualização de como se daria o processo de decaimento para uma distribuição inicialmente fora do equilíbrio, violando a regra de Born, até o estado onde H(t) é mínimo. Esse processo de relaxamento ainda precisa ser observado na natureza, mas a simples demonstração de que é possível existir um estado em que $\rho(x,t) \neq |\psi(x,t)|^2$ e ainda explicar a concordância dos resultados experimentais com a regra de Born nos permite teorizar sobre a possibilidade de encontrar violações nas leis da Mecânica Quântica Ortodoxa. Foi aberto assim um caminho pelo qual poderíamos explorar fenômenos que se pensava serem proíbidos pelas leis da natureza. Além disso, uma demonstração da validade do teorema H serve para corroborar a importância do estudo da Teoria da Onda Piloto em todas as suas possibilidades.

Discutimos no Capítulo 1 todos os aspectos gerais da Teoria da Onda Piloto e, ao demonstrar sua aplicação à alguns problemas considerados paradoxais do ponto de vista da Interpretação de Copenhagen, deixamos claro a simplicidade e a lógica das explicações oferecidas nesse contexto para determinados fenômenos. Essa apresentação foi feita no intuito de deixar clara a consistência da teoria como um todo.

No Capítulo 2 apresentamos com detalhe o desenvolvimento do teorema H clássico, deixando claro que não é apenas do ponto de vista da dinâmica quântica que existem paradoxos na interpretação física dos eventos. A discussão em torno das condições iniciais é importante para ressaltarmos até que ponto podemos considerar os teoremas estudados como válidos e, por outro lado, como podemos generalizar os resultados obtidos a partir deles para superar dificuldades teóricas abstratas. A condição de não existência de microestrutura para os estados iniciais é exigida para validade das provas tanto da versão clássica como da quântica do teorema H. Essa condição, no entanto, não é extremamente restritiva e pode ser considerada uma polêmica em torno da teoria estatística com poucas consequências nos resultados de experimentos reais.

Ainda no Capítulo 2 apresentamos as primeiras simulações numéricas realizadas para observar o relaxamento para o equilíbrio quântico, descrevendo como o decaimento tem uma tendência exponencial para sistemas bidimensionais simples. Também descrevemos o cálculo numérico envolvido na solução das trajetórias e no cálculo das distribuições através do processo de *backtracking* e *coarse-graining*. Demonstramos nossa primeira versão da simulação numérica aplicada ao oscilador harmônico bidimensional e obtivemos resultados análogos aos encontrados na literatura [57].

No Capítulo 3, finalmente, nos dedicamos ao objetivo central desta tese: estu-

dar o decaimento e os efeitos da interação em um sistema de dois osciladores acoplados por um potencial dependente do tempo. Primeiramente apresentamos a solução clássica para as trajetórias do sistema, observando seu comportamento oscilatório, e em seguida apresentamos uma solução para equação de Schrödinger desse sistema baseada em desenvolvimentos anteriores para osciladores dependentes do tempo [87, 70]. Analisamos então as trajetórias das partículas desse sistema e a mudança de seus aspectos de acordo com o aumento do número de modos, observando também a evolução para o equilíbrio de distribuições através de comparações com a função de onda.

Essa análise foi feita utilizando um código numérico original, desenvolvido para superar diversas dificuldades encontradas no tratamento das funções de Bessel dependentes do tempo e na própria solução das equações acopladas para $x_a(t)$ e $x_b(t)$. O código é baseado no mesmo método de solução de equações diferenciais usado nas outras simulações do teorema H encontradas na literatura, mas não se baseia no método do *backtracking* e é limitado para argumentos reais da função de Bessel, o que nos leva a restringir o intervalo de tempo observado pela condição $[0, \frac{\omega^2}{\beta}]$.

Finalmente, os resultados obtidos demonstram um decaimento com velocidade variada para todos os sistemas estudados com M > 4 e esse decaimento tem um acordo razoável com o ajuste exponencial $\bar{H}_0 e^{\frac{-t}{t_c}}$ para a maioria dos sistemas. No entanto, mudanças no número de modos e nas fases iniciais podem causar oscilações de amplitudes variadas ao longo da curva de $\bar{H}(t)$. Também observamos uma relação entre o valor de t_c e o número de modos, confirmando resultados anteriores que indicam que o relaxamento é acelerado para valores mais altos de M.

Os efeitos da variação do acoplamento β no decaimento para o equilíbrio quântico também foram observados. Os resultados não podem ser considerados numéricamente conslusivos, porém apresentam dois indicativos interessantes de correlações que devem ser exploradas em simulações com uma capacidade de variação dos parâmetros maior do que a realizada por nós. Em primeiro lugar, o crescimento da constante de acoplamento parece estar correlacionado com um aumento do tempo crítico para todos os sistemas. Essa relação pode indicar que sistemas com um acoplamento maior tem uma tendência a relaxar mais lentamente. Essa diferença, no entanto, ainda é muito pequena no espectro de parâmetros que estudamos aqui, por exemplo, o valor de $\Delta t_c = t_c (\beta = 0.1) - t_c (\beta = 0.01)$ maior encontrado é da ordem de 10 o que equivale à ~ 10⁻¹⁶s , usando unidades naturais $c = \hbar = 1$ e considerando a massa do elétron $m = m_e = 1$. Ainda assim, a simples possibilidade de uma correlação entre aumento da interação e retardamento do decaimento é interessante e merece aprofundamentos futuros.

Outra tendência que se apresenta dos resultados da Tabela 5 é uma correlação entre o aumento do número de modos M e uma diminuição da variação de $t_c \text{ com } \beta$. Isso pode indicar que a 'vorticidade' causada pelo maior número de nodos na função de onda [88] pode ser um efeito dominante em comparação com a influência da intensidade do acoplamento.

Por fim, observamos uma inesperada variação nas escalas de decaimento conforme modificamos o conjunto de fases da função de onda inicial. Esse fato leva a crer que há uma importância em geral desconsiderada na escolha dos estados iniciais e que é preciso realizar um estudo estatístico mais aprofundado, com uma variação maior das fases e também das escolhas de estados iniciais para obter informações confiáveis sobre o relaxamento quântico. Em [88] foi feita uma discussão sobre o comportamento de estados iniciais 'extremamente' fora do equilíbrio e um mecanismo pelo qual esses sistemas podem decair ao equilíbrio e situações em que eles não decaem foram analisados. Mas métodos analíticos para deduzir os efeitos genéricos das fases mesmo para estados iniciais dentro da região em que a função de onda está distríbuida ainda precisam ser desenvolvidos. De qualquer forma, em simulações feitas no futuro é preciso considerar um conjunto maior de fases iniciais e analisar o efeito de mudanças na distribuição inicial.

Esses resultados indicam duas perspectivas interessantes para trabalhos futuros. A análise numérica apesentada aqui, como já afirmamos, encontrou limitações técnicas que limitaram o espectro de parâmetros estudado. Um estudo aprofundado das tendências encontradas em nossos resultados provavelmente revelaria mais detalhes das relações entre β , M e t_c para o caso de dois osciladores acoplados. Um conjunto maior de $\theta[i, j]'s$ poderia dar uma visualização mais exata das variações que encontramos, bem como diferenças maiores entre os valores mínimo e máximo para a constante de acoplamento. Portanto, ainda existem aprofundamentos necessários para analisar todos os detalhes desse sistema de osciladores.

A segunda perspectiva envolve ampliar a complexidade do problema teórico que estudamos aqui, extendendo-o para o caso de campos acoplados. Como foi demonstrado em

Uma questão que fica em aberto para desenvolvimentos futuros é a de uma possível transferência de não-equilíbrio para sistemas com interação. Em [58] foi demonstrado que para estados descrevendo dois campos de Klein-Gordon, em que um inicialmente está fora do equilíbrio e o outro está em equilíbrio, o resultado final é uma mistura de dois campos em que $\rho(q_1, q_2) \neq |\psi(q_1, q_2)|^2$. Esse resultado indica que a possibilidade descrita no ultimo parágrafo é realizável, ou seja, que um campo fora do equilíbrio pode transferir essa característica para outro. Seria interessante observar os efeitos da interação em que uma das partes do sistema estudado nesta tese respeite a regra de Born e pretendemos explorar essa possibilidade em trabalhos futuros.

Portanto, a análise realizada até aqui e os resultados encontrados são apenas o primeiro passo no estudo dos efeitos da interação no fenômeno do relaxamento quântico. Apresentamos razões teóricas e numéricas para acreditar que esse é um sistema relevante para ser estudado mais à fundo e que podemos encontrar comportamentos interessantes ao aprofundarmos nosso conhecimento acerca do sistema de dois osciladores com acoplamento dependente do tempo e da sua evolução para o equilíbrio quântico.

REFERÊNCIAS

1 BELL, J. S. *Speakable and unspeakable in quantum mechanics.* 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1987. 248 p.

2 BACCIAGALUPPI, G.; VALENTINI, A. Quantum theory at the crossroads: Reconsidering the 1927 Solvay conference. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 530 p.

3 BOHR, N. The quantum postulate and the recent development of atomic theory. *NATURE*, [S. l.], v. 121, n. 3050, p. 580–590, abr. 1928.

4 EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, Princeton, v. 47, p. 777–780, May 1935.

5 SCHRODINGER, E. Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik. *Naturwissenschaften*, Oxford, v. 23, p. 807–812, nov. 1935.

6 SCHRODINGER, E. Discussion of Probability Relations between Separated Systems. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Cambridge, v. 31, p. 555, oct. 1935.

7 CUSHING, J. Quantum Mechanics: Historical Contingency and the Copenhagen Hegemony. Chicago: University of Chicago Press, 1994. 317 p. (Science and Its Conceptual Foundations series).

8 BOHM, D. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of hidden variables. 1. *Phys. Rev.*, Princeton, v. 85, p. 166–179, jan. 1952.

9 BOHM, D. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of hidden variables. 2. *Phys. Rev.*, Princeton, v. 85, p. 180–193, jan. 1952.

10 EVERETT, H. "relative state" formulation of quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, [S. l.], v. 29, p. 454–462, jul. 1957.

11 PEARLE, P. Alternative to the orthodox interpretation of quantum theory. *American Journal of Physics*, Cambridge, v. 35, n. 8, p. 742–753, 1967.

12 HEISENBERG, W. Über quantentheoretische umdeutung kinematischer und mechanischer beziehungen. Zeitschrift für Physik, Göttingen, v. 33, n. 1, p. 879–893, dec. 1925.

13 CAMILLERI, K. Constructing the myth of the copenhagen interpretation. *Perspectives on Science*, Melbourne, v. 17, p. 26–57, 2009.

14 JAMMER, M. *The Philosophy of Quantum Mechanics*. New York: Wiley, 1974. 570 p.

15 ROZENTAL, S. S. (Ed.). Niels Bohr: his life and work as seen by his friends and colleagues. Amsterdam: North Holland, 1967. 355 p.

16 NEUMANN, J. V. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton: Princeton University Press, 1955. 445 p.

17 NETO, N. P. *Teorias e interpretações da Mecânica Quântica*. Rio de Janeiro: CBPF - Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 2010. 160 p.

18 DEWITT, B. S. Quantum theory of gravity. i. the canonical theory. *Phys. Rev.*, Princeton, v. 160, p. 1113–1148, ago. 1967.

19 ZEH, H. D. On the interpretation of measurement in quantum theory. *Foundations* of *Physics*, Heidelberg, v. 1, p. 69–76, mar. 1970.

20 ZEH, H. D. Roots and fruits of decoherence. In: DUPLANTIER, B.; RAIMOND, J.-M.; RIVASSEAU, V. (Ed.). *Quantum Decoherence: Poincaré Seminar 2005.* Basel: Birkhäuser Basel, 2007. p. 151–175.

21 BELL, J. S. On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physics*, Madison, v. 1, n. 3, p. 195–200, nov. 1964.

22 PAN, J.-W. et al. Experimental test of quantum nonlocality in three-photon greenberger-horne-zeilinger entanglement. *Nature*, Viena, v. 403, p. 515–519, fev. 2000.

23 BOHM, D. *Quantum theory*. Princeton: Prentice-Hall, 1951. 646 p. (Prentice-Hall physics series).

24 BOHR, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, Copenhagen, v. 48, p. 696–702, out. 1935.

25 GELL-MANN, M. The Quark and the Jaguar: Adventures in the Simple and the Complex. New York: W. H. Freeman & Co., 1995. 422 p.

26 FREIRE, O. The Quantum Dissidents: Rebuilding the Foundations of Quantum Mechanics (1950-1990). Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2015.

27 KOŽNJAK, B. The missing history of Bohm's hidden variables theory: The Ninth Symposium of the Colston Research Society, Bristol, 1957. *Studies in the History and Philosophy of Modern Physics*, v. 62, p. 85–97, mai. 2018.

28 ASPECT, A. Bell's inequality test: more ideal than ever. *Nature*, Orsay, v. 398, p. 189–190, mar. 1999.

29 ROWE, M. et al. Experimental violation of a bell's inequality with efficient detection. *Nature*, Colorado, v. 409, p. 791–4, mar. 2001.

30 BELL, J. S. On the problem of hidden variables in quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, Stanford, v. 38, p. 447–452, jul. 1966.

31 KOCHEN, S.; SPECKER, E. P. The problem of hidden variables in quantum mechanics. *Journal of Mathematics and Mechanics*, Bloomington, v. 17, n. 1, p. 59–87, 1967.

32 BROGLIE, L. de. Waves and quanta. Nature, Paris, v. 112, p. 540–540, 1923.

33 BROGLIE, L. de. Quanta de lumière, diffraction et interférences. *Comp. Rend.*, Paris, v. 177, p. 548–50, 1923.

34 BROGLIE, L. de. Les quanta, la théorie cinétique des gas et le principe de Fermat. *Comp. Rend.*, Paris, v. 177, p. 630–22, 1923.

35 BROGLIE, L. de. A tentative theory of light quanta. *Philosophical Magazine (6)*, Paris, v. 47, p. 446–58, 1924.

36 BROGLIE, L. de. Recherches sur la théorie des quanta. Ann. Phys., Paris, v. 10, n. 3, p. 22–128, 1925.

37 BROGLIE, L. de. Sur la nature ondulatoire de l'électron. (French) [On the wave nature of the electron]. *Revue Scientifique*, Stockholm, v. 68, n. 1, dez. 1930.

38 DAVISSON, C.; GERMER, L. H. Diffraction of electrons by a crystal of nickel. *Phys. Rev.*, American Physical Society, New York, v. 30, p. 705–740, dez. 1927.

39 BROGLIE, L. de. Sur la dynamique du quantum de lumière et les interférences. Comptes rendus de l'Académie des sciences, Paris, v. 179, p. 1039–41, 1924.

40 EINSTEIN, A. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Stzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalischmathematische Klasse, Berlin, p. 261–7, 1924.

41 SCHRODINGER, E. Quantisierung als Eigenwertproblem (Vierte Mitteilung). Ann. Phys., Weinheim, v. 386, n. 18, p. 109–39, 1926.

42 BROGLIE, L. de. La mécanique ondulatoire et la structure atomique de la matière et du rayonnement. J. Phys. Radium, Paris, v. 8, n. 5, p. 225–241, 1927.

43 BOHM, D. Proof that probability density approaches $|\psi|^2$ in causal interpretation of the quantum theory. *Phys. Rev.*, São Paulo, v. 89, p. 458–466, jan. 1953.

44 BOHM, D.; HILEY, B. J. The Uundivided Universe: An Ontological Interretation of *Quantum Theory*. London: Routledge and Kegan Paul, 1993.

45 BOHM, D.; VIGIER, J. P. Model of the causal interpretation of quantum theory in terms of a fluid with irregular fluctuations. *Phys. Rev.*, São Paulo, v. 96, p. 208–216, out. 1954.

46 VALENTINI, A. Signal-locality, uncertainty, and the subquantum H-theorem. I. *Phys. Lett. A*, Trieste, v. 156, p. 5–11, 1991.

47 VALENTINI, A. Signal-locality, uncertainty, and the subquantum H-theorem. II. *Phys. Lett. A*, Trieste, v. 158, p. 1–8, 1991.

48 HOLLAND, P. The Quantum Theory of Motion: An Account of the de Broglie-Bohm Causal Interpretation of Quantum Mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

49 PASSON, O. Why isn't every physicist a bohmian? Quant.-Ph./ArXiv, Jülich, 2004.
50 PLADEVALL, X.; MOMPART, J. Applied Bohmian Mechanics: From Nanoscale Systems to Cosmology. Stanford: Pan Stanford, 2012. 700 p.

51 POTEL, G. et al. Stability properties of $|\Psi|^2$ in Bohmian dynamics. *Physics Letters* A, Sevilla, v. 299, p. 125–130, jul. 2002.

52 VALENTINI, A.; WESTMAN, H. Dynamical origin of quantum probabilities. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, London, v. 461, p. 253–272, 2005.

53 GOLDSTEIN, S.; STRUYVE, W. On the Uniqueness of Quantum Equilibrium in Bohmian Mechanics. *Journal of Statistical Physics*, [S. l.], v. 128, p. 1197–1209, set. 2007.

54 COLIN, S.; STRUYVE, W. Quantum non-equilibrium and relaxation to equilibrium for a class of de Broglie-Bohm-type theories. *New Journal of Physics*, [S. l.], v. 12, n. 4, p. 043008, abr. 2010.

55 TOWLER, M. D.; RUSSELL, N. J.; VALENTINI, A. Time scales for dynamical relaxation to the Born rule. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, London, v. 468, p. 990–1013, abr. 2012.

56 COLIN, S. Relaxation to quantum equilibrium for dirac fermions in the de broglie-bohm pilot-wave theory. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, London, A468, p. 1116, 2012.

57 ABRAHAM, E.; COLIN, S.; VALENTINI, A. Long-time relaxation in pilot-wave theory. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, [S. l.], v. 47, n. 39, p. 395306.

58 UNDERWOOD, N. G.; VALENTINI, A. Quantum field theory of relic nonequilibrium systems. *Phys. Rev. D*, Clemson, v. 92, n. 6, p. 063531, set. 2015.

59 UNDERWOOD, N. G.; VALENTINI, A. Anomalous spectral lines and relic quantum nonequilibrium. *Phys. Rev. D*, Clemson, v. 101, n. 4, p. 043004, fev. 2020.

60 VALENTINI, A. Hidden Variables, Statistical Mechanics and the Early Universe. *Lect. Notes Phys.*, London, v. 574, p. 165–181, 2001.

61 COLIN, C.; VRSCAY, E. R. Spin-dependent Bohm trajectories for hydrogen eigenstates. *Physics Letters A*, Waterloo, v. 300, p. 334–340, 2002.

62 COLIN, S.; STRUYVE, W. A Dirac sea pilot-wave model for quantum field theory. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, Waterloo, v. 40, n. 26, p. 7309–7341, jun. 2007.

63 BOLTZMANN, L. On the relationship between the second fundamental theorem of the mechanical theory of heat and probability calculations regarding the conditions for thermal equilibrium. *Wien. Ber.*, [S. l.], v. 76, p. 373–435, 1877.

64 DAVIES, P. *The Physics of Time Asymmetry*. Berkeley and Los Angeles: University of California Press, 1977.

65 VALENTINI, A. Signal-locality and subquantum information in deterministic hidden-variables theories. In: *Non-locality and Modality*. [S.l.]: Springer, 2002. p. 81–103.

66 EHRENFEST, P.; EHRENFEST, T. *The Conceptual Foundations of the Statistical Approach in Mechanics*. Mineola: Dover Publications, 2014. 128 p. (Dover Books on Physics).

67 WALDRAM, J. *The Theory of Thermodynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. 356 p.

68 VALENTINI, A. Astrophysical and cosmological tests of quantum theory. J. Phys. A, Waterloo, v. 40, p. 3285–3303, 2007.

69 VALENTINI, A. Inflationary Cosmology as a Probe of Primordial Quantum Mechanics. *Phys. Rev. D*, London, v. 82, p. 063513, 2010.

70 COLIN, S.; VALENTINI, A. Mechanism for the suppression of quantum noise at large scales on expanding space. *Phys. Rev. D*, Clemson, v. 88, p. 103515, 2013.

71 COLIN, S.; VALENTINI, A. Primordial quantum nonequilibrium and large-scale cosmic anomalies. *Phys. Rev. D*, Clemson, v. 92, n. 4, p. 043520, ago. 2015.

72 COLIN, S.; VALENTINI, A. Robust predictions for the large-scale cosmological power deficit from primordial quantum nonequilibrium. *International Journal of Modern Physics D*, Clemson, v. 25, n. 6, p. 1650068, abr. 2016.

73 VALENTINI, A. De Broglie-Bohm Pilot-Wave Theory: Many Worlds in Denial? In: SAUNDERS, S. et al. (Ed.). *Many Worlds?: Everett, Quantum Theory, and Reality.* Oxford: Oxford University Press, 2008. p. 476–509.

74 VALENTINI, A. Black holes, information loss, and hidden variables. Quant.-ph./ArXiv, Waterloo, 2004.

75 COLIN, S.; VALENTINI, A. Instability of quantum equilibrium in Bohm's dynamics. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, Clemson, v. 470, p. 20140288, 2014.

76 GAO, S. The Meaning of the Wave Function: In Search of the Ontology of Quantum Mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2017.

77 TONOMURA, A. et al. Demonstration of single-electron buildup of an interference pattern. *American Journal of Physics*, Tokyo, v. 57, p. 117–120, fev. 1989.

78 PHILIPPIDIS, C.; DEWDNEY, C.; HILEY, B. Quantum Interference and the Quantum Potential. *Nuovo Cimento B*, London, v. 52, p. 15–28, 1979.

79 ORBAN, J.; BELLEMANS, A. Velocity-inversion and irreversibility in a dilute gas of hard disks. *Physics Letters A*, Brussels, v. 24, n. 11, p. 620 – 621, 1967.

80 BROWN, H. R.; MYRVOLD, W.; UFFINK, J. Boltzmann's H-theorem, its discontents, and the birth of statistical mechanics. *Studies in the History and Philosophy of Modern Physics*, Oxford, v. 40, p. 174–191, jan. 2009.

81 BERNDL, K. et al. On the global existence of bohmian mechanics. *Commun. Math. Phys.*, München, v. 173, p. 647–674, 1995.

82 FRISK, H. Properties of the trajectories in bohmian mechanics. *Physics Letters A*, Växjö, v. 227, n. 3, p. 139 – 142, 1997.

83 PARMENTER, R.; VALENTINE, R. Properties of the geometric phase of a de broglie-bohm causal quantum mechanical trajectory. *Physics Letters A*, Tucson, v. 219, n. 1, p. 7 - 14, 1996.

84 PRESS, W. H. et al. Numerical Recipes in FORTRAN; The Art of Scientific Computing. 2nd. ed. New York: Cambridge University Press, 1993.

85 KANDHADAI, A.; VALENTINI, A. Perturbations and quantum relaxation. *Found. Phys.*, Clemson, v. 49, p. 1–23, 2019.

86 ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. New York: Dover, 1964. 1039 p.

87 JI, J.-Y. et al. Exact wave functions and nonadiabatic Berry phases of a time-dependent harmonic oscillator. *Phys. Rev. A*, [S. l.], v. 52, p. 3352–3355, 1995.

88 UNDERWOOD, N. G. Extreme quantum nonequilibrium, nodes, vorticity, drift and relaxation retarding states. *J. Phys. A* : *Mathematical and Theoretical*, v. 51, n. 5, p. 055301, 2018.

89 LIDDLE, A. R.; LYTH, D. H. Cosmological inflation and large scale structure. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 400 p.

90 PETER, P.; UZAN, J.-P. *Primordial cosmology*. Oxford: Oxford Univ. Press, 2009. (Oxford Graduate Texts).