Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Educação e Humanidades

Faculdade de Formação de Professores

Débora Andrade da Silva Righi

Conhecimentos pedagógicos para o desenvolvimento do pensamento algébrico mobilizados por professoras do 5º ano

São Gonçalo

2024

Débora Andrade da Silva Righi

Conhecimentos pedagógicos para o desenvolvimento do pensamento algébrico mobilizados por professoras do 5º ano

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Educação - Processos Formativos e Desigualdades Sociais da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Formação de Professores, História, Memória e Práticas Educativas.

Orientadora: Prof.ª Dra. Vânia Finholdt Angelo Leite

São Gonçalo

2024

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CEH/A

R5718 Righi, Débora Andrade da Silva.
TESE Conhecimentos pedagógicos para o desenvolvimento do pensamento algébrico mobilizados por professoras do 5º ano/ Débora Andrade da Silva Righi. – 2024.
155f.

Orientador: Profª. Dra. Vânia Finholdt Angelo Leite.
Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Formação de Professores.

1. Conhecimento pedagógico do conteúdo - Teses. 2. Matemática - Estudo e ensino – Teses. 3. Álgebra - Teses. I. Leite, Vânia Finholdt Angelo. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Faculdade de Formação de Professores. III. Título.

CRB7 – 5190 CDU 37.013.3

________________________________ _______________
Assinatura Data

Débora Andrade da Silva Righi

Conhecimentos pedagógicos para o desenvolvimento do pensamento algébrico mobilizados por professoras do 5º ano

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Educação - Processos Formativos e Desigualdades Sociais da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Formação de Professores, História, Memória e Práticas Educativas.

Aprovada em XX de XX de XX.

Banca Examinadora:

Prof.ª Dra. Vânia Finholdt Angelo Leite (Orientadora)
Faculdade de Formação de Professores – UERJ

Profª. Dra. Sandra Maria Pinto Magina
Universidade Estadual de Santa Cruz

Profª. Dra. Priscila Cardoso Petito
Faculdade de Formação de Professores - UERJ

São Gonçalo

2024

DEDICATÓRIA

Dedico esta dissertação primeiramente a Deus. Ao meu marido Rômulo, por ser o meu maior incentivador. E, em especial, a todas as professoras dos Anos Iniciais que muito têm a contribuir com os estudos sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por sustentar os meus sonhos de formação e aprimoramento profissional, pois muitos foram os dias difíceis, mas a Sua constante presença não me deixou esmorecer.

Ao meu marido Rômulo que sempre me apoiou, incentivando-me a continuar os estudos dentro da área da Educação e, em especial, da Educação Matemática. Por acreditar no meu potencial e me ajudar a ver que sempre há um novo dia.

Aos meus pais Sebastião e Adriana, e meus irmãos Daniel e Daniely que, mesmo distantes, acompanham-me e torcem pela minha felicidade. Vocês são a minha base. Aos meus sogros Roberto e Lúcia, e meus cunhados Samara e Rodolfo, por se constituírem como uma benção em minha vida.

Aos meus professores do Programa de Pós-graduação em Educação – Processos Formativos e Desigualdades Sociais da Faculdade de Formação de Professores na Universidade do Estado do Rio de Janeiro, que generosamente compartilharam seus conhecimentos comigo, inspirando meus passos na carreira docente e contribuindo com o meu aprimoramento profissional.

Agradeço, em especial, à minha orientadora Vânia Finholdt Angelo Leite, pelo rigor metodológico e gentileza com que me orientou nesta dissertação. Seus ensinamentos deram luz às minhas propostas e foram essenciais para a conclusão dessa etapa em minha vida. Ressalto a força e confiança com que Vânia constrói a sua carreira formativa. Uma verdadeira inspiração.

Às professoras Sandra Magina e Priscila Petito, por participarem da qualificação e defesa da dissertação, contribuindo com sugestões fundamentais para a pesquisa.

Às professoras que carinhosamente aceitaram participar da entrevista.

Por fim, mas não menos importante, agradeço a todos os colegas do Grupo de Pesquisa Tri-Vértice com quem junto caminhei. Às queridas Bernadete e Josilane pelas trocas e memórias compartilhadas.

A todos vocês, o meu muito obrigada!

RESUMO

RIGHI, D. A. A. *Conhecimentos pedagógicos para o desenvolvimento do pensamento algébrico mobilizados por professoras do 5º ano*. 2024. 152f. Dissertação (Mestrado em Educação – Processos Formativos e Desigualdades Sociais) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2024.

Esta pesquisa buscou compreender os conhecimentos pedagógicos que professoras do 5º ano mobilizam para desenvolver o pensamento algébrico de seus alunos. Como aporte teórico, articulamos estudos sobre o conhecimento pedagógico para o ensino de Matemática, sobre a *Early Algebra* e um revisão dos documentos curriculares nacionais. Dialogamos, em especial, com autores como Ball, Thames e Phelps (2008), Blanton *et al*. (2015), Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), Canavarro (2007), Schiliemann, Carraher e Brizuela (2007), Magina *et al*. (2008) e Magina e Porto (2018). E, devido à especificidade dos dados encontrados, também dialogamos com Vergnaud (1983; 1996; 2009), Gitirana *et al*. (2014), Lima *et al*. (2016), Rodrigues (2021), Candido (2001) e Oliveira e Paulo (2021). A pesquisa, de cunho qualitativo, tem como instrumento de coleta de dados um questionário e entrevistas individuais semiestruturadas com oito professoras selecionadas pela técnica bola de neve. A indicação de uma professora à outra para participar da pesquisa consistia em atuar no 5º ano do Ensino Fundamental e trabalhar com o desenvolvimento do pensamento algébrico na sala de aula. A primeira etapa consistiu no preenchimento do questionário, seguido da solicitação às entrevistadas, antecipadamente, do envio de atividades já trabalhadas por elas com seus alunos de 5º ano. Posteriormente, na outra etapa da pesquisa, realizamos as entrevistas pelo aplicativo Zoom e Google Meet, em 2023. As oito professoras lecionam em escolas federais e estaduais de dedicação exclusiva nas cidades do Rio de Janeiro/RJ e Belo Horizonte/MG. Os resultados da pesquisa apontam para uma gama de conhecimentos pedagógicos relacionados com o pensamento algébrico de grande contribuição para o trabalho com a aritmética generalizada e que, com relação à equivalência e ao pensamento funcional precisariam ser aprofundados em formações continuadas voltadas para essas temáticas.

Palavras-chave: early álgebra*;* anos iniciais; pensamento algébrico; conhecimento pedagógico do conteúdo.

ABSTRACT

RIGHI, D. A. A. Pedagogical knowledge for the development of algebraic thinking mobilized by 5th year teachers. 2024. 151f. Dissertação (Mestrado em Educação – Processos Formativos e Desigualdades Sociais) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2024.

This research sought to understand the pedagogical knowledge that 5th year teachers mobilized to develop their students' algebraic thinking. As a theoretical sport, we articulate studies on pedagogical knowledge for teaching Mathematics, on Initial Algebra, and a review of national curricular documents. We dialogued, in particular, with authors such as Ball, Thames and Phelps (2008), Blanton et al. (2015), Fiorentini, Miguel and Miorim (1993), Canavarro (2007), Schiliemann, Carraher and Brizuela (2007), Magina et al. (2008) and Magina and Porto (2018). And due to the specificity of the data found, we also discussed with Vergnaud (1983; 1996; 2009), Gitirana et al (2014), Lima et al. (2016), Rodrigues (2021), Candido (2001) and Oliveira and Paulo (2021) . The research, of a qualitative nature, uses a questionnaire and individual semi-structured interviews with 8 teachers selected using the snowball technique as a data collection instrument. The recommendation of one teacher to another to participate in the research consists of working in the 5th year of Elementary School and working with the development of algebraic thinking in the classroom. The first stage consisted of filling out the questionnaire, followed by asking the interviewees, in advance, to send activities they had already worked on with their 5th year students. Subsequently, in the other stage of the research, we carried out the interviews using the Zoom and Google Meet applications, in 2023. The 8 teachers teach in exclusive federal and state schools in the cities of Rio de Janeiro/RJ and Belo Horizonte/MG. The research results point to a range of pedagogical knowledge related to algebraic thinking that makes a great contribution to the work with generalized arithmetic, and that in relation to equivalence and functional thinking would need to be deepened in original continued training for these themes.

Keywords: primitive algebra; early years; algebraic thinking; pedagogical content knowledge.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa tem como tema central o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, em inglês *Pedagogical Content Knowledge* (PCK), relacionado com o pensamento algébrico (PA). Procuramos compreender os conhecimentos pedagógicos relacionados com o desenvolvimento do pensamento algébrico, que são mobilizados por professoras do 5º ano dos Anos Iniciais.

A escolha pela investigação dentro do contexto de turmas de 5º ano é devido ao direcionamento que esse ano escolar geralmente atribui ao processo de ensino e aprendizagem dos estudantes. Nessa fase considera-se que os alunos já estão alfabetizados na aquisição da leitura e escrita, e pela prática docente procura-se ampliar e aprofundar conceitos, além de ser um ano de transição para os Anos Finais do Ensino Fundamental.

Os dois grandes temas que se articulam nesta pesquisa, o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo e o pensamento algébrico, são assuntos que têm ganhado atenção nos últimos anos devido a sua influência na melhoria do ensino de Matemática e para o avanço do desenvolvimento educacional do país. Sobre o PCK, desde a década de 1980, por exemplo, estudos mostram que os professores necessitam de um conjunto de conhecimentos especializados para o exercício da docência (Shulman, 1986, 1987; Grossman, 1990) e pesquisas atuais (Ball; Thames; Phelps, 2008; Carrillo et al., 2018) apontam para a especificidade da gama de conhecimentos necessários ao professor que ensina matemática.

Com relação ao pensamento algébrico, a importância do seu desenvolvimento desde os primeiros anos escolares está relacionada, entre outras coisas, com a necessidade de um ensino de Álgebra diferente da proposta mecânica e automatizada que tradicionalmente foi construída ao longo dos anos e que gerou dificuldades na aprendizagem dos alunos. De acordo com Lins e Gimenez "a Álgebra escolar representa o mais severo corte (momento de seleção) da educação matemática escolar" (Lins e Gimenez, 1997, p. 9) referindo-se à dificuldade que estudantes do sétimo ano, por exemplo, apresentavam ao encarar a Álgebra nas aulas de matemática.

Essa concepção contribuiu para a reconsideração da tradicional "ordem" de ensino estabelecido entre a Aritmética e a Álgebra, visto que por muitos anos entendia-se que a aprendizagem de Álgebra só poderia iniciar-se após o trabalho com a Aritmética, enquanto, na verdade, esses autores consideram que "é preciso começar mais cedo o contato dos alunos com a Álgebra, de modo que ela e a Aritmética desenvolvam-se juntas, uma imbricada ao desenvolvimento da outra.” (Lins e Gimenez, 1997, p. 10)

Atualmente, o foco do ensino de Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental é o desenvolvimento do pensamento algébrico que promove situações para que as crianças possam expressar o raciocínio utilizado para resolver problemas matemáticos usando diferentes representações. Esse processo foi cunhado como *Early Algebra* a partir da conferência estadunidense “Álgebra: uma ligação para um futuro tecnológico” realizada em 2006 pela Academia Nacional de Ciências – NAS. De acordo com Blanton *et al.* (2007) apud Yamanaka e Magina (2008, p.5) a *Early Algebra* ou Álgebra Inicial consiste no desenvolvimento de habilidades que proporcionem o “uso da aritmética como um domínio para expressar e formalizar generalizações (aritmética generalizada) e a generalização de padrões numéricos ou geométricos para descrever relações funcionais (pensamento funcional).” Desde então, o termo *Early Algebra* representa as atividades que envolvem o desenvolvimento do pensamento algébrico e os estudos e pesquisas sobre o tema.

Nos últimos anos, observamos a atenção dada a esse tema entre os pesquisadores da Educação Matemática, fomentando pesquisas sobre a *Early Algebra* no país voltadas tanto para a aprendizagem dos estudantes desde a Educação Infantil (Luna; Souza, 2013; Souza; Luna; Merlini, 2023; Luna; Merlini; Ferreira, 2021; Luna; Merlini; Silva, 2020;) aos Anos Iniciais (Vieira; Magina, 2021; Ribeiro, 2021; Magina; Porto, 2018; Nacarato; Custódio, 2018) quanto para a compreensão dos conhecimentos que os professores dessas duas etapas da Educação Básica têm sobre o tema (Ribeiro, *et al.*, 2021; Ribeiro; Ribeiro; Pacelli, 2021; Oliveira; Paulo, 2023).

Entre os encaminhamentos que os estudos da *Early Algebra* podem sugerir, a presente pesquisa foi construída a partir da seguinte questão norteadora:

O que as professoras do 5º ano nos mostram do seu conhecimento pedagógico do conteúdo para desenvolverem o pensamento algébrico de seus alunos?

Nosso principal objetivo é, portanto, *compreender os conhecimentos pedagógicos que professoras do 5º ano mobilizam para desenvolver o pensamento algébrico de seus alunos*. Considerando a importância do PCK para o sucesso do processo de ensino e aprendizagem e para a construção de oportunidades para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais, concordamos com Ferreira, Ribeiro e Ribeiro (2017, p. 6) quando afirmam que:

> Torna-se essencial um mais amplo entendimento sobre o conteúdo do conhecimento do professor nessa temática (pensamento algébrico), de modo a possibilitar,

> posteriormente, equacionar formas de melhorar a prática, as aprendizagens dos alunos e a própria formação de professores. (Ferreira, Ribeiro e Ribeiro, 2017).

A seguir, apresentamos os capítulos em que esta pesquisa está organizada, a fim de proporcionar ao leitor uma visão geral do trabalho desenvolvido.

Organização do relatório de pesquisa

Ainda nesta seção de introdução, além da apresentação do tema feita aanteriormente, abordaremos também a relação entre o pesquisador e o tema com uma breve narrativa sobre as experiências vividas que contribuíram para a elaboração deste trabalho. Em seguida, apresentamos a revisão de literatura realizada, e logo após damos início aos capítulos de referencial teórico, metodologia e análise com a seguinte organização:

No Capítulo 1, apresentamos um estudo sobre a professora que ensina matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, apontando as especificações da docência dirigida a esse segmento escolar e da formação da professora polivalente. Essa pesquisa está dividida em três partes. É também nesse capítulo que nos dedicamos a conhecer os estudos sobre o PCK relacionados com o ensino de Matemática.

Em seguida, no Capítulo 2, exploramos os conceitos atribuídos à Álgebra e seu ensino, evidenciando os estudos que apontam para a necessidade de desenvolvimento do pensamento algébrico desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental a partir do trabalho com a *Early Algebra.* Ainda, nesse capítulo, discutimos alguns dos principais conceitos da *Early Algebra* segundo Blanton *et al*. (2015), a saber: aritmética generalizada, pensamento funcional e equivalência.

No terceiro capítulo desta dissertação são analisadas as normas curriculares nacionais que exerceram contribuição para essa implementação do pensamento algébrico nos Anos Iniciais, começando pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) e finalizando com uma análise crítica da Base Nacional Comum Curricular (2017).

O Capítulo 4, dedica-se à apresentação do percurso metodológico, abordando a natureza da pesquisa, os objetivos gerais e específicos, os instrumentos de pesquisa utilizados, e o perfil das professoras participantes desde a descrição do processo de seleção.

No Capítulo 5, apresentamos as análises interpretativas sobre as entrevistas realizadas com as professoras a partir do referencial adotado nos Capítulos 1, 2 e 3. Nessa seção, discorremos sobre o PCK manifestados pelos professores participantes da pesquisa.

Finalizamos este trabalho apresentando as considerações finais, recapitulando a questão norteadora da dissertação realizada e os resultados obtidos a partir das análises efetuadas.

A partir do exposto, passamos a apresentar a trajetória formativa da autora desta dissertação até a escolha do tema com uma breve narrativa das experiências que contribuíram para a elaboração desta pesquisa.

A pesquisadora e o tema: uma curiosidade sobre o pensar matematicamente

Natural da cidade de Miracema no interior do estado do Rio de Janeiro, desde os primeiros anos escolares sempre me senti à vontade no mundo dos estudos. O motivo ao certo eu ainda não sei definir, mas alguns fatores ajudam-me a compreender a sensação de pertencimento que a escola sempre me causou: talvez pelo incentivo dos meus pais que, com encanto, contavam sobre os frutos que o estudo pode proporcionar, talvez pela companhia dos meus irmãos que sempre me acompanhavam antes, durante e depois das aulas – em especial, meu irmão gêmeo, que sempre estudou comigo na mesma turma, ou devido ao carinho e dedicação das professoras que, desde a Educação Infantil, inspiravam-me com o seu jeito de ensinar e de ser. Estar na escola para mim sempre foi agradável e estimulante.

Aos 6 anos, comecei a ler, escrever, iniciei as aulas de música (canto e teclado), e acredito que foi nesse período que "algo matemático" dentro de mim começou a ganhar destaque, pois me recordo de ainda no Ensino Fundamental amar as aulas de Português, Ciências, História, Geografia, mas, de fato, encantar-me pelas aulas de Matemática. Procurando encontrar a razão dessa aproximação durante a escrita deste texto, a primeira coisa que me vem à mente são os meus antigos professores de Matemática do Ensino Fundamental, dos quais os nomes eu não me esqueço.

Esses professores eram apaixonados pela disciplina, faziam tudo parecer possível, de modo que até mesmo o famoso temor pela Matemática que a muitos visita por aí, nunca tenha me assombrado. Esses professores estimularam-me a participar da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), em que passei para a 2ª fase e fui premiada com uma medalha, marcando minhas memórias dessa fase escolar com uma vontade de crescer e ir além.

No Ensino Médio, por orientação da minha mãe fiz o Curso Normal de Formação de Professores e conheci professoras maravilhosas que me inspiraram a ser uma boa professora, e que até hoje acompanham minha trajetória profissional. Contudo, no Curso Normal distanciei-me um pouco da Matemática, dado o enfoque do currículo para as disciplinas pedagógicas. De certo modo, esse enfoque contribuiu para minha aprovação em alguns concursos públicos como docente dos Anos Iniciais, e logo que terminei o curso, tão depressa dei início a minha prática profissional como professora.

Aproximando o momento de escolha do curso de graduação, optei por me reaproximar da Matemática, mesmo que isso fosse contra os aconselhamentos que recebi na época. A opinião geral era que o curso mais indicado a ser feito fosse Pedagogia, para assim dar continuidade à formação iniciada no Curso Normal, fora os rumores de que o curso de Matemática já era difícil para alunos oriundos do Ensino Médio Geral, imagina para os normalistas[1]! Contudo, nada tirava da minha cabeça a sementinha plantada lá desde os meus primeiros anos escolares: não há nada que eu não possa aprender. Portanto, fui fazer o curso de Licenciatura em Matemática no *campus* do Instituto de Ensino Superior do Noroeste Fluminense (INFES/UFF).

Nessa etapa da minha formação, mais uma vez fui agraciada com professores especiais, que não se detinham à exposição dos conteúdos, mas que adentravam a vocação docente com sua didática. Tive o prazer de me aproximar da Educação Matemática produzindo alguns artigos sobre a Etnomatemática, mas foi a disciplina de Análise Real que mais me impactou. Uns dos motivos era a sua complexidade é a necessidade de uma abstração profunda para sua compreensão, que inclusive gerou a minha primeira e única reprovação no curso.

Embora seja uma reprovação, recordo-me desse fato com certo orgulho. Era meu primeiro contato com uma matemática pura e como era de praxe a reprovação, entendi que fazia parte da reaproximação com a Matemática encarar o seu lado mais frio. Relembro esses detalhes da minha trajetória acadêmica, pois cada momento foi importante para chegar até aqui. A reprovação na disciplina de Análise Real colocou-me novamente diante de um professor que muito me inspirou. Esse professor já havia ministrado outras disciplinas no curso, contudo eram disciplinas voltadas para a didática, ou metodologia da Matemática. Ao ministrar a disciplina de Análise Real, esse professor chamou a minha atenção para a importância de um raciocínio chamado por ele de pensamento matemático, conceito que foi fundamental para a minha aprovação naquela disciplina.

---

[1] O termo “normalista” é utilizado para se referir, em geral, às professoras formadas no Curso de Formação de Professores, conhecido como Curso Normal.

O pensamento matemático citado por esse professor estava envolvido com a capacidade de criar estratégias de resolução próprias e com a modelagem a partir das propriedades do objeto de estudo, sem depender unicamente da decoração de fórmulas. Pensar sobre as propriedades dos objetos matemáticos, e procurar entender as suas estruturas parecia mais fácil do que decorar todas as provas, demonstrações e fórmulas necessárias para entender a Análise do livro do Elon Lage,[2] e mesmo depois de me formar, essas ideias ficaram em minha mente.

Após mudar-me para São Gonçalo – RJ, comecei o curso de pós-graduação *lato sensu* em Ensino de Matemática oferecido pela Universidade Federal Fluminense (UFF), mais uma vez aproximando-me dessa área, embora continuasse a ser professora dos Anos Iniciais. Esse curso, que me proporcionou aprofundar os estudos em Educação Matemática por quais eu já me interessava na graduação, fez-me refletir sobre o processo de ensino da Matemática nas escolas. Também foi nesse curso que conheci alguns estudos sobre o conhecimento profissional do professor que ensina matemática e que, em contato com outros colegas que atuavam como professores dos Anos Finais do Ensino Fundamental ou do Ensino Médio, pude trocar algumas inquietudes sobre o processo de ensino e aprendizagem de Matemática que eu vivenciava nos Anos Iniciais.

Entre algumas reflexões, comecei a conjecturar que há dificuldades no processo de ensino e aprendizagem de Matemática que muitas vezes são oriundas da formação da professora que ensina a disciplina, mas que também está relacionada como cultivo de um ensino que exige o uso de habilidades preditoras que não foram desenvolvidas para a compreensão de determinado conteúdo, e isso contribui muito para a dificuldade de aprendizagem de alguns tópicos de Matemática, como é o caso da Álgebra. Quantas vezes não ouvimos alguém dizer “eu gostava mais de matemática quando não tinha letras”.

A partir dessas reflexões, penso na importância de um ensino de Matemática desenvolvido nos Anos Iniciais que se preocupa em estabelecer uma ponte para a aprendizagem dos conhecimentos difundidos nos Anos Finais do Ensino Fundamental, e não uma ruptura. A implementação da Álgebra como unidade temática para os Anos Iniciais estimulou a minha vontade de contribuir com a construção dessa ponte, evidenciando um ensino de Matemática mais consistente no Ensino Fundamental a partir do desenvolvimento do pensamento algébrico.

---

[2] LIMA, Elon Lages. Curso de análise: volume 1. 14 ed. reimpr. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. 432 p. (Coleção Projeto Euclides [IMPA]). ISBN 9788524401183. Inclui bibliografia e índice; il.; 23x16cm. Palavras-chave: ANÁLISE MATEMATICA; CÁLCULO. CDU 517 / L732c / 14 ed. reimpr. / 2016.

Nesse ponto, pensar na professora dos Anos Iniciais que recebe como proposta de ensino uma unidade que até o momento não era explicitamente requerida em seu segmento de atuação tornou-se urgente para mim, pois pertenço a esse grupo. Aguçando meu interesse sobre esse tema, participei em 2021 de um processo formativo transformador. Tratava-se de uma formação promovida pelo grupo de pesquisa Tri-Vértice sobre o Campo Conceitual Aditivo de Gerard Vergnaud. Os encontros formativos eram ministrados pela professora Vânia Leite e direcionado às professoras dos Anos Iniciais da escola em que eu trabalhava em Niterói-RJ.

Apesar de ser formada em Matemática, estive diante de uma nova abordagem para as situações-problema que eu tanto estava acostumada a resolver e a ensinar em minhas aulas. A teoria dos campos conceituais surpreendeu-me pela amplitude de tipologias que um campo conceitual pode assumir, e principalmente pela importância dada às estratégias próprias de resolução dos estudantes. Diante do visível interesse das professoras, que moderadamente levantavam questões interagindo com a proposta formativa, passei a refletir sobre os conhecimentos que nós que ensinamos Matemática nos Anos Iniciais possuímos sobre os conteúdos, sobre os estudantes e sobre o ensino de Matemática.

Meu ingresso no mestrado pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Processos Formativos e Desigualdades Sociais na FFP\UERJ dentro da linha Formação de Professores, História, Memória e Práticas Educativas em 2022, proporcionou-me iniciar minha caminhada autoformativa (Josso, 2004) assim que passei a compor o grupo de pesquisa Tri-Vértice sob coordenação da professora Dra. Vânia Finholdt Ângelo Leite, orientadora dessa pesquisa.

Digo isso, pois entre os encontros e rodas de conversa, fui convidada a assumir uma postura conscientemente ativa com relação à minha formação, e nas oportunidades em que pude narrar minhas experiências, tive condições de identificar as potencialidades que estão escondidas em minha história, e estar consciente das transformações comm relação a minhas ideias, meus projetos, a mim mesma e à maneira de ser e estar no mundo.

Pertencer ao grupo de pesquisa Tri-Vértice significou conhecer pessoas dedicadas e comprometidas com os estudos sobre a docência e a Educação Matemática. A orientação da professora Vânia Leite foi primordial para a clarificação da minha questão de pesquisa e para a construção da minha identidade docente: sou uma professora dos Anos Iniciais que sempre andou de mãos dadas com a Matemática, e que hoje se interessa pelo ensino dessa disciplina que tanto cativou-me desde a infância até o ensino superior.

Revisão de literatura

Para nortear os primeiros passos desta pesquisa realizamos uma revisão de literatura sobre o tema a fim de identificar a relevância e pertinência da investigação. A partir daí, realizou-se o aprofundamento do referencial teórico e a leitura dos documentos curriculares nacionais que direcionam a implementação e desenvolvimento do Pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental no Brasil.

Essa revisão buscou sistematizar o material já publicado sobre os aspectos que envolvem o desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais, a fim de atingir os seguintes objetivos:

- Apresentar um panorama do que tem sido pesquisado no Brasil sobre o ensino/aprendizagem de álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental no período de 2017 a 2022;
- Apresentar suas principais contribuições para esta pesquisa, especialmente sobre o conhecimento da professora do quinto ano do Ensino Fundamental para o desenvolvimento do pensamento algébrico de seus alunos;
- Perceber as lacunas existentes nos trabalhos que justifiquem a necessidade e pertinência de outras pesquisas na área que aprofundem as temáticas ou explorem aspectos ainda não analisados.
- Fomentar o interesse de futuros pesquisadores nas áreas de Formação de Professores, Didática e Educação Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Nesse sentido, a seleção de pesquisas para a revisão parte da delimitação dos tipos de trabalhos que serão analisados e, para esse fim, utilizamos apenas pesquisas feitas a nível de mestrado e doutorado no Brasil de 2017 a 2021. As buscas foram feitas no *site* de Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD). Em ambos os *sites* foram utilizadas as palavra-chave “Educação Matemática” AND “Anos Iniciais” AND “Pensamento algébrico” OR “Early Algebra”.

Como resultado das buscas foram encontrados 34 trabalhos. Destes, quatro foram desconsiderados para essa revisão por abordarem o tema em outras etapas de ensino da Educação Básica e não nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental que é o foco desse estudo, restando assim 30 pesquisas, entre as quais 26 são dissertações e quatro são teses.

Na Tabela **Erro! Fonte de referência não encontrada.** a seguir pode-se observar a distribuição das pesquisas realizadas ao longo do período investigado.

Tabela 1 - Relação tipo de pesquisas e ano de publicação

Ano	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Dissertações	2	6	10	4	4	0
Teses	0	1	1	1	1	0

Fonte: Elaborado pela autora.

Analisando a Tabela 1, nota-se o baixo número de pesquisas sobre o desenvolvimento do Pensamento algébrico a nível de mestrado e doutorado em 2017, em que foram produzidas apenas duas pesquisas na primeira categoria. Nesse mesmo ano, ocorreu a homologação da primeira versão da Base Nacional Comum Curricular – BNCC, em que a Álgebra passa a compor o grupo das unidades temáticas para a disciplina de Matemática dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

A partir de então, percebe-se que o número de pesquisas sobre o tema começa a aumentar, apresentando seis dissertações e uma tese em 2018 e em 2019, o quíntuplo de dissertações com relação ao primeiro ano dessa análise. Percebe-se que a nível de doutorado há poucas pesquisas desenvolvidas nos últimos cinco anos se compararmos à quantidade total de dissertações, o que pode sugerir uma descontinuidade nos estudos realizados no mestrado.

Progredindo com a análise das pesquisas selecionadas, realizamos a leitura do resumo de cada pesquisa a fim de identificar o objeto de análise e, a partir dessa informação, organizá-las em categorias de interesse que representam o foco de trabalho em cada dissertação e tese. Foram organizadas quatro categorias denominadas como: Professores e o desenvolvimento do pensamento algébrico, Tecnologia digital, Estudantes e o desenvolvimento do pensamento algébrico e Pesquisa documental. A descrição de cada categoria é apresenta a seguir:

a) Professores e o desenvolvimento do pensamento algébrico: selecionamos as teses e dissertações cujo foco central é o docente, seus conhecimentos e as práticas sobre o ensino de álgebra nos Anos Iniciais;

b) Tecnologia digital: consideramos nessa categoria as investigações que abordam algum tipo de tecnologia como meio facilitador da prática docente e/ou do processo de ensino/aprendizagem;

c) Estudantes e o desenvolvimento do pensamento algébrico: pesquisas que abordam a compreensão do como o estudante aprende, entendendo que ensinar e aprender são faces de uma mesma moeda; entretanto, necessitam de atenção específica para que haja sucesso tanto no ensinar quanto no aprender;

d) Pesquisa documental: destacamos as pesquisas cuja temática está na análise dos documentos educacionais como currículos de ensino ou nos recursos didáticos empregados no processo de ensino-aprendizagem de álgebra para os Anos Iniciais.

No Quadro 1, apresentamos a categorização elaborada a partir das pesquisas encontras na etapa de revisão de literatura sobre pensamento algébrico:

Quadro 1 - Categorização das pesquisas realizadas no período de 2017 a 2022 sobre o pensamento algébrico nos anos iniciais

Categoria	**Pesquisas**	**Total**
Professores e o desenvolvimento do pensamento algébrico	Trídico (2019), Barboza (2019), Ferreira (2017), Chaparin (2019), Souza (2020), Souza (2021), Conceição (2021), Lehmkuhl (2021), Santos (2020), Noro (2020), Santana (2019), Pinheiro (2018), Goma (2019), Lachi (2019), Oliveira (2018).	15
Tecnologia digital	Lima Junior (2018), Souza (2019).	2
Estudantes e o desenvolvimento do pensamento algébrico	Mescouto (2019), Silva (2019), Gomes (2020), Beck (2018), Santos (2017), Bastos (2019), Porto (2018).	7
Pesquisa documental	Lima (2018), Alves (2019), Favero (2020), Narciso (2021), Bitencourt (2018), Silva (2021).	6

Fonte: Elaborado pela autora.

A partir da leitura da introdução dos trabalhos selecionados, foram identificados 12 grupos de pesquisas aos quais os autores das pesquisas são membros. São eles: Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica – GPEA (PUC-SP), Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática – GEPEMat (UFSM), Grupo de Estudos de Educação Matemática – GETTEM (UFJF), Grupo de Pesquisa Reflexão, Planejamento, Ação e Reflexão em Educação Matemática – REPARE (UESC), Grupo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática – GPPEM (UNESP), o Grupo de Pesquisa e Ensino em Matemática e Língua Portuguesa – CONTAR (UFRN), Núcleo de Estudos em Epistemologia e Educação em Ciências –

NUEPEC (FURG), Grupo de Estudos sobre Educação Matemática nos Anos Iniciais – GEEMAI (FURG), Grupo Colaborativo em Matemática – GRUCOMAT (USF), Grupo de Estudos e Pesquisas em Processos Formativos em Educação Matemática – GEPPROFEM – e Insubordinações Criativas em Educação Matemática – ICEM, ambos desenvolvidos na UFSC, e o Grupo FORMATE – Formação Matemática para o Ensino (UFABC).

Levantar informações sobre a origem dos trabalhos torna-se importante na medida em que a quantidade de pesquisas desenvolvidas sobre o tema em determinada instituição pode sinalizar possíveis fontes de informações mais avançadas em suas análises a respeito do pensamento algébrico nos Anos Iniciais que contribuem com o desenvolvimento de novas pesquisas, assim como da atual.

A categorização apresentada no Quadro 1 informa que nos últimos anos as pesquisas sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais concentraram-se na professora que ensina nesse segmento escolar, agrupando 14 investigações, seguida pelos estudos sobre a aprendizagem dos estudantes nesse tema e pelas pesquisas de característica documental. Apenas dois trabalhos tiveram como foco o uso da tecnologia digital como meio facilitador no processo de ensino e aprendizagem.

Os 30 trabalhos selecionados para análise permitiram verificar que as pesquisas sobre a *Early Algebra* no Brasil dão indicadores de que os estudantes dos Anos Iniciais são capazes de desenvolver o pensamento algébrico a partir de situações empíricas nas quais as habilidades de generalização e reconhecimento de padrões em sequência promovem estímulos para a apropriação de uma linguagem algébrica adequada à idade dos estudantes, assumindo diferentes tipos de representações.

Como a atual pesquisa está delimitada às professoras do 5º ano que ensinam Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e a identificação do conteúdo do seu conhecimento relacionado com o desenvolvimento do pensamento algébrico em suas aulas, optou-se pela apresentação das pesquisas na primeira categoria com o título, autor, ano e nível acadêmico de cada estudo.

Quadro 2 - Trabalhos correlatos à nossa pesquisa

Ano	Autor	Título	Instituição	Categoria
2017	Ferreira, Miriam Criez Nobrega	Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: uma análise do conhecimento matemático acerca do pensamento algébrico	Universidade Federal do ABC (UFABC)	Mestrado
2018	Pinheiro, Anderson Cangane	O Ensino de Álgebra e a crença de autoeficácia docente no desenvolvimento do pensamento algébrico	Universidade Estadual Paulista (UNESP)	Mestrado

Ano	Autor	Título	Instituição	Categoria
2018	Oliveira, Caio Fabio dos Santos de	Formação continuada de professores e a *Early Algebra*: uma intervenção híbrida	Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)	Mestrado
2019	Goma, Jane Lopes de Souza	A Comunicação escrita matemática envolvendo o pensamento algébrico com futuras professoras dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)	Mestrado
2019	Lachi, Henrique Moraes	Aprender a ensinar padrões e sequências para os Anos Iniciais: uma experiência com estudantes de um curso de Pedagogia Semipresencial	Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN)	Mestrado
2019	Santana, Roseli Regina Fernandes Santana	Um estudo sobre as relações entre o desenvolvimento do pensamento algébrico, as crenças de autoeficácia e as atitudes e o conhecimento especializado de professores *pre-service* e *in-service*	Universidade Estadual Paulista (UNESP)	Mestrado
2019	Chaparin, Rogério Osvaldo	A formação continuada de professores que ensinam matemática, centrada na resolução de problemas e em processos do pensamento matemático	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)	Doutorado
2019	Barboza, Lilian Cristina de Souza	Conhecimento dos professores dos Anos Iniciais e o sinal de igualdade: uma investigação com tarefas de aprendizagem profissional	Universidade Federal do ABC (UFABC)	Mestrado
2019	Trídico, Diego Henrique de Moraes	Contribuições de um curso de formação continuada para professores dos Anos Iniciais no desenvolvimento do conhecimento tecnológico, pedagógico e de conteúdo algébrico	Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)	Mestrado
2020	Santos, Fernanda Cristina Ferreira	Desenvolvimento do pensamento algébrico de professores dos Anos Iniciais em atividade de ensino: o pensamento teórico mediado por conceitos algébricos	Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP)	Mestrado
2020	Souza, Alex Almeida	O Ensino Híbrido na formação continuada e a recontextualização pedagógica dos textos produzidos por professores dos Anos Iniciais em *Early Algebra*: um enfoque na relação funcional	Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)	Mestrado
2020	Noro, Iasmim Martins	Do aprender ao ensinar álgebra: formação de professores que ensinam matemática	Universidade Federal de Santa Maria (UFSM)	Mestrado
2021	Souza, Maritza Maria Lima de Almeida.	A *Early Algebra* na concepção de professoras da educação infantil e dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: antes e depois de uma formação continuada	Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)	Mestrado
2021	Conceição, Renata Cristine	Alice no País da Colaboração: pensamentos algébricos nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental	Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)	Mestrado

Ano	Autor	Título	Instituição	Categoria
2021	Lehmkuhl, Silvana Leonoro Teres	(Com)partilhando conhecimentos para e no ensinaraprender matemática na perspectiva da insubordinação criativa em um contexto colaborativo	Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)	Doutorado

Fonte: Elaborado pela autora.

Após a leitura dos resumos de cada pesquisas, organizamo-nas em dois grupos, de acordo com seus objetos de pesquisa como mostra o Quadro 3.

Quadro 3 - Organização das pesquisas com base nos objetos de estudo

Objetos de estudo	Pesquisa	Quantidade
Professores em formação inicial	Noro (2020), Santana (2019), Goma (2019), Lachi (2019).	4
Professores em atuação incluídos em formação continuada	Ferreira (2017), Santana (2019), Pinheiro (2018), Chaparin (2019), Barboza (2019), Trídico (2019), Santos (2020), Souza (2020), Souza (2021), Conceição (2021), Lehmkuhl (2021), Oliveira (2018).	12

Fonte: Elaborado pela autora.

Nota-se da Tabela 2 que a pesquisa de Santana (2019) caracteriza-se em ambos os grupos, pois analisa junto a futuros professores e professores já atuantes as crenças de autoeficácia relacionadas com o desenvolvimento do pensamento algébrico para turmas dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Ademais, após a organização das pesquisas encontradas, classificando-as quanto ao objeto de estudo, verifica-se um número maior de pesquisas com foco na formação continuada em detrimento da formação inicial, o que sugere mais investimento nas experiências formativas com professores em atividade docente. A seguir, são descritas as observações constatadas sobre as pesquisas de cada grupo.

A leitura das pesquisas do primeiro grupo apresentado na Tabela 2, mostra que os estudos com foco na formação inicial utilizaram diferentes bases teórico-metodológicas, como a Psicologia da Educação Matemática, a Teoria Histórico-Cultural de Vygotski, a Teoria da Atividade de Leontive e os estudos sobre a formação das professoras, seu saberes e, especificamente, sobre a matemática e os ensino da álgebra desenvolvidos por Tardif, Ball, Thames, Phelps e Radford, além de diferentes instrumentos para coleta, análise e registro dos dados e informações, como atividades orientadas de ensino, narrativas, a constituição de grupos de estudos, entrevistas, questionários, gravações em áudio e em vídeo, fotografias, diários de bordo.

Das pesquisas de formação inicial analisadas, três apresentaram delimitação específica nos estudos sobre as habilidades do Pensamento algébrico, sendo exploradas as ideias de sequência, padrão e regularidade (Lachi, 2019; Santana, 2019), equações (Santana, 2019) e sequência, padrão, regularidade, fluência, interdependência, variável, campo de variação e relação de igualdade (Noro, 2020). Além das ideias apresentadas, os estudos também abordaram outros aspectos referentes à formação docente que influenciaram na compreensão do conhecimento relacionado com o pensamento algébrico, como a comunicação escrita matemática (Goma, 2019) e as crenças de autoeficácia no julgamento de suas capacidades em persistência, empenho, conhecimento especializado e predisposição para o ensino (Santana, 2019).

Os estudos com foco na formação inicial sobre o pensamento algébrico, concluem que os participantes das pesquisas apresentam limitações quanto aos conhecimentos sobre o pensamento algébrico e ressaltam a importância da construção de formações continuadas para que os futuros professores possam sentir segurança ao planejarem e organizarem uma proposta de ensino e aprendizagem significativa sobre habilidades do pensamento algébrico para turmas dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

A pesquisa de Conceição (2021), classificada nessa categoria, aborda o processo formativo no movimento da colaboração entre duas professoras, sendo uma a própria autora da pesquisa e as crenças de autoeficácia de professores que ensinam matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental a partir de uma escala composta por uma série de informações que representam situações didáticas, respectivamente. Conceição (2021) aponta que a *práxis* colaborativa entre duas professoras pesquisadoras alfabetizadoras ao estudar, planejar, sistematizar, desenvolver estratégias para o ensino de álgebra em uma turma do primeiro ano do Ensino Fundamental possibilitou o avanço no conhecimento do conteúdo matemático, pedagógico e sobre si mesmas.

Pinheiro (2018) discutiu como as crenças de autoeficácia impactam motivações, escolhas e comportamentos das professoras em duas práticas em atividades que visam ao desenvolvimento do pensamento algébrico e contou com a participação de nove professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Sua análise revela que embora os docentes demonstrem crenças de autoeficácia positivas, estas não são fortes, podendo ser influenciadas por fatores como idade, concepções de álgebra, autoconceito, formação inicial, pós-graduação, persuasão social, materiais curriculares e o interesse dos alunos nas aulas.

Ferreira (2017) e Santos (2020) investigaram – dentro do contexto de um curso de extensão – o conhecimento matemático para o ensino do pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e o desenvolvimento do pensamento teórico mediado por conceitos algébricos, respectivamente. Os autores não delimitaram as habilidades do pensamento algébrico que seriam focalizadas em seus estudos, realizando uma análise mais ampla das habilidades do pensamento algébrico como um todo.

Em sua pesquisa, Ferreira (2017) conclui que os participantes de sua pesquisa apresentaram pouca familiaridade com questões que envolvem caracterização e trabalho com o pensamento algébrico e que têm um conhecimento mais voltado para o saber fazer em detrimento do conhecimento específico matemático do conteúdo a ser ensinado. Santos (2020), baseado Teoria Histórico-Cultural, propôs situações desencadeadoras de aprendizagem da algébrica considerando seu movimento histórico e lógico e conclui, ao fim de sua pesquisa, que os participantes puderam estabelecer relações e regras gerais a partir de casos particulares, o que subsidiou a ascensão no pensamento, do abstrato ao concreto. Na sua visão, esses professores manifestaram indício de superação do pensamento empírico sobre a álgebra.

Trídico (2019), Barboza (2019) e Souza (2021) realizaram suas pesquisas no ambiente da formação continuada junto a professores da rede pública de ensino. Trídico (2019) analisou em que medida um curso de formação continuada de 32 horas, para cinco professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, contribui para o desenvolvimento do conhecimento tecnológico, pedagógico e de conteúdo algébrico com foco no pensamento relacional, por meio da Engenharia Didática.

Barboza (2019), delimitou o foco do seu estudo sobre o pensamento algébrico aos diferentes significados do sinal de igualdade, tendo com objetivo principal desvelar e compreender como tarefas de aprendizagem profissional possibilitam a mobilização e a construção de conhecimentos para ensinar essas habilidades do pensamento algébrico nos Anos Iniciais. Com a participação de seis professores em 14 encontros presenciais, Barboza (2019) conclui que após o percurso formativo foi possível identificar indícios de mobilização, ampliação e construção de conhecimento sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico, principalmente dos diferentes significados do sinal de igualdade.

A pesquisa de Souza (2021) contou com a participação de dez professoras, sendo seis da Educação infantil e quatro dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e teve como objetivo investigar a concepção dessas professoras a respeito da *Early Algebra* antes e depois da participação na formação continuada. A partir das ações desenvolvidas na formação proposta pela autora, verifica-se que houve avanços no entendimento das vertentes atreladas a *Early Algebra*, pois suas concepções iniciais mudaram após a formação, passando de incipientes para uma concepção consistente.

Por fim, compondo o segundo grupo, a pesquisa de Oliveira (2018) e Souza (2020) dá ênfase ao desenvolvimento habilidade do pensamento algébrico – dentro de uma formação continuada em *Early Algebra* na perspectiva do Ensino Híbrido. Oliveira (2018) teve como participantes discentes de um curso de Mestrado em Educação que, por meio de uma abordagem construtivista, foram convidados a discutir situações-problemas com foco nos conceitos inerentes à Álgebra. Os resultados obtidos dessa pesquisa revelam que as reflexões realizadas pelas professoras-cursistas as levaram a uma (trans)formação em suas práticas pedagógicas, no que tange ao ensino de conceitos inerentes à Álgebra elementar.

Já a pesquisa de Souza (2020) fez uma coleta de dados observando e registrando no diário de campo e em gravações em áudio e vídeo como os textos produzidos no percurso formativo com professores dos Anos Iniciais eram contextualizados nas salas de aula dos participantes tendo em vista o desenvolvimento o pensamento relacional dos alunos.

Como resultado, o autor aponta para uma mudança no modelo de ensino tradicional da matemática e na formação continuada de professores com a adoção de modelos híbridos, pois estes provocaram mudanças positivas no contexto em que foram inseridos. Os participantes conseguiram produzir textos legítimos voltados para o tema em questão, apresentando uma postura crítica causando uma mudança organizacional da sala de aula e a utilização de outras metodologias de ensino.

Ademais, a partir dessa revisão de literatura, constata-se que embora diversas as abordagens de pesquisas sobre a professora e o desenvolvimento do pensamento algébrico encontradas, a carência de pesquisas no Brasil sobre o tema ainda é preocupante, pois compreendemos a importância de se investigar não apenas o conhecimento sobre a Álgebra e o pensamento algébrico, mas a junção desse conhecimento com a prática docente. Evidenciando estratégias às metodologias já utilizadas, os recursos didáticos, as intervenções, entre outros elementos que compõe o fazer pedagógico.

Outro ponto de destaque é a delimitação das pesquisas quanto às habilidades algébricas em foco nas análises. Das pesquisas selecionadas nessa revisão, seis restringiram a pesquisa a uma habilidade específica do pensamento algébrico, enquanto as demais analisaram o pensamento algébrico como um todo.

Ademais, conforme afirma Ferreira (2017, p. 90) questões como “o que pensam e sabem os professores dos Anos Iniciais sobre o significado do pensamento algébrico e como esse trabalho pode ser desenvolvido em sala de aula?” são algumas das muitas perguntas que podem favorecer o entendimento do conhecimento matemático necessário aos professores dos Anos Iniciais, no que tange ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

1 **A PROFESSORA QUE ENSINA MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS**

Não por acaso, o título deste capítulo está no feminino. Isso se deve ao fato de que no Brasil, de acordo com o Censo Escolar de 2021, as professoras correspondem à maioria dos docentes atuantes nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, cerca 88,1%. Não obstante, nas outras etapas da Educação Básica o corpo docente também é comporto em sua maioria por mulheres: 96,3% na educação infantil, 66,5% nos Anos Finais do Ensino Fundamental e 57,7% no Ensino Médio. Por isso, nesta pesquisa optamos por nos referir ao professor dos Anos Iniciais usando o gênero feminino do substantivo.

No Brasil, a educação escolar ocorre mediante as orientações previstas a princípio na LDB nº 9.394/96, e o processo de ensino e aprendizagem nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental é regido pela professora, profissional da educação que estando em atuação é habilitada em nível médio Normal ou superior para a docência na Educação Infantil e nos Anos Iniciais. Essa profissional da educação ficou conhecida como professora generalista ou polivalente que, de acordo Curi (2004), é quem vai estabelecer os primeiros contatos dos alunos com os conhecimentos provenientes de várias áreas, como a Matemática, sendo esse profissional o responsável pela iniciação das crianças nessas áreas de conhecimento.

Nóvoa (2009) afirma que o início do século XXI os professores voltaram ao centro das pesquisas políticas e educacionais, pois são levantadas questões, por exemplo, sobre a sua formação, uma vez que os professores são vistos como elementos insubstituíveis para a promoção das aprendizagens e na compreensão da diversidade e uso das tecnologias. Hoje, mais uma vez, após a crise sanitária causada pela pandemia da Covid-19, que impactou e transformou muitas vidas, observamos a professora ganhar destaque.

A Covid-19 é uma doença infecciosa causada pelo coronavírus relacionado com uma síndrome respiratória aguda e grave que, no segundo semestre do ano de 2019, assolou o mundo durante 3 anos, e ainda convive conosco devido às suas variantes. Diante dos impactos na saúde e economia gerados pela Covid-19, observamos também que no âmbito da educação o coronavírus trouxe grandes danos.

É imprescindível ressaltar que as medidas de prevenção praticadas na ocasião da pandemia eram necessárias para o cuidado individual e coletivo de todos. Todavia, após o período pandêmico, observamos que o processo de ensino e aprendizagem dos alunos inevitavelmente foi afetado pela falta de interação social e afetiva da relação professor/aluno, aluno/aluno, e como a interação é um aspecto primordial para aprendizagem, isso trouxe prejuízo para o desenvolvimento desses estudantes. De acordo com o INEP (2021), de 2019 a 2021 houve uma queda na aprendizagem dos estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental de 6,02 para 5,64. O cálculo da aprendizagem é feito com base nos resultados dos alunos na Prova Brasil em Língua Portuguesa e Matemática multiplicado pela taxa de aprovação.

1.1 **A formação da professora polivalente e o ensino de Matemática**

Em uma breve retrospectiva, Saviani (2009) apresenta os períodos da formação de professores no Brasil, que começa logo após a independência do país com a criação da Lei das Escolas de Primeiras Letras, promulgada em 15 de outubro de 1827. Desde então, a característica da formação docente no país passou por diversas mudanças e discussões acerca da sua eficiência e dos preceitos em que deveria se embasar.

Durante anos, a formação das professoras dos Anos Iniciais esteve pautada no domínio dos conteúdos que deveriam ser aprendidos pelos professores para serem ensinados às crianças, desconsiderando o preparo didático-pedagógico. Aos poucos os cursos de formação incorporaram um caráter pedagógico a fim de se firmar como um conhecimento científico e "caminhava-se, pois, decisivamente rumo à consolidação do modelo pedagógico-didático de formação docente que permitiria corrigir as insuficiências e distorções das velhas Escolas Normais." (Saviani, 2009, p. 4).

Refletindo sobre o percurso histórico da formação docente, Saviani (2009) declara:

> […] Ao longo dos últimos dois séculos, as sucessivas mudanças introduzidas no processo de formação docente revelam um quadro de descontinuidade, embora sem rupturas. A questão pedagógica, de início ausente, vai penetrando lentamente até ocupar posição central nos ensaios de reformas da década de 1930. Mas não encontrou, até hoje, um encaminhamento satisfatório. Ao fim e ao cabo, o que se revela permanente no decorrer dos seus períodos analisados é a precariedade das políticas formativas cujas sucessivas mudanças não lograram estabelecer um padrão minimamente consistente de preparação docente para fazer face aos problemas engrenados pela educação escolar em nosso país. (Saviani, 2009, p.9).

De fato, ao longo dos anos, a formação das professoras passou por diferentes transformações que refletiam a concepção político/pedagógica em que estavam alinhados. A incorporação da questão pedagógica nos cursos de formação foi um grande avanço para a preparação das professoras e a melhoria do processo de aprendizagem dos alunos, mas as mudanças não pararam por aí.

De acordo com Nacarato, Mengali e Passos (2019) na década de 1990 o Brasil deu início a uma série de reformas educacionais, com destaque para a Lei nº 9.394/96 que institui a formação em nível superior da professora polivalente nos cursos de Normal Superior e Pedagogia. Essa mudança também propôs que os currículos do Ensino Fundamental e Ensino Médio tivessem uma base comum.

Contudo, embora a mudança no nível de formação das professoras dos Anos Iniciais tenha sido importante, ainda assim percebe-se pouca diferença entre os cursos de magistérios de nível médio e de nível superior. Esse aspecto pode ter sua raiz no modelo pedagógico-didático evidenciado por Saviani (2009) na retrospectiva citada anteriormente que corrobora com o que Nacarato *et al*. (2019) afirmam: a formação não acompanhou as perspectivas trazidas com as mudanças curriculares nacionais, construindo uma proposta formativa centrada nos processos metodológicos que desconsidera os fundamentos das diferentes disciplinas, inclusive da Matemática.

Com relação à formação para o ensino de Matemática das professoras polivalentes, Nacarato, Mengali e Passos (2019), apresentam um importante estudo sobre os caminhos dessa formação no Brasil e apontam suas principais características. Segundo as autoras, é na década de 1980 que o currículo de Matemática na maioria dos países traz pela primeira vez temas como alfabetização matemática, linearidade do currículo, aprendizagem com significado, valorização da resolução de problemas e da linguagem matemática, entre outros.

Essas perspectivas influenciaram os currículos brasileiros de diferentes estados e trouxe pontos positivos para a Educação Matemática nos Anos Iniciais. Contudo, as propostas desse período davam mais destaque para o detalhamento dos conteúdos como os algoritmos das operações do que para o desenvolvimento dos conceitos. Além disso, não ofereciam à professora polivalente sugestões de abordagens metodológicas que contemplassem as novas tendências da Educação Matemática.

No mesmo ritmo, as autoras afirmam que os cursos de formação inicial das professoras polivalentes tanto de nível médio Normal quanto em nível superior raramente oferecem disciplinas específicas para a formação matemática das professoras, favorecendo o distanciamento da professora polivalente com a Matemática requerida nos currículos.

De fato, uma busca pelo ementário do curso de Pedagogia no *site* da Faculdade de Formação de Professores – FFP/UERJ mostra as disciplinas voltadas para a Matemática oferecidas, como podemos ver no Quadro 4.

Quadro 4 – Disciplinas voltadas para a Matemática do curso de Pedagogia (FFP/UERJ)

Disciplina	*Status*	Carga Horária
Matemática: Conteúdo e Método I	Obrigatória	60 h
Matemática: Conteúdo e Método II	Obrigatória	45 h
Matemática: Conteúdo e Método II	Obrigatória	45 h

Fonte: Informações do *site* da Faculdade de Formação de Professores FFP/UERJ (2023).

Verificamos a partir do ementário disponível no *site* da Faculdade de Formação de Professores (FFP) que o curso de Pedagogia reserva 150 horas de estudos em disciplinas direcionadas à Matemática, aproximadamente 0,046% do total de horas do curso, que contém 3.220 horas. Como reflexo, o ensino de Matemática da professora polivalente é marcado por basear-se na relação que ela estabelece com a Matemática, dado sua experiência ao longo da vida escolar como aluna, o que, segundo Nacarato *et al*. (2019), traduz, na maioria das vezes, marcas de sentimentos negativos quanto à disciplina, podendo gerar bloqueios para aprender e consequentemente ensinar Matemática.

Por outro lado, é imprescindível ressaltar que muitas professoras que atuam nos Anos Iniciais, apesar do contexto formativo e das dificuldades da própria profissão, dedicam-se a aprimorar a sua prática nas aulas de Matemática. Encarando medos e inseguranças, essas professoras buscam em diferentes meios o desenvolvimento de intervenções para a aprendizagem dos alunos, confeccionando recursos pedagógicos, aprendendo a trabalhar com jogos, trocando ideias com outras colegas de trabalho na escola, na formação continuada e principalmente no olhar atento para o seu aluno durante o processo de ensino e aprendizagem.

Portanto, o exercício de pensar a relação da professora polivalente com o ensino de Matemática nos Anos Iniciais requer atenção à formação docente e aos conhecimentos que essas professoras apresentam sobre os temas e habilidades que ele envolve. De acordo com Radford (2021) o ensino e a aprendizagem não são atividades separadas, mas sim um trabalho conjunto no qual a professora, por meio de um trabalho colaborativo com os estudantes, promove uma manifestação progressiva do saber, tornando-o objeto da consciência.

Desse modo, a seguir continuaremos a pensar na professora polivalente tendo como foco o conhecimento para o ensino de Matemática.

1.2 **O lugar do conhecimento docente no perfil da professora**

No esforço de esboçar alguns apontamentos sobre o professor e o trabalho docente nas sociedades contemporâneas, Nóvoa (2009) parte do questionamento “O que é um bom professor?” e sugere algumas disposições para um olhar que liga as dimensões pessoais e profissionais na produção identitária dos professores. Com esse novo olhar para o perfil do professor, Nóvoa (2009) afasta-se das concepções atreladas a competências de cunho comportamentalistas e técnico instrumental que definiam o bom professor, aproximando-se de uma visão mais fluida da identidade do professor com base em (pré)disposições que, segundo ele, não são naturais, mas construídas. Logo, em primeiro lugar, ele cita a disposição do conhecimento.

O conhecimento aliado às outras disposições é um ingrediente indispensável na consolidação do perfil da professora, pois é necessário para construção de práticas pedagógicas que conduzirão os estudantes à aprendizagem. O conhecimento especializado da professora, seja ele de Matemática ou de outra área, é um conhecimento específico da nossa profissão que traduz o somatório de habilidades necessárias à ação de ensinar e desenvolver a aprendizagem.

Por exemplo, é possível que no cotidiano pessoas de diferentes idades e formações realizem cálculos matemáticos para resolverem alguma situação-problema como na compra legumes na feira ou na organização de uma festa de aniversário. Esse é um conhecimento comum, que pode ser desenvolvido por meio de propostas de ensino e aprendizagem. Contudo, a professora possui além do conhecimento prático comum, outros conhecimentos essenciais que a auxilia no desenvolvimento de uma prática docente para a aprendizagem desse tema pelo aluno.

No próximo capítulo, apresentamos alguns teóricos e suas pesquisas que tomam como foco o estudo do corpo de conhecimentos profissionais do professor, conhecimentos que são necessários para atuação docente. Descreveremos a progressão dos estudos sobre esse tema buscando enfatizar a compreensão acerca dos conhecimentos para o ensino de Matemática.

1.3 **O conhecimento docente a partir dos estudos de Lee Shulman**

Lee S. Shulman nasceu em 1938 na cidade de Chicago – EUA. Mestre em Psicologia da Educação e especialista em formação docente, iniciou suas atividades na Universidade do Estado de Michigan em 1963 dedicando-se aos estudos sobre a relevância e natureza do conhecimento profissional docente a partir dos domínicos do conhecimento disciplinar e pedagógico do conteúdo.

Em 1986, Shulman apresenta uma importante contribuição para a compreensão do conhecimento docente a partir daquilo que ele e seu grupo de pesquisa chamaram de paradigma perdido. De acordo com ele, registros de pesquisas com foco na identificação dos conhecimentos profissionais datadas de 1875 tinham um caráter avaliativo com ênfase no conhecimento que a professora detinha sobre o conteúdo, enquanto pesquisas da década de 1980 dão mais importância aos procedimentos de ensino ou ao comportamento da professora relacionado com a eficácia do ensino, ignorando o conteúdo a ser ensinado ou o tratando como uma variável de contexto "uma característica de controle para subdividir conjuntos de dados por categorias de conteúdo" (1986, p. 5)

Para Shulman (1986, p. 9) "há um século, a característica definidora da realização pedagógica era o conhecimento do conteúdo", embora as pesquisas da década de 1980 enfatizem a forma como professores administram suas aulas, ainda há um paradigma perdido que se refere às questões voltadas para a construção do conhecimento profissional docente que articulam o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico. De acordo com o autor,

> Meus colegas e eu estamos tentando corrigir esse desequilíbrio através do nosso programa de pesquisa, "Crescimento do Conhecimento no Ensino". Quais são as fontes de conhecimento do professor? O que um professor sabe e quando ele ou ela veio a saber disso? [...] Nosso trabalho não pretende denegrir a importância da compreensão ou habilidade pedagógica no desenvolvimento de um professor ou no aumento da eficácia do ensino. O mero conhecimento do conteúdo provavelmente será tão inútil pedagogicamente quanto a habilidade livre de conteúdo. Mas combinar adequadamente os dois aspectos das capacidades de um professor exige que prestemos tanta atenção aos aspectos de conteúdo do ensino como temos dedicado recentemente aos elementos do processo de ensino (Shulman, 1986, p.9 e 10).

O programa de pesquisa de Shulman (1986) estava fundamentado nos estudos realizados com professores iniciantes e experientes cujo objetivo era compreender o desenvolvimento cognitivo desses professores. O quadro teórico formado para análise de seus estudos surgiu a partir de questões como "quais sãos os domínios e categorias de conhecimento do conteúdo nas mentes dos professores? Como, por exemplo, relacionam-se conhecimento do conteúdo e conhecimento pedagógico geral"? (1986, p. 11) e gerou três categorias que descreviam esse conhecimento: o conhecimento do conteúdo ou conhecimento do tema, o conhecimento pedagógico do conteúdo e o conhecimento curricular.

O conhecimento do conteúdo refere-se à compreensão que a professora precisa ter das estruturas do assunto, sendo capaz de ir além das definições e verdades sobre determinado domínio, ampliando a explicação sobre aquele conteúdo da teoria para a prática. Nesse domínio, considera-se que a professora deve explicar ao aluno tanto as formas de prova de determinada proposição, quanto sua relação com outras proposições até mesmo fora da disciplina em questão. De acordo com Shulman (1986):

> O professor não precisa apenas compreender que algo é assim; o professor deve compreender melhor por que razão é assim, em que bases a sua garantia pode ser afirmada e em que circunstâncias a nossa crença na sua justificação pode ser enfraquecida e até negada. Além disso, esperamos que o professor compreenda por que é que um determinado tópico é particularmente central para uma disciplina, enquanto outro pode ser um tanto periférico. (Shulman, 1986, p.11. Tradução nossa).

O conhecimento curricular é representado por Shulman (1986) em algumas ações relacionadas à compreensão que o professor possui sobre as alternativas curriculares disponíveis para o ensino. Ele não a subdivide, mas a compreende em dois aspectos: o conhecimento curricular lateral e o vertical. O conhecimento curricular lateral está ligado à familiarização que a professora tem com os materiais curriculares usados por seus alunos na disciplina em que lecionada e em outras disciplinas ao mesmo tempo, além da capacidade de relacionar os tópicos ou questões de um curso ou aula com outros tópicos e questões que estão sendo discutidas em outras aulas. O conhecimento curricular vertical, por sua vez, entende a "familiaridade com os tópicos e questões que foram e serão ensinados na mesma área disciplinar durante os anos anteriores e posteriores na escola, e os materiais que os incorporam." (Shulman, 1986, p.14)

A última categoria da base de conhecimentos concebida por Shulman é o conhecimento pedagógico do conteúdo, CPC, ou PCK – *pedagogical content knowledge*. O autor inclui nessa categoria os aspectos ligados à ensinabilidade[3] dos assuntos, como as melhores formas de representação do tema, analogias, exemplos, explicações, ilustrações e demonstrações mais eficientes utilizadas no ensino do conteúdo e que tornam a aprendizagem dele acessível a todos os alunos. É, portanto, o conhecimento da matéria, mas também o conhecimento da matéria para o ensino.

---

[3] Termo usado por Shulman (1986, p. 13) para as ações da professora ligadas ao conhecimento pedagógico do conteúdo que, nesse caso, ainda estão relacionadas com o conhecimento do conteúdo, mas de forma particular refere-se aos aspectos ligados ao ensino dele**.**

Destacamos nessa categoria outra habilidade da professora incluída por Shulman (1986), que é a investigação. A investigação do que torna fácil ou difícil a aprendizagem do conteúdo, de como o estudante vê o tema e o que ele já traz sobre o assunto, e principalmente a compreensão pedagógica sobre os erros dos alunos são, em nossa concepção, ações de extrema importância no processo de ensino/aprendizagem dos conteúdos, pois é norteadora do planejamento docente e oferece dados para a avaliação diagnóstica e processual da aprendizagem do estudante e da própria prática da professora.

Posteriormente, em 1987, Schulman revisitou essas categorias e as subdividiu em sete, a saber: a) o conhecimento do conteúdo que será objeto de ensino; b) o conhecimento pedagógico geral; c) o conhecimento do currículo; d) o conhecimento pedagógico do conteúdo; e) o conhecimento dos aprendizes e suas características; f) o conhecimento dos contextos educacionais; e g) o conhecimento dos fins, propósitos e valores da educação.

Eentre essas categorias, Schulman (1987) ressalta que o PCK é de especial interesse para as pesquisas relacionadas com o conhecimento profissional docente, pois ela possibilita a identificação dos elementos distintivos de conhecimento para o ensino. Segundo o autor, o conhecimento pedagógico do conteúdo representa:

> [...] a combinação de conteúdo e pedagogia numa compreensão de como determinados tópicos, problemas ou questões são organizados, representados e adaptados aos diversos interesses e habilidades dos alunos, e apresentados para instrução. O conhecimento pedagógico do conteúdo é a categoria com maior probabilidade de distinguir a compreensão do especialista em conteúdo daquela do pedagogo. (Schulman, 1987, p.8).

À vista disso, Shulman considera o professor como construtor de um conhecimento especial, valorizando esse profissional e distinguindo-o de outras profissões, dado os diversos elementos e condições necessárias para o ato de ensinar.

Prosseguindo com os estudos sobre os conhecimentos docentes, Pamela L. Grossman, realizou na década de 1990 um estudo de caso com professores licenciados em língua inglesa e outros três bacharéis na mesma área, a fim de, na investigação da prática desses professores, encontrar respostas que expliquem a distinção real das ações docentes que são orientadas somente pelo conhecimento do conteúdo dos bacharéis daquelas que se apoiam na formação pedagógica dos licenciados.

A autora, foi orientanda de Shulman e atualmente é reitora da Escola de Pós-Graduação em Educação e professora de Educação na Universidade da Pensilvânia. Ela deu continuidade aos estudos sobre a base dos conhecimentos docentes concentrando-se na preparação de professores e outros profissionais em questões de qualidade do ensino, particularmente em artes e língua inglesa.

Os resultados de suas pesquisas concluíram que a formação dos participantes influencia o processo de ensino/aprendizagem dos temas e que o domínio do PCK é indispensável para a prática docente. Verificou-se que professores com domínio específico dos conceitos apresentavam os conteúdos a serem ensinados sem estabelecer conexão com a realidade ou aplicabilidade em situações do cotidiano, reproduzindo os procedimentos metodológicos aprendidos no curso de bacharelado.

Já os professores licenciados, apresentaram preocupação em analisar o contexto em que a escola estava inserida, fizeram uma diagnose das dificuldades e potencialidades dos alunos para então adequar os conteúdos propostos. Grossman (1990) explica que ao realizarem essas ações, os professores licenciados estavam a utilizar o PCK, transformando um conhecimento científico em um conhecimento prático aplicável a situações do cotidiano, promovendo uma aprendizagem significativa para os alunos.

A partir dos resultados de sua pesquisa, Grossman (1990) amplia a base de conhecimentos docentes apresentada por Shulman (1986, 1987), acrescentando a categoria Conhecimento do Contexto, que segundo a autora influencia o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo da professora, assim como o Conhecimento do Tema e o Conhecimento Pedagógico Geral.

De acordo com Grossman (1990) o Conhecimento do Contexto descreve a visão que o docente precisa ter em nível macro e micro do ensino, avaliando e considerando os interesses da turma, verificando o contexto cultural e social no qual a escola está localizada e as expectativas da comunidade escolar. Na concepção da autora:

> [...] os professores devem se basear na compreensão dos contextos particulares em que ensinam, adaptando seus conhecimentos gerais a contextos escolares específicos, e a alunos individuais; (...) deve ser adaptado aos seus alunos em específicos e às demandas de seus distritos. (Grossman, 1990, p. 9).

Dessa forma, toca-nos nessa dissertação a compreensão de que os professores sabem mais do que apenas o conteúdo, mas inclusive as melhores maneiras de explicá-lo, como afirma Grossman; Wilson; Shulman (2005)

> Os professores ajudam os alunos a adquirir conhecimento em uma área. Esses diferentes objetivos exigem entendimentos relacionados, mas distintos, do assunto [...] *Bons professores não apenas conhecem seu conteúdo, mas também sabem*

> *coisas sobre seu conteúdo que tornam possível uma instrução eficaz.* (Grossman, Wilson e Shulman, 2005, p.4, tradução e grifo nosso).

Após a proposta inicial de Shulman, vários autores ampliaram suas ideias com novas proposições na tentativa de explicar o conhecimento das professoras. Nessa direção, autores mais voltados para o ensino de Matemática debruçaram-se sobre o modelo original de Shulman e o ampliaram, como veremos a seguir.

1.4 **O Conhecimento docente para o ensino de Matemática segundo Ball, Thames e Phelps**

Os estudos de Shulman (1986, 1987) sobre a base de conhecimentos do professor trouxeram novas perspectivas para a formação docente e para a compreensão do perfil da professora. Embora o autor não tenha se dedicado a estudos sobre o conhecimento especializado do professor dentro de uma determinada área do conhecimento, suas ações contribuíram para que pesquisas subsequentes aprofundassem a compreensão sobre os conhecimentos necessários para o ensino de um tema específico, como a Matemática.

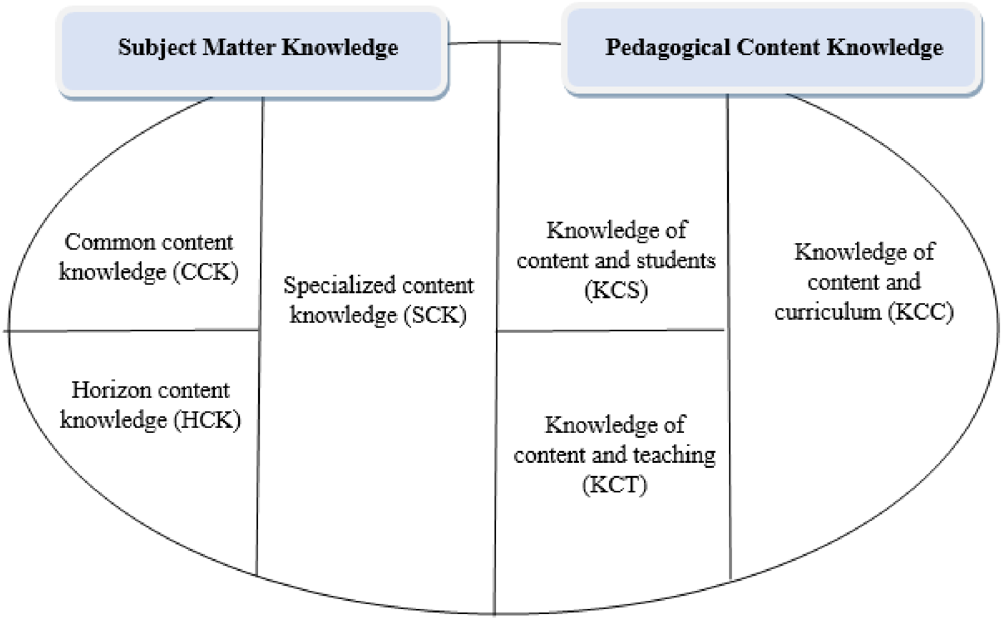
Seguindo essa linha, dois modelos ganham destaque nas pesquisas sobre o conhecimento docente referente à disciplina de Matemática: a proposta do grupo estadunidense formado por Débora Loewnberg Ball, Mark Hoover Thames e Geofrrey Phelps (2008) e o modelo apresentado pelo grupo espanhol formado por Carrillo, Flores-Medrano, Escudero-Avila, Climent, Contreras e Montes (2018). Nesta pesquisa, aproximamo-nos das concepções apresentadas por Ball *et al.* (2008) e, portanto, apoiamos nossas análises a partir do modelo denominado *Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT (Conhecimento Matemático para o Ensino) que será descrito a seguir.

O MKT foi elaborado a partir da percepção dos autores sobre a forma como o conceito de PCK de Shulman (1986, 1987) incidia sobre a prática docente de professores de Matemática. De acordo com os autores, o PCK, por se tratar de uma categoria que descreve as habilidades necessárias para o ensino de modo geral, não conseguia atender às demandas próprias do ensino de Matemática que vão além da compreensão profunda do conteúdo, das diversas formas de representação, exemplos e contraexemplos, mas que estão diretamente ligadas à capacidade da professora de pensar matematicamente.

Dessa forma, os autores identificaram em suas pesquisas dois domínios do conhecimento docente para o ensino de Matemática: o *Subject Matter Knowledge* (Conhecimento do Tema ou do Conteúdo) e o *Pedagogical Content Knowledge – PCK* (Conhecimento Pedagógico do Conteúdo). Essa organização proposta por Ball *et al*. (2008) não significa uma análise separada do conhecimento do tema e o conhecimento pedagógico, mas buscando conceptualizar a complexidade da prática pedagógica dos professores que ensinam matemática, esses autores passam a considerar que o conhecimento do conteúdo está incluído no conhecimento pedagógico como um amálgama, e reescrevem o PCK de Shulman alinhando os conhecimentos pertinentes à prática docente com os conhecimentos do conteúdo.

Na figura a seguir, observamos o esquema do modelo MKT com os dois domínios da base de conhecimento matemático para o ensino o Conhecimento sobre o Tema e o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, subdivididos em três subdomínios cada.

Figura 1 – Domínios do modelo MKT



Fonte: Adaptado da figura apresentada em Ball, Thames e Phelps (2008, p. 403).

Mantemos a nomenclatura original dos subdomínios do MKT a fim de não nos distanciarmos da referência adotada na maioria das pesquisas que utilizam o modelo, uma vez que utilizaremos as siglas dos termos em inglês para definição dos subdomínios investigados nesta dissertação.

Cada um desses termos pode ser traduzido da seguinte forma: CCK - Conhecimento Comum do Conteúdo, HCK – Conhecimento do Horizonte do Conteúdo, SKC –

Conhecimento Especializado do Conteúdo, KCS – Conhecimento do Conteúdo e do Estudante, KCT – Conhecimento do Conteúdo e do Ensino e KCC – Conhecimento do Conteúdo e do Currículo.

Nesta dissertação delimitamos nossa análise aos três subdomínios do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo: Conhecimento do Conteúdo e do Estudante (KCS), Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT), e Conhecimento do Conteúdo e do Currículo (KCC). Nas seções seguintes, esses subdomínios serão explorados de maneira independente. Tendo em vista seus objetivos, faremos algumas reflexões a respeito das características que se espera observar na manifestação de cada um.

1.4.1 KCS: o conhecimento do conteúdo e do estudante

De acordo com Ball *et al.* (2008, p. 401), ao ensinar Matemática a professora, ao usar o KCS, "combina saber sobre os alunos e saber sobre a matemática. As professoras devem antecipar o que os alunos provavelmente pensarão e as suas dúvidas." Esse subdomínio está ligado à capacidade da professora de conhecer o aluno para quem ela dará a aula mensurando o que esse aluno acha difícil ou fácil sobre o conteúdo a ser ensinado. No caso de tarefas, as professoras ainda devem saber antecipadamente o que os alunos provavelmente farão e quais são os principais erros cometidos por eles.

Como exemplo, podemos citar os erros mais comuns que os alunos cometem ao resolver o seguinte problema proposto por Smole e Diniz (2011, p. 76): "Albagli é um paquiderme. Ele usa 17 sabonetes e 22 esponjas para tomar banho. Albagli toma banho de 15 em 15 dias. Quantos sabonetes ele gasta em 3 meses?" A solução para essa situação-problema é dada pela conta 17×6, mas as autoras apresentam como erros comuns dos estudantes as contas: $17 + 6$, 17×2, $17 + 22 = 39$ e depois 39×3.

A proposta de situação-problema apresentada por Smole e Diniz (2011) aliada à exemplificação dos erros comuns dos alunos, é decorrente do Conhecimento do Conteúdo e do Estudantes (KCS) pois, no caso da última resposta ($17 + 22 = 39$, depois 39×3) a professora considera a possibilidade de que alguns alunos, precipitadamente, somem os primeiros valores apresentados na situações-problema e em seguida multiplique o resultado por 3.

Ball *et al*. (2008) explicam a relação que o Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (KCS) estabelece com o Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK) e o Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK):

> Reconhecer uma resposta errada é conhecimento de conteúdo comum (CCK) enquanto avaliar a natureza de um erro, especialmente um erro incomum, normalmente requer afinidade no pensamento sobre números, atenção aos padrões e pensamento flexível sobre o significado das estratégias utilizados pelo aluno e isso é marcado pelo conhecimento de conteúdo especializa (SCK). Em contraste, a familiaridade com os erros comuns e a decisão de qual dos vários erros os alunos têm maior probabilidade de cometer são exemplos de conhecimento do conteúdo e dos alunos (KCS). (Ball, Thames e Phelps, 2008, p.401).

A fim de identificar o Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes, manifestados pelas professoras que ensinam Matemática, Ball *et al.* (2008) apud Proto (2020) sugerem que sejam feitas perguntas que requerem a interpretação de um pensamento mal formulado dos alunos ou que demandem sensibilidade para julgar o que eles acham fácil ou desafiador.

1.4.2 KCT: o conhecimento do conteúdo e do ensino

O subdomínio KCT consiste nas ações que descrevem a habilidade da professora em combinar o conhecimento sobre o ensino e o conhecimento sobre a Matemática a ser ensinada. Constantemente nas aulas de Matemática as professoras sequenciam um conteúdo específico para a instrução ou escolhem com quais exemplos vai começar, quais recursos são mais eficientes ou qual abordagem ele utilizará para aprofundar a discussão ou avaliar a aprendizagem dos alunos.

Por exemplo, qual recurso utilizar ao ensinar o sistema de numeração decimal? O material dourado? As fichas escalonadas? Os palitos de picolé agrupados no elástico? De acordo com Ball *et al*. (2008), recursos que trabalham um mesmo conteúdo, como no exemplo dado, podem representar diferentes aspectos desse conteúdo que fazem a diferença em diferentes pontos da aprendizagem dos alunos. “Cada modelo também requer um cuidado diferente no uso a fim de tornar as questões matemáticas salientes e utilizáveis pelos alunos” (Cohen, 2005, *apud* Ball *et a*l., 2008, p. 402). São nessas ações que se esconde a interação que as professoras estabelecem entre a compreensão matemática específica e a compreensão das questões pedagógicas que afetam a aprendizagem do aluno.

O Conhecimento do Conteúdo e do Ensino pode ser mobilizado pela professora tanto no planejamento da aula quanto na sala de aula em sua execução. Nesse segundo caso, ao decidir quais contribuições dos alunos a professora destrinchará, ignorará ou, ainda, reservará para outro momento, quando fará uma pausa para mais esclarecimentos, quando fará novas perguntas ou irá propor novas tarefas para avançar a aprendizagem dos alunos, são ações que representam a manifestação do KCT.

Buscando identificar esse conhecimento em pesquisas com professores, Ball *et al.* (2008) apud Proto (2020, p.48) sugerem, entre outras ações, pedir ao respondente para sequenciar um conteúdo, ou escolher um exemplo para o ensino de um tema, além de perguntar sobre "como os termos e as metáforas podem ajudar ou confundir os alunos no processo de aprendizagem, por exemplo, ao se utilizar os termos "emprestar" e "cancelar" ao resolver uma subtração ou equação algébrica".

1.4.3 KCC: o conhecimento do conteúdo e do currículo

Esse domínio compreende o conhecimento que identifica a importância e o objetivo de cada conteúdo presente no currículo, reconhecendo ainda os diferentes níveis de abordagem em cada ano de escolarização. De acordo com Ball *et al.* (2008) esse domínio requer o Conhecimento Especializado do Conteúdo, porém com a prática a professora não utilizará o conhecimento sobre os estudantes ou sobre o ensino, dado que já conhecerá o currículo e os aspectos que o envolve.

Ball, Thames e Phelps (2008) entendem o conhecimento do conteúdo e do currículo como sendo a principal contribuição de Shulman, pois é o subdomínio que dá atenção direta ao papel do conteúdo no/para o estudo, pois na época em que Shulman propôs a análise para esse aspecto da docência, as pesquisas ainda estavam muito voltadas para os aspectos gerais do ensino, como a gestão de sala de aula e o planejamento, sem considerar a importância que uma visão completa sobre os temas e os tópicos em determinado nível/ano de escolaridade traz para o processo de ensino e consequentemente para a aprendizagem dos alunos.

Por exemplo, a Álgebra é um tema de ensino referente aos Anos Iniciais; para fins de pesquisa, uma representação do KCC pode ser obtida quando a professora demonstra conhecer o programa desse tema referente a um nível ou ano escolar desse segmento, apresentando a progressão dos assuntos que o envolvem de forma consistente e com repertório de estratégias e recursos para o seu ensino.

Finalizando este capítulo, salientamos que o objetivo geral das pesquisas realizadas por Ball *et al.* tem sido construir, a partir das ideias de Shulman, uma teoria sobre o conhecimento matemático para o ensino, tomando por base a prática das professoras.

Sobre isso, Kieran (2007) afirma que a perspectiva teórica utilizada mais amplamente nas pesquisas envolvendo o professor que ensina Álgebra é baseada no construto do conhecimento base do professor (*knowledge base for teaching*) elaborado por Shulman (1986) embora a perspectiva adotada por Ball e Bass (2003) coloque o foco no que a professora faz e não no que ela precisa saber. Para a autora, há necessidade de se pesquisar a interação entre o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo das professoras, em conjunto com a maneira como eles compreendem como se desenvolve o conhecimento específico do assunto pelos alunos, e por isso optamos por adotar o presente referencial.

Ademais, considerando o objetivo da presente pesquisa, os estudos apresentados sobre a professora que ensina Matemática nos Anos Iniciais e as bases do conhecimento matemático para o ensino, passamos a apresentar nossa concepção sobre a Álgebra e o pensamento algébrico.

2 **DA ÁLGEBRA AO PENSAMENTO ALGÉBRICO**

Como professora dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, reconheço-me no perfil de participantes dessa pesquisa e, portanto, algumas inquietações sobre o tema atravessam-me como docente e provocam minha escrita como pesquisadora, como no exemplo de Oliveira e Paulo (2021, p.10): "se o pensar pode ser entendido como um ato do sujeito que, pela disposição, se lança às possibilidades que lhe são abertas para compreender o que se mostra, o que significa pensamento algébrico?"

Assim como Oliveira e Paulo (2021), também buscamos compreender o que é o pensamento algébrico e mais especificamente, sua origem e motivos para que seja desenvolvido nos Anos Iniciais. Afinal, de que se trata essa proposta?

Para responder a essa pergunta, buscamos entender inicialmente o que é a Álgebra e como foi o desenvolvimento do seu ensino até o ponto em que hoje nos encontramos. Os textos lidos nos mostraram que o significado da palavra Álgebra se modificou ao longo dos séculos, assim como as concepções relacionadas com o seu conceito e ensino. A rigor, essa palavra, que vem do árabe *al-jabr*, só apareceu após o século IX e contém diferentes ideias que englobam o seu sentido.

Para esta dissertação adotamos a referência histórico-cultural, e apoiamos no conceito de Moura (2021, p. 65) entendendo que a Álgebra é a área da Matemática que está preocupada com o "controle do movimento das quantidades, compreendendo a relação entre grandezas e a possibilidade de expressá-las de forma geral." Entretando, não ignoramos que os objetos que compõem essa área são respostas expressivas quando buscamos definir o que é a Álgebra, e por isso precisamos considerá-los se quisermos entender a origem do pensamento algébrico.

Dessa forma, discorremos sobre a articulação entre os objetos que compõem a Álgebra como área da Matemática e o seu ensino.

2.1 **O que sabemos sobre a Álgebra e o seu ensino?**

A escolha nesta dissertação por uma definição histórico-cultural para a Álgebra fica mais clara quando refletimos sobre o seu ensino. Nos Anos Finais do Ensino Fundamental, por exemplo, é comum que a Álgebra seja apresentada por meio do estudo das equações, um dos objetos que a compõe como área da Matemática.

Um livro didático do 7º Ano define o que é uma equação como “toda sentença matemática expressa por uma igualdade que apresenta letras representando números” (Bianchini, 2015, p.106) e estrutura o estudo desse objeto matemático passando por temas como: expressões algébricas, termos algébricos, sentenças matemáticas, equações do 1º grau, inequações, sistemas de equações etc.

O programa destinado ao ensino de Álgebra em uma turma de 7º ano como o utilizado no livro didático citado anteriormente, provavelmente mostra pelo menos uma referência daquilo que comumente se entende por Álgebra: “o estudo das equações”, “o uso das incógnitas” ou “a resolução dos sistemas de equações”. De fato, a Álgebra é isso tudo. Mas, será que podemos reduzi-la a isso?

Essas e outras associações que fazemos sobre a Álgebra estão diretamente relacionadas com os tópicos de seu programa de ensino e, por vezes, parece-nos restringir a potencialidade que essa área oferece, contribuindo para o distanciamento entre os procedimentos algébricos, seus objetos e seu processo histórico de desenvolvimento.

Sobre isso, Oliveira e Paulo (2021) fazem uma interessante retrospectiva sobre as formas que a Álgebra assumiu ao longo dos anos, revisitando as impressões de nomes como Diofanto de Alexandria (século III d.C.) e François Viète (1540-1603) que aparecem na História da Matemática associados ao desenvolvimento da Álgebra pela invenção e uso de símbolos simplificando a escrita e os cálculos matemáticos, e utilizando letras para representar dados conhecidos e desconhecidos, respectivamente.

Esses e outros nomes, indiscutivelmente ajudaram a formar o conjunto de objetos que que compõem a Álgebra como área da Matemática e a construir a concepção que temos sobre ela nas escolas. Contudo, ao adotarmos uma visão histórico-cultural sobre as características dessa área assumimos que a principal contribuição da Álgebra está no fato de podermos pensar sobre as estruturas matemáticas existentes, criando estratégias de generalização sobre as relações estabelecidas entre essas estruturas.

Para Kluth (2003, p. 463) *apud* Oliveira e Paulo (2021, p. 6), a visão histórico-cultural da Álgebra permite entendê-la a partir de

> [...] formas de explicar o modo com que abordamos e lidamos com os objetos matemáticos, porém mais do que isto, ao explicitar ela recupera e estende conceitos subjacentes aos objetos matemáticos constituídos ou em construção. A forma de explicitar o modo, compõe o fio que alinhava e incorporam os processos sintéticos e

> analíticos inerentes ao movimento da construção dos objetos matemáticos. (*apud* Oliveira e Paulo, 2021, p. 6).

Nessa direção, Kaput (1995, p.6) educador matemático que se dedicou aos estudos sobre a aprendizagem e ensino da Álgebra, explica que “não há uma só Álgebra, já que se pode pensar nela como um conjunto de conteúdos e métodos culturalmente compartilhados” e acrescenta que antes de experimentar o trabalho com formalismos (característica da Álgebra geralmente fortalecida nas escolas), os estudantes devem ser incentivados a atos de generalização e formalização gradual da generalidade.

A partir desses autores, entendemos que para o sucesso no ensino da Álgebra é fundamental o incentivo à reflexão sobre os objetos matemáticos, a fim de mitigar as dificuldades de aprendizagem e promover a democratização do acesso às ideias matemáticas por meio do desenvolvimento de um raciocínio que provoca, questiona, argumenta, explica, constrói, e não apenas aplica uma fórmula ou manipula símbolos.

Nesse sentido, começamos a entender o propósito de desenvolvimento de um pensamento algébrico no ensino de Álgebra. Na introdução desta dissertação citamos alguns trechos do livro *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI*, de Rômulo Campos Lins e Joaquim Gimenez que contribuem com a reflexão sobre as dificuldades apresentadas pelos estudantes na aprendizagem de Álgebra e suscitam a antecipação desse tópico para ser trabalhado junto com a Aritmética nas escolas por meio do desenvolvimento do pensamento algébrico.

Fiorentini, Miguel e Miorim (1992; 1993) também se debruçaram sobre o ensino de Álgebra e procuraram descrever como ele se desenvolveu ao longo dos tempos. De acordo com esses autores, três concepções se sucederam desde o início do século XIX, passando pelo Movimento da Matemática Moderna na década de 1960, a saber: a linguística-pragmática, que tinha como foco a aquisição mecânica de técnicas por meio do transformismo algébricos; o fundamentalismo-estrutural, que se contrapõe à primeira concepção, pois acredita na Álgebra como fundamentador de vários campos da Matemática escolar e que passa a justificar o transformismo algébrico por meio das propriedades estruturais; e o fundamentalista-analógico, que sintetiza as duas concepções anteriores, adicionado à instrumentalização da Álgebra e sua fundamentação, recursos geométricos tornando visível identidades algébricas.

Essas concepções que evidenciaram a linguagem algébrica em detrimento do pensamento algébrico, posteriormente revelaram a crescente instrumentalização da Álgebra nos Anos Finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Assim, concordamos com Kaput (2008), quando afirma que a solução para o problema do ensino da Álgebra passa pela necessária mudança na estruturação dos currículos, na avaliação e, principalmente, na formação de professores uma vez que explorar tais elementos lógico-históricos implica ir além do conhecimento algébrico simbólico.

Schiliemann, Carraher e Brizuela (2007) explicam que, por muito tempo, estudiosos acreditaram que a origem das dificuldades de aprendizagem em Álgebra estava relacionada com a capacidade cognitiva dos estudantes, e não com o modelo de ensino da Aritmética que não explorava o trabalho com o pensamento algébrico a partir da reflexão sobre as estruturas aritméticas (p. ex., operações e sistema de numeração). Segundo os autores, é somente nos anos 2000 que a ideia de que o pensamento algébrico deveria ser alimentado desde o jardim de infância é endossado pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), organização de referência mundial na área da Educação Matemática.

Atualmente, o NCTM (2000) coloca a Álgebra como um tema transversal que deveria permear todo o período da escolaridade desde os primeiros anos e considera que os programas de ensino desde o pré-escolar devem permitir a todos os alunos compreender padrões, relações e funções, representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos, usar modelos matemáticos para representar e entender relações quantitativas e analisar a mudança em vários contextos.

Desde então, alavancaram-se os estudos relacionados com o ensino de Álgebra e o desenvolvimento do pensamento algébrico na Educação Infantil e Anos Iniciais. Estudos datados do final do século XX, preocupados com as dificuldades geradas pela manutenção de um ensino em que os alunos passam por uma transição da Aritmética para a Álgebra, inspiraram o movimento hoje conhecido como *Early Algebra.*

Buscando compreender esse movimento e aspectos que envolvem o desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais, apresentamos a seguir um breve resumo das concepções de alguns autores tomados como referência sobre a *Early Algebra*.

2.2 ***Early Algebra* e as ideias do pensamento algébrico**

De acordo com Vieira e Magina (2021) o termo *Early Algebra* surgiu em 1998 em um projeto coordenado por Carraher, Schiliemann e Brizuela pela Universidade de Tufts. O projeto desenvolvido por esses autores, que buscou analisar o desempenho de crianças diante de situações envolvendo a introdução de conceitos e notações algébricas, significou um avanço no entendimento sobre como as crianças se comportam, entendem e usam o raciocínio algébrico para a resolução de problemas.

Atualmente, a *Early Algebra* incorpora um robusto grupo de pesquisadores (Canavarro, 2007; Blanton *et al.*, 2015; Kaput, 2008; Radford e Moretti, 2021; Schiliemann, Carraher e Brizuela, 2013; Luna e Souza, 2013; Vieira e Magina, 2021) dedicados ao aprofundamento da compreensão sobre o modo como os estudantes lidam com conceitos algébricos, sobre a formação e ensino praticado pelos professores nessa área e sobre a caracterização das atividades que promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Sobre isso, Blanton *et al*. (2007, p. 8) explicam que

> A *Early Algebra* é baseada em problemas, ela desenvolve a competência estratégica e a capacidade de raciocínio adaptativo das crianças. Ou seja, o objetivo da álgebra inicial não é desenvolver habilidades ou procedimentos isolados (aritméticos ou algébricos), mas explorar situações matemáticas que envolvem o conhecimento do aluno sobre habilidades e procedimentos, que exigem reflexão ativa, e que envolvem a construção de argumentos e a justificação e explicação de ideias. (Blanton et al. 2007, p.8).

Concordamos com Blanton *et al.* (2007) que as atividades que envolvem a *Early Algebra* não pressupõem o uso de procedimentos aritméticos ou algébricos, no sentido de seus objetos, mas o incentivo à criação de estratégias, reflexão e construção de argumentos e justificativas por meio de problemas matemáticos e, portanto, visando ao desenvolvimento do pensamento algébrico, o trabalho com a álgebra inicial não deve ser encarado como um acréscimo ao currículo já existente.

> Ao contrário, a *early algebra* é uma maneira de pensar que dá significado, profundidade e coerência para a compreensão matemática das crianças, aprofundando os conceitos já ensinados, de modo que haja oportunidade de generalizar relacionamentos e propriedades na matemática (Blanton *et al*., 2007, p. 7).

Com relação às atividades que envolvem o desenvolvimento do pensamento algébrico, assim como Blanton *et al*. (2007), Canavarro (2007, p.87) também concorda que “o foco do pensamento algébrico está na atividade de generalizar.” A autora, ao discutir em que consiste o pensamento algébrico identificou aspectos decisivos que contribuem para o seu desenvolvimento na sala de aula como a *algebrificação*[4] de tarefas aritméticas, evidenciando a

[4] Consiste na transformação de atividades tipicamente aritméticas em atividades algébricas, dando enfoque ao desenvolvimento de habilidades ligadas à generalização.

importância do conhecimento pedagógico do conteúdo para essa finalidade, e o incentivo às múltiplas representações.

Canavarro (2007) apresenta um sólido panorama sobre a presença do pensamento algébrico nos currículos e aborda a visão de autores pioneiros da *Early Algebra* sobre as atividades que o envolvem, dando ainda sugestões de como esse trabalho pode ser desenvolvido nos Anos Iniciais. Ao citar Kaput (2008), a autora explica que na visão desse estudioso o pensamento algébrico consiste em dois aspectos essenciais que estão diretamente ligados à generalização: a expressão gradual em sistemas de símbolos convencionais e o raciocínio e ação sintaticamente orientada sobre as generalizações expressas em sistemas de símbolos organizados.

Em parceria com Maria Blanton, James Kaput produziu estudos relevantes para a compreensão das ideias sobre a *Early Algebra*, e juntos são grandes referências sobre o tema. Segundo esses autores, existe um potencial grande da aritmética para atingir o pensamento algébrico, o qual vem de sua generalização. A generalização aritmética sobre as operações bem como o raciocínio sobre as relações entre os números de acordo com Schliemann et al. (2007, p. 12) "está no coração do pensamento algébrico".

Recentemente, Blanton *et al*. (2015) apresentaram a ampliação das ideias pertencentes às vertentes definidas por Kaput (2008), e com base nos estudos da *Early Algebra* desenvolvidos por Blanton *et al*., 2011; Carraher e Schliemann, 2007; Kaput *et al*., 2008, os autores, identificaram cinco grandes ideias que caracterizam o pensamento algébrico e as utilizaram em uma pesquisa ampla com estudantes do 3º ao 7º ano, que teve como objetivo de desenvolvimento uma progressão da aprendizagem em *Early Algebra*.

De acordo com Blanton *et al*. (2015, p. 45) "essas grandes ideias oferecem oportunidades significativas para se engajar nas práticas centrais do pensamento algébrico de generalizar, representar, justificar e raciocinar com relações matemáticas". São elas: (a) equivalência, expressões, equações e desigualdades; (b) aritmética generalizada; (c) pensamento funcional; (d) variável; e (e) raciocínio proporcional.

Os autores explicam que no trabalho com os estudantes do 3º ano, a ideia de variável e seus conceitos não foram trabalhados separadamente, mas integrados na instrução ao longo das outras grandes ideias, conforme apropriado. Destacam que a grande ideia denominada raciocínio proporcional não foi explicitamente abordada no nível da terceira série.

Outro autor que tem debruçado-se sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais é Radford. Para ele, a generalização é a principal característica do pensamento algébrico e envolve uma ação muito importante, a analiticidade. Essa é a grande diferença entre a generalidade aritmética e a algébrica, segundo esse autor (Moretti, Virgens, Romeiro, 2021).

Assim, Radford (2021) explica que o pensamento algébrico caracteriza-se por recorrer a quantidades indeterminadas, lidando com elas de forma analítica e podendo representar essas quantidades indeterminadas e operações de modos próprios (gestos, linguagem escrita, falada ou outras representações semióticas) e não necessariamente utilizando um simbolismo alfanumérico.

O autor destaca ainda a relevância do trabalho conjunto em sala de aula entre estudantes e professores para a investigação que visa a essa analiticidade por meio de situações desencadeadoras.

Constatada a diversidade de concepções acerca do desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais, consideramos para a condução desta pesquisa apoiarmo-nos em três das cinco grandes ideias apontadas por Blanton *et al*. (2015) para o desenvolvimento do pensamento algébrico: a equivalência, as expressões, as equações e desigualdades, a aritmética generalizada e o pensamento funcional.

Nos tópicos a seguir, dedicaremo-nos a descrever os conceitos e as atividades relacionadas a cada uma delas.

2.2.1 Equivalência, expressões, equações e desigualdades

De acordo com Blanton *et al.* (2015), a grande ideia que engloba o trabalho com equivalência, expressões, equações e desigualdades consiste em três ações: desenvolver uma compreensão relacional do sinal de igual; representar e raciocinar com expressões e equações em sua forma simbólica; e descrever relações entre grandezas generalizadas que podem ou não ser equivalentes.

Com relação à primeira ação, é sabido que o sinal de igual é usualmente aplicado nas aulas de Matemática dos Anos Iniciais em seu sentido operacional, para encontrar o resultado de operações aritméticas. Segundo Trivilin e Ribeiro (2015) devido à preocupação com o ensino das operações básicas e com o significado dos símbolos operatórios (+, –, × e ÷) nos Anos Iniciais, esses temas são abordados e comumente discutidos nas salas de aulas, o que, no entanto, não ocorre com relação ao sinal de igualdade.

Em virtude do trato dado ao sinal de igual durante o ensino de matemática com atividades do tipo "efetue ou resolva as operações" os alunos tendem a reconhecê-lo apenas como um sinal que indica o lugar no qual devem colocar o resultado das operações realizadas. Sobre isso, Schiliemann, Carraher e Brizuela (2007, p. 48) afirmam que "na aritmética tradicional, o sinal de igual, =, é frequentemente interpretado como o unidirecional "dá" ou "rende". No universo algébrico do discurso, a igualdade é uma afirmação bidirecional".

De fato, o conceito apontado por Blanton *et al.* (2015) está relacionado com o estabelecimento de relações entre os dois lados da igualdade, e Ponte, Matos e Branco (2009) acrescentam que ao sinal de igual pode-se dar três significados: a ideia operacional, de equivalência e relacional. Para esses autores, é importante que os alunos estejam diante de diferentes situações nas quais experimente os diferentes sentidos do sinal de igual.

No caso da ideia relacional, Luna, Merlini e Ferreira (2021) e Trivilin e Ribeiro (2015) afirmam que essa é uma representação de uma igualdade de expressões, em uma relação funcional. o sinal de igual é usado em situações para representar uma igualdade de expressões, em uma relação funcional, como visto no exemplo abaixo citado por Ribeiro (2015, p. 46):

Figura 2 – Exemplo de atividade em que a ideia relacional do sinal de igual é utilizada

Tarefa 1:

Complete os seguintes espaços em branco:

$12 - 4 = 13 - \square$	$\square\ 6 = 15 - 7$
$9 - 4 = \square - 3$	$17 - \square = 18 - 8$

Fonte: Banbarra (2011, p. 310) *apud* Ribeiro (2015, p. 46).

Blanton *et al.* (2015) sugerem que atividades que estimulem os alunos a resolver sentenças numéricas abertas, como as do exemplo anterior, que incluem raciocinar a partir da relação estrutural da equação, são úteis para o desenvolvimento dentro dessa grande ideia ligada ao pensamento algébrico.

Nesse caso, o estudante não deve buscar apenas descobrir qual é o número que completa o quadradinho corretamente, mas estabelecer relações entre os outros valores que compõem a equação. Por exemplo, na atividade $12 - 4 = 13 - \square$ apenas indicar a resposta (5) a partir da resolução de cada lado da equação separadamente indica uma abordagem aritmética do problema.

Para que o problema seja abordado de forma algébrica, evidenciando a ideal relacional estabelecida pelo sinal de igual, é necessário que o aluno analise os números que compõem os termos da equação, buscando relações. A relação indicada pelo sinal de igual demonstra que a diferença entre o primeiro número do lado esquerdo da igualdade e o primeiro lado direito é 1. Portanto, esse é o valor que está a mais no segundo número do lado esquerdo. Logo, é subtraindo 1 desse termo, encontramos o valor correspondente ao segundo número do lado direito: –5.

Figura 3 – Esquema de resolução utilizando
o pensamento relacional

$$12 - 4 = 13 - \square$$

$$(12 + 1) - 4 - 1 = 13 - \square$$

$$13 - 4 - 1 = 13 - \square$$

$$13 - (4 + 1) = 13 - \square$$

$$13 - 5 = 13 - \square$$

$$5 = \square$$

Fonte: Elaborado pela autora.

Carptenter *et al.* (2003) apud Durán e Segura (2021) afirmam que o sinal de igual deve ser entendido como uma relação que promove uma balança entre as quantidades de ambos os lados de uma igualdade. Assim, o estudante entende o sinal de igual como uma maneira de relacionar as quantidades, e é mais provável que identifique uma estrutura subjacente a essas quantidades avançando para aquilo que o autor denomina de pensamento relacional.

A segunda ação descrita por Blanton *et al*. (2015) fala sobre representar e raciocinar com expressões e equações em sua forma simbólica. Essa habilidade está relacionada com a utilização de uma linguagem que descreve a situação matemática em questão. No caso, o estudante deve procurar utilizar signos que modelem situações-problemas a fim de produzir equações lineares da forma $x + a = b$.

Por fim, a última ação descrita pela autora caracteriza-se como descrever relações entre grandezas generalizadas que podem ou não ser equivalentes. Nesse caso, estamos tratando de situações que podem ou não ser equivalentes, e, portanto, representam desiquilíbrio ou desigualdade. Sobre esses tipos de situações, Ponte, Matos e Branco (2009) explicam:

> Numa fase inicial, as expressões envolvendo relações de desigualdade devem ser muito simples, pois o que se pretende é que os alunos percebam a natureza destas relações – não é desenvolver técnicas de resolução de inequações. Será importante que os alunos percebam desde logo que a solução de uma condição do tipo $x < 10$ é um conjunto com diversos elementos. Devem também perceber a afinidade entre a relação de menor e a relação de maior, ou seja, que tanto faz dizer que $2<5$ ou $5>2$. (Ponte, Matos e Branco, 2009, p. 23-24).

Logo, de acordo com esses autores, é importante que a professora não limite as experiências de aprendizagem dos alunos dos Anos Iniciais a situações que representem somente equivalências, mas que também os provoque em situações de desigualdade com a exploração de outros sinais como o “maior que” e “menor que”. Essas habilidades também serão úteis para a compreensão da relação de equivalência entre números e equações.

2.2.2 Aritmética generalizada

Explorar o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir da aritmética generalizada consiste em trabalhar com situações que visem, por exemplo, à análise de operações aritméticas e suas propriedades e relações que podem ser estabelecidas entres os números por meio de aspectos gerais ou genéricos, expressando-os por meio de uma linguagem. De acordo com Blanton *et al*. (2015):

> Tomamos a aritmética generalizada para envolver a generalização de relações aritméticas, incluindo propriedades fundamentais de número e operação (por exemplo, a Propriedade Comutativa de Adição), e raciocínio sobre a estrutura de expressões aritméticas em vez de seu valor computacional. (Blanton *et al*., 2015, p. 45, tradução nossa).

O referencial adotado nesta pesquisa ajuda-nos a compreender assim como Blanton *et al.* (2015) que a aritmética generalizada permite aos alunos aprofundar sua compreensão aritmética, percebendo e representando as regularidades e estruturas em suas operações sobre números, bem como justificando e raciocinando com essas generalizações.

Assim como Blanton *et al*. (2015), Schiliemann, Carraher e Brizuela (2007) exploraram amplamente a aritmética generalizada em seus estudos, pois acreditavam, que embora haja muitas diferenças entre a aritmética e a álgebra, elas não são atividades totalmente separadas, mas em muitos aspectos a álgebra é de fato aritmética generalizada.

As autoras sugerem ainda a introdução de atividades algébricas no Ensino Fundamental a partir do movimento de pensar sobre relações entre números e medidas particulares para pensar sobre relações entre conjuntos de números e medidas e de calcular respostas numéricas para descrever entre variáveis.

Nesse sentido, apresentamos no Quadro 5 as ações descritas por Blaton *et al.* (2015) que englobam a aritmética generalizada.

Quadro 5 – Ações que englobam a aritmética generalizada segundo Blanton *et al.* (2015)

Ideia	Ações
Aritmética generalizada	• Analisar informações para conjecturar uma relação aritmética; • Expressar conjectura em palavras e/ou variáveis; • Identificar valores ou domínios de valores para os quais uma generalização conjecturada é verdadeira; • Descrever o significado de uma variável repetida ou de variáveis diferentes na mesma equação; • Identificar uma generalização em uso (p. ex., em trabalhos computacionais); • Justificar uma generalização aritmética usando argumentos empíricos ou argumentos baseados em representação; examinar as limitações dos argumentos empíricos.

Fonte: Elaborado pela autora com base em Blanton *et al.* (2015, p. 49).

Observamos do Quadro 5 que as ações ligadas à aritmética generalizada são possíveis de serem exploradas a partir de atividades envolvendo as operações aritméticas básicas e em situações-problema em que as propriedades fundamentais do número e operação, como a propriedade comutativa que está associada à adição e à multiplicação ($a + b = b + a, a \times b = b \times a$), mas não se aplica à subtração e à divisão ($a - b \neq b - a, a \div b \neq b \div a$).

2.2.3 Pensamento funcional

O pensamento funcional envolve a descrição e identificação de relações nas quais se exploram regularidades numéricas ou geométricas, a análise de variação de quantidades e grandezas interdependentes. De acordo com Magina e Porto (2018, p. 2) “o raciocínio funcional no tocante ao Ensino Fundamental se confunde com as noções de sequências (gráficas, pictóricas e numéricas), com a proporcionalidade e se revela no estudo das funções de 1º e 2º grau.”

No caso do trabalho com a generalização de padrões em sequências, geralmente as atividades propõem que o estudante identifique termos faltantes em uma sequência, como o próximo termo ou um termo distante. Para isso, o estudante precisa primeiro realizar uma ação muito importante destacada por Vale e Barbosa (2019): o "ver".

Durante a resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões numéricos ou icónicos em sequências, os estudantes precisam identificar regularidades entre os termos da sequência, buscando encontrar na diferença entre dois termos, ou entre um grupo de repetição e o próximo o padrão que descreve aquela mudança.

Por exemplo, no caso da sequência numérica 1, 4, 7, 10, 13, 16, ... o "ver" significa perceber a relação entre os números, reconhecendo uma diferença constante entre os termos da sequência. Após essa primeira ação, o aluno pode ser capaz de generalizar a ordem que descreve a sequência numérica do exemplo se entender que qualquer termo subsequente poderá ser calculado adicionando-se 3 ao anterior.

Falando das sequências icônicas, essas são caracterizadas por apresentar formas geométricas, figuras, ilustrações etc.

Figura 4 – Sequência icônica do tipo AB, AB, AB, ...

Fonte: Jungbluth, Silveira e Grando (2019, p.104).

No tocante à ordenação, tanto sequências numéricas quanto icônicas podem assumir uma ordem de característica repetitiva, crescente ou decrescente. No caso das sequências repetitivas, o padrão de repetição consiste em um "grupo de repetição" (Vale *et al*. 2011, p.20) composto por termos que se repetem indefinidamente como os mostrados nos exemplos abaixo.

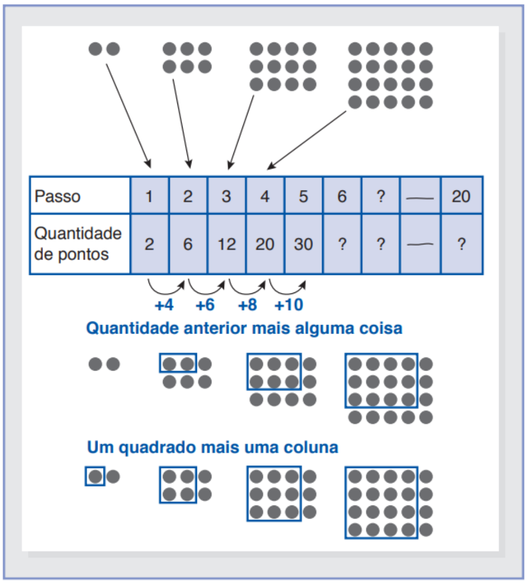
Figura 5 – Sequência icônica repetitiva do tipo AAB, AAB, AAB, ...

Fonte: Jungbluth, Silveira e Grando (2019, p.104).

Nesses tipos de sequências, a generalização de padrões pode ser explorada em diferentes níveis de complexidade desde a Educação Infantil aos Anos Finais do Ensino Fundamental.

As sequências crescentes, por sua vez, apresentam um contexto fértil para o primeiro contato com o raciocínio funcional. São características desse tipo de sequências o padrão crescente dos números de objetos a cada passo. A partir dessa percepção, é possível a construção de uma tabela que represente a relação funcional estabelecida entre o número de elementos em cada posição da sequência, como mostra a Figura 6.

Figura 6 – Tabela usada para sequência
crescente de bolinhas



Fonte: van de Walle (2009, p. 300).

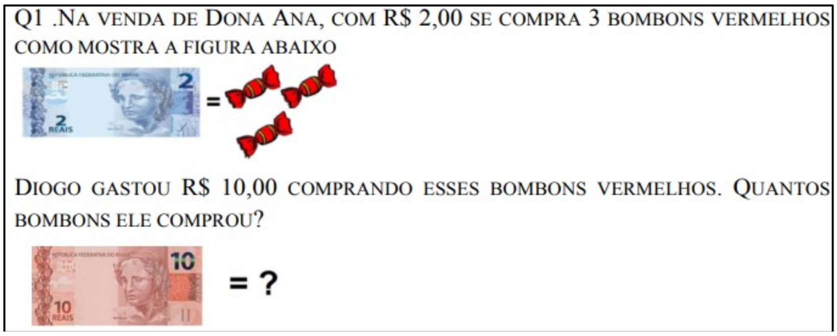
Na Figura 6, observamos a sequência icônica de bolinhas de ordem crescente. Na tabela é representada a relação entre a quantidade de bolinhas em cada passo da sequência e procura-se encontrar a quantidade de bolinhas respectiva ao 6º, 7º e 20º passo. Observamos o padrão de crescimento, observamos que a cada passo são acrescentadas uma quantidade par de bolinhas.

É interessante observar a partir das conjecturas construídas na Figura 6, que para o alcance da generalização de uma sequência a partir da percepção de padrões entre os termos, é possível “ver” diferentes relações e, para isso, é imprescindível a discussão sobre as conjecturas formadas pelos estudantes para uma exploração ainda mais ampla das regularidades percebidas. Evidenciamos, nesse ponto, o papel da professora para que o “ver” aconteça entre os alunos.

Com relação ao pensamento funcional, van de Walle (2009) explica que utilização ocorre quando se amplia a estratégia de generalização que sai da percepção do padrão recursivo e procura construir uma regra que determine o número de elementos em um passo a partir do número de passos. No caso, os três primeiros elementos da Figura 6 são: 1^2+1, 2^2+2 e 3^2+3. Logo, os elementos da 6ª, 7ª e 20ª posição são 6^2+6, 7^2+7, e 20^2+20, respectivamente.

Ao aprofundarem o conceito de pensamento funcional em um estudo com alunos do 5º ano, Magina e Porto (2018) reafirmam a presença de aspectos algébricos em operações aritméticas, em especial de estruturas multiplicativas, e no trabalho com o sistema de numeração decimal quando se busca a generalização, como vemos no exemplo a seguir:

Figura 7 – Situação-problema para o trabalho com pensamento funcional



Fonte: Magina e Porto (2018, p. 5).

Em seus estudos, Magina e Porto (2018) encontraram evidências de raciocínio funcional entre os estudantes em suas resoluções de diferentes níveis a partir do uso de estrutura aditiva, do uso de estrutura proporcional e ainda do de estrutura escalar funcional. As autoras concluem que desde os Anos Iniciais é possível desenvolver o trabalho com o conceito de função atrelado às situações-problema do campo multiplicativo visando ao desenvolvimento do pensamento funcional, e criticam a organização curricular em que a aritmética precede a álgebra, "visto que os primeiros vestígios do raciocínio algébrico não obedecem a uma ordem hierárquica conceitual" (2018, p.11).

Nessa direção, apresentamos no próximo capítulo uma breve análise da inclusão do pensamento algébrico no currículo nacional, observando as orientações sobre o tema desde os PCN (1997) até a BNCC (2017).

3 A *EARLY ALGEBRA* NO CURRÍCULO NACIONAL

Neste capítulo apresentamos um panorama sobre a implementação da Álgebra como componente curricular dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental em nosso país, verificando relações dos estudos da *Early Algebra* para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos principais documentos norteadores, desde os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) até a Base Nacional Comum Curricular (2017).

3.1 **Pensamento algébrico no PCN**

O texto dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), publicado em 1997 parece-nos ser o primeiro vislumbre de introdução curricular do ensino de Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Criado a partir da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) (Lei 9.394/96) que já sinalizava a necessidade de um currículo nacional, os PCN tinham como proposta "à construção de um referencial que oriente a prática escolar de forma a contribuir para que toda criança e jovem brasileiros tenham acesso a um conhecimento, socializar informações e resultados de pesquisas, levando-as ao conjunto dos professores brasileiros" (Brasil, 1997, p.5), portanto embora não tivesse um caráter prescritivo, passaram a constituir-se em referências por quase duas décadas para a elaboração de matrizes curriculares, de provas nacionais como Prova Brasil e Provinha Brasil e de materiais para a sala de aula, como livros didáticos (Passos e Nacarato, 2018).

Com relação ao ensino da Matemática e mais especificamente ao desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, uma menção ao tema pode ser observada em uma crítica à introdução tardia do ensino de Álgebra nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Segundo os PCN no Ensino de Álgebra ocorre uma "formalização precoce de conceitos e a pouca vinculação da Matemática às suas aplicações práticas" (Brasil, 1997, p.17).

Mais à frente o texto traz considerações positivas acerca da Álgebra, afirmando que, após o seu aparecimento e o desenvolvimento da Geometria, pôde-se observar uma ruptura com os aspectos puramente pragmáticos da Matemática, impulsionando a sistematização de novos conhecimentos matemáticos como: Geometria Analítica, Geometria Projetiva, Álgebra

Linear, entre outros. Ainda sobre a importância da Álgebra, o texto cita o estudo das grandezas variáveis que deu origem ao conceito de função, fazendo surgir em decorrência, um novo ramo: a Análise Matemática (Brasil, 1997). Percebe-se a partir desses trechos a preocupação em evidenciar a importância da Álgebra para o Ensino Fundamental.

Embora o documento não apresente claramente uma proposta para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais, é possível verificar nos objetivos para o ensino de Matemática para o primeiro ciclo, uma das ideias principais apontada pela *Early Algebra*: a ideia de generalização a partir do trabalho com a Aritmética, como podemos ver no Quadro 6:

Quadro 6 – Objetos de aprendizagem para os anos iniciais do Ensino Fundamental segundo PCN (1997)

Objetivos de Matemática para o primeiro ciclo
• Interpretar e produzir escritas numéricas, levantando hipóteses sobre elas, com base na observação de regularidades, utilizando-se da linguagem oral, de registros informais e da linguagem matemática.
• Desenvolver procedimento de cálculo – mental, escrito, exato, aproximado – pela observação de regularidades e de propriedades das operações e pela antecipação e verificação de resultados.

Fonte: Brasil (1997, p. 47).

Para Kaput (1998, 1999), importante colaborador nos estudos da *Early Algebra*, o pensamento algébrico pode assumir diferentes formas como a generalização de padrões numéricos pela aritmética generalizada. Mesmo não apresentando essas exatas palavras, a descrição dos objetivos do PNC (1997) revela a ligação com o desenvolvimento do pensamento algébrico pois se esses objetivos efetivamente fossem trabalhados nas salas de aula poderiam possibilitar “o raciocínio sobre operações e propriedades associadas a números (...) e a exploração e expressão de regularidades em números” (Blanton e Kaput, 2005).

Embora possamos inferir que nessa época as propostas desenvolvidas dentro da Aritmética já incentivavam o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos dos Anos Iniciais, a simples apresentação dos objetivos citados sem uma clara orientação quanto à sua natureza algébrica não garante a existência de uma prática pedagógica voltada para esse objetivo durante o período de regência desse documento norteador.

É importante citar, que o documento cita a possibilidade de desenvolvimento de uma pré-álgebra nos Anos Iniciais, mas não apresenta posteriormente nenhuma orientação complementar:

> Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver uma pré-álgebra, é especialmente nas séries finais do Ensino Fundamental que os trabalhos algébricos serão ampliados; trabalhando com situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes

> funções da álgebra (como modelizar, resolver problemas aritmeticamente insolúveis, demonstrar), representando problemas por meio de equações (identificando parâmetros, variáveis e relações e tomando contato com fórmulas, equações, variáveis e incógnitas) e conhecendo a “sintaxe” (regras para resolução) de uma equação. (Brasil, 1997, p.35).

De fato, não é de interesse da *Early Algebra* a resolução de problemas aritmeticamente insolúveis, nem o conhecimento das regras para resolução de uma equação. Contudo, nota-se a falta de incipientes que traduzam o que essa pré-álgebra citada no documento pode oferecer ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática nos Anos Iniciais, por exemplo.

Consideramos que os PCN constituíram-se de um importante referencial para a prática docente durante o seu período de vigência; entretanto, com relação às perspectivas sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais observamos poucas orientações no documento, pois este limita-se à contestação da necessidade de uma pré-algebra.

3.2 **Pensamento algébrico nos Direitos de Aprendizagem**

Em 2012, o governo nacional lançou o Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC), projeto que compreendia a alfabetização na perspectiva do letramento, considerando o letramento matemático dentro de uma proposta que valorizava os saberes dos estudantes por meio de experiencias significativas de uso da Matemática. Esse programa marcou o cenário educacional brasileiro devido ao projeto nacional de formação de professores que ensinam Matemática no ciclo de alfabetização.

De acordo com Passos e Nacarato (2018),

> Não temos notícias de outro programa de políticas públicas que tenha promovido formação nessa extensão (...), mas talvez tenha sido a primeira vez que professores puderam ser ouvidos e compartilharem as experiências de sala de aula com os pares, o que ficou visível pela organização dos seminários do PNAIC realizados em diferentes municípios. (Passos e Nacarato, 2018, p. 124)

Essa percepção das autoras nos é muito cara, visto a importância que damos à autonomia das professoras nas discussões sobre a sua prática e a aprendizagem dos alunos. Acreditamos que toda proposta educacional precisa dialogar com a realidade da escola, com ouvidos atentos às experiências ali construídas diariamente. Além disso, a comunicação entre os professores constitui-se como forte influência para o conhecimento pedagógico docente.

De acordo com Passos e Nacarato (2018, p.123) “foi a primeira vez que um documento oficial fez referências ao letramento matemático”, representando um importante avanço na concepção de uma alfabetização matemática que está em diálogo com outras áreas do conhecimento, com as práticas sociais do universo infantil e do mundo adulto considerando ainda a diversidade regional brasileira.

Paralelamente ao PNAIC, o Ministério da Educação (MEC) elabora o documento Elementos Conceituais e Metodológicos para a definição dos Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental (Brasil, 2012) que, na mesma linha do pacto nacional, apresenta uma proposta ampla de letramento, influindo o letramento matemático.

Passos e Nacarato (2018) explicam que esse documento foi elaborado em uma perspectiva democrática após um longo período de discussão com a comunidade acadêmica e escolar, pois contou com a colaboração de professoras da Educação Básica de várias regiões do país e com pesquisadores de diferentes instituições públicas brasileiras de Ensino Superior. Com relação ao eixo de alfabetização e letramento matemático, o documento apresenta os Direitos de Aprendizagem dentro de uma abordagem histórico-cultural que defende o conhecimento matemático como “ciência e cultura construídas pelo homem, através dos tempos, em resposta a necessidades concretas e a desafios próprios dessa construção” (Brasil, 2012, p. 66).

Voltando ao documento de 2012 e sua influência sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico, verificamos que concepção de ensino e aprendizagem matemática apresentada para os primeiros anos do Ensino Fundamental entende a Matemática, e por consequência a Álgebra, como uma linguagem que se desenvolve historicamente, atrelada aos processos impostos pelas necessidades humanas e que são apropriados de uma comunicação traduzida em objetos e instrumentos de representação dessa linguagem. O documento entende a linguagem como uma expressão do pensamento e, portanto, valoriza a construção de diferentes modos de representação que atribuem significado ao pensamento humano.

Essa concepção pode ser verificada na análise do segundo direito de aprendizagem e desenvolvimento da área da Matemática, quando o documento apresenta de forma explícita a preocupação com ideias relacionadas com o desenvolvimento do pensamento algébrico. Ele destaca que o estudante deve reconhecer regularidades em diferentes situações e de diversas naturezas, sendo capaz de compará-las e estabelecer relações entre elas e as regularidades percebidas.

Essa ideia está de acordo com os pressupostos da *Early Algebra,* pois está descrevendo o processo de generalização que, de acordo com Ayala-Altamirano e Molina (2019, p.184), envolve "identificar os elementos comuns em todos os casos, estender o raciocínio para além do âmbito em que ele se originou e derivar resultados mais amplos de casos particulares."

Ao definir os eixos estruturantes para a alfabetização e o letramento matemático, o documento apresenta cinco áreas, a saber: Números e Operações, Pensamento Algébrico, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. Consideramos importante observar o destaque dado neste documento para o Pensamento Algébrico colocando-o como um eixo a ser desenvolvido no ciclo de alfabetização.

A seguir podemos ver quais são os objetivos de aprendizagem elaborados para o eixo Pensamento Algébrico:

Figura 8 – Objetivos de Aprendizagem para o Pensamento algébrico do primeiro ao terceiro ano em 2012

EIXO ESTRUTURANTE PENSAMENTO ALGÉBRICO Objetivos de Aprendizagem	**1º Ano**	**2º Ano**	**3º Ano**
Compreender padrões e relações, a partir de diferentes contextos.			
Estabelecer critérios para agrupar, classificar e ordenar objetos, considerando diferentes atributos.	**I**	**I/A**	**A/C**
Reconhecer padrões de uma sequência para identificação dos próximos elementos, em sequências de sons e formas ou padrões numéricos simples.	**I**	**I/A**	**A/C**
Produzir padrões em faixas decorativas, em sequências de sons e formas ou padrões numéricos simples.	**I**	**I/A**	**A/C**
LEGENDA: I – Introduzir; A – Aprofundar; C – Consolidar.			

Fonte: Elementos Conceituais e Metodológicos para a definição dos Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental (Brasil, 2012, p. 77)

Considera-se que a proposta apresentada pelo documento foi uma importante ação para a incorporação do que hoje entendemos como *Early Algebra* no currículo nacional, pois destaca a preocupação com a construção de uma alfabetização e letramento matemático nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, e a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico nesse processo.

Além disso, há uma breve explicação do conteúdo algébrico a ser desenvolvido, abordando algumas das ideias centrais da *Early Algebra*, a generalização, como podemos ver a seguir:

> A compreensão e o reconhecimento dos padrões – em sequências numéricas, de imagens e de sons ou em sequências numéricas simples, – o estabelecimento de critérios de agrupar, classificar e ordenar objetos, considerando diferentes atributos e a produção de padrões, fazem parte de todos os eixos estruturantes. No entanto, destacam-se na alfabetização e no letramento, os primeiros elementos para o reconhecimento da variabilidade de valores das grandezas e operações – como a proporcionalidade da multiplicação – e também os primeiros passos para a programação – como nas construções de objetos com uso da linguagem Logo.[5] É também parte componente da alfabetização e do letramento matemático a possibilidade da produção de padrões em faixas decorativas, sequências de sons e formas ou padrões numéricos simples. (Brasil, 2012, p.76)

Outro aspecto interessante é a compreensão da amplitude do pensamento algébrico. O documento informa que a generalização está presente no reconhecimento de padrões em diferentes contextos, como no estabelecimento de critérios para agrupar, classificar e ordenar objetos, considerando diferentes atributos e salienta que a própria criação de padrões perpassa todos os eixos estruturantes, ou seja, está presente em todas as áreas da Matemática, não sendo uma atividade única da Álgebra e, portanto, abre espaço para o seu desenvolvimento em diferentes contextos de ensino e aprendizagem.

Considerando a colaboração que o documento Elementos Conceituais e Metodológicos para a definição dos Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental (Brasil, 2012) promoveu para o desenvolvimento de práticas que visam ao pensamento algébrico nos Anos Iniciais, notamos que, em comparação com o PCN (1997), a proposta de 2012 apresentou informações mais consistentes sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico em turmas dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental que dialogam com os pressupostos da *Early Algebra*.

Ademais, as ações decorrentes à publicação dos Elementos Conceituais de Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental (Brasil, 2012), podem ter contribuído com a o desenvolvimento do conhecimento do conteúdo e conhecimento pedagógico docente relacionado com a Matemática e suas representações, pois promoveu a colaboração entre os professores na produção de atividades e acompanhamento do processo de desenvolvimento da alfabetização e letramento matemático durante o seu período de vigência.

---

[5]Segundo o documento citado, LOGO é uma linguagem de programação elaborada no MIT por S. Papert que, a partir das motivações das crianças e jovens, tem o objetivo de permitir a construção de objetos e desenhos ou a programar novas construções e/ou movimentações após a compreensão dos movimentos básicos.

3.3 Pensamento algébrico na BNCC

O ano de 2017 foi um período conturbado de mudanças institucionais na Educação nacional. Nesse período observamos a descontinuidade do PNAIC que apresentou uma proposta ampla de letramento, incluindo o letramento matemático, com uma proposta de formação docente em todo país. Lembramos que esse programa trouxe pela primeira vez o pensamento algébrico em destaque, a partir dos eixos estruturantes citados no Elementos Conceituais e Metodológicos para a definição dos Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental (Brasil, 2012).

Paralelamente a esse movimento, aprovava-se a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), um documento normativo que deve nortear os currículos das redes e sistemas de ensino de todas as escolas públicas e privadas de Educação Básica no país. A homologação do documento ocorreu no dia 22 de dezembro de 2017, após modificações realizadas sobre a terceira versão enviada ao Conselho Nacional de Educação, que teve como equipe elaboradora especialistas convidados e representantes de grupos empresariais. As versões anteriores contaram com a participação, embora pequena, da comunidade acadêmica e escolar (Passos e Nacarato, 2018).

Sob críticas, a nova base apresenta conhecimentos básicos para a aprendizagem dos estudantes e estabelece em competências e habilidades o que se espera que todos desenvolvam ao longo da escolarização básica. De acordo com o disposto no Art. 3º do Capítulo 1 da Resolução CNE/CP Nº 2, de 22 de dezembro de 2017, no âmbito da BNCC, o termo competência refere-se à mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos) e o termo habilidades é definido como práticas cognitivas e socioemocionais, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidianas, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

A Base organiza o Ensino Fundamental em cinco áreas do conhecimento que, de acordo com o referido documento, intersectam-se na formação dos alunos. São elas: Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza, Ciências Humanas e Ensino Religioso. E com relação à área da Matemática, esta é composta por cinco unidades temáticas que, de acordo com o documento (BNCC, 2017), correlacionam-se e orientam a formulação de habilidades a serem desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental. Compõem esse grupo a unidade temática Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e, por último, mas não menos importante, Probabilidade e Estatística.

Delimitando o nosso olhar para a unidade temática de interesse desta pesquisa, vemos que a Álgebra na BNCC está presente tanto nos Anos Iniciais quanto nos Anos Finais do Ensino Fundamental e, em um primeiro momento, a nomenclatura adotada dá a impressão de um retrocesso às concepções já desenvolvidas ao longo do percurso histórico de ensino de Álgebra para os Anos Iniciais e pela própria *Early Álgebra*.

Corroborando com essa constatação, as professoras Nacarato e Custódio (2018, p. 15) explicam que o nome dado ao eixo temático como apenas "Álgebra" é um "reducionismo na concepção de um campo tão amplo e complexo como é o do pensamento algébrico". Todavia, a BNCC entende que a finalidade da unidade temática Álgebra é o desenvolvimento do pensamento algébrico, apresentando-o como "um tipo especial de pensamento (…) essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas" (Brasil, 2017, p. 23).

Ao contrário do disposto nos PCN (1997) sobre o desenvolvimento de uma pré-álgebra, a BNCC (2017) dá continuidade à perspectiva trazida pelo documento Elementos Conceituais e Metodológicos para a definição dos Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental (Brasil, 2012) sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Inicias do Ensino Fundamental abordando-o pelas ideias de generalização e pensamento funcional, com destaque para o pensamento funcional que nos dois primeiros documentos aqui analisados não foi mencionado ou proposto, mas que a BNCC aborda por meio do trabalho com o estudo da variação de grandezas e proporcionalidades.

Percebemos a partir da leitura da Base que, apesar da nomenclatura, a proposta de desenvolvimento do pensamento algébrico apresentada dá indícios de alinhamento com os estudos da *Early Algebra* quando explica que nos Anos Iniciais o trabalho com a Álgebra deve se basear nas "ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade" (BNCC, p.270) e que não deve visar o uso de letras para expressar essas regularidades.

A BNCC (2017) cita a relação que essa unidade temática estabelece com a unidade temática de Números a partir do trabalho com a generalização, pensamento funcional e equivalência, dando exemplos de desenvolvimento para cada uma dessas ideias. De fato, na perspectiva da *Early Algebra* entende-se que as atividades propostas pelos professores para o desenvolvimento do pensamento algébrico não estariam separadas daquelas relacionadas com os procedimentos aritméticos, ou somente seriam trabalhadas após a sua aprendizagem, mas sim em colaboração com elas.

Segundo a BNCC, a proximidade com a unidade temática de Números pode ser desenvolvida a partir do trabalho com sequências recursivas e repetitivas, com a relação de equivalência envolvendo a compreensão de que o sinal de igualdade não é apenas uma indicação de operação a ser feita e ainda a noção intuitiva de função explorada a partir de situações-problemas de variação proporcional direta entre duas grandezas, como por exemplo: "Se com duas medidas de suco concentrado eu obtenho três litros de refresco, quantas medidas desse suco concentrado eu preciso para ter doze litros de refresco?" (BNCC, 2017, p.270).

Embora a correlação entre as unidades temáticas Números e Álgebra seja citada na Base (2017), percebemos ao longo da matriz de conteúdo das unidades temáticas que os temas estão organizados separadamente, sem uma clara descrição da articulação entre as habilidades descritas em uma unidade com outra unidade, pois no texto do documento estas restringem-se à sua própria unidade temática.

Observe no Quadro 7 a descrição dos objetos do conhecimento e as respectivas habilidades trazidas pela BNCC (2017) para a unidade temática Álgebra. Nota-se que as habilidades propostas seguem uma sequência linear de complexidade, como, por exemplo, o trabalho com operações aritméticas nos primeiros anos e posteriormente a resolução de problemas com grandezas proporcionais.

Quadro 7 – Objetos do conhecimento e habilidades referentes à álgebra na BNCC

<table>
<tr><th>Ano escolar</th><th>Objetos do conhecimento</th><th>Habilidades</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1º ano</td><td>Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências.</td><td>(EF01MA09) Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida.</td></tr>
<tr><td>Sequências recursivas: observação de regras usadas utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos2, por exemplo).</td><td>(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade) os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2º ano</td><td>Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas.</td><td>(EF02MA09) Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida.</td></tr>
<tr><td>Identificação de regularidade de sequências e de determinação de elementos ausentes na sequência.</td><td>(EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos.
(EF02MA11) Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de</td></tr>
</table>

Ano escolar	Objetos do conhecimento	Habilidades
		números naturais, objetos ou figuras.
3º ano	Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas.	(EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.
	Relação de igualdade.	(EF03MA11) Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença.
4º ano	Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural.	(EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.
	Sequência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao ser divididos por um mesmo número natural diferente de zero.	(EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupo de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.
	Relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão.	(EF04MA13) Reconhecer, por meio de investigações utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas.
	Propriedades da igualdade.	(EF04MA14) Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos. (EF04MA15) Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais.
5º ano	Propriedades da igualdade e noção de equivalência.	(EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência. (EF05MA11) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido.
	Grandezas diretamente proporcionais: Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais.	(EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros. (EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tal como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes delas com o todo.

Fonte: Brasil, 2017.

Em um primeiro momento, observa-se que as designações de trabalho com a unidade temática Álgebra na BNCC é apresentada por ano de escolaridade, e poderia abrir espaço para a construção de uma proposta de desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental com maior clareza para a professora polivalente, pois essa poderia apoiar-se nos objetos do conhecimento e nas habilidades descritas para o desenvolvimento de uma aula de Matemática com vista a alcançar esses objetivos.

Contudo, refletindo sobre a concepção de pensamento algébrico adotada nesta pesquisa, discordamos da organização adotada pela BNCC, que fragmenta as ideias do pensamento algébrico por ano de escolaridade por concordarmos com Panossian (2021), em que a aprendizagem dos sujeitos com relação à Álgebra e à formação do pensamento algébrico não se dão – necessariamente – em habilidades que são requisitadas linearmente (ao longo dos anos), e que essa apresentação segmentada dos elementos do conhecimento algébrico trazidas pela BNCC pode favorecer a manutenção de dificuldades na aprendizagem da Álgebra nos Anos Finais, embora antecipados nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Da análise das principais normas curriculares brasileiras feitas nesse capítulo, podemos verificar que algumas ideias do pensamento algébrico sempre estiveram presentes nas propostas curriculares nacionais, como a generalização, antes mesmo da implementação da unidade temática Álgebra trazida pela BNCC em 2017.

Mesmo de forma implícita, o desenvolvimento dessa habilidade, que é característica do pensamento algébrico, permeia diferentes áreas da Matemática e pode ser mais perceptível em um trabalho intencional com a aritmética.

Ademais, finalizamos neste capítulo a exposição do referencial teórico que embasa nossa pesquisa. A seguir, apresentaremos a metodologia adotada, o perfil das professoras participantes da pesquisa e, em seguida, a análise das entrevistas.

4 **PERCURSO METODOLÓGICO**

Neste capítulo apresentaremos o percurso metodológico realizado para atingir o objetivo desta pesquisa, o qual visa compreender os conhecimentos pedagógicos mobilizados por professoras do 5º ano do Ensino Fundamental ao desenvolverem o pensamento algébrico de seus alunos. Além da dimensão metodológica, também serão apresentados os aspectos relacionados com os procedimentos de coleta e análise de dados.

4.1 **Natureza da pesquisa**

A aproximação com outros estudos com foco na professora polivalente e o pensamento algébrico no processo de elaboração da revisão de literatura colaborou para a escolha da abordagem dada à presente investigação. Para nossa pesquisa, adotaremos uma abordagem qualitativa, pois “nesse tipo de abordagem, o pesquisador primeiro descreve a realidade, para depois analisá-la, interpretá-la, ou seja, explicitar seu significado.” (Marcondes; Teixeira; Oliveira, 2010, p. 7)

De fato, na pesquisa qualitativa Bogdan e Biklen (1994) afirmam que é preciso olhar para o mundo com a ideia de que nada é trivial e quando os dados são produzidos por sujeitos – como no caso da nossa investigação – o investigador deseja saber em que circunstâncias é que eles são elaborados unindo o ato, a palavra e o gesto no contexto da investigação para gerar significado.

Nossa pesquisa, insere-se no campo da Educação Matemática por entender que essa área se caracteriza como “uma prática que envolve o domínio do conteúdo específico (a Matemática) e o domínio de ideias e processos pedagógicos relativos à transmissão/assimilação e/ou à apropriação/construção do saber matemático escolar”. (Fiorentini; Lorenzato, 2009, p. 5).

Assim, passamos a conhecer o objetivo geral e específico, tal como as etapas desta investigação.

4.2 **Objetivo geral**

Compreender os conhecimentos pedagógicos que professoras do 5º ano mobilizam para desenvolver o pensamento algébrico de seus alunos.

4.2.1 Objetivos específicos

- Identificar os subdomínios do PCK relacionados com s ideias do pensamento algébrico que são mobilizados pelas professoras na discussão de situações didáticas com potencial para o desenvolvimento do pensamento algébrico em turmas do quinto ano.
- Identificar a concepção de pensamento algébrico que as professoras detêm a partir da mobilização dos conhecimentos pedagógicos utilizadas por elas para o desenvolvimento do pensamento algébrico de seus alunos.

Compreendemos os objetivos específicos de uma pesquisa como os passos que devem ser seguidos para alcançar o objetivo geral. Dessa forma, para melhor realização de cada um desses objetivos, realizamos os seguintes procedimentos na pesquisa:

Figura 9 – Procedimentos adotados na pesquisa

1
- Seleção dos participantes (técnica *Snowball*).
- Envio do Convite formal e TCLE por *e-mail.*
- Solicitação prévia de atividade a ser apresentada na entrevista.

2
- Agendamento da entrevista com a professora participante.
- Envio do *link* do questionário para o preenchimento antes da entrevista.

3
- Realização da entrevista.

4
- Delineamento do perfil das participantes a partir dos dados do questionário *online.*
- Transcrição das entrevistas.

5
- Leitura interpretativa das transcrições;
- Construção de categorias de análise a partir das transcrições.

Fonte: Elaborada pela autora

Nos tópicos a seguir, descreveremos cada procedimento realizado na pesquisa, desde a seleção dos participantes e seu perfil, os instrumentos de pesquisa e as categorias de análise.

4.3 **Seleção dos participantes**

O público-alvo desta pesquisa são professoras que ensinam matemática no 5º ano do Ensino Fundamental e que estiveram ou estão trabalhando no processo de desenvolvimento do pensamento algébrico de seus alunos. No Quadro 8 estão especificados os critérios utilizados para a seleção desses participantes.

Quadro 8 - Pré-requisitos para seleção dos participantes da pesquisa

Formação	Ser habilitada para o exercício docente nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.
Tempo de Serviço	Ter 1 ano ou mais de exercício como docente no 5º ano.
Atuação	Professores de escolas públicas ou privadas que tenham usufruído de carga horária destinada ao planejamento pedagógico no período em que ministrou aulas de Matemática no 5º ano.
Experiência	Ter trabalhado com o desenvolvimento do pensamento algébrico em turmas do 5º Ano do Ensino Fundamental.

Fonte: Elaborado pela autora

Embora não seja uma restrição, utilizamos como prioridade na seleção das participantes, as professoras pertencentes ao quadro docente de colégios de aplicação e institutos federais, pois nessas instituições as professoras têm maior inserção em ambientes formativos como grupos de pesquisa para o ensino de matemática e/ou outras áreas, e podem ser de dedicação exclusiva, o que nos leva a enxergar essas unidades de ensino como um ambiente propício de contribuição para a pesquisa.

Para a seleção das participantes, utilizamos a técnica *Snowball* (Bola de Neve) que consiste na seleção voluntária de participantes que se enquadram no perfil desejado por meio da indicação de outras pessoas. Pretendia-se selecionar de 5 a 10 professoras para participar da investigação, contudo no andamento das entrevistas verificamos que houve a saturação de informações encontradas e finalizamos a seleção com o total de oito participantes, sete mulheres e um homem. Como o número de participantes do sexo feminino é maior, e o gênero que atua nos Anos Iniciais é expressivamente feminino, adotamos o substantivo feminino para nos referirmos às participantes.

No processo de seleção das participantes, enviamos para cada professora individualmente o convite oficial com informações sobre a pesquisa, como tema, objetivo e etapas. Também enviamos o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) para ciência das participantes e somente após a sua assinatura demos início a pesquisa.

Às professoras que aceitaram participar, explicamos (embora já estivesse descrito no TCLE) que sua participação passaria por duas etapas: preenchimento de um formulário *online* e participação em uma entrevista. Na primeira etapa as professoras responderiam a perguntas relacionadas com sua formação acadêmica e experiência profissional e na segunda etapa conversaríamos sobre atividades de sala de aula que envolvem o desenvolvimento do pensamento algébrico, sendo uma atividade apresentada pela professora participante e cinco apresentadas pela pesquisadora. Essa atividade foi solicitada previamente.

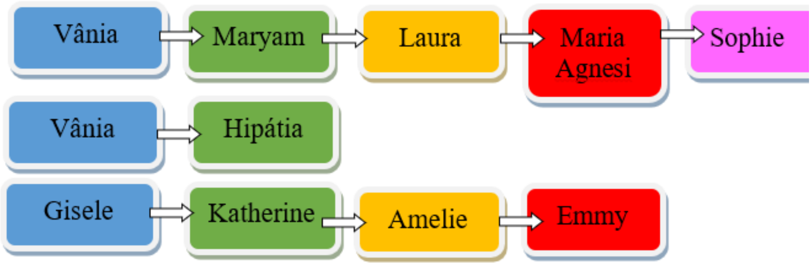
Os nomes das professoras foram preservados conforme combinado no termo de livre consentimento e, por isso, escolhemos identificar as participantes desta pesquisa com nomes de mulheres da Matemática.[6]

Essa escolha é uma forma de homenagear tanto as professoras polivalentes que ensinam Matemática nos Anos Iniciais, pois contribuem com a produção em Educação Matemática nas escolas, embora muitas vezes tenham sua prática pedagógica invisibilizada, quanto as mulheres cientistas, que por muito tempo tiveram seu protagonismo na História da Matemática apagados dos livros.

As mulheres da Matemática homenageadas na pesquisa são: Maria Gaetana Agnesi, Maryam Mirzakhani, Hipátia de Alexandria, Maria Laura Mouzinho Lopes, Sophie Germain, Emmy Noether, Amelie Emmy Noether e Katherine Johnson. A seguir apresentamos na Figura 10 o esquema de indicação das professoras que participaram da pesquisa já com os devidos codinomes.

[6] No Anexo 2 desta dissertação é disponibilizado um trecho das biografias das mulheres da Matemática homenageadas na pesquisa.

Figura 10 – Esquema *Snolball*



Legenda:

	Professora que indicou.
	1º Professor indicado.
	2º Professor indicado.
	3º Professor indicado.
	4º Professor indicado.

Fonte: Elaborado pela autora.

Na Figura 10, as duas professoras que estão nos quadros de cor azul não participaram da entrevista e não tiveram seus nomes alterados. Essas professoras indicaram outras professoras que conheciam e que se enquadravam nos requisitos para participantes da pesquisa.

Na primeira geração (quadro verde), foram indicadas três professoras. Duas dessas professoras, Maryam e Katherine, indicaram outras participantes, sendo que a Maryam indicou três professoras e a Katherine indicou duas. A segunda geração (quadro amarelo) é formada pelas primeiras professoras indicadas por Maryam e Katherine. A terceira geração (quadro vermelho) é formada pelas professoras indicadas posteriormente por Maryam e Katherine e a última geração (quadro rosa) é formada pela última professora indicada por Maryam. Ao todo, participaram da pesquisa oito professoras.

No tópico a seguir, abordaremos o questionário *online* que possibilitou a coleta de dados referentes à formação e à experiência docente das professoras participantes da pesquisa.

4.4 **O questionário *online***

O questionário aplicado foi desenvolvido no *Google Forms*, um aplicativo *online* gratuito que gera questionários com questões abertas e/ou fechadas e aplicado antes da entrevista semiestruturada. Nele, elaboramos nove questões voltadas para a identificação do percurso formativo dos participantes a fim de traçar o seu perfil.

Foi enviado às professoras um convite formal para a participação via *e-mail*, junto com o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice C) antes do início da participação de cada professora. Enviamos em seguida, o *link* do questionário *online* para as professoras e solicitamos previamente que elas apresentassem na entrevista uma atividade ou proposta de ensino já desenvolvida com sua turma de 5º ano para o desenvolvimento do pensamento algébrico. O questionário completo está disponível no Apêndice A desta dissertação.

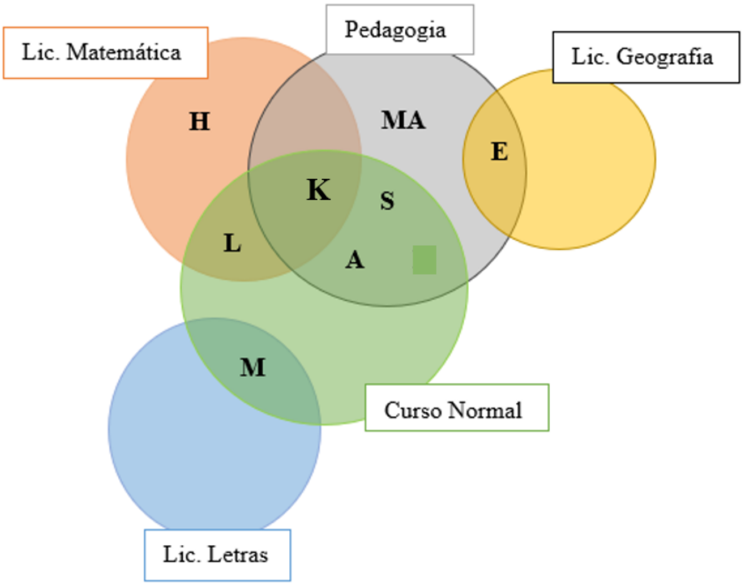
4.5 **Perfil das participantes**

A partir dos dados do questionário, delineamos o perfil formativo e de experiência profissional das professoras, como veremos nos subtópicos a seguir.

4.5.1 Formação inicial e continuada

Elaboramos o diagrama a seguir em que é possível observar a distribuição formativa das participantes envolvendo o curso de formação inicial e o curso superior informado pelas professoras. O nome das professoras participantes foi representado por suas iniciais:

Figura 11 - Diagrama de distribuição formativa das participantes



Fonte: Elaborada pela autora.

Do diagrama acima verificamos que das oito professoras participantes, cinco possuem concomitantemente formação inicial de nível médio no Curso Normal de Formação de Professores e uma formação em nível superior. Dessas cinco professoras, três são formadas em Pedagogia (Sophie, Katherine e Amelie), sendo que Katherine também é licenciada em Matemática, uma é licenciada em Letras (Maryam) e uma é licenciada em Matemática (Laura).

Não possuem formação em nível médio no Curso Normal a professora Hipátia, que é licenciada em Matemática, a professora Maria Agnesi, que é Pedagoga, e a professora Emmy, que além de Pedagoga é licenciada em Geografia.

No Quadro 9, procuramos caracterizar as professoras segundo a sua formação continuada.

Quadro 9 - Formação continuada das professoras participantes

Nome	Formação continuada	Formação continuada em Matemática
Maria Agnesi	Mestrado em Ensino em Educação Básica	Curso de extensão universitária em Educação Matemática – Metodologias para os Anos Iniciais (USP).
Maryam	Mestrado em Ensino em Educação Básica	Curso de Aperfeiçoamento em Matemática Montessori e Resolução de Problemas.
Hipátia	Mestrado e Doutorado em Educação	Cursos de Capacitação em Geometria Projetiva com um professor da Escola Waldorf e minicursos variados em eventos acadêmicos.
Laura	Mestrado profissional em Práticas de Educação Básica	Pós-graduação *lato sensu* em Ensino de Matemática.
Emmy	Mestrado em Educação Contextos Contemporâneos e Demandas Populares	Curso de extensão universitária em Educação Matemática – Metodologias para os Anos Iniciais (USP)

		Minicursos sobre educação matemática oferecidos pelo CAp-UFRJ.
Sophie	Mestrado em Matemática	PNAIC
Amelie	Mestrado em Educação	Cursos de Capacitação oferecidos pela UFRJ.
Katherine	Mestrado em Educação	Cursos de Capacitação oferecidos pela UFRJ.

Fonte: Elaboração da autora a partir das respostas no questionário *Google Forms*.

Observamos no Quadro 9 que todas as professoras são mestres em áreas relacionadas com a Educação e possuem cursos de formação continuada em Matemática, ensino de Matemática e/ou Educação Matemática.[7] Destacamos essa informação, pois as professoras participantes atuam nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental em regime de dedicação exclusiva e ministram aulas de diferentes disciplinas devido ao caráter generalista da profissão, e, portanto, escolher a Matemática como uma área para formação continuada denota interesse por essa área do conhecimento.

A seguir, continuamos a descrever o perfil das participantes enfatizando o tempo de regência nos Anos Iniciais, com especial atenção ao 5º ano.

4.5.2 Tempo de docência nos anos iniciais e no 5º ano

Organizamos os dados do quadro a seguir com prioridade para o tempo de docência nos Anos Iniciais, em ordem crescente de cima para baixo.

Quadro 10 – Tempo de docência e unidade de ensino das participantes

Nome	**Tempo de docência nos Anos Iniciais**	**Tempo de docência no 5º ano**	**Unidade de docência atual**
Maria Agnesi	11 anos	4 anos	Colégio Pedro II – RJ
Hipátia	13 anos	5 anos	Centro Pedagógico UFMG – MG
Laura	17 anos	7 anos	Colégio Pedro II – RJ
Emmy	17 anos	7 anos	Instituto de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira (CAp-UERJ) – RJ
Sophie	23 anos	18 anos	Colégio Pedro II – RJ
Maryam	24 anos	12 anos	Colégio Pedro II – RJ
Amelie	39 anos	1 ano	Instituto de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira (CAp-UERJ) – RJ
Katherine	43 anos	22 anos	Instituto de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira (CAp-UERJ) – RJ

Fonte: Elaborado pela autora.

[7] De acordo com informações dadas pelas professoras no formulário *online*, a carga horária dos cursos de formação continuada em Matemática varia de 40 horas a 360 horas.

As informações do Quadro 10 nos mostram que todas as professoras participantes da pesquisa são docentes de instituições federais ou estaduais de ensino, têm mais de 10 anos de docência nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, tempo consideravelmente grande de dedicação ao ensino das crianças em turmas do 1º ao 5º ano.

Com exceção da professora Amelie, que teve apenas 1 ano de docência com turmas de 5º anos, o tempo de docência no 5º ano das professoras é aproximadamente a metade do tempo total de docência nos Anos Iniciais. No caso da professora Sophie o tempo de docência no 5º ano é maior que em outras turmas dos Anos Iniciais.

4.5.3 Os recursos utilizados pelas professoras

Verificamos a partir dos dados do questionário *online* os recursos mais utilizados pelas professoras para o desenvolvimento do pensamento algébrico em suas turmas, como podemos observar no quadro a seguir.

Quadro 11 – Recursos pedagógicos mais utilizados pelas professoras para o desenvolvimento do PA

Nome	Recurso pedagógico mais utilizado para o desenvolvimento do PA
Maria Agnesi	Situações-problema
Maryam	Situações-problema
Hipátia	Situações-problema
Laura	Situações-problema
Emmy	Situações-problema
Sophie	Materiais manipulativos
Amelie	Jogos, desafios e situações-problema
Katherine	Jogos e situações-problema

Fonte: Elaboração da autora a partir das respostas no questionário *GoogleForms.*

Observamos no Quadro 11 que das oito participantes, seis citaram o uso de situações-problemas e 2 citara o uso de jogos. Apenas a professora Sophie citou o uso de materiais manipulativos.

As informações do perfil formativo e de experiência docente das participantes são dados importantes para a análise da pesquisa e serão relacionadas, quando necessário, com os dados obtidos durante a entrevista semiestruturada.

A seguir, descreveremos a organização da entrevista realizada na pesquisa.

4.6 **A entrevista semiestruturada**

Optamos por realizar o modelo de entrevista semiestruturada pela sua flexibilidade. De acordo com Triviños (1987, p.146) *apud* Castro e Oliveira (2022, p.36) a entrevista semiestruturada "ao mesmo tempo que valoriza a presença do investigador, oferece todas as perspectivas possíveis para que o informante alcance a liberdade e a espontaneidade necessárias, enriquecendo a investigação".

Dessa forma, organizamos a entrevista em dois momentos: o primeiro, abordando as atividades que as professoras escolheram apresentar na entrevista; e o segundo, discutindo situações didáticas com potencial para o desenvolvimento do pensamento algébrico. As entrevistas realizadas nesta pesquisa ocorreram pelo aplicativo *Google Meet* e *Zoom* e duraram, em média, 90 minutos. As conversas foram gravadas, mas não serão socializadas com o público.

No quadro a seguir apresentamos as questões que foram elaboradas para esse momento de apresentação das atividades pelas professoras.

Quadro 12 – Roteiro para a discussão das propostas trazidas pelas professoras

Perguntas	**Objetivos**
A proposta apresentada é de sua autoria?	Confirmar a fonte da proposta apresentada pela professora.
Qual é o objetivo da sua atividade?	Identificar a coerência da proposta com as ideias da *Early Algebra.*
Como ela pode contribuir com o desenvolvimento do pensamento algébrico?	Identificar como a professora entende a contribuição da proposta apresentada por ela para o desenvolvimento do PA.
Conte-me um pouco sobre como foi o desenvolvimento dos seus alunos durante a atividade.	Compreender como se deu o desenvolvimento da proposta apresentada pela professora, identificando aspectos do PCK.

Fonte: Elaborado pela autora.

As informações adquiridas na apresentação das atividades pelas professoras foram relacionadas com os dados do questionário *online* para mapeamento dos PCK manifestados pelas professoras. Essa análise será apresentada no Capítulo 5.

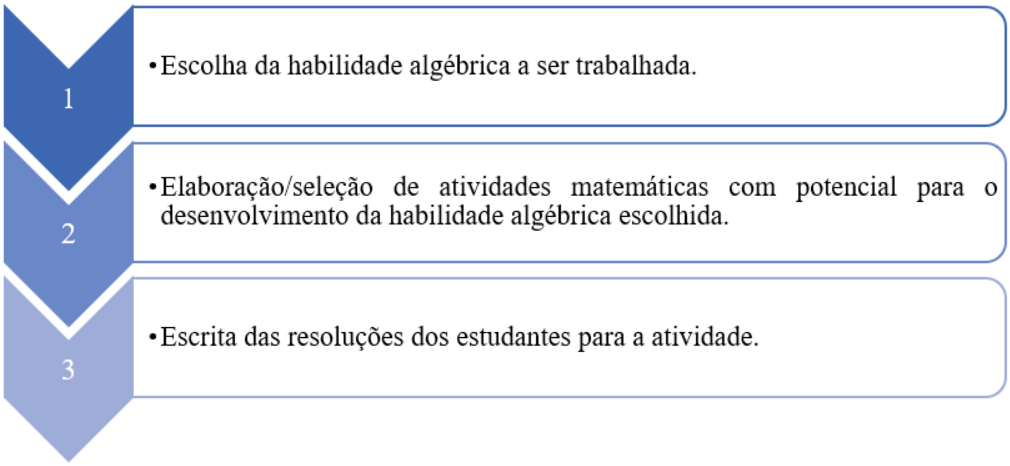
No segundo momento da entrevista, dedicamo-nos à discussão de situações didáticas que foram organizadas pensando no contexto de uma aula de Matemática em que uma atividade é proposta aos alunos com suas resoluções.

Em nenhum dos dois momentos (discussão da atividade apresentada pela professora e discussão das atividades apresentadas pela pesquisadora) tínhamos como intuito de avaliação os conhecimentos pedagógicos das professoras, mas buscávamos analisar as concepções e práticas relacionadas com o pensamento algébrico.

Considera-se que essa proposta seja propícia para a investigação dos PCK das professoras do 5º ano, pois possibilita a mobilização dos Conhecimentos Pedagógicos e seus subdomínios, como por exemplo o conhecimento do conteúdo e do ensino (KCT) por meio da análise da atividade matemática apresentada, no que se refere a adequação do conteúdo, formulação do enunciado, objetivo e público alvo; e o conhecimento do conteúdo e do estudante (KCS) no que se refere à interpretação das resoluções apresentadas e à formulação de intervenções pedagógicas apropriadas ao objetivo da atividade e ao desemprenho do aluno.

A seguir, apresentamos o esquema de organização das situações didáticas que foram apresentadas pela pesquisadora.

Figura 12 – Etapas de organização das situações didáticas



Fonte: Elaborado pela autora.

Com relação à primeira etapa da organização das situações didáticas, salientamos que as habilidades algébricas trabalhadas nesta pesquisa compõem o quadro de componentes algébricos direcionados ao 4º ano do Ensino Fundamental definidos na Base Nacional Comum Curricular. A escolha por habilidades do ano anterior ao 5º ano se deu em consequência do reconhecimento de lacunas trazidas pelo período pandêmico pelo qual passamos nos anos de 2019 a 2021/2022, produzindo um possível atraso no ritmo do processo de ensino e aprendizagem. As habilidades que foram abordadas estão descritas no quadro a seguir.

Quadro 13 - Habilidades do pensamento algébrico abordadas nas situações didáticas

Objetos do Conhecimento	Habilidades
Sequência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao ser divididos por um mesmo número natural diferente de zero.	(EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupo de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.

Relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão.	(EF04MA13) Reconhecer, por meio de investigações utilizando a calculadora, quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas.
Propriedades da igualdade.	(EF04MA15) Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais.

Fonte: Base Nacional Comum Curricular, 2017.

A partir do Quadro 13 observamos que cada objeto do conhecimento algébrico apresentado pela BNCC (2017) é combinado com uma habilidade do pensamento algébrico que no geral aponta para o processo de generalização, seja na abordagem com a aritmética generalizada, com o pensamento funcional ou com o pensamento relacional a partir da equivalência.[8]

Após o estudo sobre essas habilidades, seguimos para a seleção/elaboração das atividades matemáticas que seriam usadas nas situações didáticas. Em linhas gerais, tomamos como base os subdomínios do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo explorando o desenvolvimento do pensamento algébrico para as habilidades do Quadro 13. Essas atividades foram estruturadas a partir de propostas colhidas no referencial teórico desta pesquisa.

É importante ressaltar que algumas das atividades discutidas na entrevista não são necessariamente típicas da *Early Algebra*, ou inquestionavelmente eficientes para o desenvolvimento do pensamento algébrico. A opção por atividades desse tipo é devido à possibilidade que essas situações didáticas podem oferecer para a manifestação do PCK das professoras participantes, pois abre espaço para questionamentos, investigações e reflexões durante a entrevista sobre, por exemplo, o conhecimento do conteúdo e do ensino (KCT) usado na elaboração de ajustes das propostas na concepção das professoras sobre a adequação das atividades para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Para cada atividade utilizada nesta pesquisa, elaboramos duas perguntas fixas durante a entrevista, a fim de identificar os conhecimentos dos participantes sobre o conteúdo e o currículo (KCC) e o conteúdo e o ensino (KTC), pois estão relacionadas com a percepção das participantes sobre a adaptativade de cada atividade ao público-alvo, que no caso é uma turma de 5ºano, e aos conteúdos matemáticos que as compõem, identificando a conveniência ou não daquela atividade para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Como última etapa de organização das situações didáticas, partimos para a produção de possíveis resoluções dadas por estudantes às atividades matemáticas selecionadas,

[8] Ver no Capítulo 3 as ideias do pensamento algébrico evidenciadas nesta pesquisa.

inspiradas nos estudos de Canavarro (2007), Mestre e Oliveira (2012), Falcão (2013) e Luna, Souza e Menduni-Bortoloti (2017) que apresentaram, em diferentes contextos, o desempenho de estudantes dos Anos Iniciais diante de atividades com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

A partir da leitura desses estudos, entre outros, estruturamos as respostas dadas às atividades a fim de oferecer às participantes desta pesquisa um cenário de atuação pedagógica e mobilização do Conhecimento sobre o Conteúdo e os Estudantes (KCS).

Para isso, assim como na etapa anterior, também elaboramos duas perguntas fixas buscando provocar nas entrevistadas reflexão sobre o desempenho dos alunos a partir das estratégias, argumentações ou representações das resoluções apresentadas, além da criação de intervenções pedagógicas com vista ao desenvolvimento da habilidade proposta em cada atividade.

No Quadro 14 apresentamos a estrutura das atividades discutidas na entrevista.

Quadro 14 – Estrutura das situações didáticas

	Pergunta	**Objetivo**
Atividade	Na sua opinião, a tarefa proposta envolve qual ou quais conteúdos matemáticos?	Identificar o conhecimento pedagógico do conteúdo e do currículo (KCC).
	Seria possível a partir dessa tarefa desenvolver o pensamento algébrico? Como?	Identificar o conhecimento pedagógico do conteúdo e do ensino (KCT).
Respostas dos estudantes	Observando as respostas dos alunos, como você avalia os seus desempenhos?	Identificar o conhecimento pedagógico do conteúdo e dos alunos (KCS).
	Quais intervenções você utilizaria com esses alunos a fim de os fazerem refletir sobre suas respostas?	Identificar o conhecimento pedagógico do conteúdo e do ensino (KCT).

Fonte: Elaborado pela autora.

O roteiro completo da entrevista semiestruturada encontra-se no Apêndice B desta dissertação. A seguir, apresentamos as categorias de análise elaboradas a partir da interpretação das transcrições das entrevistas.

4.7 **Categorias de análise**

Para a construção das categorias levamos em conta as falas das professoras ao apresentarem suas atividades e as discussões acerca das situações didáticas da segunda parte da entrevista. Não consideramos para tanto as atividades separadamente, seja a atividade apresentada pela professora ou o grupo de atividades apresentado pela pesquisadora.

Optamos, portanto, pela análise completa da participação das professoras, considerando toda sua participação na entrevista para a identificação dos PCK relacionados com o desenvolvimento do PA em suas aulas no 5º ano e, consequentemente, para delineamento das concepções que as professoras detêm sobre o pensamento algébrico.

Para isso, realizamos a transcrição de cada entrevista a partir do vídeo e áudio gravados no dia. Após a primeira transcrição, relemos o material buscando identificar erros ou equívocos de digitação, retomando as gravações sempre que necessário. Com o texto conferido, demos início à interpretação das falas das professoras, destacando trechos em que identificássemos a mobilização dos PCKs relacionados com o pensamento algébrico.

Esse procedimento foi realizado em todas as transcrições. Em seguida, procuramos agrupar as falas das professoras que apresentavam conhecimentos pedagógicos comuns sobre as ideias da *Early Algebra* e que convergiam para uma mesma concepção relacionada com o pensamento algébrico.

Nesse processo, identificamos conhecimentos pedagógicos voltados para o desenvolvimento do pensamento algébrico como aritmética generalizada, como pensamento funcional e como equivalência. Também verificamos a proeminência de duas concepções sobre o pensamento algébrico: relacionada à linguagem matemática e percepção de padrões.

Dessa forma, criamos cinco categorias de análise para esta pesquisa, como podemos ver no quadro a seguir.

Quadro 15 – Categorias de análise

1ª Categoria	Conhecimento pedagógico sobre a aritmética generalizada
2ª Categoria	Conhecimento pedagógico sobre o pensamento funcional
3ª Categoria	Conhecimento pedagógico sobre a equivalência
4ª Categoria	Pensamento algébrico como linguagem matemática
5ª Categoria	Pensamento algébrico como percepção de regularidades

Fonte: Elaborado pela autora.

As três primeiras categorias representam os conhecimentos pedagógicos sobre o pensamento algébrico manifestados pelas professoras em suas falas relacionadas às ideias de aritmética generalizada, pensamento funcional e equivalência. As 4ª e 5ª categorias de análise descrevem as concepções das professoras sobre o pensamento algébrico: pensamento algébrico como linguagem matemática e pensamento algébrico como percepção de regularidades.

Para agrupar as concepções e os conhecimentos pedagógicos recorrentes em cada categoria não consideramos apenas as respostas das professoras em cada atividade proposta na pesquisa ou na atividade que a própria professora apresentou, mas levamos em consideração toda a sua participação na pesquisa, principalmente suas interpretações sobre o ensino, os estudantes e o tema da pesquisa.

No capítulo a seguir, apresentaremos nossa análise sobre os dados obtidos na pesquisa. Apresentaremos trechos da entrevista com falas das professoras em fonte tamanho 10, espaçamento simples e recuo de 4 cm. Daremos destaque em negrito para os termos em que identificamos presença de conhecimentos pedagógicos e concepções sobre o PA.

5 AS PROFESSORAS E O PENSAMENTO ALGÉBRICO

Antes de apresentar a análise das categorias elaboradas a partir da participação das professoras na pesquisa, iniciamos essa seção com a classificação das atividades trazidas pelas professoras no primeiro momento da entrevista. Essa classificação e interpretação sobre as atividades constituem fase importante para a análise da participação das professoras, pois dão indícios da forma como as professoras costumam desenvolver o pensamento algébrico de seus alunos no 5º ano por meio da discussão de uma atividade que já foi utilizada por ela para esse fim.

Lembramos que no questionário *online* a maioria das professoras disseram que as situações-problema são os recursos mais utilizados por elas no desenvolvimento do pensamento algébrico (ver Quadro 11). Contudo, verificamos que nas entrevistas apenas duas professoras apresentaram uma atividade em que a proposta envolvia situações-problema:

Quadro 16 – Atividades apresentadas pelas professoras na entrevista

Nome	Quant. de propostas apresentadas	Nome da atividade apresentada	Conteúdo matemático	Ideia do pensamento algébrico trabalhada
Maria Agnesi	1	Fração na reta numérica e fração equivalente	Frações	Aritmética generalizada
Maryam	1	Multiplicação e divisão – Operações inversas	Situações-problema do Campo Multiplicativo	Pensamento funcional
Hipátia	1	Investigação matemática	Área de retângulos; Configuração retangular e propriedade comutativa da multiplicação.	Aritmética generalizada
Laura	1	Investigação com fichas matemáticas	Sentenças aritméticas/algébricas	Sinal de Igual com ideia de equivalência
Emmy	1	Desafios matemáticos	Números do cotidiano	-
Sophie	1	Situações-problema envolvendo frações de quantidade e frações equivalentes	Situação-problema envolvendo fração	Pensamento funcional
Amelie	3	Sempre 2000	Sistema de numeração decimal	Aritmética generalizada
		Desafio cinematográfico	Configuração retangular	Aritmética generalizada
		Desafio da pirâmide	Sequência numérica repetitiva /cálculo mental	Pensamento funcional
Katherine	5	Explorando as fichas da loteria	Sequência numérica crescente	Pensamento funcional
		Tabuleiro da centena	Sistema de numeração decimal	Aritmética generalizada
		Prova do noves fora	Operações aritméticas	Aritmética

				generalizada
		Investigando a multiplicação por 11	Operações aritméticas	Aritmética generalizada
		Jogo Zig-Zag	Operações aritméticas	Aritmética generalizada

Fonte: Elaborado pela autora.

O quadro anterior nos mostra que as propostas das professoras foram diversas. Seis professores trouxeram uma proposta cada, e as professoras Amelie e Katherine apresentaram um número maior de atividades, 3 e 5 respectivamente. Essas professoras foram as únicas que citaram o uso de jogos no questionário *online*; elas são as professoras com maior tempo de docência nos Anos Iniciais (39 e 43 anos). Correlacionando os dados do questionário com as informações obtidas na primeira parte da entrevista, consideramos que esse tempo maior de prática docente contribuiu para o PCK dessas professoras, pois elas não se limitaram à apresentação de propostas voltadas para o 5º ano, descreveram também outras atividades em que o pensamento algébrico, em suas opiniões, poderia ser explorado na entrevista.

Ao todo, foram apresentadas 14 atividades. Treze foram atividades baseadas em problemas e uma era do tipo exercício. Ressaltamos, que o tema e o conteúdo matemático ligados a cada atividade foi confirmada pela professora participante durante a entrevista, dado que fazia parte da discussão explicar o tema da atividade e seus objetivos.

Com relação à última coluna do Quadro 16, para classificação das atividades quanto às ideias ligadas ao desenvolvimento do pensamento algébrico levou-se em consideração a estrutura da proposta e seu potencial para o desenvolvimento do pensamento algébrico dentro das três grandes ideias promovidas por Blanton *et al*. (2015): aritmética generalizada, equivalência e pensamento funcional.

Das 13 atividades baseadas em problemas, consideramos que 10 não exploraram as ideias da *Early Algebra* na atividade completamente visando à generalização com estratégias docentes diretas para isso, como a construção de regras gerais com os alunos, por exemplo. Portanto, a classificação das atividades quanto às ideias do pensamento algébrico foi dada pela pesquisadora a partir da análise das entrevistas, considerando o potencial de cada atividade e com base no referencial teórico adotado sobre a *Early Algebra.*

Optamos por não classificar a atividade apresentada por Emmy devido à falta de elementos relatados pela professora. Embora a apresentação de uma atividade na entrevista tenha sido previamente combinada com as participantes, Emmy não separou uma atividade para ser apresentada, fazendo sugestões curtas sobre atividades que realiza em sua turma sem aprofundamento.

Dessa forma*, v*erificamos o total de 14 atividades apresentadas pelas professoras. Dessas 14 atividades, oito foram classificadas como aritmética generalizada, quatro como pensamento funcional e uma como equivalência. Chamou-nos a atenção, a diversidade de conteúdos matemáticos abordados pelas professoras para o desenvolvimento do pensamento algébrico em suas aulas, como, por exemplo, a utilização do conceito de área para o trabalho com a aritmética generalizada e a investigação de operações aritméticas com sentido de equivalência para o sinal de igual.

A seguir, discutiremos as três atividades em que identificamos uma proposta completa voltada ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes.

5.1 **Conhecimentos pedagógicos identificados nas atividades das professoras**

Veja a seguir a atividade classificada como aritmética generalizada que foi apresentada pela professora Hipátia:

Figura 13 – Atividade apresenta por Hipátia

Investigação Matemática

Utilizando lápis de cor e papel quadriculado, as crianças devem encontrar (colorir) todos os retângulos possíveis de se formar com certa quantidade de quadradinhos. A área do retângulo é expressa em número de quadradinhos e as crianças precisam descobrir quais e quantos retângulos diferentes existem com aquela área. Além disso, elas são instigadas a enunciar um modo de encontrar a quantidade de retângulos sem o recurso do desenho.

Fonte: Arquivo da pesquisa.

A estrutura da atividade apresentada pela professora Hipátia descreve uma atividade investigativa cujo objetivo é descobrir diferentes representações retangulares para uma mesma área. Inicialmente, pode-se achar que a professora está trabalhando apenas com os conceitos de área de figuras planas, mas na verdade sua intenção é levar os alunos a perceber uma propriedade aritmética da multiplicação: a comutatividade.

> Eu mostro esses retângulos para os alunos e os instigo a pensar nos retângulos que são iguais. [...] Quando os alunos já conseguem associar a área dos retângulos às multiplicações, que no caso é o trabalho com a configuração retangular das situações multiplicativas, a gente acaba percebendo a comutatividade. Ou seja, 3 × 12 é igual a 12 × 3 (Hipátia, 2023).

> Nisso, na malha quadriculada, os alunos conseguem observar que esse espaço ou área dos retângulos é formada por uma configuração retangular de 2 por 18 ou 3 por 12. Até essa linguagem “por” é construída com eles, e eu explico que esses números representam o número de quadrados por linha e colunas e que quando multiplicados eles formam a área do retângulo (Hipátia, 2023).

> Aí, nesse ponto, muitos alunos ainda não têm aquela maturidade para generalizar né, mas poderíamos aqui escrever uma regra matemática que explicasse como isso acontece para um número qualquer. [...] Geralmente eu fico com essa explicação, que é um raciocínio algébrico mais formal que eles conseguem dar (Hipátia, 2023).

Ao aprofundar a discussão com os alunos sobre a comutatividade a partir do estudo da área do retângulo, propondo a construção conjunta de uma generalização dessa propriedade, identificamos que a professora Hipátia mobilizou os três subdomínios do conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK) segundo Ball, Thames e Phelps (2008).

Conhecimento do conteúdo e do ensino (KCT), ao dar exemplos sobre formas de introduzir o conteúdo a fim de propor uma investigação das propriedades do retângulo. Conhecimento do conteúdo e do currículo (KCC), ao relacionar um conteúdo próximo daquele em que ela está trabalhando, fazendo associações entre as situações-problema do campo multiplicativo do tipo configuração retangular com o ensino a propriedade comutativa.

E conhecimento do conteúdo e dos estudantes (KCS), ao mostrar que conhece a forma como os alunos do 5º ano lidam com a linguagem mais formal na aula de Matemática, e a maturidade que esse grupo detém para generalizar por meio de explicações construídas com/pelos estudantes.

Embora a professora Hipátia destaque a construção da linguagem algébrica com os alunos, percebemos em sua fala a predominância de elementos que manifestam um conhecimento pedagógico ligado à aritmética generalizada.

A seguir, abordaremos a atividade da professora Sophie, que se refere a situações-problema envolvendo frações de quantidade e frações equivalentes, que foi classificada dentro da ideia do pensamento funcional.

Figura 14 – Atividade apresentada por Sophie

Renata precisa viajar da cidade do Rio de Janeiro até Salvador. Ela fez uma pausa em Governador Valadares, me Minas Gerais. Neste ponto, Renata já tinha percorrido três décimos de sua viagem, com aproximadamente 489 km de trajeto.

a) Qual fração representa o trajeto completo?
b) Quantos quilômetro Renata fará em sua viagem completa? Mostre como você pensou:

Fonte: Arquivo da pesquisa.

A atividade de Sophie foi originalmente elaborada por ela para o trabalho com o conteúdo fração de quantidade no 5º ano, mas passou a ser usada pela professora para o desenvolvimento do pensamento algébrico de seus alunos, desde que uma estudante de sua turma a surpreendeu com um raciocínio algébrico para a sua resolução.

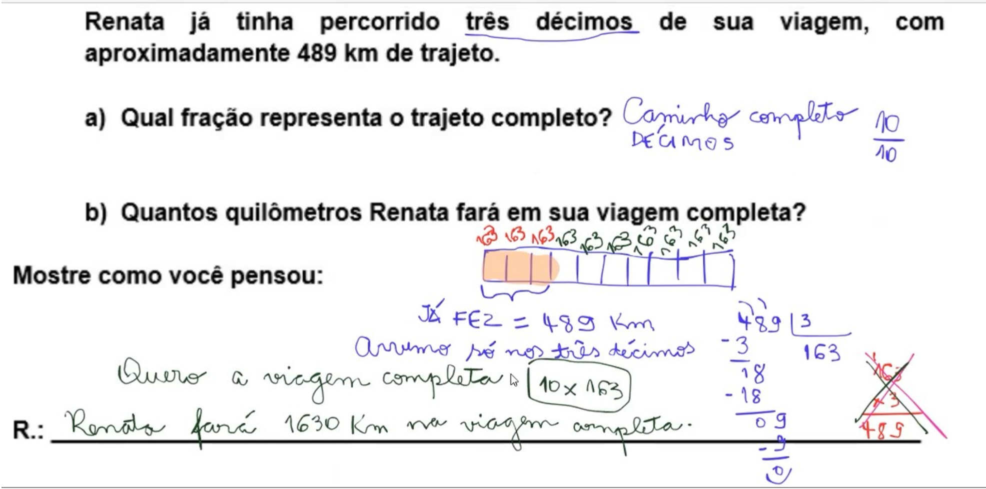
Ressaltamos que, embora Sophie descreva esse tipo de situação-problema como uma atividade utilizada para trabalhar com "fração de quantidade", e esse termo seja comum nas ementas dos cursos direcionados ao ensino de frações, não é adequada a sua utilização. O termo "fração de quantidade" dá a entender que se trata de um assunto além do tema da própria fração que, por sua vez, detém diferentes sentidos, como: parte e todo, probabilidade, razão, operador, número, divisão, taxa, medida etc. Podemos acompanhar a descrição da atividade por Sophie:

> [...] Aí **eu esperava que eles fizessem assim**: ela já caminhou 498 km. 489 se refere ao inteiro ou só a uma parte? Só a uma parte. Então, eu vou ter que distribuir só dentro desses 3/10 aí. Eles fazem a divisão e distribuem. Vai distribuir 489 dentro dos 3/10 lá. Então, muita criança acaba fazendo assim: eles pegam o 498 distribuem e fazem vezes 3 porque às vezes a gente tem que encontrar só a parte, mas quando faz a conta percebe que é o mesmo número dado. "Ah, mas não é isso que eu quero", então eles pensam "ah, eu quero a viajem completa, eu quero 10 vezes os 163 que eu coloquei. Lá na viagem 489 eram só 3 daqueles 10, e como eu quero o caminho todo eu coloco os 163 em cada décimo". **Só que minha aluna Letícia disse "eu não fiz assim"**, mas você acertou? "Sim" eu fiz usando fração equivalente (Sophie, 2023).

Observamos que, na verdade, a resolução relatada por Sophie representa uma operação usada para encontrar uma determinada quantidade a partir de uma fração dada e, portanto, não se trata de trabalhar a "fração de quantidade", mas de usar a fração como um operador multiplicativo: 3/10 de 498.

A figura a seguir ilustra a descrição dada pela professora da forma como ela esperava que seus alunos resolvessem a situação-problema proposta. Os registros coloridos na imagem foram feitos pela professora durante a entrevista.

Figura 15 – Primeira resolução da atividade de Sophie

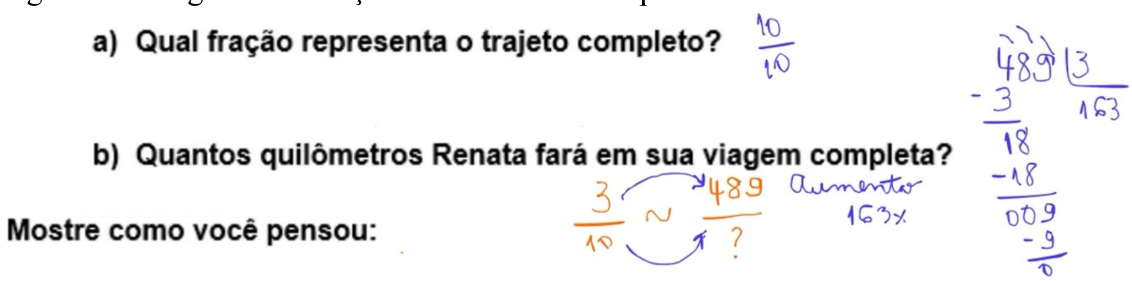


Fonte: Arquivo da pesquisa.

Para descrever como os alunos resolveriam a situação-problema, Sophie mobilizou o conhecimento do conteúdo e do estudante (KCS) por conhecer como estudantes do 5º ano geralmente resolvem esse tipo de problema, fazendo inclusive suposições de estratégias equivocadas pelos alunos (multiplicação de 3 × 163 em vermelho na Figura 15).

Na Figura 16 vemos a resolução que a aluna Letícia utilizou para resolver a situação-problema sendo representada por Sophie nas cores laranja e azul.

Figura 16 – Segunda resolução da atividade de Sophie



Fonte: Arquivo da pesquisa.

Sophie relata como a aluna descreveu seu raciocínio:

> [...] "Você me disse que ela caminhou 3/10. Então isso vai ser equivalente a uma outra fração. E como o 489 são só os 3 dos décimos, eu boto em cima porque eu vou achar outra fração equivalente que vai ser equivalente só que com números grandes.

> O 3 vai virar 489 e o 10 vai virar um outro alguém que vai virar o meu inteiro" (Sophie, 2023).

Identificamos que a professora mobilizou o conhecimento do conteúdo e do ensino (KCT) ao identificar uma resposta correta, mesmo que seja diferente da que geralmente é dada pelos estudantes. Sophie explica como entendeu a resolução de sua aluna:

> [...] Então, ela fez esse **cálculo da equivalência**, da **proporção**. Se o 3 está aumentando para 489 eu vou fazer isso vezes alguém. Para eu descobrir a volta, o valor de volta, do 489 para o três, eu vou fazer... eu tenho que dividir por 3 para **saber o quanto que eu aumentei**. Então, ela dividiu por 3 e deu 163. Então, ela percebeu que do 3 para aumentar para o 489 eu tenho que fazer vezes 163, então embaixo ela também tem que fazer vezes 163 e aí eu encontrei o meu inteiro ali que era o que eu precisava fazer (Sophie, 2023).

A explicação dada pela professora descreve um cálculo feito por Letícia em busca da equivalência respeitando a proporção entre o caminho total e o caminho já percorrido no trajeto da situação-problema. Ao entender a forma como sua aluna pensou para resolver o problema Sophie mobilizou o conhecimento do conteúdo e do ensino (KCT).

Sophie explicou que partir da resolução de sua aluna Letícia, passou a perceber a possibilidade de explorar a proporção a partir de situações-problema desse tipo:

> [...] Então, a partir do momento que ela fez isso, isso é o que, é quando a gente pede para encontrar o valor do x em alguma proposta, a gente calcula usando a regra de três. A gente faz muito isso. Multiplica cruzado aí viram duas equações e aí vira álgebra, né? Então, **a partir daí eu comecei a fazer propostas do tipo**: façam a atividade do mesmo jeito que Letícia. Então, eu dou a situação-problema em que eu sei o valor de uma parte e eu quero saber quanto que o Pedro vai gastar porque ele comeu só 3 pedaços desses, quanto vai ser a pizza toda.... então 1/8 é 2 reais, então a criança vai lá e escreve 1/8 é equivalente a 2/? Aí ele tem que fazer esse algebrismo ... na verdade ele não faz algebrismo de escrever a equação, mas **eles pensam nessa proporção acontecendo** (Sophie, 2023).

A proporção que se revela na resolução da aluna de Sophie refere-se à característica do tipo de situação-problema trabalhada pela professora, pois se trata de uma situação-problema do campo conceitual multiplicativo de Vergnaud (1983), que descreve uma relação de proporção simples do tipo quarta proporcional (Gitirana *et al*. 2014).

Um esquema representando a situação-problema anterior pode ver verificado a seguir.

Figura 17 – Esquema de proporção simples do tipo quarta proporcional

<table>
<tr><th>Esquema</th><th>Equação</th></tr>
<tr><td><table>
<tr><td>distância já percorrida</td><td>trajeto completo</td></tr>
<tr><td>3 → </td><td>498</td></tr>
<tr><td>10 → </td><td>x</td></tr>
</table></td><td>$498 \div 3 = 163$
$163 \times 10 = x$
$x = 1630$</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pela autora com base em Vergnaud (1983).

No esquema anterior, representamos na equação a forma como Letícia resolveu o problema segundo o relato de Sophie. Apesar de ser uma situação da classe quarta proporcional, ela primeiro encontrou o valor da unidade, como se resolvesse um problema de partição, e com a posse do valor da unidade, ela resolveu o problema como se fosse uma situação de um para muitos.

Outra resolução para esse tipo de problema seria a utilização da regra de três em que o aluno aplica uma propriedade de proporcionalidade: o produto dos meios é igual ao produto dos extremos, como foi mencionado por Sophie.

A descrição de Sophie mostra que sua aluna resolveu a situação-problema por uma análise horizontal que, segundo Vergnaud (2009), está centrada na noção de operador funcional. Nesse tipo de análise, representa-se uma função que expressa a passagem de uma categoria de medidas à outra, de onde o emprego de uma forma verbal expressa uma relação: distância por trajeto total igual a distância/trajeto total.

Concluímos que, no relato de Sophie, sua aluna estava utilizando um raciocínio algébrico voltado para o pensamento funcional ao explorar a proporcionalidade entre a distância já percorrida e a distância total do trajeto, mencionadas na situação-problema oferecida pela professora.

Com base no Teorema Fundamental da Proporcionalidade apresentado por Lima *et al.* (2016, p.95) apud Rodrigues (2021) as propriedades isomórficas da função linear ajudam-nos a perceber como o pensamento algébrico se manifesta no tipo de resolução dada pela aluna de Sophie:

> Seja f:R→R uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:
> $(1) f(nx) = nf(x) \, para \; todo \; n \in \mathbb{Z} \; e \; todo \; x \in \mathbb{R}.$
> $(2) Pondo \; a = f(1), tem - se \; f(x) = ax \; para \; todo \; x \in \mathbb{R}.$
> $(3) f(x+y) = f(x) + f(y) \, para \; quaisquer \; x, y \in \mathbb{R}.$

Com base na situação-problema apresenta por Sophie, vemos que a aluna aplicou a segunda afirmação do teorema anterior, ao encontrar primeiro a distância percorrida em 1/10 do trajeto e, em seguida, calcular o trajeto total: Dado $163 = f\ (1)$, temos $f\ (10) = 163 \times 10 = 1.630$.

Nessa discussão, além dos conhecimentos do conteúdo e dos estudantes (KCS) e do conteúdo e do ensino (KCT) também identificamos o conhecimento do conteúdo e do currículo (KCC), visto que a professora associou a resolução de uma aluna do 5º ano aos conteúdos de Matemática de níveis mais avançados (proporção direta, regra de três). Por fim, retomamos a intenção da professora em continuar a aplicação dessa atividade em sua turma explorando raciocínio proporcional que ela identificou na resolução de sua aluna:

> A partir daí **eu fiz propostas como essa**: sempre dando a quantidade, dando a parte para encontrar o todo ou dando o todo para encontrar a parte sempre do jeito da Letícia. **Porque um dos termos ali daquelas frações equivalentes somem**, e aí criança tem que resolver.
> Depois eles iam para o quadro e eu ficava pedindo para eles encontrarem, sabe? **Você pensou desse jeito**, onde essa parte da sua conta parece com o jeito da Letícia, **aí eles vão discutindo a respeito de por que os dois métodos funcionam** (Sophie, 2023).

Consideramos que Sophie mobilizou seus conhecimentos pedagógicos para o desenvolvimento do pensamento algébrico, pois soube aproveitar a oportunidade de resolução de uma aluna para ampliar as estratégias de outros alunos da turma explorando a noção de proporcionalidade por meio de discussões sobre o trabalho com frações equivalentes em situações-problema.

A última atividade que selecionamos para a discussão nessa seção é a atividade apresentada pela professora Laura, que compartilhou o trabalho investigativo a partir de fichas com sentenças matemáticas:

> São fichinhas que eu vou preparando com alguma frequência. São várias né, aí eu geralmente **divido a turma em grupos e aí a gente trabalha**. E aí cada grupo vai descobrir, né? Qual é o número que está faltando? Esse espaço pode ser um quadradinho, um coraçãozinho... E aí **a gente faz a discussão de por que** é aquele número ali, né? (Laura, 2023).

A professora explica que usa a estratégia de discussão com os alunos no desenvolvimento dessa atividade, ação importante para o desenvolvimento do pensamento algébrico e que denota um conhecimento do conteúdo e do ensino (KCT).

A primeira ficha que a professora apresentou (Figura 18) mostra uma igualdade entre dois lados de uma sentença aditiva com duas parcelas.

Figura 18 – Ficha 1 apresentada por Laura

$$235 + 125 = 125 + \blacksquare$$

Fonte: Arquivo da pesquisa.

Laura explica a atividade:

> [...] Então, vai ter grupo por exemplo, que vai identificar que ali naquele espaço está faltando o zero, né? Porque ele já observou que em um lado do sinal de igual tem um número e do outro tem um mesmo número. Mais o quadradinho, então não é qualquer número, né? Qualquer algarismo que lhe preenche ali vai modificar aquele número. Então, vai tornar falsa aquela **igualdade**, né? Não vai **ser equivalente**, então. Já para outros grupos, por exemplo, é ele vai observar que os termos é, no caso, se for adição, são as parcelas, só estão alternadas. Não poderiam ter 235 mais 125 e aí lá do outro lado da igualdade, 125 mais? E aí vai vir quadradinho para ele observar que está faltando na verdade, a outra parcela (Laura, 2023).

Verificamos na fala da professora conhecimento do conteúdo e dos estudantes (KCS) ao descrever duas interpretações possíveis pelos alunos para o tema que está abordando. O objetivo da atividade era explorar a equivalência entre as sentenças de cada lado da igualdade, levando os alunos a descobrirem qual número preenche o quadradinho de forma adequada.

Veja na explicação da segunda ficha, apresentada pela professora a forma como ela explora o sinal de igual em suas aulas:

Figura 19 – Ficha 2 apresentada por Laura

$$3 + 3 = 2 + 2 + \blacksquare$$

Fonte: Arquivo da pesquisa.

Laura explica a ficha 2:

> [...] Na verdade, a intenção é eles observarem essas é, essas **propriedades da adição** quando a gente faz, mas aí a gente também começou a fazer sem o objetivo de avaliar só no sentido mesmo, de **apresentar essas diferenças dos sentidos do sinal de igual**, né? Quando ele está sendo usado ali, por exemplo nas sentenças matemáticas além do problema naquela continha de armar ali, aquela conta, deitadinha, ele tem ali sentido do outro lado do sinal de igual a gente vai estar encontrando o resultado. A gente vai colocar o resultado daquela conta. Agora, por exemplo, quando a gente é tem uma operação de um lado, 3 + 3 é igual a 2 + 2 e uma incógnita. Tem que "pescar" que ali é um 2. A gente sempre faz uma conversa. **Há mais do que "isso aqui é o resultado disso aqui" não, é?** Então, esse sinal aqui está sendo usado por que, né? Porque o valor que eu vou encontrar nesse lado **é**

> **equivalente** ao valor dessa operação desse lado; **a gente faz essa conversa** (Laura, 2023).

Na segunda ficha, ressaltamos a exploração que a professora faz do sinal de igual para além do sentido de operador, mobilizando conhecimentos do conteúdo e do ensino (KCT) por apresentar diferentes recursos e estratégias didáticas (fichas, discussão, conversa) e conhecimentos do conteúdo e do currículo (KCC) por conhecer outras formas de discussão do seu tema, o sinal de igual com sentido de equivalência (Kieran, 1981; Ponte, Branco & Matos, 2009) para desenvolver o pensamento algébrico de seus alunos.

Na próxima seção, dedicamo-nos a apresentar as análises sobre a participação das professoras na segunda parte da entrevista, discutindo as situações didáticas que foram propostas visando à identificação de conhecimentos pedagógicos relacionados com o pensamento algébrico.

5.2 **Conhecimentos pedagógicos identificados na 2ª parte da entrevista**

Iniciamos a discussão sobre as categorias 1, 2 e 3 de análise em que identificamos conhecimentos pedagógicos para o desenvolvimento do pensamento algébrico relacionados cpm as ideias de aritmética generalizada, equivalência e pensamento funcional.

5.2.1 Conhecimento pedagógico sobre a aritmética generalizada

Os conhecimentos pedagógicos das professoras relacionados com a aritmética generalizada estão ligados às atividades que se dedicam à "generalização de relações aritméticas, incluindo propriedades fundamentais de número e operação, e raciocínio sobre a estrutura de expressões aritméticas em vez de seu valor computacional" (Blanton *et al*., 2015, p. 45,).

A situação didática número 1 abordada na entrevista foi nomeada de Turminha Faltosa e tinha como objetivo trabalhar uma propriedade aritmética presente na habilidade EF04MA12 da unidade temática Álgebra (BNCC, 2017), identificando regularidades com o reconhecimento, por meio de investigações, de que há grupo de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais.

Figura 20 – Situação didática 1

A seguinte atividade foi proposta a uma turma de 5º ano:

Turminha Faltosa

A turma 5A é muito faltosa. Para organizá-la em grupos de 5 alunos a professora precisa fazer diferentes estratégias. Por exemplo, na segunda-feira quando ela os divide nunca sobra ninguém. Na terça, sempre sobra 1. Na quarta, sempre sobra 2. Na quinta, sempre sobra 3 e na sexta-feira sempre sobram 4 alunos. Qual é o número de alunos possíveis em cada dia da semana?

Fonte: Elaborada pela autora.

Nessa atividade, as professoras foram convidadas a refletir sobre a proposta, identificando possibilidades para o desenvolvimento do pensamento algébrico e elaborando estratégias para direcionar os alunos para a percepção de regularidades presentes nas divisões por 5.

A seguir, estão as primeiras impressões de duas professoras acerca dos conteúdos que envolvem essa atividade em que identificamos a mobilização de conhecimento pedagógico sobre o conteúdo e o currículo (KCC):

> Me faz lembrar na faculdade do módulo, o resto. Eu acho que é a própria divisão. Aqui a gente pode usar a operação inversa da divisão para poder pensar, mas é complicado, né... dizer que a divisão é uma operação inversa àmultiplicação é um pouco capcioso, pois ela precisa do resto. Então, não diretamente inversa sabe? Não existe esse termo, mas ela precisa de outras opções para compor, para esse ir e vir acontecer. Embora elas pertençam à mesma ideia, né? Pertencentes à ideia da multiplicação. Os múltiplos também, porque se você vai fazendo aquela regularidade dos múltiplos, e sobram dois, sobram três, você faz essa compensação de ter que, dependendo do raciocínio da criança, se ela para antes do múltiplo, de ter que completar com o resto, se ela para e depois ter que voltar, porque se ela contou a mais não era para contar (Sophie, 2023).

> Estamos no campo da aritmética e se puder pensar na álgebra como o número de alunos da turma como x, então também estamos no campo da álgebra. Talvez esteja explorando ao mesmo tempo, multiplicação e divisão, uma ideia de operação inversa ... pois eu estou pensando em uma situação que remete à divisão, mas como eu não tenho o valor total de alunos eu preciso recorrer à operação inversa. Porque você tem para a segunda-feira um tanto de possibilidades para os alunos presentes. Na terça-feira múltiplos de 5 mais um, na quarta feira múltiplos de 5 mais 2. Então, o pensamento está nessa regularidade (Hipátia, 2023).

As professoras Sophie e Hipátia, deram indícios de conhecimentos do conteúdo e do currículo, pois associaram a proposta da Turminha Faltosa aos conteúdos de Matemática de níveis de complexidade diferentes (módulo, divisores, múltiplos) além dos que já são apresentados na atividade.

Na discussão dessa atividade, também identificamos conhecimentos pedagógicos do conteúdo e dos estudantes (KCS) mobilizados pela professora Hipátia. Como é possível observar em suas falas a seguir:

> Essa questão é difícil, pois a quantidade é o divisor. **Para eles** (os alunos) o divisor poderia ser número de alunos da turma. Então, na terça vai dar um quociente e um resto diferente, também na segunda e na quarta quociente e o resto também é outro. Só que quando **geralmente os alunos pensam na divisão em grupos**, geralmente o divisor é o número de grupos e não o número de alunos por grupos. **Eu tenho observado** exatamente isso, **como que os alunos não enxergam os agrupamentos de mesmo tamanho como um divisor**, perceber "eu quero formar saquinhos com 5 balas quantos saquinhos vou ter?" ou "eu quero dividir essa bala para 5 pessoas?" Para eles é mais fácil entender (...) O grande problema da situação é que o problema quer abraçar todas as possibilidades de uma divisão por 5 e isso **gera uma complexidade muito grande para o quinto ano** (Hipátia, 2023).

Hipátia demonstra um conhecimento do conteúdo e dos estudantes (KCS) ao mostrar que conhece seus alunos e as características que um grupo de estudantes do 5º ano assumem diante de atividades que envolvem o trabalho com divisão ou divisores de um número natural, pois cita detalhes do comportamento dos estudantes quando resolvem situações matemáticas desse tipo, afirmando que "geralmente os alunos pensam na divisão em grupos", "os alunos não enxergam os agrupamentos de mesmo tamanho como um divisor".

Em suas palavras, Hipátia considera que a proposta da atividade é muito complexa para o 5º ano, pois quer "abraçar" todas as possibilidades de uma divisão por 5. Por outro lado, as professoras Maryam e Amelie, disseram que a proposta da atividade seria oportuna para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos e mobilizaram conhecimentos do conteúdo e do ensino (KCT) para afirmar que:

> Essa situação está clara quanto a sua possibilidade de desenvolvimento do pensamento algébrico. A criança vai **experimentando e criando possibilidades** (Maryam, 2023).
>
> Essa atividade é um desafio para os alunos do 5º ano. Eu acho que assim, o desafio ele não pode ser difícil a ponto de a criança não fazer, mas também, eu acho que fácil demais não faz com que **a criança avance e pense mais além**. Então, essa atividade talvez seria boa para trabalhar o pensamento algébrico das crianças (Amelie, 2023).

Maryam menciona a característica da atividade de possibilitar a experimentação e criação de possibilidades para a sua solução como um fator que claramente contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Amelie, explica que os desafios possíveis ajudam a criança a avançar e "pensar mais além", elementos que, em sua opinião, são bons para o trabalho com o pensamento algébrico nesse ano escolar.

Concordamos com Maryam e Amelie, pois de acordo com Canavarro (2007), as tarefas de natureza problemática e as investigações que convidam ao estabelecimento de propriedades gerais são particularmente apropriadas para o desenvolvimento do pensamento algébrico. No entanto, necessitará da mediação da professora para explorar com as crianças as possibilidades dessa atividade.

Identificamos na fala de cinco professoras conhecimentos pedagógicos relacionados com o conteúdo e ao ensino (KCT) ao refletirem sobre a respostas dos alunos para essa atividade e proporem intervenções visando ao desenvolvimento do pensamento algébrico relacionado com a percepção de regularidades presentes nas divisões por 5:

> Poderia colocar **a tabuada do 5 no quadro**, né? E aí **eu posso explicar** que quando a divisão é exata é aquela tabuada que está ali. Bom, e se eles fossem até o 50 e acrescentasse mais 1 aos resultados da tabuada apareceriam todos os números possíveis para a terça-feira. E aí acrescentaria mais dois na tabuada do 5 no dividendo e ali apareceriam todos os números possíveis para quarta e assim sucessivamente. Depois eu colocaria mais 3, mais 4, e **eu ia perguntar para eles o que aconteceria se eu colocar mais 5?** (Maria Agnesi, 2023).
>
> Eu recorreria ao **quadro numérico** e pediria para eles pensarem nos múltiplos de 5. E aí quando eles começarem a perceber que avançando duas casas, quaisquer daqueles conjuntos, se eu pegasse aqueles que avançarem 2 casas atendem à quarta-feira, por exemplo. E **aí eles começarem a observar nessa regularidade** que vai acontecendo que na verdade eu estou fazendo um número que multiplica 5 e adicionando 2 do lado (Sophie, 2023).

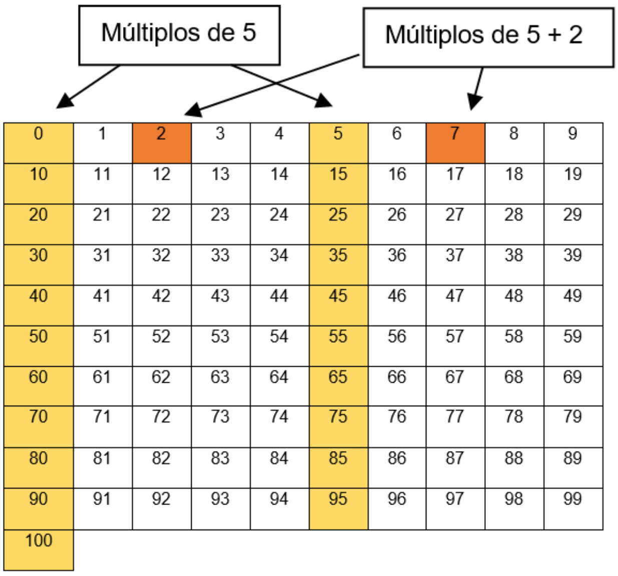
Ao mencionarem os recursos, as professoras Maria Agnesi e Sophie denotam conhecimento do conteúdo e do ensino (KCT), pois citaram dois recursos didáticos que comumente são utilizados nos Anos Iniciais sem a finalidade de desenvolvimento do pensamento algébrico, a tabuada e o quadro numérico, mas que são citados pelas professoras com o objetivo de proporcionar a visualização das regularidades presentes nos múltiplos de 5, associando as repostas dadas a cada dia da semana (sobra 0, sobra 1, sobram 2, sobram 3 etc.) a números que não pertencem aos múltiplos de 5, estabelecendo relações entre eles. Percebemos que elas disseram que "eu posso explicar" e "pediria que eles pensarem nos múltiplos" o que nos demonstram uma perspectiva de apresentar uma possível solução, sem, contudo, proporcionar a investigação das crianças.

Em outro momento, a professora Sophie explica o uso do quadro numérico demonstrando manifestações do KCS e KCT:

> [...] E por que o uso do quadro numérico? Porque é menos uma coisa que eles iam ter que se preocupar. A sequência do número já está pronta. Quando você começa a propor essas multiplicações, soltas eles têm que se preocupar se eles estão acertando a multiplicação também e isso tem sido um nó para nós ultimamente: **as crianças estão com dificuldade de decorar a tabuada cada vez mais**. Então, eu tiro um complicador porque esse não é o meu objetivo, ter a tabuada decorada. Melhor, vou esclarecer melhor, sempre ter a tabuada decorada é um objetivo sim, **mas se eu quero trabalhar a álgebra**, **e não a tabuada** então eu quero sim tirar um problema. Então, vamos olhar ali o quadro numérico, **eu quero ver as regularidades que estão acontecendo ali**. Vamos olhar ali o caso geral da regra da terça, o caso geral da regra da quarta, e assim por diante (Sophie, 2023).

Na explicação de Sophie ela já instiga as crianças a pensarem e investigarem, quando disse "ver as regularidades que estão acontecendo ali". Na Figura a seguir apresentamos uma representação do quadro número sugerido por Sophie:

Figura 21 – Utilizando o quadro numérico para a percepção de regularidades



Fonte: Elaborado pela autora de acordo com Sophie (2023).

Acreditamos, assim como Sophie, na ressignificação de recursos comuns da sala de aula para o desenvolvimento do pensamento algébrico. É importante, como ela aponta, estar consciente do objetivo que se quer alcançar: ver as regularidades. Em seguida, apresentamos às professoras possíveis respostas dos alunos para a situação didática 1 (Figura 22):

Figura 22 – Respostas dos estudantes para a situação didática Turminha Faltosa

Joaquim, Ana e Fabíola apresentaram uma solução para a professora. Observe abaixo a solução de cada aluno:

Resposta do Joaquim	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta
	30	21	12	13	14
Resposta da Ana	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta
	10	6	22	43	9
Resposta da Fabíola	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta
	5	11	7	23	34

Fonte: Elaborado pela autora.

Observando as respostas dos estudantes, as professoras Laura e Amelie apostam na discussão coletiva para a percepção de regularidades, examinando junto com os alunos as limitações dos argumentos empíricos (Blanton et al 2015).

> Eu **compartilharia esses diferentes resultados encontrados pelos alunos**. Iria expor: olha o Joaquim encontrou tal resultado. E aí, a gente analisaria: Está correto? E aí chegaria à conclusão de que está correto. Mas olha aqui o que aconteceu nessa outra resposta? Ela chegou ao resultado tal e ia discutir os resultados usando a divisão por 5 mostrando que que apesar de diferentes todas são respostas possíveis. No final, eu perguntaria: **E que outras respostas possíveis a gente poderia ter** para esse problema além dessas que vocês sugeriram, né? E aí **perceber se eles fariam essas generalizações** (Laura, 2023).
>
> Bom deixa eu pensar, eu acho que eu poderia até **fazer numa calculadora** e verificar com eles assim: "Descubra para 179 estudantes qual dia da semana seria?", porque aí eles teriam que saber que **179 comparando com o 175** que é um múltiplo de 5 sempre tem resto 0 né. Então, assim eu acho que eu perguntaria mais alguma coisa para eles pensarem acerca disso: **"E se ampliasse? E se fizesse um número maior?"** Então, na divisão tem um conhecimento de que se termina com 0 ou com 5 é divisível por 5, isso ajuda a pensar também. Então **acho que isso faz parte do conhecimento algébrico** e todas essas coisas estão no entorno (Amelie, 2023).

Para isso, as professoras ampliaram a proposta para além das respostas já encontradas a fim de encontrar nos diferentes números dados como resposta um padrão que descreva a relação entre eles. Com essas estratégias, identificamos conhecimentos do conteúdo e do ensino (KCT) mobilizados pelas professoras, pois além proporcionar que os alunos identifiquem uma generalização em uso (Blanton *et al.*, 2015), que no caso é o conjunto dos múltiplos de 5, as professoras também estão incentivando os alunos a justificar a generalização aritmética usando argumentos empíricos ou argumentos baseados em representação.

5.2.2 Conhecimento pedagógico sobre o pensamento funcional

Escolhemos para a discussão dessa categoria a situação didática 2, chamada A Caixa de Bombons (Figura 23), que aborda uma situação-problema do Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas (Vergnaud, 1993). Ela foi elaborada a fim de explorar a habilidade EF04MA13 da unidade temática Álgebra (BNCC, 2017) que se refere à exploração das relações inversas entre as operações aritméticas.

Esse conceito se aproxima da grande ideia denominada aritmética generalizada segundo Blanton *et al*. (2015). Contudo, capturamos nas falas das professoras manifestações de conhecimento pedagógico relacionadas com o trabalho com a ideia de pensamento funcional, como veremos a seguir.

Figura 23 – Situação didática 2

A Caixa de Bombons
Deise tem uma certa quantidade de bombons e vai dividi-los em 4 caixas. Sabendo que ela conseguiu guardar todos os bombons nas caixas e que cada caixa ficou com 6 bombons, quantos bombons Deise tem no total?

Fonte: Elaborado pela autora.

De acordo com Schiliemann, Carraher e Brizuela (2007) é possível ajudar as crianças a construir uma compreensão da multiplicação de um ponto de vista algébrico, como uma relação funcional, quando se muda o foco das relações escalares para relações funcionais e, posteriormente, para a representação algébrica geral.

De acordo com Gitirana *et al*. (2014) a situação-problema da Figura 23 pode ser classificada como um problema de proporção simples do tipo um para muitos, pois o valor unitário é conhecido e deseja-se saber o valor da segunda grandeza de mesma natureza. Como podemos observar na Figura 24.

Figura 24 – Representação da ideia de proporção simples da situação didática 2

Esquema	Equação
pacotes / bombons $1 \longrightarrow 6$ $4 \longrightarrow x$	$4 \times 6 = x$ $24 = x$

Fonte: Elaborado pela autora com base em Vergnaud (1983).

Apoiados em Schiliemann, Carraher e Brizuela (2007) oferecemos às professoras uma discussão sobre essa situação-problema, buscando provocar reflexões sobre como alunos e professores poderiam lidar com problemas de multiplicação no sentido de um "trampolim" para a compreensão emergente sobre razão, proporção, funções lineares e progressiva capacidade de articular esses conceitos em uma linguagem cada vez mais geral de notação algébrica.

Veja nos trechos a seguir como as professoras inicialmente interpretaram a situação-problema:

> Eu achei uma **atividade muito direta** dentro do raciocínio da multiplicação e da divisão. Eu não acho que ela em si tenha a proposta de estímulo do pensamento algébrico. Mas, **dependendo das perguntas** que forem surgindo, **você pode estimular o pensamento algébrico.** Não tem como eu chegar na abstração da divisão do pensar algébrico que envolve a multiplicação e a divisão se eu não passar por uma questão como essa. Então, nesse sentido, é álgebra também, mas não acho que seja uma questão voltada diretamente para isso (Hipátia, 2023).
>
> Eu acho que pode ajudar no desenvolvimento do pensamento algébrico, mas **não sei se seria o problema mais rico para isso**. Pensando nessa questão de regularidade, né? Você tem ali um número de caixas com o número de bombons. Então, eu não sei, assim se essa proposta seria tão importante para desenvolver o pensamento algébrico (Laura, 2023).

Tanto Hipátia quanto Laura não identificaram na proposta potencialidade imediata para o desenvolvimento com o pensamento algébrico. Nesse sentido, verificamos uma manifestação do conhecimento do conteúdo e do ensino (KCT), pois partindo da compreensão que ambas detêm sobre o pensamento algébrico como um procedimento ligado à percepção de regularidades, as professoras afirmam que a atividade é muito "direta" para a exploração de alguma regularidade que resulte em uma generalização.

Hipátia afirmou, entretanto, que se fossem oferecidas e/ou elaboradas outras perguntas dentro do desenvolvimento da atividade, ela poderia estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico. De fato, Schiliemann, Carraher e Brizuela (2007) explicam que a transição da aritmética para álgebra passa por um movimento de pensar sobre relações. Isso requer fornecer uma série de problemas aos alunos, para que eles possam começar a observar e articular os padrões gerais que veem entre as variáveis. No caso do problema em questão, entre os bombons e as caixas.

Concordamos com Schiliemann, Carraher e Brizuela (2007), e na interpretação das falas das professoras identificamos a manifestação do KCT, pois elas refletiram sobre a pertinência da atividade considerando o que entendem sobre o tema.

Mais à frente, a professora Hipátia utiliza o KCT para ampliar a proposta com sugestões a partir de uma compreensão funcional:

> Depois de um problema desse **se a professa fala**: beleza, foram 4 caixas. E se forem 5, e se fossem 6? E **começa a explorar**, que quantidade me daria aqui? **Aí começaria o processo de observar aquela regularidade e generalizar** (Hipátia, 2023).

Observamos que Hipátia associa o desenvolvimento do pensamento algébrico à percepção de regularidades e utiliza o KCT para uma ampliação da proposta que vai favorecer essa ação pelos estudantes. Ao ampliar o número de caixas, os alunos precisariam também pensar no aumento proporcional da quantidade de bombons e estariam estimulando o desenvolvimento do pensamento funcional presente na variação direta entre essas grandezas.

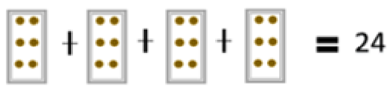
A professora Sophie demonstra um olhar diferente sobre a situação:

> Sim**, situações problemas ajudam a desenvolver o pensamento algébrico**, nesse caso das operações, eles estão encontrando o valor de X, né, no futuro? **Engraçado que as pessoas não reconhecem muito isso como álgebra**. É, **eu percebi igualdades**, **equações**, isso pode ser pensado como uma equação também! Quando o valor desconhecido está no produto, as pessoas não reconhecem isso como uma equação, reconhece só como multiplicação. (Sophie, 2023)

Sophie, ao constatar a presença de uma equação na situação didática 3, manifesta um Conhecimento Pedagógico do Conteúdo e do Currículo (KCC) para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, pois associa a multiplicação (um conteúdo dos Anos Iniciais) à equação, outro conteúdo geralmente trabalhado em séries mais avançadas.

Duas possibilidades (Figura 25) de resolução para a situação-problema foram apresentadas às participantes, uma de abordagem representada por uma equação, que pode descrever uma relação funcional (Pietro) que, segundo Schiliemann, Carraher e Brizuela (2007, p. 108), "presumivelmente depende de relações entre variáveis, muitas vezes variáveis de naturezas diferentes (...) e enfoca como uma variável varia em função da outra variável", e outra com adições repetidas (Júlia).

Figura 25 – Resolução dos alunos para situação didática 2

Pietro	Júlia
$\square \div 4 = 6$ $6 \times 4 = 24$	

Fonte: Elaborado pela autora.

A fim de compreender o conhecimento do conteúdo e do estudante de professores que ensinam matemática, Ball *et al*. (2008) apud Proto (2020) sugerem que sejam feitas perguntas que requerem a interpretação de um pensamento mal formulado dos alunos ou que demandem sensibilidade para julgar o que eles acham fácil ou desafiador.

Nesse caso, Pietro e Júlia encontraram a resposta correta. Mas, diante de uma proposta que visa trabalhar a relação inversa entre as operações de multiplicação e divisão, buscamos junto às professoras identificar qual resolução demonstra a utilização de um pensamento algébrico.

> É, **ele (Pietro) entendeu a lógica** que se você tinha bombons e tinha que agrupar em 4 caixas e tinha que ter 6 em cada caixa, **usando a operação inversa** que são as operações irmãs. Então, aqui **eu já vejo o Pietro mais avançado em termos de pensamento algébrico**. Não porque ele armou a conta, mas **porque ele entendeu que o 6 estava dentro das 4 caixas**, apesar de que a Julia também entendeu só o registro está mais primitivo. Primitivo que eu digo não que precisa ser mais avançada, mas primitivo no sentido de que geralmente a criança começa com desenhos né e depois vai para os números pois fica mais práticos, né. E se a gente está pensando numa criança de 5 anos e ela já entendeu o que que cabe no que, que **é uma das ideias da divisão, quantas vezes um número cabe dentro do outro, eu acho que isso influencia o pensamento algébrico da criança** (Katherine, 2023).
>
> Então, aí o Pietro me desmentiu. Porque eu disse, ah talvez não seja tão potente esse problema. Mas tipo, ali **ele superpotencializou o pensamento algébrico para registrar essa resposta**, né? Quando eu tenho algo dividido por 4 igual a 6, então **da forma como ele registrou** eu acho que ele acessou ali né elementos que foram potentes para essa descoberta e para a questão do pensamento algébrico. **Júlia está ali na questão, mais concreta**, ela precisou fazer o desenho para poder achar os 24, né? Então, desenhou as 4 caixinhas com 6 (Laura, 2023).
>
> **O Pietro tem o pensamento algébrico muito mais avançado**. Ele usa a álgebra literalmente. Só faltou ele colocar ali que x dividido por 4 é igual a 6. Já a Julia ela está realmente numa coisa mais concreta. Nem a multiplicação ela usa, **ela usa as somas sucessivas**. O que **não quer dizer que ela não tenha um pensamento algébrico;** ela tem, mas ele é mais... não sei dizer a palavra que eu posso usar, mas é menos desenvolvido que o do Pietro. Pois **o Pietro ele usa operações inversas**, ele já está em outra (Maria Agnesi, 2023).

O conhecimento do conteúdo e dos estudantes (KCS) manifestado nas falas das três professoras anteriormente sobre a resolução dos alunos revela que elas relacionam o desenvolvimento do pensamento algébrico nas turmas de 5º ano com a utilização de uma linguagem algébrica que descreva a relação evidenciada na situação didática 3. Para elas, o aluno Pietro está "mais avançado" em termos de pensamento algébrico do que a aluna Júlia, devido à representação que ele usou em sua resolução.

Verificamos, portanto, que quando se trata de trabalhar com o pensamento algébrico, as professoras levam em consideração a forma como a resolução é feita pelos alunos.

Sobre isso, Rodrigues (2021) explica que ao utilizar uma representação numérica para apresentar algoritmos da multiplicação em uma situação-problema de proporção simples um para muitos, como foi apresentado na resolução fictícia do aluno Pietro, é possível inferir que esse aluno estabeleceu implicitamente algumas ideias importantes quando consideramos o desenvolvimento do pensamento algébrico: a ideia de correspondência um para muitos – para 1 caixa há 6 bombons e para 4 caixas há 24 bombons; a ideia de dependência – a quantidade de bombons distribuídos depende da quantidade de caixas; a ideia de variável, ao identificar a variação do número de caixas e, consequentemente, do total de bombons distribuídos; e a ideia de proporcionalidade pela utilização da taxa de proporcionalidade – 6 bombons por caixa ou pela utilização da razão – 4 vezes, mantendo a proporção 1:6.

Tendo em vista que as professoras identificaram que a resolução do Pietro se aproximava mais da perspectiva do pensamento algébrico que a de Júlia, as professoras deram algumas sugestões de intervenção a partir de seus conhecimentos sobre o conteúdo e os alunos do 5º ano:

> Algumas crianças do 5º ano precisam fazer até desenho das caixas e colocar ali 6, 6, 6, 6 em cada caixa, então depende de como cada criança está. Mas **de qualquer forma, isso faz parte do desenvolvimento algébrico,** embora a gente tenha que avançar, né? Mas aí não tem problema. Eu acho que quando a criança vai registrar 6 + 6 + 6 + 6 é igual a 24 você pode sugerir a ela: de que outra forma que você poderia registrar? (Amelie, 2023).
>
> Para mim **o tipo de resposta da Júlia é o tipo de resposta mais comum de ser encontrada pelos alunos**. Então, o que eu observo quando eu vou ensinar no 5º ano é que eu começo a introduzir com eles essa linguagem que o Pietro está utilizando que há algum tempo chama-se sentença matemática. (...) Então, eu me lembro de na graduação haver uma crítica muito forte a esse modo de ensinar por sentenças matemáticas porque ele foi usado muito cedo com as crianças, essa ideia do pensamento estruturalista. Mas, eu entendo que eu tenho que fazer essas atividades para eles começarem a entender o tal do número escondido e o tal do "pensei em um número dividi esse número por 4 e resultado foi 6, em que número eu pensei?", esse tipo de pergunta pode gerar respostas como a da Júlia, **mas para a gente fazer um pequeno avanço no terreno do pensamento algébrico e na apropriação da linguagem algébrica, a gente precisa de registros próximos desses como o Pietro fez.** (Hipátia, 2023)

Capturamos nas falas das professoras Amelie e Hipátia a mobilização de conhecimentos pedagógicos do conteúdo e dos estudantes (KCS) ligados ao desenvolvimento do pensamento algébrico e relacionados com a interpretação da resolução dada pelos alunos. Quando as professoras afirmam que é comum os alunos do 5º ano resolverem problemas como os da situação didática 3 por adição repetida, elas demonstram conhecer as especificidades que esse grupo de estudantes apresentam nesse ano escolar.

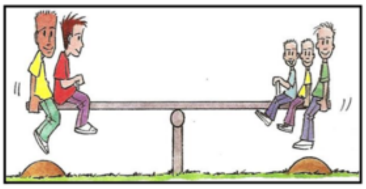
Além da sugestão de intervenção dada por Amelie, também nos chamou a atenção o fato de Hipátia defender a importância de desenvolver nos alunos a apropriação da linguagem algébrica se queremos “fazer um avanço no terreno do pensamento algébrico” (Hipátia, 2023). Portanto, identificamos nas falas das professoras mais uma vez uma importância dada à forma do registro pelos alunos quando o objetivo é o desenvolvimento do PA.

5.2.3 Conhecimento pedagógico sobre a equivalência

A situação didática 3 chamada “A Gangorra” foi apresentada às professoras como atividade potencial para explorar o objeto do conhecimento da BNCC (2017) denominado “propriedades da igualdade”, que está ligado à habilidade EF04MA15: determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais.

Figura 26 – Situação didática 3

Dois meninos, José e Maurício de 41kg e 39kg respectivamente, equilibram três irmãos em uma gangorra. Um dos irmãos de camisa verde pesa 33kg, o de camisa amarela pesa 28kg. Quanto pesa o irmão de camisa azul?



Fonte da imagem: Alexandre; Wagner, 2002.

Fonte: Atividade elaborada pela autora.

Identificamos nas falas de duas professoras conhecimentos do conteúdo e do currículo (KCC) mobilizados durante a discussão inicial dessa situação didática:

> [...] Muito legal! Aqui tem **uma equação** né, **uma equivalência**. Então, tinha uma atividade dessas na revista *Ciência Hoje*, que tinha muitos desafios e tem um que é de gatos e livros. Então, em uma balança tem um gato sentado e três livros e aí você tem que descobrir quanto o gato pesa ou quanto os livros pesam. As crianças amam esses desafios. Elas se sentem desafiadas; “poxa, eles têm o mesmo peso, como que pode?” e **elas têm estratégias pessoais de cálculo** e eu acho que um desafio legal é aquele que dá oportunidade da criança mostrar diferentes estratégias de cálculo mental (Kahterine, 2023).

> [...] Essa atividade é concreta mesmo. Além do **sistema de medidas de massa**, exige uma ideia de completar que pode ser resolvida por operação inversa somar 41 com 39 depois somar 43 com 28 e descobrir quanto falta para completar. Aqui, nesse caso, não induz tanto e o aluno terá que interpretar, e ela em si na concretude que ela remete da balança ela já **traz uma ideia de que pode ser explorada de igualdade**. Então, eu acho que ela tem mais concretude no sentido de que é uma experiência da criança, da vida dela, e concretude também no sentido de que diz sobre o equilíbrio ,que é uma ideia de igualdade. Então, **o pensamento algébrico aqui é uma muda que já pode ser semeada, pois dará uma arvore do pensamento algébrico** (Hipátia, 2023).

Katherine quando identifica o tema abordado na situação-problema, relacionando-o com uma equação sem que isso seja pedido ou mencionado no enunciado, revela um conhecimento do conteúdo e do currículo (KCC), que consegue perceber o tema da situação didática apenas pela proposta do problema e ainda faz associações às outras experiências que já teve com o mesmo tema quando cita a atividade da revista *Ciência Hoje*.[9]

Hipátia mobiliza conhecimento do conteúdo e do currículo (KCC), pois percebe conteúdos matemáticos sendo explorados na situação didática que não foram mencionados (sistema de medida de massa) e relaciona-o com outros temas como operação inversa, e a exploração da igualdade. A professora, ressalta a característica "concreta" da situação-problema como contexto potencial para o desenvolvimento da "semente" do pensamento algébrico no 5º ano.

Apresentamos às participantes duas respostas hipotéticas para a situação didática 5: a primeira em que o aluno 1 resolve o problema calculando o peso total de cada lado da igualdade separadamente, depois encontra a diferença entre cada lado; e a segunda, em que o aluno 2 representa a situação didática com uma equivalência entre os peso total de cada lado da gangorra.

Figura 27 – Resolução de dois alunos para a situação didática 3

Aluno 1	Aluno 2
41 + 39 = 80 33 + 28 = 61 80 – 61 = 19 O menino de camisa azul pesa 19kg.	41 + 39 = 33 + 28 + $\square$ 80 = 61 + $\square$ Que número eu posso adicionar a 61 para chegar à 80? 61 + 9 = 70 70 + 10 = 80 Para chegar à 80 eu somei 9 + 10 ao 61, portando o menino de camisa azul tem 19kg.

Fonte: Arquivo da pesquisa.

[9] *Ciência Hoje* é uma revista mensal de divulgação científica criada em 1982 pela Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência (SBPC).

Explorando essas duas resoluções, identificamos na fala de quatro participantes conhecimentos do conteúdo e do ensino (KCT) relacionados com o pensamento algébrico:

> **Os dois trabalharam com o número desconhecido** e fizeram com a igualdade nela. O primeiro fez 41, 80 e 33, 61; ele sabia que o de baixo teria que ter 80 também, né? Então tirou dos 80 61 faltando 19. Então, acho que está ok. Falta essa questão de socializar, né? Claro que é importante, né, socializar (Amelie, 2023).

> Eu acho que **o primeiro, ele usou estratégias mais do cálculo,** né? Assim, de perceber que somei os 2 meninos deu 80, somei os 2 que estão no outro lado deu 61, enquanto um lado tem mais do que o outro, né? E fez essa diferença. **O segundo, eu acho que usou mais essa questão da equivalência, né**? Ele voltou de um lado que estava de um lado da gangorra, né? Os quilos de um lado da gangorra e botou, tinha um outro com uma incógnita, né? E aí, a partir dessa incógnita ele chegou no número que estava faltando para poder esse sinal de igual, né, realmente mostrar uma equivalência. É? A meu ver os dois estão ok. Só **diferem foi pelo processo do pensamento algébrico;** um usou a da equivalência e o outro foi pelas estratégias de cálculo (Sophie, 2023).

> **O segundo, ele já consegue pensar que algumas contas podem ser iguais a outras contas.** E aí ele consegue pensar que esse último termo lá com interrogação é o faltante, e usar esse termo desconhecido já na igualdade. É a única coisa que **ele já avançou, em relação ao outro;** o outro também tem muitas coisas abstratas que conseguem fazer, só que o raciocínio algébrico do aluno um é todo mental. **Ele só não consegue ainda transcrever**, entende? (Laura, 2023).

> O segundo fez uma igualdade ali, olha ele fez uma incógnita. **O segundo está com o pensamento algébrico mais evoluído,** pois ele já conseguiu pegar **essa relação de igualdade, colocar em uma sentença**, colocar uma incógnita. (...) O primeiro, ele também já tem o pensamento algébrico bem evoluído, mas **ele não consegue descrever isso em uma sentença** (Maria Agnesi, 2023).

Todas as professoras concordam que ambos os alunos entenderam o problema e a equivalência contida na proposta de equilíbrio da gangorra, mas, de acordo com elas, apenas o aluno 2 demonstrou a utilização de um pensamento algébrico. Ao verificarem diferenças nas resoluções dos alunos comparando-os quanto ao desempenho no uso do pensamento algébrico, essas professoras mobilizaram o conhecimento do conteúdo e do ensino (KCT) e conhecimento do conteúdo e dos estudantes (KCS), elementos necessários para avaliar o desempenho dos alunos, analisando origem de acertos e possíveis erros que englobam o raciocínio usado.

Amelie, ressalta a importância de socializar as respostas diferentes que são encontradas pelos estudantes. Concordamos com ela, pois conhecer outra maneira de resolver um mesmo problema amplia o repertório de estratégias que aquele estudante dispõe e também favorece o desenvolvimento do pensamento algébrico, já que os estudantes precisarão comparar as estruturas de cada forma de resolução buscando a compatibilidade ou diferenças entre cada uma, aprofundando, assim, os conhecimentos que detêm sobre a operação usada ou os números envolvidos.

Laura explica que na resolução do aluno 2, ele demonstra entender que é possível a equivalência na adição de números diferentes em cada lado da igualdade e ainda identifica que para a equivalência acontecer um termo desconhecido precisa ser adicionado em um dos lados da igualdade. O aluno 2, segundo a professora, conseguiu representar o pensamento algébrico que utilizou para resolver a situação-problema com elementos que descrevem a equivalência, mas o aluno 1 não.

Maria Agnesi, reforça que percebe a manifestação do uso do pensamento algébrico pelo aluno 2 quando ele coloca a relação de igualdade em uma sentença e considera a incógnita. Para essa professora, a forma da resolução é importante para a detecção de uso do pensamento algébrico pelos alunos.

Separamos nos trechos a seguir a fala de algumas professoras que consideraram as resoluções dos alunos, e visando ao avanço do aluno 1 para a elaboração de uma representação do problema que descreva uma equivalência entre o peso dos meninos que estão de cada lado da balança, sugeriram algumas intervenções pedagógicas:

> Eu poderia propor, né? **Será que a gente consegue escrever todos esses passos aí que você usou numa única sentença**, mas de que forma que a gente poderia escrever? Mas eu acho que seria uma coisa assim **feita coletivamente**, eu poderia de repente propor, mas já que ele não teve a iniciativa de fazer dessa forma, não teria garantia de que ele conseguiria. Então, de repente eu poderia propor, caso ele não conseguisse fazer de uma forma mais coletiva, para que outros alunos participassem ali dessa construção (Laura, 2023).

> A questão seria, socializar, comparar, comentar, o que que tem aqui de igual o que tem de diferente, ou seja, **fazer uma análise**, ver se eles conseguem observar, senão **eu vou mediando** de forma fazendo intervenção para que o aluno 1 perceba como ele poderia ter feito. Porque o registro é isso, é você observar e **da próxima vez você vai poder usar aquilo que você aprendeu**, observou, em uma outra situação de problematização (Katherine, 2023).

> Eu acho que quando o aluno começa atingir esse **nível de formalização**, isso de saber **comparar uma situação que eles já se apropriaram com uma nova situação** que algum colega já está se apropriando porque lá na frente, lá na álgebra o que vai ser feito é a terceira linha do aluno 1. Vai pôr um x ali e vai colocar $x = 80 + 61$. Então, essas duas formas de resolução elas conversam uma com a outra e **eu acho importante começar a dar consciência para os estudantes sobre essa conversa**, vendo o que é semelhante e o que é que diferente. Mas é complexo... tá? Isso aqui pro 5 ano é complexo. **É, na verdade, o nosso objeto de trabalho** (Hipátia, 2023).

Verificamos, mais uma vez, a mobilização de conhecimentos do conteúdo e do ensino (KCT) para a elaboração de intervenções adequadas à turma de 5º ano (socialização, construção coletiva, análise, mediação da professora, comparação de estratégias) que, por sua vez, contribuem para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Laura e Katherine acreditam na socialização das diferentes estratégias de resolução com a turma, para a construção coletiva da compreensão de que o problema pedia uma relação de equivalência entre o peso dos meninos em cada lado da gangorra e que por isso era importante que a resolução dos alunos expressasse essa equivalência. A mediação aqui proposta pelas professoras está ligada à condução dos estudantes à socialização e posteriormente às intervenções individuais com os alunos que não conseguissem construir coletivamente.

Hipátia percebe que essa socialização das estratégias que desencadeia um processo de comparação das formas de resolução requer a atenção docente ao nível de formalização que está sendo pedido aos estudantes. De fato, a condução pedagógica para uma tomada de consciência pelos alunos sobre o que é semelhante e o que é diferente em cada estratégia utilizada, é algo em que as professoras devem se debruçar quando o objetivo é o desenvolvimento do pensamento algébrico, mesmo que isso seja, nas palavras de Hipátia, complexo para o 5º ano.

Canavarro (2007) explica, conforme foi citado pelas professoras, que o professor no papel de mediador desse processo de desenvolvimento do pensamento algébrico precisa estar atento à construção de um ambiente que ofereça aos alunos oportunidade de trabalhar autonomamente sobre a atividade que lhes é proposta. Mais que a professora deve preocupar-se com a construção de um ambiente onde o grupo (alunos e professores) se identifiquem como uma comunidade que constrói conhecimento matemático, discutindo, refletindo e argumentando.

5.3 **A concepção das professoras sobre o pensamento algébrico**

Embora, nosso objetivo seja a identificação dos Conhecimentos Pedagógicos do Conteúdo, entendemos, a partir de Ball, Thames e Phelps (2008), a importância da articulação entre o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico para plenitude do ensino de matemática e, portanto, a partir da análise das entrevistas, observamos a recorrência de concepções relacionadas com a linguagem matemática e a percepção de padrões com a criação de conjecturas a partir da discussão coletiva.

Das oito professoras participantes da pesquisa, verificamos que duas demonstraram em suas falas uma concepção sobre o pensamento algébrico ligada à linguagem matemática, e cinco participantes demonstraram entender o pensamento algébrico como a percepção de padrões e regularidades, salientando a importância da discussão coletiva para a generalização, e apenas um participante demonstrou entender o pensamento algébrico como uma questão filosófica.

A seguir, exploraremos cada uma das concepções sobre o pensamento algébrico manifestadas na pesquisa com as professoras. Começando por aquelas que relacionaram o pensamento algébrico com a linguagem matemática.

5.3.1 Pensamento algébrico como linguagem matemática

Para as professoras Maryam e Maria Agnesi, desenvolver o pensamento algébrico dos alunos é sinônimo de desenvolver a linguagem matemática como podemos ler a seguir:

> [...] O pensamento algébrico para mim é isso, **fazer a criança a descrever na linguagem matemática as situações** envolvendo a adição, subtração, multiplica e divisão (Maryam, 2023).
>
> [...] O pensamento algébrico é você conseguir pensar matematicamente**, dentro de uma linguagem matemática**. É conseguir mostrar a partir da língua portuguesa para uma linguagem matemática (Maria Agnesi, 2023).

Percebemos a partir dos trechos aanteriores que há resquícios da Educação Algébrica descritas por Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) nas falas das professoras, porque elas disseram "descrever na linguagem matemática" e "a partir da língua portuguesa para uma linguagem matemática". Parece-nos que essa ênfase dada à linguagem pode ser didaticamente negativa para o processo de desenvolvimento do PA, pois pode gerar a "redução do pensamento algébrico à linguagem algébrica" (Fiorentini; Miguel; Miorim, 1993, p. 85).

As duas professoras demonstraram uma aproximação maior com a concepção "*linguística-estilística"* (Fiorentini; Miguel; Miorim, 1993, p. 82) que "encara a Álgebra como uma linguagem, isto é, como uma linguagem específica, artificialmente criada com o propósito de expressar concisamente procedimentos específicos" do que com as grandes ideias promovidas por Blanton *et al*. (2015).

Retomando a participação de Maryam nas discussões sobre as situações didáticas, identificamos pouca mobilização de conhecimentos pedagógicos relacionados com o conteúdo e o currículo (KCC) e o conteúdo e s estudantes (KCS) nas três ideias enfatizadas: aritmética generalizada, pensamento funcional e equivalência. Identificamos apenas a mobilização de conhecimento do conteúdo e do ensino (KCT) no diálogo sobre a atividade “Turminha faltosa” que tratava de uma situação investigativa aberta com foco na aritmética generalizada.

Na participação da professora Maria Agnesi também não identificamos conhecimento do conteúdo e do currículo (KCC) relacionados com as três ideias: aritmética generalizada, pensamento funcional ou equivalência. Relacionado com a primeira ideia identificamos apenas conhecimento do conteúdo de ensino (KCT), com a segunda somente conhecimento do conteúdo e dos estudantes (KCS) e com a terceira conhecimentos do conteúdo e do ensino (KCT) e do conteúdo e do estudante (KCS).

Acreditamos que a concepção de pensamento algébrico que essas duas professoras detêm possa estar relacionada com a mobilização de conhecimentos pedagógicos para o desenvolvimento do PA. Para a discussão sobre a concepção adotada por elas, apresentamos a fala da professora participante Hipátia, que ressaltou a linguagem matemática no processo de desenvolvimento do pensamento algébrico durante a entrevista, mas com uma compreensão diferente, chamando a atenção para a intencionalidade do uso da linguagem matemática, da exploração dos símbolos e seus sentidos:

> [...] A sala de aula é um evento discursivo. Mas o que eu quero chamar a atenção é para **a intencionalidade do uso da linguagem**. Essa transição entre essa linguagem que eu posso fazer por meio de desenhos, uma outra hora eu estou fazendo a continha armada, outra hora por esqueminha de resolução, outra hora eu faço mentalmente só *boto* a resposta, essa transição que **eu preciso fazer para a compreensão dessa linguagem álgebra** que precisa ser escrita na horizontal, que tem que respeitar a igualdade, **que o igual não expressa só o resultado da operação, mas um equilíbrio**, também precisa ser um objeto do conhecimento. **A linguagem se torna um objeto de conhecimento**, algo sobre o qual **a gente precisa refletir** (Hipátia, 2023).

As contrários de Maryam e Maria Agnesi, Hipátia identifica e incentiva diferentes estratégias de resolução utilizadas por estudantes do 5º ano (desenhos, continha armada, esqueminha de resolução, cálculo mental); ela também menciona que o símbolo de igual não é para expressar somente o resultado da operação. Isso denota o conhecimento do conteúdo e do ensino (KCT) e conhecimento do conteúdo e dos estudantes (KCS).

Além disso, quando Hipátia menciona a importância de a professora tratar a transição dessas representações para a linguagem algébrica, ela considera o sentido da linguagem e dos símbolos que a compõe e, portanto, demonstra o conhecimento do conteúdo e currículo (KCC).

Com relação ao sinal de igual e outros símbolos, Hipátia parece preocupar-se com o sentido dos símbolos e, de fato, concordamos com ela, pois após o 5º ano os estudantes aprofundarão os conceitos matemáticos aprendidos nos Anos Finais do Ensino Fundamental explorando com maior recorrência o uso linguagem algébrica. Muitas dificuldades enfrentadas por esses alunos nessa fase escolar ocorrem em virtude do uso mecânico dos símbolos matemáticos sem compreender seus sentidos, como no caso do sinal de igual, por isso ressaltamos a fala da professora, que afirma que "a linguagem se torna um objeto de conhecimento, algo sobre o qual a gente (professora e alunos) precisa refletir*"*.

A Maria Agnesi havia afirmado no questionário da pesquisa que um dos recursos mais utilizados por ela para o desenvolvido do PA no 5º ano eram situações-problema, embora em sua atividade apresentada na entrevista ela não abordou as situações-problema, e sim trabalhou com o conteúdo frações. Segundo ela, seu objetivo era a construção do conceito de fração equivalente:

> [...] a atividade que eu trouxe tem como objetivo, na verdade, **a construção do conceito de fração equivalente**. E aí, a gente começou com essas representações na reta numérica e depois vêm as perguntas baseadas primeiro na questão visual, no que é a equivalência na visão deles e então eles vêm fazendo a construção dessa quantidade.(...) Depois, vou trazendo várias perguntas pedindo justificativas onde **as crianças precisam explicar por que**, acho que **aí a gente consegue ver o pensamento matemático** deles, né, as **hipóteses,** né, tudo isso, para que **no final a gente chegue numa generalização do conceito das frações equivalentes** (Maria Agnesi, 2023).

Maria Agnesi explica que quando as crianças justificam suas respostas é possível "ver" o pensamento matemático delas, as hipóteses (quando ela solicita que expliquem o porquê). Parece que ela abre espaço para que as crianças conjecturem, construam definições do que seja fração equivalente, incentivando a elaboração de hipóteses pela argumentação oral e escrita das crianças visando uma generalização, ações essas que são importantes para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Contudo, ao longo da entrevista, Maria Agnesi demonstrou uma associação mais forte do pensamento algébrico com a linguagem matemática ou com a transformação da linguagem portuguesa para a matemática:

> [...] **Todo problema** ele vai ter que usar o pensamento algébrico, não tem problema que ele (o aluno) não vai resolver sem isso, pois é justamente a partir do problema que ele **vai ter que pensar matematicamente**, então ele vai ter que **pegar essa linguagem da língua portuguesa e transformar em linguagem matemática** para ele resolver (Maria Agnesi, 2023).

A professora parece associar o processo de resolução de problemas matemáticos ao desenvolvimento do pensamento algébrico, pois, segundo ela, nesse processo o estudante terá que "pensar matematicamente" e realizar uma espécie de tradução da língua materna para uma linguagem matemática. Dialogamos com Cândido (2001) para compreender a fala da professora sobre a passagem da língua portuguesa para uma linguagem matemática e concordamos que a língua materna está presente na matemática nos enunciados dos problemas, na oralidade que envolve a resolução da situação-problema pelo aluno e nas intervenções que a professora faz.

Cândido (2001) ressalta que é importante oferecer aos alunos oportunidades de utilização da língua materna para descrever situações matemáticas, como a produção de relatórios, poemas, painéis. Contudo, com relação ao desenvolvimento do pensamento algébrico, é preciso compreender que seu foco não está na síntese escrita em linguagem matemática, mas no processo de generalização que ela envolve.

Mais adiante, a professora Maria Agnesi afirma:

> [...] Eu acho que qualquer problema faz isso, seja porque você transforma aquilo numa sentença, que aí você está **usando uma linguagem matemática, seja porque você está criando uma hipótese** (Maria Agnesi, 2023).

Nessa fala, a professora explica que, em sua opinião, qualquer problema matemático pode desenvolver o pensamento algébrico, pois é a partir deles que o aluno vai usar uma linguagem matemática ou criar hipóteses. Notamos que nas falas dessa professora sobre o pensamento algébrico sempre há a menção à linguagem matemática, embora ela mencione também a criação de hipóteses.

Concordamos que as situações-problema são, sim, bons contextos para o trabalho, como as ideias da *Early Algebra;* todavia, é preciso para isso estabelecer relações, criar conjecturas, buscar a generalização. Isso não foi aprofundado pela professora (Maria Agnesi) durante a entrevista.

A professora Maryam também ressaltou em sua participação o uso de situações-problema para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Observamos a menção ao trabalho com as quatro operações aritméticas, o que podemos dizer que condiz com o recurso que ela afirmou utilizar para desenvolver o pensamento algébrico de seus alunos no questionário *online* e com a atividade que ela apresentou na entrevista. Na fala destacada a seguir, notamos que Maryam acredita no uso das situações-problema para o desenvolvimento do pensamento algébrico:

> [...] Assim eu entendo como pensando algébrico **você desenvolver essa linguagem matemática nas crianças com situações-problema** de adição, subtração, divisão e multiplicação, então não consigo entender como algo novo. É, na verdade, **essa linguagem específica da matemática** envolvendo essas quatro operações (Maryam, 2023).

De fato, utilizar situações-problema para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes pode consistir em um rico contexto para a exploração das ideias ligadas à aritmética generalizada e ao pensamento funcional (Blanton *et al*. 2015), embora a professora não tenha deixado claro na entrevista se desenvolve a atividade com os seus alunos explorando as relações entre as grandezas envolvidas nas situações-problema e as propriedades aritméticas potenciais para a construção de generalizações.

Para a discussão sobre o trabalho com as situações-problema, trazemos a fala da professora Amelie, que explicou como realiza e aprofunda a proposta para a percepção de relações entre as operações, como podemos ver em sua fala:

> [...] Bom, eu acho que a criança precisa é **estabelecer relações entre as operações.** Por exemplo, eu trabalho dentro da linha de Gerard Vergnaud, dentro do campo multiplicativo e o campo aditivo. Você trabalhava antigamente só adição, depois só subtração, até os problemas você já sabia que era só problema de adição, ou que era só problema de subtração, ou que é só de multiplicação, ou que era só de divisão. Quando você trabalha dentro desse campo que o Gerard Vergnaud traz para a gente, fica muito interessante porque, por exemplo, **você desloca as incógnitas** (Amelie, 2023).

O “deslocar” das incógnitas citado por Amelie refere-se, no caso do campo conceitual aditivo (Vergnaud, 1996), as ideias que compõem a classe de transformação de medidas. Segundo Magina *et al.* (2008), os problemas do tipo transformação apresentam três níveis diferentes de complexidade: problemas de transformação com o estado final desconhecido são denominados protótipos; problemas de transformação com a transformação desconhecida são considerados de 1ª extensão; e problemas de transformação com o estado inicial desconhecido são considerados de 4ª extensão.

Entendemos a partir de Blanton *et al.* (2015) que esse tipo de trabalho citado por Amelie que visa estabelecer relações entre as operações dentro do campo aditivo ou campo multiplicativo promove o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio da aritmética generalizada.

Ao nosso ver, a própria atividade apresentada pela professora Maryam (Figura 28) na entrevista poderia ser explorada com esses objetivos; porém, de acordo com a professora, foram utilizadas buscando a representação dos resultados obtidos nas situações-problema do campo multiplicativo por meio da linguagem matemática.

Figura 28 – Atividade apresentada pela professora Maryam

Multiplicação e divisão – Operações inversas

1- Tenho sete bandejas de iogurte. Há 12 iogurtes em cada bandeja. Quantos iogurtes eu tenho?

Fonte: Arquivo das autoras.

Observe, a seguir, um trecho da entrevista em que a professora explica o objetivo da atividade e a relação que ela nos disse com o desenvolvimento do pensamento algébrico:

> Pesquisadora: Qual era o objetivo da sua atividade e como ela pode contribuir com desenvolvimento do pensamento algébrico?
> Maryam: Nessa atividade o meu objetivo era **compreender e representar a sentença** que representa o problema. Os alunos deveriam representar com um desenho como ele entendeu o problema e depois **escrever uma sentença** que represente aquela situação. Por exemplo: Que sentença matemática descreve esse problema?
> Pesquisadora: Ah, sim. Nesse caso, qual seria uma resposta satisfatória para a sua atividade, de modo que você perceba que o aluno alcançou o seu objetivo?
> Maryam: Ele vai **criar as estratégias próprias para resolver** e depois teria que passar a sua resolução para uma sentença do tipo $7 \times 12 = 84$.

Verificamos que a professora não aprofundou a discussão da atividade em sala de aula buscando o trabalho com a aritmética generalizada ou o pensamento funcional, embora a situação-problema apresentada por ela, por ser do campo conceitual multiplicativo, de acordo com Magina e Porto (2018), poderia ter sido utilizada para o desenvolvimento do pensamento funcional se houvesse a discussão, por exemplo, sobre a relação entre a quantidade de bandejas e a quantidade de iogurtes em cada uma, fosse ampliada para a construção de uma tabela.

5.3.2 Pensamento algébrico como uma questão filosófica

Verificamos que a professora Emmy teve uma participação menor que as outras professoras na discussão das situações didáticas durante a entrevista. Acreditamos que esse desempenho possa estar relacionado com a compreensão que Emmy detém sobre o PA:

> Então, eu estou mais voltado para cálculos matemáticos do que para esse pensamento algébrico, que até é filosófico, né? **Uma questão cognitiva**, de matemática, de pensar, né? Então, mas eu não me importo, a gente está conversando, eu posso dar uma pensada, mas não é o foco da minha atividade (Emmy, 2023).

Para Emmy, o pensamento algébrico aproxima-se de uma questão filosófica que também é citada por Oliveira e Paulo (2021) ao proporem uma reflexão sobre o *pensar*. De fato, é possível estabelecermos uma reflexão filosófica e até psicológica sobre o desenvolvimento desse “pensar algébrico”. Mas, para isso, não podemos deixar de considerar os objetos matemáticos sobre os quais essa ação se debruça.

Pontuamos uma participação hesitante da professora Emmy durante a pesquisa que não possibilitou a identificação de conhecimentos pedagógicos voltados para o desenvolvimento do PA. Não excluímos, contudo, a mobilização de outros conhecimentos pedagógicos da professora, como o conhecimento do conteúdo e do currículo (KCC) para a elaboração de projetos interdisciplinares (Matemática e Geografia) no 5º ano:

> No quinto ano a gente vai trabalhar muito com **desafios matemáticos**. Por exemplo, **números do cotidiano**, os chamados números grandes, sequências de milhão de milhão. Agora, a gente está trabalhando por dentro de uns **projetos sobre os direitos da criança**, desde o nascimento, dos direitos da criança na Constituição francesa, a Constituição brasileira. E aí nós fazemos **uma conexão** bacana, a gente está comentando com as crianças, a partir de um mapa que está na sala, sobre direito ao brincar, direito a água potável, direito a educação. Se a escola realmente, por exemplo, São Gonçalo, na lista, né de direitos? É um município que sofre, né? Tem alta demanda de população e não tem acesso a serviço público, né? Faltam áreas de lazer à saúde, também é uma área deficitária, então a gente trabalha nesse sentido, **olhando para o mapa e para a proposta, trabalhando com os números do cotidiano** (Emmy, 2023).

Não identificamos na participação da professora mobilização de subdomínios do PCK voltados para o desenvolvimento do pensamento algébrico, embora ela tenha apresentado exemplos de práticas pedagógicas voltadas para outros temas, como interdisciplinaridade entre Matemática e Geografia, trabalho com números do cotidiano e desafios matemáticos a partir do tema transversal direitos da criança.

Como a concepção que a professora apresentou pareceu-nos isolada das demais concepções identificadas na análise da fala das outras participantes, não condicionamos o pensamento algébrico como uma questão filosófica a uma categoria de análise. Mas a apresentamos aqui, pois consideramos importante a discussão sobre o seu ponto de vista para a interpretação dos dados da pesquisa.

Oliveira e Paulo (2021) explicam que a álgebra é uma linguagem que comunica o pensado sobre os objetos matemáticos e simultaneamente dá abertura ao pensar, retomando as características dos mesmos objetos. Logo, ao ato de pensar ao qual implica o pensamento algébrico, interessam as possibilidades, o modo de o sujeito atribuir significado e expressar o que para ele fez sentido ao lançar-se à compreensão dos objetos matemáticos relacionados com a generalização.

Ressaltamos que, possivelmente, a concepção do pensamento algébrico como uma questão filosófica sem a reflexão sobre os objetos matemáticos com os quais esse pensar está envolvido pode ter influenciado a mobilização do PCK por Emmy durante a pesquisa.

5.3.3 Pensamento algébrico como a percepção de padrões

Identificamos nas falas de 5 professoras a recorrência de termos que indicam um conhecimento sobre pensamento algébrico voltado para a percepção de padrões. Laura, Amelie e Sophie citam a percepção de regularidades para o desenvolvimento do pensamento algébrico:

> [...] Eu acredito que o pensamento hoje está ligado com essa questão da observação de padrões, de regularidades. E aí o fato da turma ser sempre dividida no mesmo número de grupos e o número de alunos que sobram são sempre diferentes, mas tem ali uma sequência, né? Primeiro o zero, e depois 1, depois 2, depois 3, depois 4. E eu acho que isso possibilita ao menos fazer ali uma relação, né? Entre esses grupos, que são formados e essa quantidade de alunos que sobram para poder descobrir o resultado (Laura, 2023).

> [...] Como a gente já trabalha desde o primeiro ano, a gente vai discutindo com eles, e eles vão percebendo regularidades também. Então, essas regularidades com diferenças, tudo isso envolve esse pensamento algébrico, né? E eu acho importante no desenvolvimento do conhecimento algébrico é o cálculo mental. Então, a gente trabalha com cálculo mental desde o primeiro ano. Então, lá no primeiro ano a gente está trabalhando em questão do sistema numérico decimal. As crianças estão se apropriando desse sistema e desenvolvendo o pensamento algébrico (Amelie, 2023).

> [...] A Álgebra já era contemplada antes com os PCN. Ela era contemplada, mas reagrupada em outros modos. As pessoas acabam se equivocando achando que a Álgebra passou a ser tratada só na BNCC. Antes da BNCC a gente usava os PCN como documento que conduziam as organizações. E a gente já usava a Álgebra lá, só que ela era incluída em outro subgrupo. Então, tinha um pouco de Álgebra dentro do sistema de numeração que eram os números e as operações. Tinha um pouco de Álgebra também dentro de operações, dependendo do que você for usar na

> Geometria, sabe? A gente observa regularidades ali, só que agora é separadinho e alguns professores se assustam muito “vou ter que ensinar letra para crianças”, mas já estava antes. Mas, quando a gente vai conversando com as pessoas (os professores), elas percebem que já faziam (Sophie, 2023).

> Porque na verdade eu usei mais os PCN do que a BNCC. Agora, a BNCC eu ainda conheço pouco. Sei que tem um monte de críticas, então eu realmente só li algumas partes. Mas tem um autor chamado van de Walle, mas foi tão legal esse texto, porque ele diz que essa coisa do pensamento algébrico permeia toda a Matemática e é essencial para a vida cotidiana, então você percebe que quando você identifica padrão, regularidade, então naquela atividade do tabuleiro das centenas quando a criança identifica regularidades, do tipo o que muda na coluna? A criança está exercitando o pensamento algébrico (Katherine, 2023).

A mobilização de conhecimentos do conteúdo e do currículo (KCC) pelas professoras mostra que elas são capazes de relacionar o pensamento algébrico com diferentes procedimentos e conteúdo matemáticos que, até então, não foram citados durante a entrevista; são concepções que elas já carregavam sobre o PA.

Laura explica que entende o pensamento algébrico como a percepção de padrões e regularidades em uma sequência. Amelie e Sophie também entendem o pensamento algébrico dessa forma, e percebem a presença de regularidades no sistema de numeração decimal e em outras áreas da Matemática que, desde os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) já vêm sendo abordadas. Katherine, explica que ainda não conhece muito a BNCC (2017), mas que usa mais o PCN (1997). Ela conta a partir de um texto do autor van de Walle ela entende o pensamento algébrico como a identificação de padrões e regularidades. Esses dados revelam que essas professoras já conheciam a proposta de desenvolvimento do pensamento algébrico antes da BNCC (2017).

Hipátia e Katherine tecem reflexões importantes sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais, mobilizando conhecimentos do conteúdo e do currículo (KCC) para diferenciar a proposta que está ligada à *Early Algebra* do ensino de Álgebra em outros níveis de ensino.

> **A matemática** é uma ciência historicamente construída, ela **está em movimento**. Essa atividade **seria uma atividade de pré-álgebra** se assim podemos dizer. Mas não sei se esse termo está certo, **pois afinal, existe pré-matemática**? A criança quando está aprendendo as primeiras noções de números isso já não é matemática? Então, assim **eu não vejo como uma pré-álgebra**, mas como uma construção que começa nessa **percepção da linguagem matemática a partir de investigações**, para **perceber depois as propriedades e construir generalizações** (Hipátia, 2023).

> Eu acho que, assim, o pensamento algébrico na criança pequena não é uma **preparação para a álgebra** lá de cima, não é isso. Porque a álgebra para os pequenos é você observar semelhanças, chegar a generalizações. Entende? É fazer, como é que se diz... a partir de problematizações. (Katherine, 2023)

Mesmo em contextos diferentes, as falas dessas professoras têm elementos em comum que remetem à percepção de padrões ou regularidades para a generalização. Dessa forma, verificamos nas falas dessas professoras uma aproximação com os estudos da *Early Algebra* evidenciados no referencial desta pesquisa e manifestações do PCK.

De fato, retomando a discussão das situações didáticas, em que buscamos identificar os subdomínios do PCK na participação das professoras, vemos que as cinco professoras, Laura, Amelie, Sophie, Hipátia e Katherine, mobilizaram uma gama de conhecimentos pedagógicos para o desenvolvimento do pensamento algébrico em todas as três ideias da *Early Algebra* aqui enfatizadas. Como podemos observar na tabela a seguir.

Tabela 2 – Conhecimentos pedagógicos identificados na pesquisa

Nome	**PCK sobre aritmética generalizada**			**PCK sobre pensamento funcional**			**PCK sobre equivalência**		
	KCC	**KCT**	**KCS**	**KCC**	**KCT**	**KCS**	**KCC**	**KCT**	**KCS**
Maria Agnesi		x				x		x	x
Maryam		x							
Hipátia	x	x	x		x	x	x	x	
Laura	x	x			x	x	x	x	x
Emmy									
Sophie	x	x	x	x	x	x		x	x
Amelie	x	x				x		x	x
Katherine	x	x				x	x	x	
Total	5	7	2	1	3	6	3	6	4

Fonte: Elaborado pela autora.

Observando a sistematização da Tabela 2, vemos que, com relação à aritmética generalizada, Hipátia e Amelie mobilizaram todos os subdomínios do PCK; e Laura, Amelie e Katherine, conhecimentos do conteúdo e do currículo (KCC) e do conteúdo e do ensino (KCT).

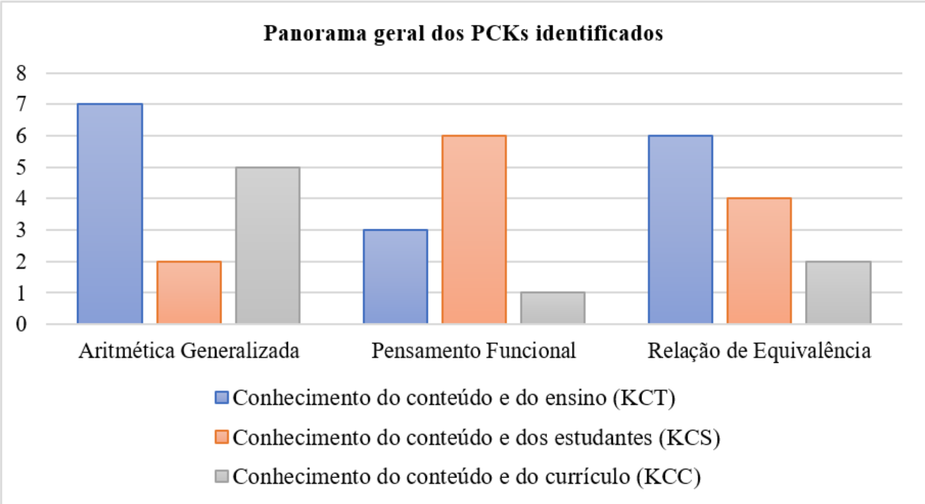
Sobre o pensamento funcional, Sophie mobilizou todos os subdomínios do PCK; Hipátia e Laura mobilizaram conhecimentos do conteúdo e do ensino (KCT) e do conteúdo e dos estudantes (KCS); e Amelie e Katherine conhecimentos do conteúdo e dos estudantes (KCS).

Por fim, com relação à equivalência, Laura mobilizou os três subdomínios do PCK; Hipátia e Katherine mobilizaram conhecimentos do conteúdo e do currículo (KCC) e do conteúdo e do ensino (KCT); e Amelie e Sophie mobilizaram conhecimentos do conteúdo e do ensino (KCT) e do conteúdo e dos estudantes (KCS).

5.4 **Síntese das análises realizadas**

Ao final do processo de análise das duas partes da entrevista, encontramos um grande volume de conhecimentos pedagógicos identificados nas falas das professoras participantes. Um enfoque nos subdomínios do PCK identificados dentro de cada ideia da *Early Algebra* nos mostra quais conhecimentos pedagógicos foram mais mobilizados por elas ao longo de toda a entrevista. No Gráfico 1 observamos a visão geral dos conhecimentos pedagógicos identificados.

Gráfico 1 – Panorama geral dos conhecimentos pedagógicos mobilizados



Fonte: Elaborado pela autora.

A ideia em que observamos maior mobilização de conhecimentos pedagógicos pelas professoras foi a aritmética generalizada. Dos 14 PCKs identificados na discussão sobre essa ideia, sete são de conhecimento do conteúdo e do ensino (KCT), cinco são de conhecimento do conteúdo e do currículo (KCC) e dois de conhecimento do conteúdo e dos estudantes (KCS). No trabalho com essa ideia, as professoras demonstraram ter mais conhecimento sobre o processo de ensino (KCT) e pouco sobre a forma como os estudantes desenvolvem-se lidando com a aritmética generalizada (KCS).

No que se refere ao pensamento funcional, identificamos o total de 10 PCKs mobilizados pelas professoras: seis de conhecimento do conteúdo e dos estudantes (KCS), três de conhecimento do conteúdo e do ensino (KCT) e um de conhecimento do conteúdo e do currículo (KCC). As professoras demonstraram maior conhecimento sobre o conteúdo e os estudantes (KCS) ou seja, conhecem suas formas de resolução dos problemas e fazem previsão de estratégias que podem ser utilizadas por eles. O que as professoras menos conhecem é sobre conteúdo e currículo (KCC) para o desenvolvimento do pensamento funcional.

O total de 13 PCKs foram mobilizados na discussão com as professoras sobre a relação de equivalência, e isso envolve o trabalho com o sinal de igual para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Nessa abordagem, também identificamos conhecimentos do conteúdo e do ensino (6), do conteúdo e dos estudantes (4) e do conteúdo e do currículo (3). A mobilização de conhecimentos pelas professoras descreve que elas conhecem mais sobre as formas de ensinar e desenvolver o pensamento algébrico a partir dessa ideia (KCT), menos sobre como os estudantes desenvolvem-se nesse processo (KCS) e pouco sobre a relação entre o conteúdo e currículo (KCC).

Ademais, no próximo capítulo apresentaremos algumas considerações estabelecidas a partir da análise realizada na pesquisa, respondendo para isso a questão norteadora e refletindo sobre os novos caminhos que se abrem após os resultados encontrados.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa buscou responder à seguinte questão norteadora: *O que as professoras do 5º ano nos mostram do seu conhecimento pedagógico do conteúdo para desenvolverem o pensamento algébrico de seus alunos?*

Nessa busca, o nosso objetivo foi compreender os conhecimentos pedagógicos que professoras do 5º ano mobilizam para desenvolver o pensamento algébrico de seus alunos.

Para isso, além do referencial teórico adotado como embasamento desta pesquisa, durante o processo de análise dialogamos, em especial, com autores como Ball, Thames e Phelps (2008), que nos auxiliaram na compreensão do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK) e seus subdomínios identificados nas falas das professoras à medida que foram mobilizados durante as discussões sobre as atividades e situações didáticas propostas.

Os estudos de autores dedicados à *Early Algebra* também foram utilizados a fim de especificar os conhecimentos pedagógicos e as concepções das professoras relacionadas com o pensamento algébrico. Tomamos como base três das grandes ideias elencadas por Blanton *et al*. (2015) – a aritmética generalizada, o pensamento funcional e a equivalência, além dos estudos de Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) e das pesquisas realizadas com estudantes por Canavarro (2007), Schiliemann, Carraher e Brizuela (2013), Magina *et al*. (2008) e Magina e Porto (2018).

Em virtude da especificidade dos dados encontrados, fez-se necessário o diálogo ainda com outros autores não previstos na composição do referencial teórico da pesquisa, como Vergnaud (1983; 1996; 2009) Gitirana *et al*. (2014), Lima *et al*. (2016) e Rodrigues (2021), para explicar as situações que envolveram problemas do campo conceitual aditivo e a manifestação do pensamento funcional em problemas do campo conceitual multiplicativo.

Dialogamos, também, com Candido (2001), para explicar a implicação que a linguagem materna influi sobre o ensino e aprendizagem de Matemática e, consequentemente, sobre o pensamento algébrico. E, por fim, apoiamo-noss na abordagem que Oliveira e Paulo (2021) dão ao pensamento algébrico, procurando compreender a visão filosófica que esse tema pode assumir se nos debruçarmos sobre o que é o *pensar*.

Utilizamos nessa pesquisa dois instrumentos metodológicos: um questionário *online*, para traçar o perfil das participantes, e uma entrevista semiestruturada, a fim de criar um contexto propício para a mobilização de conhecimentos pedagógicos relacionados com o desenvolvimento do pensamento algébrico. Ambos os instrumentos atenderam à nossa proposta; contudo, apresentam limitações.

Com relação aos dados obtidos no questionário *online*, por meio deles foi possível delinear o perfil formativo e de experiência docente das participantes, além de informações iniciais sobre a sua prática relacionada com o desenvolvimento do pensamento algébrico. Contudo, esse instrumento obstaculiza a interação verbal imediata entre as partes. Isso acarretou que, posteriormente ao envio do formulário, a autora procurasse alguns participantes para esclarecer respostas referentes, por exemplo, à carga horária do curso de formação continuada em Matemática.

A partir da entrevista semiestruturada discutimos atividades que foram apresentadas pelas professoras e três situações didáticas com foco nas habilidades EF04MA12, EF04MA13 e EF04MA15 presentes na unidade Álgebra da Base Nacional Comum Curricular (2017). A escolha por esse instrumento foi positiva, pois a abordagem dialógica que ele proporciona possibilitou um ambiente de liberdade e espontaneidade aos participantes que, consequentemente, compartilharam conhecimentos que certamente enriqueceram a investigação.

Os resultados apontam para a existência de uma gama de conhecimentos pedagógicos relacionados com o desenvolvimento do pensamento algébrico ainda pouco discutida nos estudos sobre o tema. Dizemos isso porque pesquisas que tomam como foco a professora dos Anos Iniciais e o desenvolvimento do pensamento algébrico costumam deter-se à análise dos conhecimentos matemáticos para o ensino e pouco se aprofundam nos conhecimentos pedagógicos relacionados com esse processo.

Como exemplo, citamos a pesquisa de Ferreira (2017) e Santos (2020), detectadas em nossa Revisão de Literatura. Esses autores investigaram, dentro do contexto de um curso de extensão, o conhecimento matemático para o ensino do pensamento algébrico nos Anos Iniciais e o desenvolvimento do pensamento teórico mediado por conceitos algébricos. Como resultados, Ferreira (2017) concluiu que os professores possuem um conhecimento mais voltado para o saber fazer em detrimento do conhecimento específico matemático do conteúdo a ser ensinado, e Santos (2020) explica que, após a formação, os professores manifestaram indício de superação do pensamento empírico sobre a álgebra.

De fato, os resultados de nossa pesquisa corroboram com as pesquisas de Ferreira (2017) e de Santos (2020) no sentido de também identificarmos em nossas análises a existência de conhecimentos ligados ao saber fazer e considerarmos que uma formação com foco no aprofundamento das ideias que envolvem o pensamento algébrico colaboraria com a superação de concepções equivocadas relacionadas ao PA.

Contudo, os resultados evidenciados em nossa pesquisa ampliam a compreensão sobre esse saber fazer, pois aprofunda as análises sobre o conhecimento pedagógico para o desenvolvimento do pensamento algébrico à medida que identificamos subdomínios do PCK relacionados com o conhecimento das professoras sobre conteúdo e o currículo (KCC), o conteúdo e o ensino (KCT), e o conteúdo e os estudantes (KCS).

A partir do diálogo com as professoras, da escuta sobre a sua prática e da discussão sobre a potencialidade de situações didáticas com vistas ao desenvolvimento do PA, tecemos algumas considerações sobre os resultados evidenciados nessa pesquisa.

Inicialmente, observamos que a utilização de situações-problema para o desenvolvimento do pensamento algébrico no 5º ano é um recurso mencionado por sete das oito professoras participantes no questionário *online*. Isso indica que as professoras acreditam no potencial das situações-problema para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Quando solicitamos às professoras que apresentassem na entrevista uma atividade utilizada por elas para desenvolvimento do pensamento algébrico de seus alunos, obtemos 14 atividades, entre as quais oito eram potenciais para o desenvolvimento da aritmética generalizada, quatro para o pensamento funcional e uma para a relação de equivalência.

Dessas 14 atividades, apenas uma não apresentava consistência para o desenvolvimento do pensamento algébrico. As outras 13 foram atividades baseadas em problemas e tinham a intencionalidade de desenvolver o pensamento algébrico.

Isso denota que as professoras mobilizam conhecimentos pedagógicos relacionados com o desenvolvimento do pensamento algébrico presentes em sua prática docente e que as participantes já utilizam atividades baseadas em problemas com a intenção de desenvolver o pensamento algébrico dos alunos. Entretanto, apenas três professoras exploram as atividades em todo potencial discursivo para a generalização. Nas outras 10, faltou o fechamento com a construção das regras/leis para a generalização e o aprofundamento em uma das ideias da *Early Algebra*.

Nas atividades de Hipátia, Sophie e Laura discutidas no Capítulo 5, foi possível identificar conhecimentos pedagógicos voltados para o desenvolvimento do pensamento algébrico ligados às ideias da aritmética generalizada, pensamento funcional e equivalência, com significativa intencionalidade e proposição de intervenções denotando um conhecimento pedagógico do conteúdo. Por exemplo: a) o trabalho com área de retângulos e com a configuração retangular para explorar a propriedade comutativa, visando à generalização; b) o trabalho com situações-problema envolvendo frações para o aprimoramento da noção de proporcionalidade direta; c) a exploração de fichas com incógnitas em operações aritméticas visando ao trabalho com sinal de igual no sentido de equivalência.

Acreditamos que as formações continuadas auxiliarão na ampliação e no aprofundamento dos conhecimentos que as professoras já detêm, visando ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Especificamente, identificamos que as professoras detêm mais conhecimento pedagógico sobre a ideia da aritmética generalizada, seguida da relação de equivalência e do pensamento funcional. Esse diagnóstico aponta para uma carência maior de conhecimentos pedagógicos relacionados com o pensamento funcional. Essa evidência indica que as formações continuadas futuras deveriam aprofundar as discussões sobre pensamento funcional.

Além disso, a partir da identificação de conhecimentos pedagógicos sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico consideramos as concepções sobre o pensamento algébrico que as professoras mostraram em suas falas durante a entrevista.

Emmy é graduada em Pedagogia e licenciada em Geografia, tem 17 anos de docência nos Anos Iniciais e 7 anos de ensino no 5º ano. Embora tenha formação continuada em Educação Matemática e seja professora de dedicação exclusiva, não demonstrou conhecimentos pedagógicos voltados para o desenvolvimento do pensamento algébrico. A concepção que Emmy tem sobre o PA como uma questão filosófica pode ter exercido influência sobre a mobilização de subdomínios do PCK na entrevista.

Maria Agnesi e Maryam atuam como generalistas há mais de 10 anos, sendo de 4 a 12 anos no 5º ano, respectivamente. Essas duas professoras entendem que desenvolver o pensamento algébrico significa usar a linguagem matemática e trabalhar com a resolução de situações-problema para esse fim. Quanto à formação inicial, Maria Agnesi é pedagoga e Maryam é licenciada em Letras. Mesmo não sendo especialistas em Matemática, elas tiveram oportunidade de investir na formação continuada em Educação Matemática, porque trabalham em escolas com dedicação exclusiva (40 horas).

Hipátia e Amelie também trabalham com a linguagem matemática e no uso de situações-problema para o desenvolvimento do pensamento algébrico, mas acrescentam a importância de um trabalho pedagógico intencional com a linguagem matemática e seus símbolos para a resolução de problemas do campo conceitual multiplica e aditivo visando ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Elas deram exemplos de intervenções pedagógicas em suas aulas, demonstram preocupação com a construção de sentidos para os símbolos matemáticos, com a propostas de discussão das estratégias pelos alunos e com os alunos.

Hipátia e Amelie, compõem o grupo de cinco professoras que demonstraram uma concepção do pensamento algébrico a ser desenvolvido nos Anos Iniciais ligado à percepção de regularidades visando à generalização; aproximam-se da proposta defendida na *Early Algebra*.

Hipátia, Amelie, Laura, Katherine e Sophie foram as professoras que mais mobilizaram conhecimentos pedagógicos durante a pesquisa, cerca de 89% dos PCKs identificados foram mobilizados por elas. Seus conhecimentos refletem um aporte diversificado de recursos e estratégias de intervenção dispensados ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos (KCT), principalmente na promoção de discussões e socialização das respostas visando à generalização. Elas conhecem como os alunos do 5º ano costumam resolver problemas, identificando erros e acertos em suas resoluções (KCS). Ressaltamos que Katherine e Sophie já sabiam, desde os PCNs, da possibilidade de trabalhar com o PA, relacionando com a unidade temática Números e não viam a Álgebra trazida pela BNCC como uma novidade, demonstrando um conhecimento do pensamento algébrico relacionado com o currículo (KCC),

O fato de as cinco professoras mobilizarem 89% dos PCKs pode estar relacionado com o local em que trabalham, pois todas atuam em colégios com dedicação exclusiva, com tempo para estudos e com coordenação pedagógica voltada especificamente para o ensino de Matemática, além de serem incentivadas a participar de grupos de pesquisa, mantendo, portanto, contínua a sua formação.

A formação acadêmica mais próxima da Matemática também favoreceu a mobilização de conhecimentos pedagógicos das cinco professoras, pois três possuem licenciatura em Matemática (Hipátia, Laura e Katherine), e duas são pedagogas (Amelie Sophie), sendo que Sophie com mestrado em Matemática. Essas professoras estabeleceram maiores relações entre o conteúdo matemático e o ensino, o currículo e os estudantes.

Contudo, o ambiente de trabalho formador em que todas as oito participantes estavam envolvidas proporciona meios para a efetiva formação continuada dessas professoras, considerando a realidade daquela comunidade escolar, e as especificidades dos processos de ensino e aprendizagem que ali são desenvolvidos e que se deseja desenvolver.

As sete participantes da pesquisa que mobilizaram conhecimentos pedagógicos não ficaram somente no saber fazer ou no conhecimento específico do conteúdo, mas fizeram articulação entre o conhecimento do conteúdo e o conhecimento sobre o seu ensino (englobamos os KCC, KCT e KCS), pois, de fato, um está imbricado ao outro e, por isso, manifestam-se concomitantemente.

Acreditamos que o ambiente formador que a instituição de trabalho dessas professoras proporciona influencia o desenvolvimento de seus conhecimentos para o ensino de Matemática. Todas as professoras tinham formação continuada em Matemática, Educação Matemática e/ou Ensino de Matemática e, mesmo sem terem participado de formações envolvendo a discussão da *Early Algebra*, elas mobilizaram conhecimentos pedagógicos que proporcionam aos estudantes desenvolverem o pensamento algébrico.

Diante disso, acreditamos ser importante em pesquisas futuras investigar o impacto que um ambiente de trabalho docente formador, ou seja, que promove e se preocupa com a formação continuada dentro do espaço de trabalho das professoras, exerce sobre a produção de conhecimentos para o ensino de Matemática, e em especial, para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Por fim, consideramos que as professoras do 5º ano apresentam uma gama de conhecimentos pedagógicos relacionados com o pensamento algébrico de grande contribuição para o trabalho com a aritmética generalizada e que, com relação à equivalência e ao pensamento funcional, precisariam aprofundar-se em formações continuadas voltadas para essas temáticas.

Portanto, o trabalho com temas envolvendo o pensamento algébrico nos cursos de formação inicial da professora polivalente e a formação continuada dessas profissionais poderá ajudar na desmitificação de concepções equivocadas sobre o pensamento algébrico e na ampliação dos conhecimentos que já se encontram alinhados à *Early Algebra*, como os identificados nesta pesquisa.

Defendemos que a proposta de formação docente sobre o pensamento algébrico inicie-se com os conhecimentos prévios das professoras, e a partir disso, aprofunde-se sobre as ideias matemáticas envolvidas no processo, para a elaboração de atividades e intervenções para a aprendizagem dos alunos.

Finalizamos com Hipátia (2023): “o pensamento algébrico aqui é uma muda que já pode ser semeada, pois dará uma árvore do pensamento algébrico”.

REFERÊNCIAS

ALEXANDRE, W. *Garotos se equilibram na gangorra*. 2002. Gravura. Disponível em: https://brainly.com.br/tarefa/31140776.

AYALA-ALTAMIRANO, C.; MOLINA, M. Justificación y expresión de la generalización de una relación funcional por estudiantes de cuarto de Primaria. *In*: Marbán, J. M; Arce, M.; Maroto, A.; Muñoz-Escolano, J. M.; Alsina, A. (eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII*. Valladolid: Universidad de Valladolid, 2019. p. 183-192

BALL, D.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, New York, v. 59, n. 5, p. 389-407, nov./dez. 2008.

BALL, D.; BASS, H. Toward practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. *In*: Davis, B.; Smith, E. (eds). *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*, Edmonton: CMESG/GCEDM, 2003. p. 3-14.

BARBOZA, L. C. *Conhecimento dos professores dos Anos Iniciais e o sinal de igualdade*: uma investigação com tarefas de aprendizagem profissional. 2019.194 f. Dissertação (Mestrado em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática) – Universidade Federal do ABC, São Paulo. 2019.

BIANCHINI, E. *Matemática Bianchini*: Matemática Ensino Fundamental. Manual do Professor. 8. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

BLANTON, L. M.; SCHIFTER, D.; LOFGREN, P; WILLIS, C.; DAVIS, F.; CONFREY, J. Early Algebra. *In*: *Algebra:* Gateway to a Technological Future, Columbia/ USA: The Mathematecal Association of America, 2007. p. 7-14.

BLANTON, L. M.; LEVI, L.; Crites, T.; Dougherty, B.; Zbiek, R. M. *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching Mathematics in grades 3-5.* Reston: NCTM - National Council Teachers of Mathematics, 2011.

BLANTON, M., STEPHENS, A., KNUTH, E., GARDINER, A., ISLER, I.; KIM, J. The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, London, 2015.

BLANTON, Maria L.; KAPUT, James J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, London, v. 36, n. 5, p. 412-446, 2005.

BOGDAN, R. BIKLEN, S. *Investigação qualitativa em educação*: uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Portugal: Porto Editora, 1994. p. 48-52.

BRASIL, Conselho Nacional de Educação. *Resolução 2, de 22 de dezembro de 2017.* Disponível em:

http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/RESOLUCAOCNE_CP222DEDEZMBRODE2017.pdf . Acesso em: 15 jan. 2023.

BRASIL, Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Educação é a base. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2017.

BRASIL. Lei nº 9394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. *Diário Oficial da União*, Brasília, p. 27833, 23 dez. 1996.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Brasília, DF: Ministério da Educação, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. *Elementos conceituais e metodológicos para definição dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento curricular do ciclo de alfabetização (1º, 2º e º anos) do Ensino Fundamental.* Brasília, DF: (DGIDC), 2012.

CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, Lisboa, v. 16, n. 2, p. 81-118, 2007.

CÂNDIDO, P. Comunicação matemática. *In*: SMOLE, K. DINIZ, M. (org). *Ler, escrever e resolver problemas:* habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Ed. Artmed, 2001.

CARRAHER, D.W.; SCHLIEMANN, A.D.; SCHWARTZ, J. Early algebra is not the same as algebra early. *In*: KAPUT, J.; CARRAHER, D. W.; BLANTON, M. (eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, NJ, Erlbaum. p. 235-272.

CARRILLO, Y. J., CLIMENT, N.; MONTES, M.; CONTRERAS, L. VC. et al. The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education.* London, v. 20, n. 3, p. 236-253, 2018.

CASTRO, E.; OLIVEIRA, U. T. V. A entrevista semiestruturada na pesquisa qualitativa-interpretativa: um guia de análise processual. *Entretextos*, Londrina, v. 22, n.3, p. 25-45, 2022.

COHEN, R. B. Examining the work of constructing a representational context in elementary mathematics teaching. Unpublished doctoral dissertation, University of Michigan, Ann Arbor. 2005 apud BALL, D.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching*:* what makes it special? *Journal of Teacher Education*, New York, v. 59, n. 5, p. 389-407, nov./dez. 2008.

CONCEIÇÃO, R. C. *Alice no país da colaboração:* pensamentos algébricos nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. 2021. 254 f. Dissertação (mestrado) – Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2021.

CURI, E. *Formação de professores polivalentes:* uma análise de conhecimentos para ensinar Matemática e de crenças e atitudes que interferem na constituição desses conhecimentos. 2004. 278 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

DÚRAN, U. SEGURA, F. Pensamiento relacional em la escolarización de la jerarquia de operaciones y álgebra temprana em primaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Cuidad de México, v. 24, n. 1, p. 9–34, 2021.

FALCÃO. J. T. R. Alfabetização Algébrica nas séries iniciais. Como começar? *Boletim GEPEM*, Rio de Janeiro, n. 42, 2003.

FERREIRA, M. C. N., *Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental:* uma análise do conhecimento matemático acerca do Pensamento Algébrico. 2017. 147 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do ABC, Programa de Pós-graduação em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática, Santo André, 2017.

FERREIRA, M. C. N.; RIBEIRO, M.; RIBEIRO, A. J. Conhecimento matemático para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. *Zetetike*, Campinas, v. 25, n. 3, p. 496 514, 2017. DOI: 10.20396/zet.v25i3.8648585. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8648585. Acesso em: 9 fev. 2023.

FIORENTINI, D.; MIORIN, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar... a Educação Algébrica Elementar. *Pro-Posições*, Campinas, v. 4, n. 1[10], 1993.

GITIRANA, V.; Campos, T. M. M.; Magina, S.; Spinillo, A.4 *Repensando multiplicação e adição:* contribuições da Teoria dos campos conceituais. 1ª ed. São Paulo: PROEM, 2014.

GOMA, J. L. S. *A comunicação escrita matemática envolvendo o pensamento algébrico com futuras professoras dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental*. 2019. 92 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2019.

GROSSMAN, P. L. *The making of a teacher: teacher knowledge and teacher education.* New York: Teachers College Press, 1990.

GROSSMAN, P. L.; WILSON, S. M.; SHULMAN, L. S. Profesores de sustancia: el conocimiento de la materia para la enseñanza. Profesorado, Revista de Currículum y Formación del Profesorado, Granada, v. 9, n. 2, p. 1-25, 2005. Disponível em: http://www.redalyc.org/toc.oa?id=567&numero=2490 . Acesso em: set. 2023.

JOSSO, M. C. *Experiências de vida e formação*. São Paulo: Cortez, 2004

JUNGBLUTH, A., SILVEIRA, E., GRANDO, R. O estudo de sequência na Educação Algébrica nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. *Educação Matemática em Pesquisa*, São Paulo, v. 21, n. 3, p.96-118, 2019.

KAPUT J.J., CARRAHER, D., BLANTON, M. *Algebra in the Early Grades*. New York: Ed. Lawrence Erlbaum Associates, 2008

KAPUT, J. J. *A research base supporting long term algebrare form?* Texto apresentado na 17. Annual Meeting of North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Columbus, Ohio, 1995.

KIERAN, C. Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante,* Lisboa, v. 16, n. 1, p. 5-26, 2007.

KIERAN, C. Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, v. 12, n. 3, p. 317-326, 1981.

LACHI, H. M. *Aprender a ensinar padrões e sequências para os Anos Iniciais:* uma experiência com estudantes de um curso de Pedagogia Semipresencial. 2019. 126 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo. São Paulo, 2019.

LIMA, E. L. et al. A Matemática do Ensino Médio. 11 edição. Rio de Janeiro: SBM, 2016, p. 250. apud RODRIGUES, C. *Invariantes operatórios associados ao conceito de função mobilizados por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental.* 2021. 180 f. Dissertação (Mestrado). – Univerisdade Estadual do Oeste do Paraná, Centro de Ciências Exatas e Texnológicas, Programa de Pós-Graduação em Educação, Ciências e Educação Matemática, 2021.

LINS, R. GIMENEZ, J. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.* Campinas: SP. Papirus, 1997.

LUNA, A. V. A.; MERLINI, V. L.; FERREIRA, Á. A. A igualdade na aula de matemática da educação infantil: por que devemos ficar atentos ao usar esse sinal? *EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, Recife, v. 12, n. 3, p. 1-21, 2021.

LUNA, A. V. A.; MERLINI, V. L., e SILVA, V. N. Uma reflexão de textos elaborados por professoras da educação infantil sobre early 132lgebra. *EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, Recife, v. 11, n. 3, p. 1-24, 2020.

LUNA, A. V. A.; SOUZA, C. C. C. F. Discussões sobre o ensino de álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. *Educação Matemática em Pesquisa*, São Paulo, v. 15, Número Especial, p. 817-835, 2013.

LUNA, A. V. A.; SOUZA, E. G.; MENDUNI-BORTOLOTI, R. Um zoom nas produções discursivas em tarefas de Early Algebra de crianças dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. *Espaço Plural*. Marechal Cândido Rondon, v. 18,, n. 36, p. 41-72, 2017.

MAGINA, S. M. P et al. *Repensando adição e subtração:* contribuições da teoria dos campos conceituais. São Paulo: PROEM, 2008.

MAGINA, S. M. P.; PORTO, R. S. O. É possível se ter raciocínio funcional no nível dos Anos Iniciais? Uma investigação com estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental. *In*: *VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.* Foz do Iguaçu, p. 1-12, 2018.

MARCONDES, M. I. TEIXEIRA, E. OLIVEIRA, I. *Metodologias e técnicas de pesquisa em educação.* Belém: EDUEPA, 2010. p.108.

MESTRE, C.; Oliveira, H. O pensamento algébrico e a capacidade de generalização de alunos do 3.º ano de escolaridade do ensino básico. *In*: Guimarães, C.; Reis, P. (orgs.), *Professores e infâncias:* estudos e experiências. São Paulo: Junqueira & Marin Editores, 2011. p. 201-223.

MORETTI, V., VIRGENS, W., ROMEIRO, I. Generalização Teórica e o Desenvolvimento do Pennsamento Algébrico: contribuições para a formação de professores dos Anos Iniciais. *Bolema*, Rio Claro, v. 35, n. 71, p. 1457-1477, dez. 2021.

MORETTI, V. D.; RADFORD, L. (org). *Pensamento algébrico nos Anos Iniciais:* diálogos e complementaridades entre a Teoria da Objetivação e a Teoria Histórico-Cultural. São Paulo: Livraria da Física, 2021.

MOURA, M. O., Significação do controle do movimento das quantidades: uma perspectiva histórico-cultural. *In:* MORETTI, V. D.; RADFORD, L. (org). *Pensamento algébrico nos Anos Iniciais:* diálogos e complementaridades entre a Teoria da Objetivação e a Teoria Histórico-Cultural. São Paulo: Livraria da Física, 2021.

NACARATO, A. CUSTÓDIO, I. A, *O desenvolvimento do pensamento algébrico na educação básica:* compartilhando propostas de sala de aula com o professor que ensina (ensinará) matemática. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Coleção SBEM, Blumenau, v. 12, 2019.

NACARATO, A. M.; MENGALI, B. L. S.; PASSOS, C. L. B. *A Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental:* tecendo fios do ensinar e do aprender. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

NATIONAL COUNCIL FOR TEACHER OF MATHEMAIS/ NCTM. *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Trabalho original publicado em 2000. Tradução da Associação de Professores de Matemática (APM). Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional, 2007.

NORO, I. M. *Do aprender ao ensinar álgebra:* formação de futuros professores que ensinam matemática. 2020. 243f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de pós-graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, RS, 2020.

NÓVOA, A. *Professores:* Imagens do futuro presente. Lisboa: Educa, 2009.

OLIEIRA, C. F. S. *Formação continuada de professores e a Early Algebra:* uma intervenção híbrida. 2018. 226 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática. Ilhéus – Bahia, 2018.

OLIVEIRA, V., PAULO, R. M. Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais: o que pensam os professores? *EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamenricana*, Recife, v. 12, n. 3, 2021. p. 1-25.

PANOSSIAN, M. L. A relevância do conhecimento algébrico nos Anos Iniciais: compreensões a partir do movimento histórico e lógico. *In:* MORETTI, V. D.; RADFORD, L. (org). *Pensamento algébrico nos Anos Iniciais:* diálogos e complementaridades entre a Teoria da Objetivação e a Teoria Histórico-Cultural. São Paulo: Livraria da Física, 2021.

PASSOS, C. L. B.; NACARATO, A. M. Trajetória e perspectivas para o ensino de Matemática nos Anos Iniciais. *Estudos Avançados*, São Paulo, v. 32, n. 94, p. 119-135, 2018. DOI: 10.1590/s0103-40142018.3294.0010. Disponível em: https://www.revistas.usp.br/eav/article/view/152683. Acesso em: 20 ago. 2023.

PINHEIRO, A. C. *O ensino de álgebra e a crença de autoeficácia docente no desenvolvimento do pensamento algébrico.* 2018. 144 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências, Bauru – SP, 2018.

PONTE, J., BRANCO, N., MATOS, A. *Álgebra no Ensino Básico.* Portugal: Ministério da Educação, Direção Geral de Integração e de Desenvolvimento Curricular (DGIDC). 2009.

PROTO, V. G. *Proposta metodológica de elaboração de itens para verificar o conhecimento docente:* um estudo sobre o conhecimento matemático para o ensino (MKT). 2020. 101 f. Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista (UNESP), Araraquara, 2020.

RADFORD, Luis. Aspectos Conceituais e práticos da Teoria da Objetivação. In: MORETTI, V. D.; RADFORD, L. (org). *Pensamento algébrico nos Anos Iniciais:* diálogos e complementaridades entre a Teoria da Objetivação e a Teoria Histórico-Cultural. São Paulo: Livraria da Física, 2021.

RIBEIRO, M.; POLICASTRO, M. S.; ALMEIDA, A.; CALDATTO, M. E. Conhecimento interpretativo de futuros professores da educação infantil e dos Anos Iniciais no âmbito da subtração – potencialidades para melhorar a formação. *Roteiro*, [S. l.], v. 46, p. e23792, 2021. DOI: 10.18593/r.v46i.23792. Disponível em: https://periodicos.unoesc.edu.br/roteiro/article/view/23792. Acesso em: 15 set. 2023.

RIBEIRO, M.; RIBEIRO, A.; PACELLI, T. Apresentação: conhecimento do professor e do Formador de professores de/que ensinam matemática. *Zetetike*, Campinas, v. 29, n. 00, p. e021033, 2021. DOI: 10.20396/zet.v29i00.8668461. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8668461. Acesso em: 11 julho. 2023.

RODRIGUES, C. *Invariantes operatórios associados ao conceito de função mobilizados por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental.* 2021. 180 f. Dissertação (mestrado) – Univerisdade Estadual do Oeste do Paraná, Centro de Ciências Exatas e Texnológicas, Programa de Pós-Graduação em Educação, Ciências e Educação Matemática, 2021.

SANTANA, R. R. F. *Um estudo sobre as relações entre o desenvolvimento do pensamento algébrico, as crenças de autoeficácia, as atitudes e o conhecimento especializado de professors pre-service e in-service.* 2019. 321 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências, Bauru – SP, 2019.

SANTOS, F. C. F. *Desenvolvimento do pensamento algébrico de professores dos Anos Iniciais em atividade de ensino:* O pensamento teórico mediado por conceitos algébricos. 2020. 185 f. Dissertação. (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de São Paulo, São Paulo, 2020.

SAVIANI, D. Formação de professores: aspectos históricos e teóricos do problema no context brasileiro. *Revista Brasileira de Educação*. Rio de Janei, v.14, n. 40. jan/abr. p. 143-155, 2009.

SCHLIEMANN, A. D., CARRAHER, D. W., & BRIZUELA, B. M. *Bringing out the algebraic character of arithmetic*: From children's ideas to classroom practice. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 2007.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: foundations of a new reform. *Harvard Educational Review*, Cambridge, v. 57, n. 1, p. 1-22, 1987.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, Washington, v. 15, n. 4, p. 4-14, 1986.

SMOLE, K. DINIZ, M. Ler e Aprender Matemática. In: SMOLE, K. (org.) DINIZ, M. (org.) *Ler, escrever e resolver problemas:* habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. p.76.

SOUZA, A. *O Ensino Híbrido na formação continuada e a recontextualização pedagógica dos textos produzidos por professores dos Anos Iniciais em Early Algebra:* um enfoque na relação funcional. 2020. 191 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciência e Matemática) –Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC. Ilhéus, Bahia. 2020.

SOUZA, M. *A Early Álgebra na concepção de professoras da educação infantil e dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental:* antes e depois de uma formação continuada. 2021. 138 f. Dissertação. (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática. Ilhéus, BA: UESC, 2021.

TRÍDICO, D. H. M. *Contribuições de um curso de formação continuada para professores dos Anos Iniciais no desenvolvimento do conhecimento tecnológico, pedagógico e de conteúdo algébrico*. 2019. 129 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Formação. Campinas – SP, 2019.

TRIVILIN, L. R., RIBEIRO, A. J., Conhecimento Matemático para o Ensino de Diferentes Significados do Sinal de Igualdade: um estudo desenvolvido com professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. *Bolema*. Rio Claro, v. 29, p. 38-59.

TRIVIÑOS, A. N. S. Introdução à Pesquisa em Ciências Sociais: A Pesquisa Qualitativa em Educação. O Positivismo. A Fenomenologia. O Marxismo. São Paulo: Ed. Atlas, 1987.

VALE, I., BARBOSA, A., Pensamento Algébrico: contributo da visualização na construção da generalização. *Educação Matemática em Pesquisa*. São Paulo, v.21, n. 3, p. 398-418, 2019.

VALE, I.; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A.; BORRALHO, A.; BARBOSA, E.; CABRITA, I.; FONSECA, L. *Padrões em Matemática*: uma proposta didática no âmbito do novo programa para o Ensino Básico. Lisboa: Texto Editores, 2011.

VAN DE WALLE, J. A. *Matemática no Ensino Fundamental:* formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VERGNAUD, Gérard. A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. *Revista do GEEMPA*, Porto Alegre, n. 4, p. 9-19, 1996b.

VERGNAUD, Gérard. Multiplicative Structure. *In:* LESH, R.; LANDAU, M. (eds.). Acquisition of Mathematics Concepts and Processes. *Academic Press Inc*, Cambridge, 1983. p. 127-174.

VERGNAUD, Gérard. O que é aprender. *In:* BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano Alberto. (Orgs.). *A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais*. Curitiba: Editora CRV, 2009b. p. 13-35.

VERGNAUD, Gérard. Teoria dos Campos Conceituais. *In: Anais do 1º Seminário Internacional de Educação do Rio de Janeiro.* Rio de Janeiro: Instituto de Matemática da UFRJ. 1993. p. 1-26.

VIEIRA, F. dos S.; MAGINA, S. M. P. A Early Algebra no currículo da educação infantil: uma análise dos documentos nacionais e internacionais. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, [S. l.], v. 8, n. 23, p. 81–98, 2021. DOI: 10.30938/bocehm.v8i23.5070. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/5070. Acesso em: 28 out. 2023.

YAMANAKA, O.; MAGINA, S. Um estudo da "Early Algebra" sob a luz da Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud. In*: Encontro Paulista de Educação Matemática (EPEM)*, 2008, Bauru. São Paulo. Anais. SBEM/SBEM-SP, 2008.

APÊNDICE A – Questionário *online*

Olá, professor(a)!
Antes de tudo, agradecemos o seu interesse em participar da nossa pesquisa intitulada "Os Conhecimentos Pedagógicos de Professores do 5º Ano sobre o Desenvolvimento do Pensamento Algébrico".
O presente questionário é uma atividade prévia construído para o mapeamento acerca da trajetória formativa das professoras participantes.
Posteriormente, está programada a realização de uma entrevista semiestruturada visando ao aprofundamento dos dados encontrados neste questionário a partir da exploração de uma atividade de seu uso para o desenvolvimento do pensamento algébrico de seus alunos e de situações didáticas potenciais para o desenvolvimento do pensamento algébrico.
Esta é uma pesquisa acadêmica, ou seja, as informações prestadas aqui são sigilosas e sua participação é anônima.

Débora Andrade da Silva Righi - Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Processos Formativos e Desigualdades Sociais (PPGEDU), Faculdade de Formação de Professores (FFP/UERJ)
andrade.righi@gmail.com
Dra. Vânia Finholdt Angelo Leite - Orientadora

Insira o seu e-mail: ____
Nome completo: ____
Idade: _______
Escola em que dá aula: ____
1 - Qual é a sua formação acadêmica? (Você pode marcar mais de uma opção)
(   ) Curso Normal de Formação de Professores
(   ) Normal Superior
(   ) Pedagogia
Outro: ____

2- Você já realizou algum curso de formação continuada na área de Matemática/Ensino de Matemática/Educação Matemática?
(   ) Sim
(   ) Não
Caso tenha assinalado "sim" na questão anterior, digite abaixo o nome do curso e a carga horária.
____
3- Há quantos anos você atua como professor(a) dos Anos Iniciais?
____

4- Quantos desses anos você trabalhou com o 5° ano, exatamente?
____

7 - Que recursos pedagógicos você mais utiliza no desenvolvimento do pensamento algébrico de seus alunos durante a aula?

( ) Livro didático
( ) Jogos
( ) Situações-problema
( ) Materiais manipulativos
Outro: ____

8- Na sua escola há um tempo reservado para o planejamento individual ou coletivo?

( ) Sim
( ) Não

9 – Conte brevemente como ocorre o planejamento individual ou coletivo em sua escola:
____

Obrigada por participar!

APÊNDICE B – Roteiro da entrevista semiestruturada

<u>Primeiro momento da entrevista – apresentação da atividade pela professora</u>

- Apresente uma tarefa de aula planejada por você em que o objetivo é desenvolver o pensamento algébrico de seus alunos.
- Qual é o objetivo da sua atividade e como ela pode contribuir com o desenvolvimento do pensamento algébrico?
- Os seus alunos gostaram de resolver essa tarefa? Como eles se saíram? Conte um pouco sobre como foi o seu desenvolvimento na aula.

<u>Segundo momento da entrevista – discussão sobre situações didáticas</u>

Situação Didática 1: Turminha Faltosa

Objetivo: Explorar os conhecimentos pedagógicos sobre a habilidade EF04MA12 de reconhecer, por meio de investigações, que há grupo de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.

> A seguinte atividade foi proposta a uma turma de 5º ano:
>
> **Turminha Faltosa**
>
> A turma 5A é muito faltosa. Para organizá-la em grupos de 5 alunos a professora precisa fazer diferentes estratégias. Por exemplo, na segunda-feira quando ela os divide nunca sobra ninguém. Na terça, sempre sobra 1. Na quarta, sempre sobra 2. Na quinta, sempre sobra 3 e na sexta-feira sempre sobram 4 alunos. Qual é o número de alunos possíveis em cada dia da semana?

Pergunta: Na sua opinião, o desafio proposto pela professora envolve qual ou quais conteúdos matemáticos?

Objetivo: Identificar o conhecimento pedagógico do conteúdo e do currículo.

Pergunta: Seria possível desenvolver o pensamento algébrico a partir desse desafio? Como?

Objetivo: Identificar o conhecimento pedagógico do conteúdo e do ensino.

Joaquim, Ana e Fabíola apresentaram uma solução para a professora. Observe abaixo a solução de cada aluno:

Resposta do Joaquim	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta
	30	21	12	13	14
Resposta da Ana	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta
	10	6	22	43	9
Resposta da Fabíola	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta
	5	11	7	23	34

Pergunta: Observando as respostas dos alunos, como você avalia os seus desempenhos? Quem acertou o desafio da professora? Que intervenções você utilizaria com esses alunos a fim de os fazerem refletir sobre suas respostas?

Objetivo: Identificar o conhecimento pedagógico do conteúdo e dos alunos.

Situação Didática 2: A caixa de bombons

Objetivo: Explorar os conhecimentos pedagógicos sobre a habilidade de reconhecer, por meio de investigações utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas.

A Caixa de Bombons

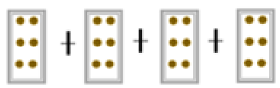
Deise tem uma certa quantidade de bombons e vai dividi-los em 4 caixas. Sabendo que ela conseguiu guardar todos os bombons nas caixas e que cada caixa ficou com 6 bombons, quantos bombons Deise tem no total?

Pergunta: Na sua opinião, a situação-problema proposta pela professora envolve qual ou quais conteúdos matemáticos?

Objetivo: Identificar o conhecimento pedagógico do conteúdo e currículo.

Pergunta: Seria possível, a partir dessa situação-problema desenvolver o pensamento algébrico? Como?

Objetivo: Identificar o conhecimento pedagógico do conteúdo e do ensino.

Pietro	Júlia
$\square \div 4 = 6$ $6 \times 4 = 24$	 $= 24$

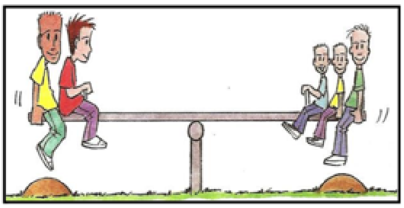
Pergunta: Observando as respostas dos alunos, como você avalia os seus desempenhos? Que intervenções você utilizaria com esses alunos a fim de os fazerem refletir sobre suas respostas?

Objetivo: identificar o conhecimento pedagógico do conteúdo e dos alunos.

Situação Didática 3: A Gangorra

Objetivo: Explorar os conhecimentos pedagógicos sobre a habilidade de determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais.

Dois meninos, José e Maurício de 41kg e 39kg respectivamente, equilibram três irmãos em uma gangorra. Um dos irmãos de camisa verde pesa 33kg, o de camisa amarela pesa 28kg. Quanto pesa o irmão de camisa azul?



Fonte da imagem: Alexandre; Wagner, 2002.

Pergunta: Na sua opinião, a situação-problema proposta pela professora envolve qual ou quais conteúdos matemáticos?

Objetivo: Identificar o conhecimento pedagógico do conteúdo e currículo.

Pergunta: Seria possível, a partir dessa situação-problema desenvolver o pensamento algébrico? Como?

Objetivo: Identificar o conhecimento pedagógico do conteúdo e do ensino.

Aluno 1	Aluno 2
41 + 39 = 80 33 + 28 = 61 80 – 61 = 19 O menino de camisa azul pesa 19kg.	41 + 39 = 33 + 28 + $\square$ 80 = 61 + $\square$ Que número eu posso adicionar a 61 para chegar à 80? 61 + 9 = 70 70 + 10 = 80 Para chegar à 80 eu somei 9 + 10 ao 61, portando o menino de camisa azul tem 19kg.

Pergunta: Observando as respostas dos alunos, como você avalia os seus desempenhos? Que intervenções você utilizaria com esses alunos a fim de os fazerem refletir sobre suas respostas?

Objetivo: Identificar o conhecimento pedagógico do conteúdo e dos alunos.

APÊNDICE C – Termo de consentimento livre e esclarecido

Prezado, professor (a)

Você está sendo convidado (a) a participar, como voluntário (a), da pesquisa intitulada ***Os conhecimentos que professores do quinto ano do Ensino Fundamental mobilizam ao desenvolverem o pensamento algébrico de seus alunos,*** conduzida por Débora Andrade da Silva Righi. Esse estudo tem por objetivo compreender os conhecimentos que professores do quinto ano do Ensino Fundamental mobilizam ao trabalharem com o desenvolvimento do pensamento algébrico em suas turmas.

Você foi selecionado(a) por se enquadrar no perfil do participante procurado para essa investigação pois atende aos pré-requisitos estimulados. Sua participação não é obrigatória. A qualquer momento, você poderá desistir de participar e retirar seu consentimento. Sua recusa desistência ou retirada de consentimento não acarretará prejuízo.

Sua participação não é remunerada nem implicará gastos caso decida participar. Sua participação consistirá na oferta de disponibilidade para uma entrevista com a pesquisadora responsável, a ser realizada de forma *online* ou presencial no local a ser combinado pelas partes. O conteúdo da entrevista consiste em uma conversa sobre aspectos que envolvem sua formação acadêmica, sua prática de ensino e seus conhecimentos sobre o pensamento algébrico. Poderão ser solicitados planos de aula, atividades e registros de tarefas realizadas por você em sua turma de quinto ano.

Toda a entrevista será registrada por gravador de áudio ou vídeo, no caso de encontro *online*. Poderá participar da pesquisa, além da pesquisadora responsável também a orientadora desta investigação, a Prof.ª Dra. Vânia Finholdt Angelo Leite.

Os dados obtidos por meio desta pesquisa serão confidenciais e não serão divulgados em nível individual, visando assegurar o sigilo de sua participação. Usaremos codinomes ao registrar os dados obtidos na entrevista na pesquisa, a fim de preservar a identidade dos participantes.

O pesquisador responsável comprometeu-se a tornar públicos nos meios acadêmicos e científicos os resultados obtidos de forma consolidada sem qualquer identificação de indivíduos, instituições ou participantes.

Caso você concorde em participar desta pesquisa, assine ao final deste documento, que contém duas vias, sendo uma delas sua, e a outra, do pesquisador responsável/coordenador da pesquisa. Segue os telefones e o endereço institucional do pesquisador responsável e do

Comitê de Ética em Pesquisa – CEP, onde você poderá tirar suas dúvidas sobre o projeto e sua participação nele, agora ou ea qualquer momento.

Pesquisadora responsável pelo projeto: Débora Andrade da Silva Righi

e-mail: andrade.righi@gmail.com

Tel: (XX) XXXX-XXXX

Caso você tenha dificuldade em entrar em contato com o pesquisador responsável, comunique o fato à Comissão de Ética em Pesquisa da UERJ: Rua São Francisco Xavier, 524, sala 3018, bloco E, 3º andar, - Maracanã – Rio de Janeiro, RJ, e-mail: etica@uerj.br – Telefone (021) 2334-2180.

Declaro que entendi os objetivos, riscos e benefícios de minha participação na pesquisa, e que concordo em participar.

Rio de Janeiro, ______ de __________________de _______.

Assinatura do(a) participante:

____

Assinatura da pesquisadora:

____

ANEXO A – Atividades apresentadas pelas professoras na primeira parte da entrevista

Atividade 1: Fração na Reta Numérica e Fração Equivalente

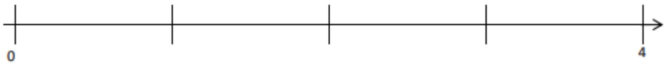
1 – Represente as frações abaixo na reta numérica:

a) $\frac{1}{3}$ 

b) $\frac{2}{6}$ 

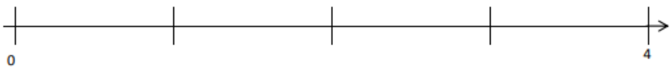
c) $\frac{5}{3}$ 

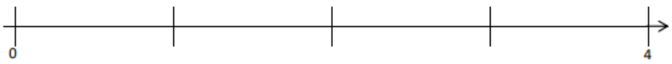
d) $\frac{3}{4}$ 

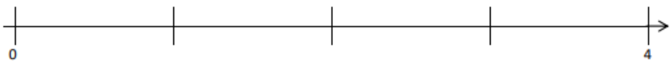
e) $\frac{6}{3}$ 

f) $\frac{4}{6}$ 

g) $\frac{12}{4}$ 

h) $1\frac{2}{6}$ 

i) $2\frac{1}{4}$ 

j) $3\frac{2}{3}$ 

2 – Faça o que se pede, utilizando as retas numéricas do exercício anterior:
a) Pinte de VERDE as Frações Equivalentes
b) Pinte de VERMELHO as demais Frações Próprias
c) Pinte de AZUL as Frações Aparentes
d) Pinte de AMARELO as Frações Impróprias

3- Escreva em ordem crescente as frações do exercício 1, utilizando os sinais > ou <.

____

4- Responda às perguntas de acordo com as frações do exercício.

a) Quais delas são frações equivalentes? Por quê?

____

b) Quais delas são frações aparentes? Por quê?

___

c) Qualquer fração pode ser representada na reta numérica? Justifique.

___

d) Em que intervalo da reta ficam todas as frações próprias? Entre _____ e _____.

Explique o porquê.

___

5- Observe as frações que você representou no exercício 1 e faça o que se pede.

a) Escreva duas frações equivalentes à fração da letra d. _________________

b) Represente graficamente a fração original e as duas equivalentes.

Representações Gráficas

c) Escreva uma fração equivalente à fração da letra g, com numerador maior que o original.

___

d) Escreva uma fração equivalente à fração da letra g, com numerador menor que o original.

___

e) Complete o quadro abaixo, com as frações equivalentes que você escreveu

$$\boxed{} \sim \boxed{\frac{12}{4}} \sim \boxed{}$$

f) Observando as frações acima, o que podemos dizer, numericamente, a respeito das Frações Equivalentes?

___

___

<u>Atividade 2: Multiplicação e divisão – Operações inversas</u>

1- Tenho sete bandejas de iogurte. Há 12 iogurtes em cada bandeja. Quantos iogurtes eu tenho?

Registre como você pensou para responder:

Atividade 3: Investigação Matemática

Descrição da atividade:

Utilizando lápis de cor e papel quadriculado, as crianças devem encontrar (colorir) todos os retângulos possíveis de se formar com certa quantidade de quadradinhos. A área do retângulo é expressa em número de quadradinhos e as crianças precisam descobrir quais e quantos retângulos diferentes existem com aquela área. Além disso, elas são instigadas a enunciar um modo de encontrar a quantidade de retângulos sem o recurso do desenho.

Exemplos de questões que eu utilizo para estimular a investigação:

1. Quais são todos os retângulos que podemos colorir com 36 quadradinhos?
2. Quantos retângulos diferentes você encontrou com 36 quadradinhos?
3. Se você tivesse que descobrir, sem desenhar, quantos retângulos diferentes existem com 36 quadradinhos, como você poderia fazer?

Essas questões são propostas oralmente, com apenas algumas palavras-chave escritas no quadro: Retângulos com 36 quadradinhos. Quais? Quantos? E sem desenhar?

Após pensar sobre essas e outras questões que vão surgindo no decorrer do processo de investigação, incluindo outros números que contêm poucos divisores (como 15 e 23) e a possibilidade de se trabalhar com frações dos quadradinhos, estimulo as crianças a descreverem um procedimento para encontrar o número máximo de retângulos diferentes que é possível formar com certo número de quadradinhos inteiros.

4. Explique para uma pessoa imaginária, que não participou desta atividade e que não tem um papel quadriculado para desenhar, como ela pode fazer para descobrir quantos retângulos diferentes é possível formar com 12 quadradinhos inteiros.

Obs.: Dependendo da condição da turma, proponho uma generalização do algoritmo que estamos tentando construir:

5. Para qualquer número de quadradinhos inteiros, como podemos fazer para descobrir o número de retângulos?

Atividade 4: Investigação com fichas matemáticas

Qual é o número que está faltando?

$$235 + 125 = 125 + \blacksquare$$

$$3 + 3 = 2 + 2 + \blacksquare$$

Fonte: Arquivo da pesquisa.

Atividade 5: Situações-problema envolvendo frações de quantidade e frações equivalentes

Renata precisa viajar da cidade do Rio de Janeiro até Salvador. Ela fez uma pausa em Governador Valadares, me Minas Gerais. Neste ponto, Renata já tinha percorrido três décimos de sua viagem, com aproximadamente 489 km de trajeto.

a) Qual fração representa o trajeto completo?

b) Quantos quilômetro Renata fará em sua viagem completa? Mostre como você pensou:

Fonte: Arquivo da pesquisa.

Atividade 6: Sempre 2000

- **Atenção, galera! Há um erro nesse quadro. Descubra e mude o que for necessário para ficar tudo certo!**

SEMPRE 2000

1000	500	350	350	400	400
200	520	385	215	600	280
800	1345	1027	550	423	910
800	655	920	900	200	390
800	400	600	450	550	700
400	1774	226	610	700	690

Fonte: Arquivo da pesquisa.

COLINHA....

SEMPRE 2000

1000	500	350	350	400	400
200	520	385	215	600	280
800	1345	1027	550	423	910
800	655	920	900	200	390
800	400	600	450	550	700
400	1774	226	610	700	690

Fonte: Arquivo da pesquisa.

Atividade 7 - Desafio cinematográfico

DESAFIOS MATEMÁTICOS CINEMATOGRÁFICOS

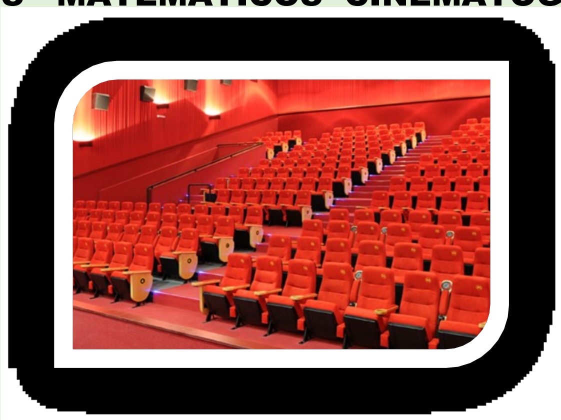


Foto: Kinoplex Tijuca

Num shopping há 3 salas de cinemas...

Sala 1: Capacidade de .... assentos.
Sala 2: Capacidade de 165 assentos.
Sala 3: Capacidade de 280 assentos.

- ✓ Resolva os desafios no caderno quadriculado (ou no universitário).

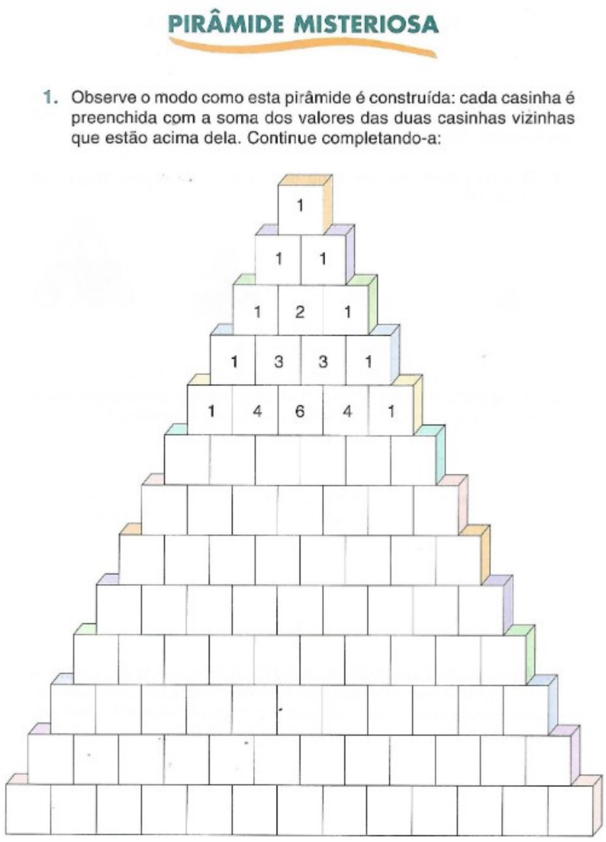
1. Na sala 1 há dois blocos de assentos. Um bloco é composto por 10 fileiras com 12 assentos em cada uma. O segundo bloco tem 13 fileiras com 5 assentos cada. Qual é a capacidade de espectadores desta sala?

2. A sala 2 é a menor, com apenas um bloco de assentos com 15 fileiras e capacidade para 165 espectadores. Quantos assentos há em cada fileira?

3. Já a terceira sala é a que possui a maior capacidade de público, com 280 assentos. Descubra a capacidade total de espectadores nas 3 salas de cinemas desse shopping.

Fonte: Arquivo da pesquisa.

Atividade 8 - Desafio da pirâmide



Retirado de Matemática: Ensino Fundamental/Daniela Padovan, Isabel Cristina F. Guerra, Ivonildes Milan – 1. Ed. – São Paulo: Moderna, 2000.
Fonte: Arquivo da pesquisa.

Atividade 9 - Explorando as fichas da loteria

1 – Observe a ficha da loteria e circule com as cores que a professora pedir os seguintes números:
a) De verde o número 2, 4 e 6. Seguindo o padrão, qual será o próximo número a ser circulado?
b) Por que circulamos esses números? O que eles têm em comum?
c) Continue circulando de verde os números que seguem esse padrão.
d) Circule de vermelho os números 3, 6 e 9. Qual será o próximo número?
e) Por que circulamos esses números? O que eles têm em comum?
f) Continue circulando de vermelho os números que seguem esse padrão.
g) Algum número foi pintado de verde e vermelho simultaneamente? Quais? Por quê?

Atividade 10 - Tabuleiro da centena

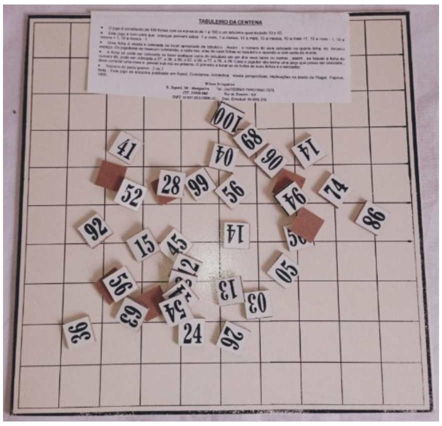
O jogo é constituído de 100 fichas com os números de 1 a 100 e um tabuleiro quadriculado 10 × 10. Este jogo é bom para que crianças pensem sobre 1 a mais, 1 a menos, 10 a mais, 10 a menos, 10 a mais +1, 10 a mais - 1, 10 a menos + 1, 10 a menos -1. Uma ficha é virada e colocada no local apropriado do tabuleiro. Assim, o número 43 será colocado na quarta linha, no terceiro espaço. Os jogadores se revezam colocando, a cada vez, uma de suas fichas no tabuleiro e repondo-a com outra do monte. A ficha só pode ser colocada se tocar qualquer outra do tabuleiro em um dos seus lados ou cantos, assim, se houver a ficha de número 68, pode ser colocada a 57, a 58, a 59, a 67, a 69, a 77, a 78, a 79. Caso o jogador não tenha uma peça que possa ser colocada, deve comprar uma nova e passar sua vez ao próximo. O primeiro a livrar-se de todas as suas fichas é o vencedor.

Número de participantes: 2 ou 3

Material necessário:

- Cem fichas com os números de 1 a 100.
- Um tabuleiro quadriculado 10 × 10 seguindo a sequência numérica como mostra o modelo.

Imagem ilustrativa.



Fonte: https://www.wilsonbrinquedos.com.br/tabuleiro-da-centena

Como jogar:

- Todas as fichas ficam espalhadas sobre a mesa, viradas para baixo, para que ninguém possa ver os números.
- Cada jogador pega oito fichas para si, colocando-as à sua frente, viradas para baixo.
- Uma ficha é virada e colocada no local apropriado do tabuleiro.
- Uma ficha só pode ser colocada se tocar qualquer outra do tabuleiro, em um de seus lados ou cantos.
- Os jogadores se revezam colocando uma de suas fichas, a cada vez, no tabuleiro e repondo-a com outra do monte.
- Caso o jogador não tenha uma peça que possa ser colocada, ele deve comprar uma nova e tentar colocá-la no tabuleiro. Caso não consiga, passa a vez.

O primeiro a livrar-se de todas as suas fichas é o vencedor

Atividade 11 - Prova do noves fora

RELATO DA PROFESSORA KATHERINE:

Tem uma atividade chamada prova dos 9. Você sabe fazer prova dos 9? Provavelmente não. Na minha época na escola ensinava-se isso, e aí existe uma coleção da Scipione[10] que se chama *Vivendo a Matemática* e tem um livro que se chama *Na terra dos noves fora*. Essa coleção *Vivendo a Matemática* tem esse livro *Na terra dos noves fora*. É uma coleção em que cada volume tem um tema, esse mostra uma criança que vai visitar uma prima que morava na terra dos noves fora, e aí, ela vai aprender a multiplicar, a fazer as provas, que em vez de ser prova real é a prova dos noves. E a prova dos noves tem tantas relações... eu não vou poder te dar assim detalhes, mas eu vou te mostrar algumas. Quer dizer, a prova dos noves fora é uma curiosidade interessante que mostra a relação existente entre aqueles números naquela conta. Isso não é para se fazer com um primeiro ano, isso é lá para o 4º ou 5º ano. Porque você já vai ter trabalhado com o algoritmo e a criança precisa já ter dominado o algoritmo. (...) o que acontece é uma adição, por exemplo, 25 + 31 dá 76. Aí, como que é isso da prova dos nove na adição: você tem que ir somando todos os algarismos das parcelas e ir tirando o 9. Então, tipo: 5 + 1 = 6, 6 + 2 = 8, não chegou a nove? Então, você não vai tirar nada. E continua, 8 + 3 = 11, 11 noves fora, dá 2. Para a conta estar certa, embaixo tem que dar dois também. Então, eu coloquei o 76 aqui de proposito. Vamos ver: 76, 7+ 6 =13, 13 noves fora 4. Ih está errado! Tem alguma coisa errada. (...) Então, na subtração já é diferente: não é o minuendo que é a soma do subtraendo com o resto? Então, por exemplo, 42 menos 14 dá 28, então os noves fora ficam assim: 4 + 2 = 6, noves fora fica 6, porque não chegou ao 9 ainda, logo não tira nada. Aí depois você faz dos noves fora do subtraendo juto com o resto: 4 + 1 = 5, 5 + 2 = 7, 7 + 8 = 15, noves fora é igual a 6. Então, você vê a lógica? Em cada conta tem uma lógica. Então, isso é legal discutir com a criança. Não é para você colocar lá na prova e cobra dela a prova dos noves. São coisas em que as crianças vão ter que estabelecer algumas relações ali, generalizações, fazer análises. Isso é para analisar. São pequenas atividades que você faz e que você dá conta do pensamento algébrico.

Atividade 12 - Investigando a multiplicação por 11

RELATO DA PROFESSORA KATHERINE:

Quer ver um outro exemplo de atividade?

---

[10] Scipione é uma editora de livros didáticos brasileira.

Sabe como é que você multiplica por 11 sem armar a conta? Por exemplo, 23 vezes 11.

Você faz assim: você põe o 2 que era dezena vira centena, você põe o 3 na unidade e põe 5 na dezena e acabou. Eu fiz isso com um 5º ano na década de 1980 ou 1990. Nunca me esqueço do nome do menino Guilherme Thompsom, ele me desafiou e porque eu virei para eles e falei “hoje eu trouxe um desafio pra vocês” e botei no quadro um monte de números com 2 algarismos vezes 11, e falei com eles assim: “eu vou resolver isso tudo sem armar a conta” e fui colocando 23 × 11, 45 × 11, 24 × 11 52 × 11, e fui botando, até a última, que foi 37 × 11.

Quando eu fui fazer os resultados, eu fui fazendo todas assim: 23 aí eu botei 2 e o 3 e botei o 5 no meio, 42 eu botei o 4 e o 2 e o 6 no meio, 32 eu botei o 3 2 e o 5 no meio, 61 × 11 eu coloquei 6 centenas 1 unidade e 7 no meio e aí eles que não são bobos e espertamente já foram dizendo para mim o que era para fazer:

“Professora você vai colocando assim: a unidade se mantém... (eles não usavam essas palavras, né) mas a unidade fica no mesmo lugar, o algarismo da dezena passa pra centena e você soma da centena com a unidade e vai pro meio. Isso porque quando você multiplica por 11, você multiplica por 10 e por 1, você desloca uma ordem e é exatamente como a gente faz.”

Aí quando chegou no último número 37 × 11 e eu ia botar o 3 na centena e o 7 na unidade eu tinha que botar o 10 na dezena, né? Mas, então eu virei para a turma e disse: “Ih, gente! Não dá! Esse não pode!” Eu nunca me esqueço que eu disse isso e o Guilherme virou para mim e disse assim: “Professora, pode sim!”

Aí eu: “Que pode o que Guilherme, claro que não!” e pensei comigo “a professora construtivista subestimando a crianças...” (risos)

Então, ele continuou: “Posso ir aí no quadro mostrar?”

Aí eu falei para ele: “Vem!”

Ele pegou o giz, que ainda era aquele giz branco, e eu falei “Pode vir!”, como quem diz “vem que eu quero ver”.

Ele foi e fez assim: Botou o 3 botou o 7 botou o 10 no meio riscou, botou o zero no meio e botou o 4. Então, o 10 não vale 1 centena? Ele somou ao 3 e a dezena ele ficou com 0. Então, 37 vezes 11 dava 407.

Caraca, eu nunca me esqueci disso! Eu fiquei embasbacada como ele resolveu. E eu não tinha pensado naquilo.

Aí, dali em diante eu comecei a propor para a turma atividades do tipo “e se a gente pensar em 3 algarismos? Como seria?”

Eu nunca tinha pensado naquilo antes, mas depois desse grupo eu fiz com as outras turmas e aí eu comecei tipo 143 × 11. Cara, eles estabeleceram a relação dizendo que a mesma coisa que a gente fez com 2 algarismos dá para fazer com 3. No final todos chegaram a essa conclusão de que tudo tinha a ver com o sistema de numeração decimal, mas aí eu tive que mediar.

Atividade 13 - Jogo Zig-Zag

RELATO DA PROFESSORA KATHERINE:

Tem outra! Você conhece o jogo Zig-Zag?

O jogo Zig-Zag é um tabuleiro com um monte de números que é uma corrida. As crianças têm que estar de um lado e chegar ao outro, atravessar o tabuleiro. Só que para você atravessar o tabuleiro, a você tem que pegar... Bom, são 3 dados para você jogar, e você tem que jogar os 3 dados e usando adição ou subtração você tem que arrumar um jeito de entrar no tabuleiro. Então, pensa bem, a criança joga o dado e aí cai os números 2, 3, e 5 e têm vários números ali no tabuleiro, pois é um quadriculado cheio de algarismo e o maior é o 9. Logo, a criança tem que arrumar um jeito de com os números 2, 3, 5 achar um resultado usando adição ou subtração que esteja ali no tabuleiro.

A tendência é a criança, de imediato, fazer a adição dos números, então 2 + 3 = 5 e 5 + 5 = 10, só que não tem 10. Então, ela não vai ver o 10 ali, e aí ela percebe a necessidade de usar a subtração, então 5 - 2 = 3 e 3 + 3 = 6. Assim ela marca o 6 no tabuleiro e entra na brincadeira com o 6. Os outros fazem a mesma coisa e volta para ela. Na próxima vez, ela só pode seguir adiante no jogo se ela conseguir um resultado que dê em cima desse 6 naquela bifurcação, então, tudo é assim seguidinho.

ANEXO B – Mulheres da matemática homenageadas na dissertação

A seguir apresentamos um resumo das biografias das mulheres da matemática que foram homenageadas nessa dissertação.

Amalie Emmy Noether

Nesta pesquisa, usamos o primeiro e o segundo nome de Amalie Emmy Noether para representar duas professoras, denominadas como Amelie e Emmy. Amalie Emmy Noether foi uma matemática germânica, nasceu em 23 de março de 1882 em Erlange, Bavaria (Alemanha), e morreu em 14 de abril de 1935. Foi a filha mais velha de uma família judia de quatro filhos. Concluiu o doutorado com uma dissertação sobre invariantes algébricos e ganhou notoriedade por seu trabalho em álgebra abstrata. Em virtude de sua condição feminina, somente após mais de dez anos ela pôde ingressar nos quadros de Göttingen, graças à ajuda de colegas como Hilbert, com quem ela publicou um catálogo com o título de *Seminário de física-matemática* em 1916. Em 1921 publicou um paper de fundamental importância para o desenvolvimento da álgebra moderna, chamado *Idealtheorie in Ringbereichen*. Seu trabalho sobre teoria dos invariantes foi usado por Albert Einstein na formulação da teoria da relatividade.

Hipátia de Alexandria

Hipátia de Alexandria é considerada a primeira mulher matemática na História. Nasceu em Alexandria, Egito, em 370 e morreu também em Alexandria no dia 08 de março de 415. Coincidentemente, no dia 08 de março é comemorado o Dia Internacional da Mulher e, de fato, Hipátia foi uma mulher à frente de seu tempo, dedicando-se ao estudo de diversas áreas do conhecimento como Filosofia, Matemática, Astronomia e Poesia. Embora sendo muito culta e muito bonita, nunca se casou. Sua vida foi dedicada aos seus estudos e aos seus alunos.

Katherine Johnson

A matemática afro-americana é uma das personagens retratadas no filme "Estrelas além do tempo", que resgata a trajetória de cientistas negras que trabalharam na NASA durante a corrida espacial, na década de 1960. Naquela época, ainda não se usava computadores para fazer cálculos complexos, e foi Katherine a responsável pelas contas que garantiram a ida e a volta de astronautas ao espaço com segurança**.** Por ser mulher e negra, sofreu muito preconceito, mas seu pioneirismo na ciência espacial foi incontestável pelos trabalhos, pesquisas e artigos científicos que produziu.

Maria Gaetana Agnesi

Maria Gaetana Agnesi (1718-1799) foi uma matemática italiana. Sua principal obra foi o compêndio profundo e claro de análise algébrica e infinitesimal intitulado “Instituzioni Analitiche” (Instituições Analíticas). Maria foi considerada uma menina prodígio, pois muito cedo falava francês. Aos 13 anos de idade, já havia adquirido fluência no grego, hebraico, espanhol, alemão e latim, sendo considerada uma verdadeira poliglota. Ela é conhecida pela “curva de Agnesi” também denominada de “bruxa de Agnesi”, em virtude de uma má tradução de John Colson. Essa curva foi estudada por Agnesi em 1748 no seu livro *Instituzioni analitiche*.

Maryam Mirzakhani

Maryam Mirzakhani foi uma matemática iraniana. Por suas contribuições à dinâmica e à geometria de superfícies de Riemannn e seus espaços módulos, Maryam foi premiada com a Medalha Fields em 2014. De fato, ela foi a primeira mulher a ser contemplada com a Medalha Fields, que é considerada a maior premiação que um matemático pode receber.

Maria Laura Mouzinho Leite Lopes

Primeira doutora em Matemática do Brasil, foi, também, a primeira mulher a se tornar Membro Titular da Academia Brasileira de Ciências, em 1951. Em sua carreira, a pernambucana atuou em instituições de prestígio como a Universidade de Chicago, nos Estados Unidos, a Universidade Federal do Rio de Janeiro e o Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA), onde foi a primeira mulher a ministrar aulas de Geometria no curso de Engenharia. Participou da criação do CNPq e do IMPA.

Sophie Germain

Sophie Germain foi uma matemática francesa que teve que assumir uma personalidade masculina para poder estudar Matemática. Trabalhou em uma das áreas mais difíceis da Matemática: Teoria dos Números. São famosos os primos de Germain, pois Sophie provou a validade do Último Teorema de Fermat para esses números primos.