



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Ciências Sociais

Faculdade de Ciências Econômicas

Filipe Higino Dias de Souza

**Contágio financeiro entre o petróleo e os mercados de ações durante a
pandemia da COVID-19: Evidências via cópulas bivariadas estáticas,
dinâmicas e Markovianas**

Rio de Janeiro

2024

Filipe Higino Dias de Souza

Contágio financeiro entre o petróleo e os mercados de ações durante a pandemia da COVID-19: Evidências via cópulas bivariadas estáticas, dinâmicas e Markovianas

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-graduação em Ciências Econômicas, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Antônio Lucena Aiube

Coorientador: Prof. Dr. Andrea Ugolini

Coorientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Gonçalves da Silva

Rio de Janeiro

2024

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/REDE SIRIUS/BIBLIOTECA CCS/B

S729 Souza, Filipe Higinio Dias de
Tese Contágio financeiro entre o petróleo e os mercados de ações durante a pandemia da COVID-19: evidências via cópulas bivariadas estáticas, dinâmicas e Markovianas / Filipe Higinio Dias de Souza – 2024.
154 f.

Orientador: Prof. Dr Fernando Antônio Lucena Aiube
Coorientador: Prof. Dr. Andrea Ugolini
Coorientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Gonçalves da Silva
Tese (Doutorado em Ciências Econômicas) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Ciências Econômicas.

1. Mercado de capitais - Teses. 2. Copula (Estatística matemática) - Teses. 3. Petróleo – Aspectos econômicos – Tese. I. Aiube, Fernando Antônio Lucena. II. Ugolini, Andrea. III. Silva, Carlos Alberto Gonçalves da. IV. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Faculdade de Ciências Econômicas. V. Título.

CDU 336.76

Bibliotecária: Lucia Andrade CRB7/5272

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Filipe Higino Dias de Souza

Contágio financeiro entre o petróleo e os mercados de ações durante a pandemia da COVID-19: Evidências via cópulas bivariadas estáticas, dinâmicas e Markovianas

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-graduação em Ciências Econômicas, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovado em: 29 de agosto de 2024.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fernando Antônio Lucena Aiube (Orientador)

Faculdade de Ciências Econômicas – UERJ

Prof. Dr. Andrea Ugolini (Coorientador)

Faculdade de Ciências Econômicas – UERJ

Prof. Dr. Edison Americo Huarsaya Tito

Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dr. Carlos Alberto Gonçalves da Silva (Coorientador)

Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca

Prof. Dr. Antônio Carlos Figueiredo Pinto

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Carlos Henrique Dias Cordeiro de Castro

Fundação Getúlio Vargas do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro

2024

DEDICATÓRIA

Dedico esta dissertação a meus pais, Maurício e Rosany, e irmãos, Gabriela e Allan, que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por me abençoar com saúde, proteção e força no decorrer desta importante conquista em minha vida.

A meus pais, Maurício e Rosany, por todo suporte, dedicação e amor que me proporcionaram ao longo dessa jornada.

A meus irmãos, Gabriela e Allan, pelo apoio, camaradagem e constante incentivo aos meus estudos.

Aos meus amigos pelo companheirismo e incentivo que me deram nos momentos difíceis.

Aos meus orientadores, Dr. Fernando Antônio Lucena Aiube, Dr. Andrea Ugolini e Dr. Carlos Alberto Gonçalves da Silva, pelo esforço e dedicação, transmitindo-me sempre tranquilidade e confiança.

Aos professores e funcionários da secretaria do Programa de Pós-graduação em Ciências Econômicas da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

A todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração desta dissertação.

RESUMO

SOUZA, F.H.D. *Contágio financeiro entre o petróleo e os mercados de ações durante a pandemia da COVID-19: Evidências via cópulas bivariadas estáticas, dinâmicas e Markovianas*. 2024. 153 f. Tese (Doutorado em Ciências Econômicas) – Faculdade de Ciências Econômicas, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2024.

O presente estudo empregou funções de cópulas estáticas, dinâmicas e Markovianas, para examinar a existência de efeito de contágio financeiro entre o mercado de energia, representado pelos preços do petróleo, e os índices de ações, de um conjunto de economias emergentes, representadas por Brasil, Índia, México e China, e um conjunto de economias desenvolvidas, representadas por Estados Unidos, Reino Unido, Alemanha e Japão, durante a recente crise econômica de 2020, ocasionada pela pandemia da COVID-19. Foi empregado o modelo ARMA-GJR-GARCH com erros seguindo uma função de distribuição *t*-Student assimétrica para as distribuições marginais e cópulas Gaussiana, *t*-Student, Gumbel e Clayton para a distribuição conjunta. Utilizando os quantis dos resíduos padronizados dos preços à vista do petróleo Brent e dos índices IBOVESPA, NIFTY-500, S&P/BMV-IPC, SSE, S&P-500, FTSE-100, DAX e NIKKEI-225, foi constatado, por meio de cópulas estática/dinâmicas, aumento significativo na dependência quantílica entre o petróleo e grande parte dos mercados analisados, após o advento da COVID-19, o que constitui evidência de contágio no sentido do *shift contagion*. O aumento da correlação e a mudança na estrutura de dependência, com predominância de dependência de cauda inferior e simétrica, caracteriza a maioria dos mercados analisados no período de crise. Isto indica que aumentos significativos na dependência da cauda representam uma dimensão real dos fenômenos contagiosos. Aprofundamos nossa análise, associando as cópulas à modelos de mudança de regime de Markov, método este capaz de acomodar quebras estruturais na variância e, por isso, não depende de determinações *ad hoc* relativas ao período de crise. Por meio deste, evidenciamos novamente eventos contagiosos para a maioria dos casos analisados, porém, os mercados asiáticos, constituídos por China, Japão e Índia, não apresentaram evidências de contágio, visto que não foram identificadas mudanças expressivas em suas respectivas dependências quantílicas com o petróleo. Nossas análises empíricas têm implicações potencialmente importantes para a gestão de riscos e elaboração de políticas públicas adequadas para gerenciar e mitigar os efeitos colaterais do contágio.

Palavras-chave: Contágio Financeiro. Petróleo. Mercado de ações. Cópula estática. Cópula dinâmica. Cópula de mudança de regime de Markov.

ABSTRACT

SOUZA, F.H.D. *Financial contagion between oil and stock markets during the COVID-19 pandemic: Evidence from static, dynamic and Markovian bivariate copulas*. 2024. 153 f. Tese (Doutorado em Ciências Econômicas) – Faculdade de Ciências Econômicas, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2024.

The present study used static, dynamic and Markovian copula functions to examine the existence of a financial contagion effect between the energy market, represented by oil prices, and stock indices, of a set of emerging economies, represented by Brazil, India, Mexico and China, and a group of developed economies, represented by the United States, United Kingdom, Germany and Japan, during the recent economic crisis of 2020, caused by the COVID-19 pandemic. The ARMA-GJR-GARCH model was used with errors following an asymmetric t -Student distribution function for the marginal distributions and Gaussian, t -Student, Gumbel and Clayton copulas for the joint distribution. Using the quantiles of the standardized residuals of spot prices for Brent oil and the IBOVESPA, NIFTY-500, S&P/BMV-IPC, SSE, S&P-500, FTSE-100, DAX and NIKKEI-225 indices, it was found, through static/dynamic copulas, significant increase in quantile dependence between oil and most of the markets analyzed, after the advent of COVID-19, which constitutes evidence of contagion in the sense of shift contagion. The increase in correlation and the change in the structure of dependence, with a predominance of lower and symmetric tail dependence, characterizes the majority of markets analyzed during the crisis period. This indicates that significant increases in tail dependency represent a real dimension of contagious phenomena. We deepen our analysis, associating the copulas with Markov regime change models, a method capable of accommodating structural breaks in variance and, therefore, does not depend on *ad hoc* determinations relating to the crisis period. Hereby, we once again highlighted contagious events for the majority of cases analyzed, however, the Asian markets, consisting of China, Japan and India, did not show evidence of contagion, as no significant changes were identified in their respective quantile dependence on oil. Our empirical analyzes have potentially important implications for risk management and the development of appropriate public policies to manage and mitigate the side effects of contagion.

Keywords: Financial Contagion. Oil. Stock market. Static copula. Dynamic copula. Markov regime-switching copula.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Quadro 1	Consumo de petróleo por país.....	17
Quadro 2	Síntese dos estudos empíricos de contágio financeiro.....	29
Figura 1	Gráfico de contorno das densidades de cópulas com marginais $N(0,1)$	55
Figura 2	Distância mínima de $(u_{1,t}, u_{2,t})$	59
Figura 3	Evolução dos retornos diários do petróleo e dos índices de ações no período de 2017-2022.....	77
Figura 4	Diagrama de dispersão dos retornos diários do petróleo e dos índices.....	81
Quadro 3	Melhores funções de cópula no período de 2017-2020.....	90
Quadro 4	Melhores funções de cópula no período de 2020-2022.....	94
Quadro 5	Contágio financeiro pela análise de cópulas estáticas e dinâmicas.....	97
Quadro 6	Melhores funções de MS-cópulas com dois regimes.....	110
Quadro 7	Contágio financeiro a partir de MS-cópulas com dois regimes.....	112
Quadro 8	Valores GoF das MS-cópulas com dois e três regimes.....	114
Quadro 9	Contágio financeiro a partir de MS-cópulas com três regimes.....	115
Quadro 10	Sugestões para atenuar os impactos do contágio financeiro.....	119
Figura 5	Diagramas de dispersão das cópulas bivariadas: Gaussiana (1ª Linha), t -Student (2ª Linha), Gumbel (3ª Linha) e Clayton (4ª Linha) com marginais $N(0,1)$	136
Figura 6	Evolução dos preços do petróleo e dos índices de mercado no período de 2017-2022.....	137
Figura 7	Evolução dos índices de mercado modificados no período de 2017-2022...	138
Figura 8	Histogramas dos quantis dos resíduos padronizados dos retornos do petróleo e dos índices de mercado.....	142
Figura 9	Evolução do coeficiente de correlação linear das cópulas Gaussianas estáticas e dinâmicas.....	145
Figura 10	Evolução do coeficiente de correlação das cópulas t -Student estáticas e dinâmicas.....	146
Figura 11	Evolução do coeficiente de correlação das cópulas de Gumbel estáticas e dinâmicas.....	147
Figura 12	Evolução do coeficiente de correlação das cópulas de Clayton estáticas e dinâmicas.....	148
Quadro 11	Melhores funções de cópula MS com três regimes.....	154

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Especificação das funções de cópula.....	54
Tabela 2	Medidas de dependência das cópulas com marginais $N(0,1)$	55
Tabela 3	Estatísticas descritivas dos retornos diários do petróleo e das ações.....	79
Tabela 4	Estimativas dos modelos de distribuição marginal.....	85
Tabela 5	Tau's de Kendall e parâmetros iniciais das cópulas no período de 2017-2020.....	87
Tabela 6	Estimativas do modelo de cópula estática para retornos do petróleo e das ações no período de 2017-2020.....	88
Tabela 7	Estimativas do modelo de cópula dinâmica para retornos do petróleo e das ações no período de 2017-2020.....	89
Tabela 8	Tau's de Kendall das cópulas elípticas e arquimedianas no período de 2020-2022.....	91
Tabela 9	Estimativas do modelo de cópula estática para retornos do petróleo e das ações no período de 2020-2022.....	92
Tabela 10	Estimativas do modelo de cópula dinâmica para retornos do petróleo e das ações no período de 2020-2022.....	93
Tabela 11	Estimativas das MS-cópulas com dois regimes.....	109
Tabela 12	Estimativas das especificações dos modelos de distribuição marginal no período de 2017-2022.....	139
Tabela 13	Estimativas dos modelos de distribuição marginal no período de 2017-2020..	140
Tabela 14	Estimativas dos modelos de distribuição marginal no período de 2020-2022..	141
Tabela 15	Estimativas da cópula estática para os retornos do petróleo e das ações no período de 2017-2022.....	143
Tabela 16	Estimativas da cópula dinâmica para os retornos do petróleo e das ações no período de 2017-2022.....	144
Tabela 17	Estimativas das MS-cópulas com três regimes.....	153

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

aGARCH	<i>Augmented GARCH</i>
AIC	<i>Akaike Information Criterion</i>
ARCH	<i>Autoregressive Conditional Heteroscedasticity</i>
ARCH-LM	<i>Autoregressive Conditional Heteroscedasticity based on the Lagrange Multiplier</i>
ARMA	<i>Autoregressive-Moving Average</i>
BIC	<i>Bayesian Information Criterion</i>
BP	Box-Pierce
CDO	<i>Collateralized Debt Obligations</i>
DAX	<i>Deutscher Aktienindex</i>
DCC	<i>Dynamic Conditional Correlation</i>
EGARCH	<i>Heteroscedasticity Conditional Autoregressive Generalized Exponential</i>
EM	<i>Expectation-Maximization</i>
FKPSS	Fourier-Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin
FOB	<i>Free on Board</i>
FTSE	<i>Financial Times Stock Exchange</i>
GARCH	<i>Heteroscedasticity Conditional Autoregressive Generalized</i>
GED	<i>Generalized Error Distribution</i>
GJR-GARCH	<i>Glosten-Jagannathan-Runkle Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity</i>
HAR-RV	<i>Heterogeneous Autoregressive - Realized Volatility</i>
IBOVESPA	Índice Bovespa
IM	Inferência para Margens
LL	Logrítmo da verossimilhança
MIDAS	<i>Mixed Data Sampling</i>
MTC	Mecanismo Europeu de Taxas de Câmbio
MV	Máxima verossimilhança
MVC	Máxima Verossimilhança Canônica
MVE	Máxima Verossimilhança Exata

OCDE	Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico
PROBIT	<i>Probability Unit</i>
MGARCH	<i>Multivariate GARCH</i>
MS	<i>Markov-Switching</i>
NIFTY	<i>National Stock Exchange Fifty</i>
RS	<i>Regime-Switching</i>
S&P/BMV-IPC	<i>Standard and Poor's/Bolsa Mexicana de Valores-Indice de Precios y Cotizaciones</i>
S&P	<i>Standard and Poor's</i>
SSE	<i>Shanghai Stock Exchange</i>
SVAR	<i>Structural Vector Autoregressive</i>
VAR	<i>Vector Autoregressive</i>
VEC	<i>Vector Error Correction</i>
WTI	<i>West Texas Intermediate</i>

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	13
1. PANDEMIA DA COVID-19	19
1.1. O COVID-19 e a volatilidade dos mercados	19
1.2. O COVID-19 e os preços do petróleo	20
1.3. O COVID-19 e os índices de ações	21
2. CONTÁGIO FINANCEIRO	22
2.1. Definições de contágio financeiro	22
2.2. Testes empíricos de contágio financeiro	24
3. MODELOS MARGINAIS	30
3.1. Estrutura do Modelo	30
3.2. Processos autoregressivos de média móvel	31
3.3. Processos de heterocedasticidade condicional autorregressivos	32
3.4. Estimação dos modelos marginais	35
4. INTRODUÇÃO À CÓPULAS	39
4.1. Noções básicas de distribuições conjuntas	39
4.2. Funções cópula	41
4.3. Teorema de Sklar	43
4.4. Famílias de cópulas	46
4.4.1. <u>Cópulas elípticas</u>	47
4.4.2. <u>Cópulas arquimedianas</u>	51
4.4.3. <u>Síntese das funções de cópula</u>	54
4.5. Cópula Dinâmica	56
4.5.1. <u>Cópulas elípticas dinâmicas</u>	57
4.5.2. <u>Cópulas arquimedianas dinâmicas</u>	58
4.6. Métodos de estimação para cópulas	60
5. MEDIDAS DE DEPENDÊNCIA	64
5.1. Definições e propriedades básicas	64
5.2. Correlação de Pearson	66
5.3. Tau de Kendall	67
5.4. Dependência Quantílica	70
5.5. Dependência Caudal	70

6.	CONTÁGIO VIA CÓPULAS ESTÁTICAS E DINÂMICAS.....	76
6.1.	Dados.....	76
6.2.	Especificações dos modelos marginais	82
6.3.	Resultados dos modelos marginais	84
6.4.	Resultados das cópulas estáticas e dinâmicas pré-COVID-19.....	86
6.5.	Resultados das cópulas estáticas e dinâmicas pós-COVID-19.....	91
7.	CONTÁGIO VIA CÓPULAS DE MUDANÇA DE REGIME DE MARKOV	99
7.1.	Modelos de mudança de regime e cópulas.....	99
7.2.	Teste de <i>goodness-of-fit</i> e número de regimes	104
7.3.	Resultados das cópulas de mudança de regime de Markov com dois regimes ...	108
7.4.	Resultados das cópulas de mudança de regime de Markov com três regimes	113
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	116
	REFERÊNCIAS.....	121
	ANEXO A – Modelo autorregressivo de média móvel	132
	ANEXO B – Gráficos de dispersão das cópulas	136
	ANEXO C – Gráficos dos preços do petróleo e dos índices de mercado	137
	ANEXO D – Especificações dos modelos marginais pelo critério AIC	139
	ANEXO E – Modelos marginais pré e pós-início da COVID-19.....	140
	ANEXO F – Transformação quantílica	142
	ANEXO G – Cópulas estáticas e dinâmicas para a amostra geral.....	143
	ANEXO H – Gráficos das cópulas estáticas e dinâmicas para a amostra geral.....	145
	ANEXO I – Algoritmo Expectativa-Maximização.....	149
	ANEXO J – Algoritmo para o método <i>bootstrap</i> paramétrico	152
	ANEXO K – Cópulas de mudança de regime de Markov com três regimes.....	153

INTRODUÇÃO

Apesar de nos últimos anos termos presenciado o surgimento de diversas fontes alternativas de energia, com o propósito central de reduzir a dependência do mundo em relação aos combustíveis fósseis, o petróleo continua sendo de suma importância no que tange a produção energética e é, indiscutivelmente, capaz de impulsionar o desenvolvimento econômico e a prosperidade de um país. Além disso, diversos setores essenciais da economia dependem do petróleo como insumo básico para a produção. Portanto, há de se esperar que um aumento do preço do petróleo tem inevitavelmente impacto nestes setores e, subsequentemente, no crescimento econômico. O preço do petróleo afeta tanto os preços globais dos bens e serviços, como os padrões de consumo dos consumidores em uma economia. O seu aumento pode levar a um excedente zero dos consumidores e obrigá-los a cortar despesas com outros bens e serviços. Recentemente, diversos fatores têm influenciado na volatilidade do preço do petróleo, e.g. a crescente procura por petróleo nos mercados emergentes, preocupações relacionadas às mudanças climáticas, situações geopolíticas, o problema da segurança energética em países exportadores de petróleo e perturbações no fornecimento potencial destas nações devido à instabilidade política. Esta tese focará especificamente no evento trágico ocorrido em 2020, que teve uma influência expressiva sobre a volatilidade dos preços do petróleo, a pandemia da COVID-19. A pandemia não só acelerou a instabilidade financeira internacional, como também perturbou as alocações de ativos em todo o planeta, causando grandes oscilações nos mercados acionários das economias globais (GURU *et al.*, 2023).

Desse modo, devido à crescente importância do preço do petróleo na economia, agentes do mercado (formuladores de políticas públicas, economistas, investidores, etc.) têm ficado cada vez mais atentos às correlações entre os mercados de energia e os mercados acionários. Uma vasta literatura empírica detectou conexões pequenas, mas significativamente negativas, entre o petróleo e os mercados de ações, como pode ser visto em Chiou e Lee (2009), Filis (2010), Miller e Ratti, (2009), Oberndorfer (2009), Park e Ratti (2008), dentre outros. A partir destes fatos estilizados surge uma questão importante que irá permear o presente estudo, será que estes padrões de co-movimento do petróleo e as bolsas de valores permanecem constantes durante a crise econômica/financeira desencadeada pela pandemia da COVID-19? Uma crise induz normalmente os preços dos ativos a uma queda nas bolsas de valores, podendo criar corridas especulativas e fuga de capitais, o que conduz o mercado a um período de instabilidade. Ela gera também uma desconfiança por parte dos investidores, prejudicando assim o

crescimento econômico. A transmissão de choques entre mercados é algo complexo de se explicar com base em alterações nos fundamentos macroeconômicos, por isso, para melhor compreensão deste fenômeno econômico, muitos estudiosos adotam o termo “contágio” para se referir ao mesmo. A mensuração do contágio se sustenta basicamente em evidências de um aumento significativo nas ligações entre mercados. Portanto, para que os agentes do mercado possam compreender os padrões de co-movimento do petróleo e dos mercados de ações durante um período de instabilidade econômica, como a da COVID-19 e, assim, tomarem as melhores decisões quanto a investimentos e políticas públicas, é fundamental testar se tal efeito de contágio existe entre estes mercados.

Embora a literatura empírica sobre a relação entre os mercados de ações e o mercado petrolífero tenha crescido, pouca atenção tem sido dada à análise do efeito contágio entre ambos, mesmo havendo uma alta frequência de dados destes mercados. Não há uma análise clara do impacto do petróleo sob uma perspectiva de interdependência ou contágio entre mercados. Apesar de alguns estudos discutirem a evolução das correlações entre mercadorias e ativos financeiros em período de crise e as suas consequências, o seu foco geralmente não está no efeito de contágio entre o petróleo e os mercados de ações. Como é o caso dos estudos de Buyuksahin e Robe (2014), Lautier e Raynaud (2012), Silvennoinen e Thorpy (2010) e Tang e Xiong (2012), que deram ênfase a uma série de fatores, e.g: (i) as correlações entre commodities e ativos financeiros; (ii) o efeito da financeirização de commodities sobre as correlações lineares entre diferentes commodities; e, (iii) a integração nos mercados de derivados de energia.

Apesar de não tratarem do efeito de contágio financeiro, estes estudos fornecem uma base sólida para se investigar o contágio entre o petróleo e os mercados de ações durante períodos de crise. Por exemplo, Lautier e Raynaud (2012) investigaram a integração em mercados de derivados de energia e constataram que o petróleo se conecta tanto aos produtos agrícolas como aos ativos financeiros e, portanto, é o melhor candidato para a transmissão de choques de preços. A partir destas descobertas é razoável esperar que o mercado do petróleo seja uma fonte de instabilidade para os mercados de ações durante crises financeiras. Tang e Xiong (2012), por sua vez, evidenciaram que as correlações entre commodities e ações aumentaram significativamente após a quebra do banco Lehman Brothers, que desencadeou a crise financeira de 2008. Durante este mesmo período de crise, Silvennoinen e Thorpy (2010) demonstraram que todas as séries de retornos do petróleo sofreram um aumento significativo de sua correlação com as ações dos EUA. Este aumento se sustentou ao longo do período de 2008 a 2009. Assim, é razoável esperar que haja um efeito de contágio entre o petróleo e os

mercados de ações durante períodos de crise. Por fim, Buyuksahin e Robe (2014) demonstraram que uma dummy temporal para o período de crise era sempre significativa entre as variáveis que descreviam as correlações entre mercadorias e ações. Por este motivo, os autores sugeriram que novos estudos tentassem examinar este fenômeno. É plausível concluir então que a análise do efeito de contágio entre os mercados de energia e de ações é relevante e necessária.

Além disso, grande parte da literatura referente a relação entre o petróleo e os mercados que se propõe discutir o efeito do choque do petróleo sobre os retornos das ações, utiliza geralmente as estruturas econométricas do VAR (*Vector Autoregressive*) ou do VEC (*Vector Error Correction*), como é caso dos estudos de Apergis e Miller (2009), Cong *et al.* (2008), Huang *et al.* (1996), Jones e Gautam (1996), dentre outros. Wen *et al.* (2012) resumem algumas das características dos modelos VAR/VEC mais atrativas à comunidade científica: (i) são ferramentas simples e flexíveis para se modelar a relação entre mercados; (ii) não há necessidade de assumir endogeneidade e exogeneidade das variáveis; (iii) são métodos capazes de controlar a correlação serial nos retornos dos ativos; e, (iv) é fácil observar as interações entre as variáveis a partir das equações dos modelos e, assim, determinar o efeito do preço do petróleo sobre o mercado por meio de uma função de resposta ao impulso. Entretanto, estes modelos também apresentam algumas desvantagens significativamente prejudiciais ao estudo de contágio, como: (i) é frequentemente assumido que os retornos dos ativos seguem distribuições normais, ignorando fatos estilizados (e.g. variáveis financeiras em geral não seguem uma distribuição Gaussiana) e impossibilitando a obtenção de correlações variantes no tempo; e, (ii) não são capazes de captar a dependência não linear ou as alterações nas caudas das curvas de retorno dos ativos. Devido a estas limitações, os modelos VAR e VEC se tornam inadequados à captura e mensuração do efeito de contágio entre mercados.

Deste modo, um dos maiores desafios dos estudos de contágio financeiro entre mercados é descobrir qual o melhor modelo econométrico para mensurar tal efeito. Até então, muitas técnicas de modelagem diferentes têm sido utilizadas para investigar o efeito de contágio entre os mercados financeiros, principalmente quando se trata de mercados de ações de um país. Porém, boa parte dos métodos testados apresentam algumas desvantagens que podem enviesar os resultados. A maioria dos estudos da década de 1990 giraram em torno da noção de quebra de correlação, i.e., um aumento estatisticamente significativo na correlação durante o choque (CALVO e REINHART, 1996; KING e WADHWANI, 1990; RAMCHAND e SUSMEL, 1998). Contudo, alguns autores argumentaram que testes de contágio baseados no coeficiente de correlação são inadequados, uma vez que este método não considera a heterocedasticidade condicional (BOYER *et al.*, 1999; FORBES e RIGOBON, 2002). E ainda, por ser uma medida

linear, a correlação se torna inadequada também caso o contágio analisado seja um evento caracterizado por mudanças não lineares de associação de mercado. Como o contágio pode ser um fenômeno não linear, Bae *et al.* (2003), Chan-Lau *et al.* (2004) e Longin e Solnik (2001) utilizaram modelos baseados na teoria dos valores extremos para estimar a dependência da cauda; Ramchand e Susmel (1998) e Chesney e Jondeau (2001) empregaram modelos de mudança de Markov para capturar a quebra estrutural na variância; e Chiang *et al.* (2007) trabalharam com modelos GARCH bivariados, visto que estes modelos captam a heterocedasticidade e fornecem as ferramentas necessárias para medir as correlações dinâmicas entre os mercados. No entanto, Rodriguez (2007) argumenta sobre as deficiências dos modelos de valores extremos, já que há sempre discricionariedade¹ ao definir uma observação extrema. Já quanto aos modelos de mudança de Markov e MGARCH (*Multivariate Heteroscedasticity Conditional Autoregressive Generalized*) frequentemente assumem um ajuste à normalidade bivariada, e esta suposição negligencia fatos estilizados dos retornos dos ativos, assim como ignora a não linearidade do efeito de contágio. Frente a estas limitações, aparece como opção o modelo de cópulas, que vem ganhando cada vez mais destaque na literatura empírica. Wen *et al.* (2012) destaca algumas das vantagens do método de cópulas em comparação com os métodos discutidos acima.

- i) As funções de cópula não assumem a normalidade bivariada dos retornos dos ativos, ao invés disso, elas permitem considerar a melhor distribuição marginal, para que assim seja construída uma distribuição conjunta eficaz ou, em outras palavras, uma distribuição conjunta onde não há perda de informações valiosas sobre o comportamento conjunto das variáveis aleatórias;
- ii) Funções de cópula, diferentemente do método de correlação, são capazes de descrever dependência não linear; e,
- iii) As funções de cópula não utilizam a discricionariedade para descrever observações extremas e, por isso, podem exibir padrões de comportamento da cauda com uma maior riqueza de informações, o que permite testar se os períodos de maior dependência também são caracterizados por mudanças nas caudas.

¹ A discricionariedade, ou o processo subjetivo de tomada de decisão na modelagem econométrica, pode introduzir diversas limitações que afetam a validade, robustez e interpretabilidade dos modelos. Aqui estão as principais limitações que a discricionariedade impõe aos modelos econométricos: vies de seleção na escolha de variáveis, erros de especificação do modelo, vies de endogeneidade e simultaneidade, interpretação subjetiva do modelo, sobreajuste ou subajuste, falta de transparência e reprodutibilidade das análises econométricas.

Em finanças, a distribuição conjunta dos ativos deve sempre levar em consideração dois fatores basilares: a dependência serial em cada ativo e a dependência entre os ativos. Subestimar este último pode ocasionar consequências financeiras e econômicas devastadoras. Além disso, é fundamental compreender que a dependência pode variar ao longo do tempo, podendo aumentar em períodos de crise. As cópulas superam facilmente este problema uma vez que são especialmente projetadas para modelar a dependência, podendo assumir qualquer tipo de distribuição probabilística. Por isso muitos modelos de dependência variável no tempo acabam sendo quase que inevitavelmente baseados em cópulas.

Nesse sentido, devido sua ampla utilização na literatura, o presente estudo empregará inicialmente modelos de cópulas variantes e invariantes no tempo. A partir destes modelos será analisado o efeito de contágio financeiro entre o petróleo e o mercado de ações de um conjunto de economias desenvolvidas, representadas por Estados Unidos, Reino Unido, Alemanha e Japão, e um conjunto de economias emergentes, representadas por Brasil, Índia, México e China, durante a recente crise econômica ocorrida em 2020, ocasionada pela pandemia da COVID-19. Para tanto, subdividimos o período amostral completo (2017-2022) em duas subamostras: a 1ª subamostra compreende o período de pré pandemia (2017-2020) e a 2ª subamostra compreende o período pandêmico (2020-2022). E assim, examinamos o grau e a natureza da associação entre estas duas variáveis. A seleção destes países foi motivada principalmente pelo fato deles estarem entre os maiores consumidores de petróleo do mundo, como descrito no Quadro 1. No contexto da instabilidade econômica em todo o mundo devido aos confinamentos induzidos pela COVID-19, justifica-se um estudo das relações entre mercados de ações e mercados de energia. Compreender tais relações contribui para a execução de estratégias de alocação de ativos e políticas regulatórias adequadas para gerenciar e mitigar os efeitos colaterais do contágio. Em outras palavras, o estudo do contágio entre os mercados petrolífero e acionários de diferentes economias é fundamental para a diversificação de carteiras de investimento, a gestão dos riscos energéticos e o planejamento da política energética.

Quadro 1 – Consumo de petróleo por país.

Ranking Global	País	Consumo Diário de Petróleo (em barris)	Participação Global	Galões Anuais (per capita)
1ª	Estados Unidos	19,687,287	20.3 %	922.4
2ª	China	12,791,553	13.2 %	139.9
3ª	Índia	4,443,000	4.6 %	50.9
4ª	Japão	4,012,877	4.1 %	484.4
7ª	Brasil	2,984,000	3.1 %	221.1
10ª	Alemanha	2,383,393	2.5 %	443.8
11ª	México	2,052,607	2.1 %	258.9
15ª	Reino Unido	1,583,896	1.6%	369.8

Fonte: Worldometer (2023)

No entanto, a principal contribuição do presente estudo reside na associação das cópulas a um modelo econométrico capaz de acomodar quebras estruturais na variância. Para tanto, selecionamos o denominado modelo de mudança de regime de Markov. As informações referentes aos modelos de mudança de regime serão apresentadas no Capítulo 7, porém, é importante destacar o fato destes não dependerem de uma determinação *ad hoc* do período de crise. Decisões que são tomadas sem um critério objetivo ou baseadas em suposições pessoais, preferências ou conveniências, podem introduzir viés à análise e distorcer os resultados e conclusões estatísticas. Como demonstrado por Dungey e Zhumabekova (2001), os testes de contágio podem ser severamente afetados pela dimensão dos períodos de “crise” e “não crise”. Dessa forma, o presente estudo complementa a análise empírica utilizando a metodologia de cópulas de mudança de regime de Markov que, simultaneamente, supera uma simples análise de quebras de correlações, é cautelosa na caracterização da não linearidade e da dependência, evita a discricão na identificação dos eventos contagiosos e na definição dos desfechos extremos e, ainda, não se baseia em decisões pouco criteriosas quanto ao intervalo que compreende o período de crise. Até o instante, não há na literatura trabalhos compatíveis à presente tese, onde é proposto o estudo de contágio financeiro entre mercados acionários e o mercado petrolífero, baseado na utilização de funções de cópula associadas ao modelo de mudança de regime de Markov. Isso realça ainda mais a importância desta pesquisa.

Assim sendo, organizamos nossa tese da seguinte forma. Dividimos o conteúdo em duas partes. A primeira parte consiste na revisão teórica, composta pelos Capítulos 1, 2, 3, 4 e 5. O Capítulo 1 faz algumas considerações sobre a relação da pandemia da COVID-19 com o mercado de ações e os preços do petróleo. O Capítulo 2 fornece a revisão, tanto teórica como empírica, da literatura referente ao contágio financeiro. Os Capítulos 3, 4 e 5 apresentam as metodologias utilizadas para modelagem do contágio financeiro entre o petróleo e os índices de ações, sendo elas: os modelos marginais, com destaque para o modelo GJR-GARCH, os modelos de cópula (elípticas e arquimedianas) e, por fim, as principais medidas de dependência, respectivamente. A segunda parte consiste na revisão empírica, composta pelos Capítulos 6 e 7. No Capítulo 6 são realizadas as análises dos resultados referentes aos modelos marginais e de cópulas estáticas e dinâmicas. No Capítulo 7 é introduzido os modelos de cópulas de mudança de regime de Markov, bem como o teste de *goodness-of-fit* proposto por Nasri *et al.* (2020). Em seguida, são realizadas as análises dos resultados referentes a tais metodologias. Por fim, são feitas as considerações finais.

1. PANDEMIA DA COVID-19

1.1. O COVID-19 e a volatilidade dos mercados

Antes de nos aprofundarmos na análise do efeito de contágio apresentaremos brevemente, conforme Awan *et al.* (2021), algumas considerações importantes sobre o efeito da COVID-19, em termos de volatilidade dos mercados de ações e dos preços do petróleo. Geralmente eventos catastróficos têm comportamento repentino e imprevisível, e a pandemia da COVID-19 não foi diferente. A doença surgiu na cidade de Wuhan, localizada na China, no final de 2019 e adquiriu caráter de pandemia a partir de março de 2020. Os impactos de eventos catastróficos sobre os mercados de ações e outras atividades econômicas importantes é algo comumente discutido na literatura. Considerando ataques terroristas, temos os estudos de Aslam e Kang (2013) e Aslam *et al.* (2018). Para terremotos e outros desastres naturais, podemos destacar os estudos de Ferreira e Karali (2015) e Hendricks *et al.* (2020). No caso da COVID-19, os impactos positivos e negativos da pandemia sobre os mais diversos setores vêm sendo amplamente estudados na literatura recente. Por exemplo, para o setor bancário, temos os estudos de Demirguc-Kunt *et al.* (2021) e Haq e Awan (2020). Com relação a mudanças climáticas e preocupações ambientais, temos Manzanedo e Manning (2020) e Zambrano-Monserrate *et al.* (2020).

No entanto, dentre os inúmeros setores estudados, a COVID-19 foi especialmente prejudicial aos mercados de ações e de *commodities* em geral, com destaque obviamente para o petróleo que é uma das matérias-primas mais importantes do mundo. A maior parte dos estudos referentes à influência da COVID-19 sobre a volatilidade dos mercados de ações e a do petróleo, examinam os países que constituem o G7 (Estados Unidos, Japão, Alemanha, Reino Unido, França, Itália e Canadá), e são diversas as metodologias empregadas, como: a análise de coerência wavelet, a análise de cointegração de Fourier, o teste de raiz unitária FKPSS (Fourier-Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin), a análise de regressões múltiplas, o modelo GARCH-MIDAS (*Mixed Data Sampling*), o modelo SVAR (*Structural Vector Autoregressive*), modelo HAR-RV (*Heterogeneous Autoregressive – Realized Volatility*), dentre outros. Sendo assim, apresentaremos alguns destes trabalhos para ter uma noção dos efeitos da pandemia sobre o petróleo e as bolsas de valores do mundo.

1.2. O COVID-19 e os preços do petróleo

Durante o período pandêmico, no auge das políticas de confinamento, os preços do petróleo declinaram drasticamente de 60 dólares para 31 dólares/barril. Segundo Weerasinghe (2020), uma redução desta magnitude não se via desde a Guerra do Golfo em 1991. Através do método de coerência wavelet, Xu *et al.* (2020) avaliaram a capacidade de *hedge* do petróleo face aos ativos financeiros, e encontraram a presença de correlação variável no tempo entre as variações do petróleo e dos mercados de ações em economias desenvolvidas. Seus resultados confirmam também a capacidade de *hedge* do petróleo. Foi identificado ainda uma maior correlação entre a volatilidade dos mercados de ações dos EUA e do Japão com a volatilidade do petróleo. Mohammed e Barrales-Ruiz (2020) utilizando o modelo SVAR, examinaram a perturbação do mercado petrolífero durante a pandemia, e constataram que as flutuações na volatilidade dos mercados e nas condições globais influenciaram diretamente a tomada de decisão dos investidores nos mercados financeiros. Esta mudança na tomada de decisões dos mercados, ocasionada pelo COVID-19, desempenhou um papel importante no aumento da volatilidade do petróleo e dos movimentos de preços.

A literatura recente revela também a existência de conexões significativas entre a incerteza macroeconômica e a volatilidade do preço do petróleo (BAKAS e TRIANTAFYLLOU, 2019; JOËTS *et al.*, 2017; PROKOPCZUK *et al.*, 2019). A abordagem convencional mostra que o aumento da incerteza econômica resulta num aumento da volatilidade dos preços do petróleo. Durante o período pandêmico, a incerteza dos resultados macroeconômicos aumentou. Algumas das possíveis razões incluem perturbações nas atividades econômicas e a incerteza sobre o declínio das flutuações macroeconômicas em tempos normais (BASU e BUNDICK, 2017; BONCIANI e VAN ROYE, 2016; POPP e ZHANG, 2016). Da mesma forma, a abordagem por opções reais para a teoria do investimento em tempos de incerteza preconiza que as empresas atrasem suas decisões de investimento em tempos de incerteza, i.e., as empresas utilizam a sua opção real de esperar por este período incerto, visto que as decisões de investimento são irreversíveis (BRENNAN e SCHWARTZ, 1985; HENRY, 1974; TRIANTIS e HODDER, 1990). Portanto, à medida que a incerteza em torno da COVID-19 aumenta, a incerteza macroeconômica aumenta também e o investimento empresarial diminui, explicando assim o efeito negativo da pandemia na volatilidade do preço do petróleo.

1.3. O COVID-19 e os índices de ações

Tal como os preços do petróleo, os mercados de ações em todo o mundo registaram grandes quedas nos preços das ações e interromperam suas negociações inúmeras vezes. Os índices Dow Jones e S&P500, que levam em conta os preços das ações de diversas empresas nos EUA, despencaram mais de 20% em março de 2020. O índice NIKKEI, que considera os preços das ações das empresas na Bolsa de Valores de Tóquio, também caiu significativamente durante o mesmo período. Até mesmo a Bolsa de Valores de Colombo, no Sri Lanka, registrou uma queda de quase 9% no seu índice de preços de todas as ações. À medida que os preços das ações caíam, os mercados bolsistas transformavam-se em “*Bear Markets*”, ou seja, as desvalorizações vinham acompanhadas de um pessimismo cada vez maior dos investidores (WEERASINGHE, 2020). Esta grande instabilidade nos mercados globais, desencadeada pelo COVID-19, levou ao desenvolvimento de uma ampla literatura empírica sobre os impactos da pandemia nos índices de bolsas de valores do mundo.

Şenol e Zeren (2020), utilizando o teste de raiz unitária FKPSS, estudaram as consequências da pandemia nos mercados financeiros globais. Os resultados mostraram que a volatilidade de todos os índices analisados é significativamente correlacionada e caminha junto à série dos casos infectados e à série do total de mortes. Já Pata (2020), além de demonstrar que a volatilidade econômica e financeira aumentou, expôs também os efeitos adversos da pandemia sobre os mercados de ações do G7. O autor utilizando a cointegração de Fourier, evidenciou um impacto negativo da COVID-19 em todos os países do G7. Entre todos, o índice da bolsa da Itália foi o mais afetado negativamente, enquanto o índice do Japão teve um efeito negativo fraco comparado aos demais países. Vale destacar também que pelo teste FKPSS, o choque negativo persistirá no longo prazo. Vale destacar também, que alguns estudos examinaram a volatilidade horária dos preços do petróleo e o papel da COVID-19, utilizando metodologias, tais como: regressão múltipla, modelo GARCH-MIDAS, modelo HAR-RV, dentre outros. Este é caso de Akhtaruzzaman *et al.* (2021), Demirer *et al.* (2020), Devpura e Narayan (2020) e Lin e Chang (2020). Após calibrar os preditores da volatilidade do preço do petróleo, verificou-se que a pandemia da COVID-19 levou a um aumento na volatilidade diária do preço do petróleo entre 8% e 22%. Foram examinadas também as respostas dos preços globais das ações durante o surto da COVID-19 e constatou-se a influência da pandemia no contágio financeiro entre empresas do G7 e da China. Todos estes resultados demonstram a relação intrínseca entre os mercados acionários e a pandemia da COVID-19.

2. CONTÁGIO FINANCEIRO

2.1. Definições de contágio financeiro

A década de 90 foi marcada por uma série de profundas crises financeiras e cambiais tais como: o colapso do mercado dos Estados Unidos em 1987, o colapso do peso mexicano de 1994, a crise do leste asiático de 1997, o colapso russo de 1998 e a desvalorização cambial brasileira de 1999. Segundo Forbes e Rigobon (2001), uma característica marcante dessas sucessivas crises foi a rápida transmissão do choque inicial de um país específico, para outros mercados de tamanhos e estruturas diferentes em todo o mundo. Com a ocorrência desse fenômeno, fez-se necessário estudar as formas de propagação de choques na economia, assim como defini-las.

No século XXI ocorreram também crises importantes como: a Bolha da Internet em 2001 (dot.com), a Crise do Subprime em 2008, a Crise da dívida pública da Zona Euro em 2011 e a mais recente pandemia do Coronavírus em 2020. Porém, segundo Edwards (2000), foi a partir da eclosão das crises da década de 90 que o termo “contágio financeiro” passou a ser frequentemente utilizado na literatura acadêmica. Uma interpretação simples para o conceito de contágio financeiro consiste na transmissão de choques financeiros entre mercados e países ao redor do mundo. Entretanto, o “por que”, “quando” e “como” os choques são retransmitidos ainda é uma questão em aberto na literatura. Além disso, os canais pelos quais os choques são transmitidos continuam sendo um enigma, e a extensão e estabilidade das relações entre os países que explicam o contágio ainda precisam ser testadas. Portanto, apesar de existir uma forte concordância entre acadêmicos e profissionais que o contágio ocorreu durante as crises mexicana, asiática e russa, surpreendentemente, não há consenso sobre uma definição formal de contágio. Devido à falta de consenso sobre o que exatamente o contágio implica, são encontradas na literatura diversas definições e metodologias para mensurá-lo.

Para Pericoli e Sbracia (2003), o contágio financeiro representa um aumento significativo da probabilidade de se ocorrer uma crise em determinado país, condicionada a uma crise de outro país. Para os autores qualquer análise teórica relacionada ao contágio financeiro deve ser capaz de identificar os canais pelos quais são transmitidos os choques e examinar se estes são estáveis. Já Claessens *et al.* (2000) definem contágio como a propagação de perturbações no mercado de um país para o mercado de outro país, evidenciadas por meio

de co-movimentos nas taxas de câmbio, preços de ações, fluxos de capitais e spreads soberanos. De acordo com Viale *et al.* (2014), na literatura de apreçamento de ativos, contágio financeiro é definido estritamente como um *spillover* de volatilidade entre os países, enquanto na literatura econômica refere-se a qualquer *spillover* que não pode ser explicado somente em termos de fundamentos econômicos.

Corsetti *et al.* (2005) revisaram várias formas de definição de contágio existentes na literatura. Segundo os autores, na literatura o conceito de contágio está comumente associado a uma alta correlação e a uma alta volatilidade que afeta vários ativos simultaneamente. Em alguns casos, esse pensamento pode levar a avaliações erradas. A existência de interdependência também é consistente com alta correlação ou volatilidade simultânea. Dessa forma, os autores propõem que a noção de contágio esteja associada ao aumento de correlação além da esperada por algum padrão de interdependência, ou seja, o contágio estaria associado a um demasiado aumento de correlações entre os ativos. Para Pericoli e Sbracia (2003) existem cinco possíveis formas de caracterização do contágio financeiro: (1) um significativo aumento da probabilidade de uma crise em um país, condicionada à ocorrência de crise em outro; (2) quando a volatilidade se espalha do país em crise para os mercados financeiros de outros países; (3) um aumento significativo nos co-movimentos de preços e quantidades nos mercados, condicionados a uma crise que ocorre em um mercado ou grupo de mercados; (4) quando o canal de transmissão é diferente depois de um choque em um mercado; e, (5) quando os co-movimentos não podem ser explicados pelos fundamentos.

Rigobon (2001) divide as várias definições de contágio em duas grandes categorias. Na primeira, estão as definições relacionadas ao contágio como uma mudança no mecanismo de propagação em torno das crises, isto é, um aumento na força de transmissão de choques entre países é evidência de contágio. Na segunda categoria, as definições se concentram no tipo de mecanismo de propagação que impulsiona a transmissão, sendo considerada como contágio, a proporção de choques que não são propagados por canais de transmissão "padrão" (por exemplo, links comerciais). Ambas as linhagens da teoria de contágio, definidas como *shift contagion* (mudanças na força do mecanismo de transmissão) e *pure contagion* (transmissão ocorre via canais não fundamentais), apresentam vantagens e desvantagens.

O *shift contagion* possui duas vantagens interessantes. A primeira é a relativa facilidade na realização de testes empíricos, já que oferece uma estrutura simples de teste da ocorrência de contágio. Levando em consideração que nem todas as conexões possíveis entre os países são observáveis, essa classe de definições utiliza as informações fornecidas pelos dados durante os períodos de tranquilidade. A segunda vantagem é que tanto o significado quanto a extensão do

contágio podem ser facilmente determinados, se a propagação dos choques for instável. Os testes empíricos para *shift contagion* podem avaliar o grau de correlação entre os mercados e o quanto mais vulnerável cada um é à crise do outro. Contudo, o *shift contagion* é uma definição restritiva pelo fato de ser aplicável apenas afirmativamente e não no sentido restritivo. Há um consenso entre os economistas que um aumento da intensidade dos co-movimentos nos preços de mercados, condicionada a uma crise em um país específico, sinaliza a existência de contágio, porém isso muda no contra-argumento, já que a falta de uma mudança na força da propagação não pode ser considerada como uma evidência da inexistência de contágio. Ou seja, o *shift contagion* não permite provar a ausência de contágio uma vez que ignora os canais de transmissão que não são baseados em relacionamentos fundamentais contínuos.

O principal problema com a primeira classe de definições é a incapacidade de se detectar o contágio quando a fonte do contágio está sempre presente. A segunda classe de definições de contágio, o *pure contagion*, tenta resolver esse dilema, já que sua principal vantagem em relação ao *shift contagion*, é a adoção de uma visão muito mais ampla de contágio. Nesta classe de definições, todos os mecanismos de transmissão de choques são explicitamente modelados, fornecendo assim respostas sobre como o fenômeno contágio se manifesta. Na prática, no entanto, essa mesma vantagem acaba se tornando uma desvantagem, uma vez que os achados empíricos tendem a ser controversos. Segundo Rigobon (2001), na maioria das implementações empíricas, o contágio é tratado como a propagação não explicada por canais explicitamente modelados. Logo, se alguns dos canais fundamentais não foram totalmente levados em consideração na especificação, as conclusões da análise empírica serão tendenciosas. Inclusive, o autor considera ser computacionalmente intratável a configuração de todos os canais de negociação possíveis em um modelo multinacional.

2.2. Testes empíricos de contágio financeiro

O teste empírico de contágio financeiro ostenta uma literatura ainda mais extensa do que o corpo teórico referente à transmissão de choques entre os mercados. Forbes e Rigobon (2001) destacam quatro abordagens para se mensurar a transmissão de choques e assim, evidenciar a presença ou ausência de contágio: análise de coeficientes de correlação entre mercados; estruturas GARCH; cointegração; e modelos PROBIT (*Probability Unit*).

Os testes baseados em coeficientes de correlação entre mercados medem basicamente a correlação dos retornos entre dois mercados durante um período estável e, em seguida, testam um aumento significativo desse coeficiente de correlação após um choque. Uma elevação significativa do coeficiente de correlação sugere que o mecanismo de transmissão entre os dois mercados aumentou após o choque, evidenciando o contágio. Baig e Goldfajn (1999) testaram o aumento nas correlações em índices de ações, preços de moeda, taxas de juros e spreads soberanos de mercados emergentes durante a crise do Leste Asiático de 1997. Os autores descobriram que as correlações entre mercados aumentaram durante a crise para muitos dos países. Calvo e Reinhart (1996) utilizaram esta mesma abordagem para testar a ocorrência de contágio após a crise do peso mexicano em 1994 e concluíram que a correlação nos preços das ações e nas obrigações Brady aumentou significativamente entre os mercados emergentes asiáticos e latino-americanos.

A segunda abordagem para o teste de contágio é a estimação do mecanismo de transmissão de variância-covariância entre países por meio de modelos de heterocedasticidade condicional (família GARCH). Lombardi *et al.* (2004), utilizando o modelo GARCH multivariado (MGARCH), avaliaram o contágio entre os mercados da Argentina e do Brasil, no período de 1992 a 2004. Os resultados evidenciaram diferentes intensidades de dependência entre os países ao longo do período, sendo maiores em períodos de crise. Filleti *et al.* (2008), utilizando modelo MGARCH, testaram a existência de contágio entre o mercado acionário das três maiores economias latino-americanas (Brasil, México e Argentina) e dois mercados emergentes (Malásia e Rússia), durante o período de 1995 a 2004. Dentre as crises financeiras ocorridas durante o período analisado, os resultados apontaram que o efeito contágio ocorreu principalmente durante a crise asiática. Edwards (1998) estimou um modelo *Augmented* GARCH (aGARCH) para examinar o contágio nos mercados obrigacionistas após a crise mexicana, focando-se na forma como os controles de capitais afetam a transmissão de choques. Os testes indicam que a volatilidade foi transmitida de um país para outro, mas não indicam se essa propagação se alterou durante a crise.

A terceira abordagem para o teste de contágio se concentra nas mudanças no relacionamento de longo prazo entre os mercados, em vez de nas mudanças de curto prazo após um choque. Nessa abordagem, a estimação do mecanismo de transmissão de choques se dá pelo teste de alterações no vetor de cointegração entre os mercados, ao invés de na matriz de variância-covariância. Utilizando esse método, Longin e Solnik (1995) testaram o contágio entre sete países da OCDE, no período de 1960 a 1990. Os autores observaram que as

correlações médias nos retornos do mercado entre o mercado dos Estados Unidos e outros países aumentaram nesse período.

Diferentemente dos procedimentos anteriores, a abordagem final para o teste de contágio, em vez de testar mudanças nos coeficientes de correlação, matrizes de variância-covariância ou relações de cointegração, usa premissas simplificadoras e eventos exógenos para identificar um modelo e medir diretamente as mudanças no mecanismo de propagação. Eichengreen *et al.* (1996) e Kaminsky e Reinhart (1998) utilizaram modelos PROBIT para testar como uma crise em determinado país (o evento exógeno) afeta a probabilidade de ocorrer crise em outros países. Eichengreen *et al.* (1996), examinando os países do ERM, de 1992 a 1993, descobriram que a probabilidade de um país sofrer um ataque especulativo aumenta quando outro país do ERM está sob ataque. Kaminsky e Reinhart (1998) concluíram que a probabilidade condicional de ocorrência de uma crise em determinado país aumenta quando ocorrem mais crises em outros países.

Contudo, mesmo diante dessas inúmeras abordagens, é importante destacar as dificuldades econométricas enfrentadas na modelagem de contágio. Como esse fenômeno é mensurado, na maioria das vezes, com variáveis de frequência diária (por exemplo: retornos dos mercados de ações, taxas de juros, spread soberano e taxas de câmbio), as mesmas podem apresentar alguns problemas econométricos. Rigobon (2001) destaca os seguintes: viés de omissão, simultaneidade, heteroscedasticidade condicional e incondicional, correlação serial, não linearidade e a não normalidade. É bem estabelecido na literatura o fato estilizado de que, pela perspectiva do mercado financeiro, os retornos diários apresentam heteroscedasticidade condicional e incondicional, correlação serial e não normalidade. Já sob a perspectiva macroeconômica, os retornos internacionais são simultaneamente determinados e estão constantemente sujeitos a choques comuns e não observáveis, como mudanças nas expectativas dos investidores e choques de liquidez. Neste sentido, uma metodologia que vem se tornando cada vez mais popular no estudo de contágio financeiro é a modelagem por meio de cópulas, uma vez que este método supera grande parte destas dificuldades citadas anteriormente.

O Capítulo 4 é dedicado a apresentar definições mais precisas das funções de cópula, assim como examinar suas propriedades. Porém, simplificadamente, cópulas podem ser definidas como a função que acopla distribuições marginais univariadas formando distribuições multivariadas, e é então obtido a partir dessas distribuições a relação de dependência entre as variáveis. Podemos então citar alguns estudos empíricos que utilizaram as cópulas como metodologia central. Esse é o caso de Mendes (2005), que a partir das cópulas variantes no tempo, examinou o grau de integração entre os mercados de ações da América Latina, Ásia e

África, durante períodos de crise. Os resultados obtidos apontaram para uma repercussão assimétrica de choques em alguns países da Ásia, e ainda, para o aumento da dependência dos pares de países Argentina-México e Brasil-México durante perdas conjuntas. Wen *et al.* (2012), por sua vez, empregou cópulas dinâmicas para investigar se houve contágio entre os mercados de energia e de ações durante a crise financeira de 2008. Utilizando o preço à vista do petróleo WTI, o índice S&P500, o índice de Xangai e o índice de Shenzhen, foram encontradas evidências de um aumento significativo da dependência entre o petróleo e os mercados de ações após a falência do banco Lehman Brothers, o que sustenta a hipótese de presença de contágio. Aliás, todos os mercados sofreram aumento tanto da dependência, quanto da simetria da cauda, indicando que aumentos significativos na dependência da cauda representam uma dimensão real do efeito de contágio e que os preços do petróleo e das ações estão ligados no mesmo grau, independentemente da expansão ou queda dos mercados durante o período amostral. Os autores ainda observaram que o efeito de contágio é significativamente mais fraco para a China do que para os EUA.

Santos (2010) testou a hipótese de existência de contágio financeiro entre um conjunto de índices de mercado. Para tanto, o autor utilizou cópulas variantes e invariantes no tempo para captar o impacto que a crise financeira de 2008 teve sobre a dependência entre os mercados dos EUA, Brasil, Japão e Inglaterra. Foram selecionadas as cópulas Gaussiana e de Joe-Clayton para obter as estimativas das distribuições conjuntas. Os resultados indicam que para ambas as cópulas existe evidências significativas de contágio entre o mercado americano e o brasileiro. Bergman *et al.* (2015) utilizou uma abordagem não paramétrica, via cópulas condicionais, para analisar o contágio entre os países que constituem o BRIC (Brasil, Rússia, Índia e China), os mercados de ações da União Europeia e o mercado norte-americano, novamente durante a crise de 2008. A adequação das principais cópulas encontradas na literatura financeira foi avaliada através dos critérios estatísticos de log-verossimilhança e de informação de Akaike. Os resultados indicam que há evidência do efeito de contágio entre os mercados da União Europeia e do BRIC. Além disso, há evidências de que o contágio da crise financeira nos Estados Unidos foi mais profundo na União Europeia do que nos mercados do BRIC. Portanto, carteiras de ações formadas por empresas dos países do BRIC ofereceram maior proteção para os investidores durante a crise financeira do *Subprime*.

Considerando estudos empíricos que analisaram o contágio financeiro durante a pandemia da COVID-19, temos o artigo de Ghorbel e Jeribi (2021), que investigou os comovimentos temporais entre o petróleo WTI (*West Texas Intermediate*), índice de ações chinês e ativos financeiros (bitcoin, ouro e índices de ações do G7), durante a pandemia, utilizando

modelos de mudança de regime de Markov associados a modelos MGARCH (MS-MGARCH). As estimativas indicaram que, no regime de alta volatilidade, a correlação entre os índices de ações chineses e do G7 aumentou, evidenciando o efeito de contágio durante a pandemia da COVID-19. Por outro lado, a correlação entre os pares {China $\times$ Ouro} e {China $\times$ Bitcoin} diminuiu, sugerindo que ambos podem ser considerados como uma proteção alternativa para investidores durante crises. Benkraiem *et al.* (2022), por sua vez, investigaram a existência e a intensidade do contágio financeiro durante o surto da COVID-19, utilizando séries diárias de índices de ações de 10 países asiáticos (Taiwan, Hong Kong, Cingapura, Índia, Indonésia, Malásia, Coreia do Sul, Vietnã, Austrália e China) e 4 países americanos (Estados Unidos, Brasil, México e Argentina). Aplicando uma abordagem de cópula, os resultados constataram a presença de contágio financeiro entre o mercado chinês e todos os países americanos e asiáticos analisados. Além disso, o contágio mostrou-se mais intenso para os países americanos do que para os asiáticos. Já, Maneejuk *et al.* (2021), analisaram o contágio entre os choques da própria pandemia da COVID-19 (positivos e negativos) e os mercados de energia (gás natural, gasóleo, óleo de aquecimento, carvão e petróleo bruto), utilizando cópulas dinâmicas de mudança de regime de Markov (MS-cópulas). As estimativas revelaram evidências de contágio entre os choques da COVID-19 e todos os mercados de energia analisados. Além disso, os impactos dos choques causados pela COVID-19 nos mercados de energia variaram ao longo de 2020. Por fim, Wang *et al.* (2021), motivados pela dinâmica complexa entre os mercados de petróleo e ações, os autores desenvolveram um modelo dinâmico de cópulas de mudança de regime de Markov baseado na teoria do valor extremo para investigar o contágio financeiro e suas características entre os mercados dos Estados Unidos e da China, durante o COVID-19 e mais outros cinco grandes eventos de risco extremo de queda. Os autores observaram que o contágio financeiro nos Estados Unidos é mais curto, mais intenso e mais suscetível a choques extremos de queda do que na China. Além disso, entre as crises analisadas, a crise da COVID-19 apresentou o maior nível de contágio. O Quadro 2 resume os estudos empíricos relacionados ao contágio financeiro apresentados neste tópico, destacando as metodologias utilizadas e os principais resultados encontrados.

Quadro 2 – Síntese dos estudos empíricos de contágio financeiro.

Trabalho	Método	Resultados
Baig e Goldfajn (1999)	Correlação	As correlações entre mercados aumentaram durante a crise asiática para diversos dos países.
Calvo e Reinhart (1996)	Correlação	A correlação nos preços das ações entre mercados emergentes asiáticos e latino-americanos aumentou significativamente após a crise mexicana.
Lombardi <i>et al.</i> (2004)	MGARCH	Diferentes intensidades de dependência entre os países ao longo do período, sendo maiores em períodos de crise.
Filleti <i>et al.</i> (2008)	MGARCH	O contágio financeiro ocorreu principalmente durante a crise asiática.
Edwards (1998)	aGARCH	Os testes indicam que a volatilidade foi transmitida de um país para outro, mas não indicam se essa propagação se alterou durante a crise.
Longin e Solnik (1995)	Cointegração	As correlações médias nos retornos do mercado entre os EUA e outros países aumentaram no período de crise.
Eichengreen <i>et al.</i> (1996)	PROBIT	A probabilidade de um país sofrer um ataque especulativo aumenta quando outro país do ERM está sob ataque.
Kaminsky e Reinhart (1998)	PROBIT	A probabilidade condicional de ocorrência de uma crise em determinado país aumenta quando ocorrem mais crises em outros países.
Mendes (2005)	Cópulas	Aumento da dependência dos pares de países Argentina-México e Brasil-México durante perdas conjuntas.
Wen <i>et al.</i> (2012)	Cópulas	Aumento significativo da dependência entre o petróleo e os mercados de ações após a crise, o que sustenta a hipótese de presença de contágio
Santos (2010)	Cópulas	Existem evidências significativas de contágio entre o mercado americano e o brasileiro
Bergman <i>et al.</i> (2015)	Cópulas	Há evidência do efeito de contágio entre os mercados da União Europeia e do BRIC.
ESTUDOS EMPÍRICOS RELACIONADOS À PANDEMIA DA COVID-19		
Ghorbel e Jeribi (2021)	MS-MGARCH	No regime de alta volatilidade, a correlação entre os índices de ações chineses e do G7 aumentou, evidenciando o efeito de contágio durante a pandemia da COVID-19.
Benkraiem <i>et al.</i> (2022)	Cópulas	Contatou-se a presença de contágio financeiro entre o mercado chinês e todos os países americanos e asiáticos analisados.
Maneejuk <i>et al.</i> (2021)	MS-cópulas	As estimativas revelaram evidências de contágio entre os choques da COVID-19 e os mercados de energia.
Wang <i>et al.</i> (2021)	MS-cópulas	O contágio financeiro nos Estados Unidos é mais curto, mais intenso e mais suscetível a choques extremos de queda do que na China.

Fonte: O autor, 2024.

3. MODELOS MARGINAIS

3.1. Estrutura do Modelo

Aqui introduzimos algumas definições básicas que serão utilizadas nos tópicos a seguir. Nossa tese trabalhará essencialmente com variáveis de séries temporais pertencentes ao grupo de variáveis econômicas/financeiras. As variáveis serão descritas por um processo estocástico. O espaço de probabilidade é definido como $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$, em que Ω é o conjunto de eventos elementares (espaço amostral), $\mathcal{F}_t$ é uma sigma-álgebra que contém todas as informações até o tempo t e $\mathbb{P}$ é uma medida de probabilidade condicionada ao conjunto de informações $\mathcal{F}_t$. Assim, uma variável aleatória x pode ser definida como uma função de valor real em Ω . Seja $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)'$ um vetor aleatório $d \times 1$, em que x_t denota um processo observado ao longo do tempo $t = 1, \dots, n$, e $\mathbf{x}_t$ um processo de série temporal multivariada d -dimensional $\mathbf{x}_t = (x_{1,t}, \dots, x_{d,t})'$. Considerando y como uma variável real, y_t representa o retorno financeiro no tempo t e é calculado da seguinte maneira:

$$y_t = \ln \left(\frac{p_t}{p_{t-1}} \right), \quad (3.1)$$

onde p_t é o preço do ativo.

Essa transformação dos preços dos índices é rotineiramente utilizada em finanças devido ao fato destes retornos logarítmicos poderem ser interpretados como uma realização de um processo estacionário. A variável y_t pode ser então modelada como:

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_t = h_t^{1/2} + z_t, \quad (3.3)$$

onde μ_t é a média condicional ($E\{y_t | \mathcal{F}_{t-1}\} = \mu_t$), h_t a variância condicional ($E\{y_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}\} = h_t$) e z_t é um processo i.i.d. (independente e identicamente distribuído) com média zero e variância unitária.

3.2. Processos autoregressivos de média móvel

Esta seção apresenta a média condicional, especificada através dos modelos Autorregressivos de Média Móvel (família ARMA) e é estruturada a partir dos estudos de Hamilton (1994), Enders (1995), Brockwell e Davis (2002) e Grziska (2014). A família de modelos ARMA captura a dinâmica do primeiro momento de uma série temporal financeira univariada. O processo ε é um ruído branco se satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $E\{\varepsilon\} = 0$,
- ii) $E\{\varepsilon^2\} = h \quad h < \infty$,
- iii) $E\{\varepsilon_t \varepsilon_j\} = 0 \quad t \neq j$,

onde $E\{\}$ é o operador de expectativas usual.

As condições estacionárias deste modelo são derivadas através das raízes complexas do processo. Em geral, os processos ARMA exibem as mesmas condições estacionárias que os processos $AR(p_1)$. No exemplo a seguir será usado o processo ARMA para modelar o comportamento variante no tempo de cópulas, que será introduzido no próximo capítulo. Um modelo ARMA(1,1) pode ser escrito como:

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \delta_1 \varepsilon_{t-1} + u_t, \quad (3.6)$$

$$u_t = h_t^{1/2} \varepsilon_t. \quad (3.7)$$

Se $\delta(L)$ ou $\phi(L)$ são inversíveis, na notação do operador de defasagem L têm-se:

$$x_t = (\phi(L))^{-1} \delta(L) \varepsilon_t \quad \text{e} \quad \varepsilon_t = (\delta(L))^{-1} \phi(L) x_t. \quad (3.8)$$

No caso de um processo ARMA(1,1), a inversibilidade e a estacionariedade são garantidas se $|\delta| < 1$ e $|\phi| < 1$. Informações mais detalhadas sobre o modelo ARMA estão disponíveis no Anexo A.

3.3. Processos de heterocedasticidade condicional autorregressivos

Esta seção apresenta a variância condicional, especificada através de modelos de Heterocedasticidade Condicional Autorregressivo (família ARCH), e é estruturada a partir dos estudos de Engle (1982), Bollerslev (1986), Hamilton (1994), Tsay (2005), Greene (2008) e Grziska (2014). Os modelos da família ARMA apresentados anteriormente descrevem com sucesso a média condicional, porém eles assumem que a variância é invariante no tempo. Essa suposição acaba se configurando como uma considerável limitação, visto que a volatilidade de uma série temporal pode variar ao longo do tempo. Esta observação conduziu a literatura econométrica à classe de modelos da família ARCH/GARCH uma vez que são capazes de descrever o comportamento variante no tempo da variância condicional. A partir da estrutura geral do modelo do retorno financeiro, definida pela Equação (3.2), considera-se nesta análise que μ_t é dado por:

$$\mu_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p_1} \phi_i y_{t-i}. \quad (3.9)$$

Então, um ARCH(p_2), desenvolvido por Engle (1982), pode ser descrito como:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{p_2} \alpha_j u_{t-j}^2, \quad (3.10)$$

$$u_t = h_t^{1/2} \varepsilon_t, \quad (3.11)$$

onde h_t é a variância condicional e ε_t é um processo ruído branco estrito.

Portanto, a variância dinâmica, modelada por um processo ARCH, é descrita por uma função linear dos resíduos quadrados passados. Os momentos condicionais de um modelo ARCH(1) são definidos como:

$$E\{u_t | \mathcal{F}_{t-1}\} = 0, \quad (3.12)$$

$$\text{Var}\{u_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}\} = h_t. \quad (3.13)$$

Pela estrutura autorregressiva dos modelos ARCH, um grande $|\varepsilon|$ em um período leva a grandes $|\varepsilon|$ nos períodos seguintes. Isso captura o comportamento variável no tempo da volatilidade. A partir da generalização do modelo ARCH de Engle (1982) obtemos o modelo de Heterocedasticidade Condicional Autorregressivo Generalizado, também conhecido como modelo GARCH, que foi introduzido à literatura econométrica pelos trabalhos seminais de Bollerslev (1986) e Taylor (1986). Enquanto o modelo ARCH captura as heterocedasticidades apenas com uma ordem de defasagem muito longa, o modelo GARCH consiste em uma versão mais parcimoniosa do modelo ARCH. Conforme destacado em inúmeros estudos, e.g. Engle *et al.* (1990), Day e Lewis (1990), Lamoureux e Lastrapes (1990), Bollerslev *et al.* (1994), Anderson e Bollerslev (1998) e Hansen e Lunde (2005), os modelos GARCH de ordem de defasagem baixa capturam com relativo sucesso as propriedades empíricas da volatilidade dos retornos dos ativos. Formalmente, o $\text{GARCH}(p_2, q_2)$, desenvolvido por Bollerslev (1986), pode ser descrito como:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p_2} \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q_2} \beta_j h_{t-j}. \quad (3.14)$$

Uma característica marcante do modelo GARCH é a persistência de períodos de alta volatilidade. Isso ocorre porque um grande $|\varepsilon_t|$, ou um grande h_{t-1} , pode levar a um grande h_t . Os modelos GARCH são divididos em duas classes: os modelos GARCH simétricos e assimétricos. A principal limitação dos modelos GARCH simétricos é o fato de tratarem choques negativos e positivos da mesma maneira. Black (1976) foi um dos primeiros autores a identificar que retornos de ações são negativamente correlacionados à volatilidade de retornos. Portanto, a volatilidade tende a subir em resposta a “más notícias” (retorno menor do que o esperado) e tende a cair em resposta a “boas notícias” (retorno maior do que o esperado). A partir disso, Christie (1982) introduziu o conceito de “Efeito de Alavancagem da Volatilidade”. O autor considerou o grau de alavancagem financeira de uma empresa como um fator que influencia a variação dos preços de uma ação. Seus testes constataram uma forte e positiva associação entre a volatilidade dos retornos de ações e a alavancagem financeira. Em outras palavras, a queda nos preços da ação eleva o grau de alavancagem, essa elevação torna a ação mais arriscada e, conseqüentemente, eleva a sua volatilidade.

Outro efeito de volatilidade importante, introduzido por Pindyck (1984) e, posteriormente, mais aprofundado por French *et al.* (1987) e Campbell e Hentschel (1992), é o chamado “Efeito de Feedback”. Este efeito consiste no aumento da volatilidade dos retornos das ações devido à chegada de novas informações, tanto boas quanto ruins. O aumento de tais informações eleva o retorno exigido pelo investidor (aumento do prêmio pelo risco), levando à queda nos preços da ação e a consequente elevação da volatilidade dos retornos futuros. Assim sendo, na tentativa de se capturar os efeitos de alavancagem e/ou feedback da volatilidade, foi desenvolvida toda uma nova classe de modelos GARCH, conhecidos como GARCH assimétricos. Dois exemplos de modelos GARCH assimétricos são:

a) EGARCH(1,1) de Nelson (1991):

$$\log(h_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{|u_{t-1}|}{\sqrt{h_{t-1}}} + \gamma \frac{u_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} + \beta_1 \log(h_{t-1}). \quad (3.15)$$

b) GJR-GARCH(1,1) de Glosten *et al.* (1993):

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \gamma I_{t-1} u_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}, \quad (3.16)$$

Onde a função indicadora $I_{t-1} = \begin{cases} 0 & \text{se } y_{t-1} \geq \mu \\ 1 & \text{se } y_{t-1} < \mu \end{cases}$.

O modelo EGARCH se destaca principalmente pelo fato de incorporar efeitos assimétricos. E ainda modela a variância logarítmica em vez da variância, o que garante uma variância positiva e, portanto, não é necessária nenhuma restrição nos parâmetros. Já o modelo GJR-GARCH pertence à classe dos modelos limiares, onde apenas as inovações abaixo ou acima de um determinado limiar serão modeladas separadamente. O limiar do GJR-GARCH é considerado zero. Este modelo combina o conceito de limiar com as inovações quadradas do GARCH. O modelo GJR-GARCH capta o que não é contemplado pelo modelo GARCH, que é o fato dos choques negativos no tempo $t - 1$ terem um impacto mais forte na variância no tempo t do que os choques positivos, ou seja, o GJR-GARCH é capaz de descrever o efeito de alavancagem. O coeficiente efetivo associado a um choque negativo é $\alpha_1 + \gamma$. Em séries temporais financeiras, γ geralmente é estatisticamente significativo. O melhor modelo (p e q) é selecionado com base em critérios de informação, tais como: AIC (*Akaike Information Criterion*) e BIC (*Bayesian Information Criterion*).

3.4. Estimação dos modelos marginais

A classe de modelos ARMA-ARCH pode ser estimada pelo método de Máxima Verossimilhança (MV). Antes de explicar o método MV, é necessário introduzir o conceito de verossimilhança condicional. Como os modelos GARCH possuem natureza recursiva, um valor inicial y_0 em $T + 1$ é adicionado. Conforme McNeil *et al.* (2005), a densidade de um vetor aleatório $\mathbf{y}_t$ é dada por:

$$f(y_0, \dots, y_n) = f(y_0) \prod_{t=1}^T f(y_t | y_{t-1}, \dots, y_0). \quad (3.17)$$

A densidade marginal da Equação (3.18), para os modelos ARCH e GARCH, não é conhecida. Por isso é utilizado a seguinte verossimilhança condicional:

$$f(y_1, \dots, y_n | y_0, h_0) = \prod_{t=1}^T f(y_t | y_{t-1}, \dots, y_0, h_0). \quad (3.18)$$

Pela verossimilhança da densidade conjunta:

$$L(y_1, \dots, y_n; \alpha_0, \alpha_1, \beta_1) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{h_t} g\left(\frac{y_t}{h_t}\right), \quad (3.19)$$

onde g é o gerador de densidade.

A variância incondicional é usada como valor inicial, i.e. $h = h_0$. A variância e a média condicional são estimadas em uma etapa. Então, a verossimilhança condicional é modificada para:

$$L(y_1, \dots, y_T; \alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \boldsymbol{\gamma}) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{h_t} g\left(\frac{y_t - \mu_t}{h_t}\right), \quad (3.20)$$

onde $\boldsymbol{\gamma}$ é o vetor de parâmetros da especificação de média condicional $AR(p_1)$.

Geralmente em estudos de séries temporais é comum a utilização da distribuição de probabilidade Gaussiana. No entanto, séries de dados financeiros normalmente apresentam uma distribuição com caudas mais pesadas do que a distribuição Gaussiana, exibindo propriedades leptocúrticas. A estimação eficiente dos parâmetros depende essencialmente da adoção de suposições distributivas adequadas para as inovações do modelo. Para uma compreensão mais aprofundada das propriedades das distribuições de probabilidade, apresentaremos três distribuições diferentes para o gerador de densidade g : Normal, t -Student, GED (*Generalized Error Distribution*) e t -Student Assimétrica (FURENMO, 2019).

i) Distribuição Gaussiana

A distribuição normal é uma distribuição de probabilidade simétrica (mesocúrtica) amplamente utilizada em vários modelos estatísticos. Ela foi originalmente assumida por Engle (1982) e Bollerslev (1986) para as inovações do modelo ARCH e GARCH, respectivamente. A função de densidade de probabilidade normal é definida como:

$$f(y_1, \dots, y_n; y_t | \mu_t, h_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left(-\frac{(y_t - \mu_t)^2}{2h_t}\right). \quad (3.21)$$

ii) Distribuição t -Student

Bollerslev *et al.* (1988) foram os primeiros a usar a distribuição t -Student, com $\nu > 2$ graus de liberdade, para estimar um modelo GARCH. A função de densidade de probabilidade para a distribuição t -Student com variância unitária é definida como:

$$g(y_1, \dots, y_n; y_t | \mu_t, h_t, \nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} (\nu - 2)^{-1/2} h_t^{-1/2} \left(1 + \frac{(y_t - \mu_t)^2}{h_t(\nu - 2)}\right)^{-\frac{\nu(\nu+1)}{2}}. \quad (3.22)$$

iii) Distribuição GED

Nelson (1991) foi o primeiro a utilizar a distribuição de erro generalizada (GED) para estimar um modelo EGARCH. A GED consiste em uma família de distribuições exponenciais, podendo ser leptocúrtica ou platicúrtica dependendo do parâmetro de forma ν . As propriedades da GED são definidas da seguinte maneira:

- a) Se $v = 2$ a GED é uma distribuição normal padrão;
- b) Se $v < 2$ a GED é uma distribuição leptocúrtica; e,
- c) Se $v > 2$ a GED é uma distribuição platicúrtica.

E sua função densidade de probabilidade é definida como:

$$g(y_1, \dots, y_n; y_t | \mu_t, h_t, v, \lambda) = \frac{v}{\lambda 2^{(v+1)/2} \Gamma(\frac{1}{v})} \exp \left(-\frac{1}{2} \left| \frac{y_t - \mu_t}{h_t^{1/2}} \lambda^{-1} \right|^v \right), \quad (3.23)$$

onde $\lambda = \left(\frac{2^{(-2/v)} \Gamma(\frac{1}{v})}{\Gamma(\frac{3}{v})} \right)^{\frac{1}{2}}.$

iv) Distribuição t -Student Assimétrica

Hansen (1994) foi o primeiro a utilizar a distribuição t -Student assimétrica para modelar uma série temporal financeira. A distribuição é uma generalização da distribuição t -Student padrão, sendo uma opção viável quando se busca uma distribuição de probabilidade mais flexível onde tanto a assimetria quanto a curtose possam ser modeladas. A função de densidade de probabilidade da t -Student assimétrica com média zero e variância unitária é definida como:

$$g(y_1, \dots, y_n; z_t | v, \lambda, a, b, c) = \begin{cases} bc \left(1 + \frac{1}{v-2} \left(\frac{bz_t + a}{1-\lambda} \right)^2 \right)^{-\frac{v+1}{2}} & z < -\frac{a}{b} \\ bc \left(1 + \frac{1}{v-2} \left(\frac{bz_t + a}{1+\lambda} \right)^2 \right)^{-\frac{v+1}{2}} & z \geq -\frac{a}{b} \end{cases}, \quad (3.24)$$

onde:

- a) O parâmetro de graus de liberdade v compreende o intervalo $2 < v < \infty$,
- b) O parâmetro de assimetria λ compreende o intervalo $-1 < \lambda < 1$,
- c) $z_t = \frac{y_t - \mu_t}{h_t^{1/2}},$
- d) $a = 4 \lambda c \left(\frac{v-2}{v-1} \right),$
- e) $b = \sqrt{1 + 3\lambda^2 - a^2},$
- f) $c = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{\pi(v-2)} \Gamma(\frac{v}{2})}.$

Os coeficientes a , b e c , se referem aos parâmetros que definem a forma específica da distribuição assimétrica. Estes coeficientes podem variar dependendo do tipo específico de distribuição t assimétrica. Em muitos casos, eles são utilizados para ajustar os momentos da distribuição, especialmente o desvio padrão e a assimetria, para se adequarem melhor aos dados observados. Assim sendo, a estimação dos modelos é então feita por meio do log da verossimilhança, dada por:

$$\ln L(y_1, \dots, y_n; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^n l_t(\boldsymbol{\theta}). \quad (3.25)$$

A verossimilhança é então maximizada por:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} \ln L(y_1, \dots, y_n; \boldsymbol{\theta}), \quad (3.26)$$

onde $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é o estimador de máxima verossimilhança do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$.

4. INTRODUÇÃO À CÓPULAS

4.1. Noções básicas de distribuições conjuntas

Por definição, seja $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ um vetor de variáveis aleatórias definidas no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. A função de distribuição conjunta é dada por:

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_d) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d), \forall (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d. \quad (4.1)$$

Para simplificar a apresentação, a teoria apresentada a seguir focará em distribuições com estrutura bivariada. Porém, é importante destacar que essa metodologia é aplicável também a dimensões maiores. Assim, conforme Trivedi e Zimmer (2007), as propriedades necessárias e suficientes para que uma função contínua à direita $F(x_1, x_2)$ seja uma função de distribuição cumulativa bivariada, são:

- i) $\lim_{x_j \rightarrow -\infty} F(x_1, x_2) = 0$ para $j = 1, 2$;
- ii) $\lim_{x_j \rightarrow \infty} F(x_1, x_2) = 1$ para $j = 1, 2$; e,
- iii) Pela “Desigualdade Retangular”, para todo (a_1, b_1) e (a_2, b_2) com $a_1 \leq a_2$ e $b_1 \leq b_2$:

$$F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) \geq 0. \quad (4.2)$$

As propriedades (i) e (ii) implicam em $0 \leq F \leq 1$, enquanto que a (iii) trata-se da versão bidimensional da propriedade análoga de uma função unidimensional não decrescente. As distribuições marginais $F_1(x_1)$ e $F_2(x_2)$ das variáveis aleatórias X_1 e X_2 , respectivamente, com distribuição conjunta $F(x_1, x_2)$, são obtidas por:

$$F_1(x_1) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq \infty) = \lim_{x_2 \rightarrow \infty} F(x_1, x_2), \quad (4.3)$$

$$F_2(x_2) = \mathbb{P}(X_2 \leq x_2) = \mathbb{P}(X_1 \leq \infty, X_2 \leq x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} F(x_1, x_2). \quad (4.4)$$

Assim, a distribuição marginal de uma variável é obtida através do limite da distribuição conjunta da outra variável. Considerando as relações de dependência, pelo Teorema de Bayes, tem-se que:

$$F(x_1, x_2) = F_{1|2}(x_1|x_2) F_2(x_2) = F_{2|1}(x_2|x_1) F_1(x_1). \quad (4.5)$$

Com densidades:

$$f_1(x_1), f_2(x_2) > 0. \quad (4.6)$$

Caso as variáveis sejam independentes:

$$F_{1|2}(x_1|x_2) = P(X_1 \leq x_1) = F_1(x_1). \quad (4.7)$$

Ou:

$$F_{2|1}(x_2|x_1) = P(X_2 \leq x_2) = F_2(x_2). \quad (4.8)$$

Portanto:

$$F(x_1, x_2) = F_1(x_1) F_2(x_2). \quad (4.9)$$

Assim, a distribuição conjunta de um vetor de variáveis independentes é determinada apenas pelas distribuições marginais de cada variável. No caso das variáveis não independentes, a distribuição conjunta é determinada pelas distribuições marginais de cada variável e a estrutura de dependência entre as variáveis. Nesse contexto, modelar distribuições bivariadas (ou multivariadas) por meio de cópulas, possibilita isolar a distribuição marginal da estrutura de dependência, viabilizando a estimação de distribuições multivariadas cujas marginais possuem distribuições distintas entre si. Além disso, a teoria de cópulas permite também combinar as distribuições marginais com uma variedade de modelos de dependência representados pelas diferentes funções de cópula como será destacado nos tópicos a seguir.

4.2. Funções cópula

De modo geral, cópulas são f.d.c.c (funções de distribuição cumulativa conjunta) capazes de descrever a estrutura de dependência entre variáveis aleatórias. Desde o seu desenvolvimento na década de 50, as cópulas vêm ganhando grande notoriedade, especialmente no campo das finanças. O uso de cópulas em aplicações financeiras se popularizou a partir do estudo de Li (1999) que utilizou uma cópula Gaussiana para uma análise de precificação de CDO (*Collateralized Debt Obligations*). Dentre os trabalhos mais relevantes no que tange ao uso de cópulas em finanças destacam-se os trabalhos de Embrechts *et al.* (1999,2002,2003). Já Mikosch (2006), por sua vez, fornece uma boa discussão sobre as vantagens e desvantagens do uso de cópulas para se obter as estimativas das relações de dependência. Por fim, para um levantamento preciso dos modelos de cópula e sua utilização no contexto de séries temporais financeiras, é recomendável a análise dos trabalhos de Patton (2004,2006,2009).

Cópulas são úteis quando se pretende estimar uma distribuição conjunta em que suas marginais são conhecidas, no entanto, existe pouca ou nenhuma informação sobre sua distribuição conjunta, especialmente quando as variáveis em análise não seguem uma distribuição normal, o que é uma característica comum em séries financeiras. Formalmente, uma cópula d -dimensional (ou d -cópula), para cada $d \geq 2$, é uma função de distribuição d -variável em $\mathbb{I}^d$ cujos marginais univariados são uniformemente distribuídos em $\mathbb{I}$, onde $\mathbb{I}$ denota o intervalo unitário $[0,1]$. Para uma função $C: \mathbb{I}^d \rightarrow \mathbb{I}$ ser uma cópula, é necessário satisfazer as seguintes propriedades:

- i) $C(1, \dots, 1, u_j, 1, \dots, 1) = u_j \quad \forall j \leq d, u_j \in \mathbb{I}$,
- ii) $C(u_1, \dots, u_d) = 0 \quad \forall j \leq d, u_j = 0$,
- iii) C é d -crescente.

Segundo Hoeffding (1940) e Fréchet (1951), todas as funções de distribuição multivariadas são limitadas pelas suas distribuições marginais. O limite inferior de Fréchet-Hoeffding, também conhecido como cópula contramonotônica, é definido por:

$$W_d(u_1, \dots, u_d) = \max\{\sum_{i=1}^d u_i - d + 1, 0\}. \quad (4.10)$$

A Equação (4.10) descreve uma dependência negativa perfeita entre variáveis aleatórias, mas não é uma cópula para $d \geq 3$. Já o limite superior de Fréchet-Hoeffding, também conhecido como cópula comonotônica, é definido por:

$$M_d(u_1, \dots, u_d) = \min(u_1, \dots, u_d). \quad (4.11)$$

A Equação (4.11) descreve dependência positiva perfeita entre variáveis aleatórias. O ponto ínfimo e supremo de todos os elementos de $\mathcal{C}_d \in \mathcal{C}_d$ coincidem com W_d e M_d , respectivamente, ou seja, para todo $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{I}^d$:

$$\inf_{C \in \mathcal{C}_d} C(\mathbf{u}) = W_d(\mathbf{u}) \text{ e } \sup_{C \in \mathcal{C}_d} C(\mathbf{u}) = M_d(\mathbf{u}). \quad (4.12)$$

A terceira cópula, conhecida como cópula de independência, cobre o caso de independência entre variáveis aleatórias e é dada por:

$$\Pi_n(\mathbf{u}) = \prod_{i=1}^d u_i. \quad (4.13)$$

As Equações (5.10) e (5.11) implicam que para cada cópula n -dimensional:

$$W_n(\mathbf{u}) \leq C(\mathbf{u}) \leq M_n(\mathbf{u}). \quad (4.14)$$

É importante destacar também que uma função cópula possui informações a respeito da distribuição conjunta, que não pertencem às distribuições marginais. Nesse sentido, Fisher (1932) e Rosenblatt (1952) introduziram o conceito de “Transformação Integral de Probabilidade”, também conhecida como “Transformação Quantílica”, que permite isolar as informações contidas nas distribuições marginais. Por definição, seja F_i uma função de distribuição de uma variável aleatória X_i , com $i = 1, 2$. A função quantílica de F_i é definida para todo $u \in (0, 1)$ pela sua inversa generalizada² $F_i^{\leftarrow}$, dada por:

$$F_i^{\leftarrow}(u) = \inf\{x_i \in \mathbb{R}: F_i(x_i) \geq u\}. \quad (4.15)$$

² A inversa generalizada $F^{\leftarrow}$ é a função inversa F^{-1} , quando F é contínua e estritamente crescente.

A transformação integral de probabilidade implica que X_i segue a distribuição F_i . Considerando a variável aleatória U_i como $U_i = F_i(X_i)$, temos que U_i distribui-se uniformemente no intervalo unitário $[0,1]$, i.e.:

$$U_i = F_i(X_i) \sim \text{Uniforme}(0,1). \quad (4.16)$$

Portanto, uma variável aleatória X com uma função de distribuição contínua F pode ser transformada em uma variável aleatória distribuída uniformemente aplicando a função de distribuição à variável. O inverso também é válido, visto que se $U_i \sim \text{Uniforme}(0,1)$, então para $X_i = F_i^{\leftarrow}(U_i)$, temos $X_i \sim F_i$. Logo, utilizando a função quantílica $F^{\leftarrow}$, podemos re-extrair X por meio de:

$$X_i = F_i^{\leftarrow}(U_i) \rightarrow X_i \sim F_i. \quad (4.17)$$

Logo, independentemente da distribuição de X (e.g. Normal, Student-t, etc.), $F_i(X_i)$ terá sempre uma distribuição uniforme. Fica evidente que a transformação quantílica possibilita converter uma amostra aleatória de qualquer distribuição em uma amostra aleatória com distribuição uniforme $(0,1)$. Isso tem implicações importantes para o estudo de cópulas, visto que tal transformação permite criar cópulas d -dimensionais cujas n marginais possuem distribuição uniforme, mesmo que representem variáveis aleatórias distribuídas das mais distintas formas, como será destacado nas seções a seguir.

4.3. Teorema de Sklar

Como destacado anteriormente, a ideia básica subjacente a cada cópula é que a mesma possibilita a decomposição de uma função de distribuição conjunta para um vetor aleatório em suas funções marginais e sua dependência correspondente. Nesse contexto, Sklar (1959) propôs modelar a estrutura de dependência por meio de uma cópula. Para tanto, o autor desenvolveu o denominado “Teorema de Sklar”, considerado como alicerce da teoria das cópulas. Pelo Teorema, qualquer distribuição conjunta multivariada pode ser decomposta em termos de funções de distribuição marginal univariada e uma cópula condicional que descreve a

estrutura de dependência entre as variáveis. Formalmente, seja $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ um vetor de variáveis aleatórias com margens univariadas:

$$F_1(x_1) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1), \dots, F_d(x_d) = \mathbb{P}(X_d \leq x_d). \quad (4.18)$$

Sua função de distribuição conjunta d -dimensional F pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_d) &= \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d) \\ &= \mathbb{P}(F_1(X_1) \leq F_1(x_1), \dots, F_d(X_d) \leq F_d(x_d)). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Logo, de acordo com o Teorema Sklar (1959), existe uma cópula C tal que:

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)), \quad \forall (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d. \quad (4.20)$$

Assim, a partir de qualquer função de distribuição d -variada F , pode-se derivar uma cópula C via Equação (4.20). Outra representação de cópulas, expressa a dependência em escala de quantil. Quando F_i é contínuo, para todo $i \in \{1, \dots, d\}$, C pode ser obtido com:

$$C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), \dots, F_d^{\leftarrow}(u_d)). \quad (4.21)$$

E conforme a Equação (4.19), é possível mostrar que a cópula é a função de distribuição das distribuições marginais (contínuas):

$$C(u_1, \dots, u_d) = \mathbb{P}(F_1(X_1) \leq u_1, \dots, F_d(X_d) \leq u_d). \quad (4.22)$$

Assim, as cópulas são essencialmente uma maneira de transformar o vetor aleatório $(X_1, \dots, X_d)$ em outro vetor aleatório $(U_1, \dots, U_d) = C(F_1(X_1), \dots, F_d(X_d))$ tendo as margens uniformes em $\mathbb{I}$ e preservando a dependência entre os componentes. Qualquer cópula pode ser combinada com diferentes funções de distribuição univariadas para obter uma função de distribuição d -variada usando a Equação (4.20).

Em particular, as cópulas podem servir para modelar situações em que é necessária uma distribuição diferente para cada marginal, fornecendo uma alternativa válida às inúmeras funções de distribuição multivariadas clássicas (e.g. Gaussiana, Pareto, etc.). Isso representa uma das principais vantagens da função cópula, conforme sublinhado por Mikosch (2006):

Muitas das conhecidas distribuições multivariadas não são flexíveis o suficiente para permitir diferentes comportamentos de cauda em diferentes componentes. Portanto, as cópulas parecem ser as ferramentas certas para superar as dificuldades mencionadas: elas geram todas as distribuições multivariadas com marginais flexíveis.

Como a densidade de uma distribuição multivariada é dada por:

$$f(x_1, \dots, x_d) = \frac{\partial^d F(x_1, \dots, x_d)}{\partial x_1 \dots x_d}, \quad (4.23)$$

A densidade de uma cópula, considerando o Teorema de Sklar, pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_d) &= \frac{\partial^d C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))}{\partial x_1 \dots x_d} \\ &= \frac{\partial^d C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))}{\partial F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)} \prod_{i=1}^d \frac{\partial F_i(x_i)}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial^d C(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_1, \dots, u_d} \prod_{i=1}^d \frac{\partial F_i(x_i)}{\partial x_i} \\ &= c(u_1, \dots, u_d) \prod_{i=1}^d f_i(x_i), \end{aligned} \quad (4.25)$$

onde $c(\cdot)$ é a função de densidade da cópula

As Equações (4.24) e (4.25) são a representação canônica de uma densidade d -variada e a densidade das marginais, respectivamente (CHERUBINI *et al.*; 2004). A função densidade das cópulas c é dada por:

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{f(x_1, \dots, x_d)}{\prod_{i=1}^d f_i(x_i)}. \quad (4.26)$$

Utilizando a transformação quantílica temos:

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{f(F_1^{\leftarrow}(u_1), \dots, F_d^{\leftarrow}(u_d))}{f_1(F_1^{\leftarrow}(u_1)) \dots f_d(F_d^{\leftarrow}(u_d))}. \quad (4.27)$$

Portanto, a função cópula possui informações a respeito da distribuição conjunta, que não estão presentes nas distribuições marginais. Convertendo o vetor aleatório $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ em variáveis uniformes, por meio da transformação quantílica, as informações das distribuições marginais serão filtradas, independente de $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_d)$, ainda que $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_d)$ seja uniforme no intervalo $(0,1)$. Por essa razão a função cópula também é conhecida como função de dependência (PATTON, 2002).

4.4. Famílias de cópulas

Como destacado anteriormente, as cópulas desempenham um papel fundamental na construção de funções de distribuição multivariadas. Logo, ter à disposição uma variedade de cópulas pode ser muito útil para a construção de modelos estocásticos com propriedades distintas muitas vezes indispensáveis na prática como, por exemplo, caudas pesadas, assimetrias, etc. Nesse sentido, diversos estudos foram realizados sobre a construção e as propriedades de diferentes famílias de cópulas. Os melhores resumos teóricos/empíricos sobre cópulas podem ser encontrados em Nelsen (2006), Joe (1997), Joe (2014) e Cherubini *et al.* (2004). Uma família de cópulas d -variada pode ser considerada "interessante" em aplicações estatísticas quando apresenta as seguintes propriedades gerais:

- i) Interpretabilidade: os membros da família devem ter alguma interpretação probabilística, sugerindo situações "naturais" em que essa família possa ser considerada;
- ii) Uma ampla e flexível gama de dependências: os membros da família devem descrever diferentes tipos de dependência e assimetrias de cauda;
- iii) Facilidade de manuseio: os membros da família devem ser expressos de forma fechada ou, pelo menos, devem ser facilmente simulados por meio de algum algoritmo conhecido.

Os tópicos a seguir apresentaram as famílias de cópulas mais utilizadas na literatura de econometria financeira: as “Cópulas Elípticas” e as “Cópulas Arquimedianas”. Outras famílias de cópulas, como a cópula de Valor Extremo, Farlie-Gumbel-Morgenstein, Fréchet, dentre outras, não serão apresentadas neste trabalho. Para maiores detalhes sobre as diversas famílias de cópulas, recomenda-se ver Nelsen (2006).

4.4.1. Cópulas elípticas

Conforme Jaworski *et al.* (2009), m vetor aleatório $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ possui distribuição elíptica com vetor médio $\mu \in \mathbb{R}^d$, matriz de covariância $\Sigma = (\sigma_{ij})$, gerador $g: [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ e $\mathbf{X} \sim E(\mu, \Sigma, g)$, quando for expresso na forma:

$$\mathbf{X} = \mu + R\mathbf{A}\mathbf{U}. \quad (4.28)$$

onde $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \Sigma$ é a decomposição de Cholesky de Σ , $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n)$ é um vetor aleatório d -dimensional distribuído uniformemente na esfera $\mathbb{S}^{n-1} = \{u \in \mathbb{R}^d: u_1^2 + \dots + u_d^2 = 1\}$, e R é uma variável aleatória positiva independente de $\mathbf{U}$, com densidade, para cada $r > 0$, dada por:

$$f_g(r) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} r^{n-1} g(r^2). \quad (4.29)$$

A função densidade de uma distribuição elíptica, para todo $x \in \mathbb{R}^d$, é dada por:

$$h_g(x) = |\Sigma|^{-1/2} g((x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)). \quad (4.30)$$

Nesse sentido, o vetor $\mathbf{X}$ tem uma distribuição Gaussiana d -variada quando:

$$g(t) = (2\pi)^{-d/2} \exp(-t/2). \quad (4.31)$$

Já para que $\mathbf{X}$ tenha uma distribuição d -variada t -Student com v graus de liberdade:

$$g(t) = c(1 + t/v)^{-(d+v)/2}. \quad (4.32)$$

Uma característica da distribuição elíptica é que os componentes escalados $X_1/\sqrt{\sigma_{11}}, \dots, X_d/\sigma_{dd}$ são distribuídos identicamente de acordo com uma função de distribuição F_g . Esse fato representa uma limitação ao uso de tais distribuições para modelar sistemas estocásticos quando os componentes não são semelhantes. Para evitar isso, é útil calcular a cópula de distribuições elípticas d -variadas e usá-la, juntamente com algumas funções de distribuição marginais univariadas, para obter modelos mais flexíveis. Seja $\mathbf{X}$ um vetor aleatório elíptico $\mathbf{X} \sim \mathbb{E}_d(\mu, \Sigma, g)$. Supondo que $(X_i/\sqrt{\sigma_{ii}}) \sim F_g$, para cada $i \in \{1, \dots, d\}$, a cópula elíptica consiste na função de distribuição do vetor aleatório:

$$\left(F_g\left(\frac{X_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right), \dots, F_g\left(\frac{X_d}{\sqrt{\sigma_{dd}}}\right) \right). \quad (4.33)$$

Assim, para se obter uma cópula elíptica com base na Equação (4.21), basta que a função de distribuição conjunta F pertença a família elíptica, como é o caso das cópulas Gaussiana e t -Student. Nos Exemplos 1 e 2 a seguir, são descritas as cópulas com distribuição bivariada gaussiana e t -Student, respectivamente.

Exemplo 1 (Cópula Gaussiana). Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias que seguem uma função distribuição conjunta gaussiana bivariada, i.e.

$$F(x_1, x_2) = \Phi_2(x_1, x_2). \quad (4.34)$$

Suas marginais são distribuições Gaussianas univariadas:

$$F_1(x_1) = \Phi_1(x_1) \text{ e } F_2(x_2) = \Phi_1(x_2). \quad (4.35)$$

Pela transformação quantílica:

$$x_1 = \Phi_1^{-1}(u_1) \text{ e } x_2 = \Phi_1^{-1}(u_2). \quad (4.36)$$

A partir da Equação (4.21), é possível expressar a cópula Gaussiana ($\mathcal{C}^{Gau}$) como:

$$\mathcal{C}^{Gau}(u_1, u_2 | \rho) = \Phi_2(\Phi_1^{-1}(u_1), \Phi_1^{-1}(u_2)), \quad \rho \in (-1, 1), \quad (4.37)$$

onde ρ é o coeficiente de correlação linear, $\Phi_2(\cdot)$ é a função de distribuição acumulada da normal bivariada, $\Phi_1(\cdot)$ é a função de distribuição acumulada da normal univariada e $\Phi_1^{-1}(\cdot)$ é a função quantil da normal univariada.

Portanto, a cópula Gaussiana é uma função de dependência associada a uma distribuição normal bivariada, e sua forma funcional é dada por:

$$C^{Gau}(u_1, u_2 | \rho) = \int_{-\infty}^{\Phi_1^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi_1^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{s^2-2\rho st+t^2}{2(1-\rho^2)}\right\} ds dt. \quad (4.38)$$

A partir da Equação (4.26), a função densidade de probabilidade da cópula Gaussiana bivariada é dada por:

$$c^{Gau}(u_1, u_2 | \rho) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{x_1^2-2\rho x_1 x_2+x_2^2}{2(1-\rho^2)}\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right\}. \quad (4.39)$$

Desse modo, para cópula Gaussiana os índices de cauda, superior λ_S e inferior λ_I , são iguais a zero. Isso implica que as variáveis aleatórias são assintoticamente independentes, ou seja, elas não possuem dependência em eventos extremos. A Figura 5, presente no Anexo B, apresenta os diagramas de dispersão da cópula Gaussiana bivariada com dois coeficientes de correlação diferentes, $\rho = 0.5$ e $\rho = 0.9$. Fica evidente que à medida que ρ se aproxima dos limites de seu domínio $(-1, +1)$, a dispersão das variáveis uniformes u_1 e u_2 diminui no quadrado unitário.

Exemplo 2 (Cópula t -Student). Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias que seguem uma função distribuição conjunta t -Student bivariada, i.e.

$$F(x_1, x_2) = T_{2,v}(x_1, x_2). \quad (4.40)$$

Suas marginais serão distribuições t -Student univariadas:

$$F_1(x_1) = T_{1,v}(x_1) \text{ e } F_2(x_2) = T_{1,v}(x_2). \quad (4.41)$$

Pela transformação quantílica:

$$x_1 = T_{1,v}^{-1}(u_1) \text{ e } x_2 = T_{1,v}^{-1}(u_2). \quad (4.42)$$

A partir da Equação (4.21), é possível expressar a cópula t -Student (C^T) como:

$$C^T(u_1, u_2 | \rho, v) = T_{2,v} \left(T_{1,v}^{-1}(u_1), T_{1,v}^{-1}(u_2) \right), \quad \rho \in (-1, 1), \quad (4.43)$$

Onde $T_{2,v}(\cdot)$ é a função de distribuição acumulada da t -Student bivariada com v graus de liberdade, $T_{1,v}(\cdot)$ é a função de distribuição acumulada da t -Student univariada com v graus de liberdade e $T_{1,v}^{-1}(\cdot)$ é a função quantil da t -Student univariada com v graus de liberdade.

Portanto, a cópula t -Student é uma função de dependência associada a uma distribuição t -Student bivariada, e sua forma funcional é dada por:

$$C^T(u_1, u_2 | \rho, v) = \int_{-\infty}^{T_{1,v}^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{T_{1,v}^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{v(1-\rho^2)} \right)^{-\frac{v+2}{2}} ds dt. \quad (4.44)$$

A partir da Equação (4.26), a função densidade de probabilidade da cópula t -Student bivariada é dada por:

$$c^T(u_1, u_2 | \rho, v) = \frac{\Gamma(\frac{v+2}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})} \frac{1}{v\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2}{v(1-\rho^2)} \right)^{-\frac{v+2}{2}}. \quad (4.45)$$

Para cópula t -Student, ambos os índices de cauda são iguais a:

$$\lambda_S = \lambda_I = 2T_{v+1} \left(-\sqrt{\frac{(v+1)(1-\rho)}{1+\rho}} \right). \quad (4.46)$$

Dessa forma, a cópula t -Student possibilita reproduzir a dependência entre os valores extremos da distribuição.

Contudo, a dependência possui a mesma magnitude para ambas as caudas, o que pode representar uma limitação na análise dos dados. A Figura 5, presente no Anexo B, mostra os diagramas de dispersão da cópula t -Student bivariada, novamente para $\rho = 0.5$ e $\rho = 0.9$. Comparando com a cópula Gaussiana, é possível evidenciar que a cópula t -Student tem mais massa nas caudas para o respectivo ρ . Logo, a cópula t -Student permite reproduzir a dependência entre os valores extremos da distribuição, diferentemente da cópula Gaussiana. Uma limitação das cópulas elípticas, no que se refere a séries temporais financeiras, é a sua incapacidade de modelar comportamento assimétrico. Como observado acima, parece ser um fato estilizado que a dependência aumenta mais com grandes perdas do que com grandes ganhos. Isto deve assemelhar-se à dependência da cauda assimétrica.

4.4.2. Cópulas arquimedianas

Como destacado anteriormente, as cópulas Gaussianas e t -Student apresentam dependências de cauda simétricas. Isso indica que a dependência da cauda muda na mesma magnitude sob condições de mercado favoráveis ou desfavoráveis. No entanto, esta condição pode não refletir a realidade. Geralmente, os mercados entram em colapso em conjunto durante uma economia em baixa e sobem em conjunto durante uma economia em alta, porém, as suas taxas de colapso ou de expansão podem não ser as mesmas, ou até mesmo semelhantes. Faz sentido então considerar modelos que admitam dependência assimétrica entre as caudas inferior e superior. Destarte, as cópulas arquimedianas surgem como ferramentas extremamente úteis, uma vez que possibilitam estimar a assimetria na dependência. Ao contrário das cópulas elípticas, as cópulas arquimedianas possuem fórmulas fechadas, o que geralmente simplifica seu manuseamento. Um gerador arquimediano consiste em qualquer função decrescente e contínua $\Psi: \mathbb{I} \rightarrow [0, \infty[$ que satisfaz as condições:

- i) $\Psi(1) = 0$;
- ii) $\Psi(0) = \infty$;
- iii) $\Psi'(t) < 0$ (primeira derivada $\rightarrow$ estritamente decrescente);
- iv) $\Psi''(t) > 0$ (segunda derivada $\rightarrow$ função convexa); e,
- v) $\Psi^{-1} = \begin{cases} \Psi^{-1}, & 0 \leq t \leq \Psi(0) \\ 0, & \Psi(0) < t \leq \infty \end{cases}$ (inverso da função geradora).

Uma cópula d -dimensional C é chamada arquimediana se admite a representação:

$$C(u_1, \dots, u_d) = \Psi^{-1}(\Psi(u_1) + \dots + \Psi(u_d)). \quad (4.47)$$

A densidade de uma cópula arquimediana pode ser obtida pela função geradora:

$$c(u_1, \dots, u_d) = \Psi^{-1[d]}(\Psi(u_1) + \dots + \Psi(u_d)) \prod_{i=1}^d \Psi'(u_i), \quad (4.48)$$

onde $\Psi^{-1[d]}$ é a d -derivada da função geradora inversa.

Para obter uma cópula arquimediana, com base na Equação (4.21), basta que a função de distribuição conjunta F pertença à família arquimediana. Como estamos interessados na dependência entre o petróleo e os mercados de ações durante a crise da COVID-19, precisamos de funções de cópula que enfatizem as caudas inferiores dos mercados. A dependência assintótica da cauda inferior é uma característica importante do modelo de cópula de Clayton. Em contraste, a cópula de Gumbel considera a dependência da cauda superior. A seguir, os Exemplos 3 e 4 descrevem as cópulas de Gumbel e de Clayton, respectivamente.

Exemplo 3 (Cópula de Gumbel). A cópula de Gumbel, introduzida por Gumbel (1960) admite qualquer nível específico de dependência da cauda (superior) entre variáveis individuais. A expressão bivariada padrão para membros dessa família de cópulas é:

$$C_{\theta}^{Gum}(u_1, u_2) = \exp \left\{ -((- \ln u_1)^{\theta} + (- \ln u_2)^{\theta})^{1/\theta} \right\}, \quad \theta \geq 1. \quad (4.49)$$

Quando o coeficiente de correlação linear arquimediano θ é igual a 1, obtém-se a cópula de independência como um caso especial. Quando $\theta \rightarrow +\infty$, obtém-se a cópula de comonotonicidade, como definido na Equação (4.11). Conforme Venter (2001), a densidade da cópula de Gumbel bivariada é dada por:

$$\begin{aligned} c_{\theta}^{Gum}(u_1, u_2) = & \exp \left\{ -((- \ln u_1)^{\theta} + (- \ln u_2)^{\theta})^{1/\theta} \right\} (u_1 \cdot u_2)^{-1} \\ & ((- \ln u_1)^{\theta} + (- \ln u_2)^{\theta})^{-2+2/\theta} (\ln u_1 \cdot \ln u_2)^{\theta-1} \\ & \left((\theta - 1)((- \ln u_1)^{\theta} + (- \ln u_2)^{\theta})^{-1/\theta} \right). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Para cópula de Gumbel, os coeficientes de dependência da cauda superior λ_S e inferior λ_I são iguais a:

$$\lambda_S = 2 - 2^{1/\theta} \quad \text{e} \quad \lambda_I = 0. \quad (4.51)$$

O gerador arquimediano de Gumbel é dado por:

$$\Psi_\theta(t) = (-\ln t)^\theta. \quad (4.52)$$

E seu gerador inverso é dado por:

$$\Psi_\theta^{-1}(t) = \exp(-t^{1/\theta}). \quad (4.53)$$

Então a cópula de Gumbel modela efetivamente eventos positivos conjuntos, conforme demonstrado na Figura 5 do Anexo B. O τ de Kendall³ é uma medida de dependência capaz de mapear a dependência elíptica na dependência arquimediana. Uma dependência Gaussiana de $\rho = 0.5$ implica em $\theta^{Gum} = 1.5000$ e de $\rho = 0.9$ implica em $\theta^{Gum} = 3.4827$.

Exemplo 4 (Cópula de Clayton). A cópula de Clayton, introduzida por Clayton (1978), admite qualquer nível específico diferente de zero de dependência de cauda (inferior) entre variáveis individuais. A expressão bivariada padrão para membros dessa família de cópulas é:

$$C_\theta^{clay}(u_1, u_2) = \max\left\{(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, 0\right\}, \quad \theta > 0. \quad (4.54)$$

Observe que para $\theta = 0$, obtém-se a cópula de independência como um caso especial. Quando $\theta \rightarrow +\infty$, obtém-se a cópula de contramonotonicidade, como definido na Equação (4.10). Conforme Venter (2001), a densidade da cópula de Clayton bivariada é dada por:

$$c_\theta^{clay} = (1 + \theta)(u_1 \cdot u_2)^{-1-\theta} (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta-2}}. \quad (4.55)$$

³ O presente estudo apresenta as definições e propriedades básicas do τ de Kendall no Capítulo 5.

Para cópula de Clayton, os coeficientes de dependência da cauda superior λ_S e inferior λ_I são iguais a:

$$\lambda_S = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_I = 2^{-1/\theta}. \quad (4.56)$$

O gerador arquimediato de Clayton é dado por:

$$\Psi_\theta(t) = \frac{1}{\theta} (t^{-\theta} - 1). \quad (4.57)$$

E seu gerador inverso é dado por:

$$\Psi_\theta^{-1}(t) = (1 + \theta t)^{-1/\theta}. \quad (4.58)$$

Então a cópula de Clayton modela efetivamente eventos negativos conjuntos, conforme demonstrado na Figura 5 do Anexo B. Uma dependência Gaussiana de $\rho = 0.5$ implica em $\theta^{clay} = 1.0000$ e de $\rho = 0.9$ implica em $\theta^{clay} = 4.9654$.

4.4.3. Síntese das funções de cópula

A literatura apresentada até então deixa evidente a ampla flexibilidade que as cópulas oferecem no que se refere à modelagem de distribuições conjuntas. A Tabela 1 resume as principais características das funções de cópula usadas em nossa análise empírica.

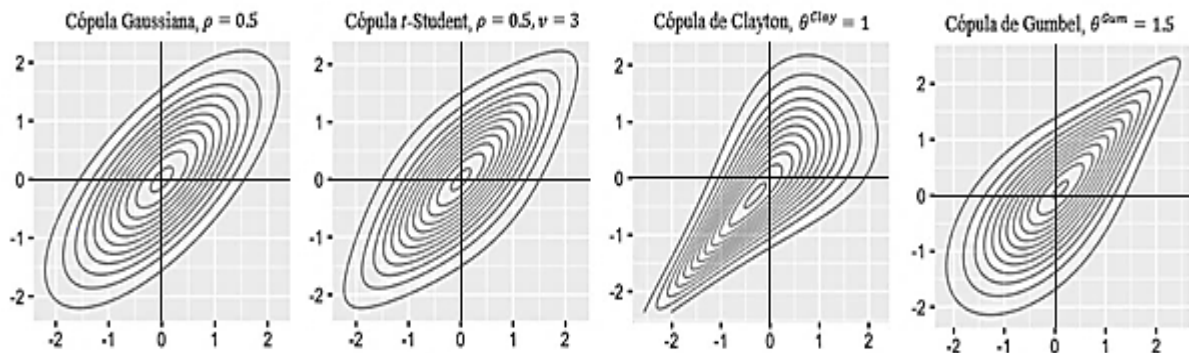
Tabela 1 – Especificação das funções de cópula.

Nome	Cópula Bivariada	Parâmetro	Dependência Caudal
Gaussiana	$\Phi_2(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2))$	ρ	Sem dependência caudal: $\lambda_S = \lambda_I = 0$
<i>t-Student</i>	$T_{2,v}(T_{1,v}^{-1}(u_1), T_{1,v}^{-1}(u_2))$	ρ, v	Dependência caudal simétrica: $\lambda_S = \lambda_I = 2 T_{v+1} \left(-\frac{\sqrt{v+1}\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}} \right)$
Gumbel	$\exp \left(-((- \log u_1)^\theta + (- \log u_2)^\theta)^{1/\theta} \right)$	$\theta \geq 1$	Dependência caudal assimétrica: $\lambda_S = 2 - 2^{1/\theta} \quad \lambda_I = 0$
Clayton	$\max \{ (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, 0 \}$	$\theta > 0$	Dependência caudal assimétrica: $\lambda_S = 0 \quad \lambda_I = 2^{-1/\theta}$

Fonte: Joe (2014)

A Figura 1 apresenta os gráficos de contorno das densidades bivariadas das especificações de funções cópulas descritas na Tabela 1, com distribuições marginais normais-padrão. Todas as distribuições conjuntas foram calibradas com base no coeficiente de correlação linear igual a 0.5. Uma breve análise gráfica já demonstra que apenas conhecer as distribuições marginais Gaussianas e o coeficiente de correlação linear não é suficiente para descrever uma distribuição conjunta.

Figura 1 - Gráfico de contorno das densidades de cópulas com marginais $N(0,1)$.



Fonte: Joe (2014)

Considerando, por exemplo, a distribuição conjunta gerada a partir de uma cópula Clayton, observa-se que a disposição das observações é mais compactada no quadrante negativo. Isso implica em uma maior dependência para eventos conjuntamente negativos. Em compensação, a distribuição gerada a partir de uma cópula Gumbel exibe essa mesma compactação, porém no quadrante positivo direito, o que demonstra uma maior associação para eventos conjuntos positivos. A distribuição gerada por uma cópula t -Student, por sua vez, possui contornos ligeiramente compactados nos quadrantes positivos e negativos, indicando uma simetria de dependência para eventos conjuntamente negativos e positivos.

Tabela 2 – Medidas de dependência das cópulas com marginais $N(0,1)$.

Cópula	Correlação Linear	Parâmetros	Dependência Caudal		Dependência Quantílica (5%)	
			Superior	Inferior	Superior	Inferior
Gaussiana	0.5	$\rho = 0.5$	0.00	0.00	0.24**	0.24**
t -Student	0.5	$\rho = 0.5, v = 3$	0.31	0.31	0.37*	0.37*
Gumbel	0.5	$\theta^{Gum} = 1.5$	0.41	0.00	0.44**	0.17**
Clayton	0.5	$\theta^{Clay} = 1.0$	0.00	0.50	0.10**	0.51**

Fonte: O autor, 2024.

Nota: * são valores baseados nas simulações feitas por Patton (2002, 2009) e ** são valores baseados nas simulações feitas por Santos (2010).

Apesar das distribuições conjuntas apresentarem uma correlação linear igual a 0.5, a Tabela 2 mostra que a estrutura de dependência em cada função cópula, carrega consigo medidas de dependência com valores distintos entre si. A cópula Gaussiana não possui dependência de cauda superior e inferior e as dependências quantílicas são iguais em ambas as caudas. Da mesma forma, a cópula t -Student possui dependências quantílicas iguais, em contrapartida, sua dependência caudal existe e é simétrica. Já a cópula de Gumbel (Clayton), apresenta dependência na cauda superior (inferior) e dependência quantílica assimétrica.

4.5. Cópula Dinâmica

Os modelos de cópula apresentados anteriormente não capturam movimentos ao longo do tempo entre as variáveis, ou seja, cada ponto no tempo recebe o mesmo peso ao estimar o parâmetro de dependência. Nesse sentido, Patton (2006) desenvolveu a teoria necessária para transformar a cópula estática em uma cópula variável no tempo. Para fornecer a base teórica das cópulas dinâmicas, inicialmente é necessário desenvolver a teoria geral de uma função de distribuição multivariada condicionada a uma variável. Seja W uma variável condicionante de dimensão um, a distribuição bivariada condicional pode ser escrita como:

$$F(x_1, x_2|w) = f(w)^{-1} \frac{\partial F(x_1, x_2, w)}{\partial w}, \quad w \in \mathcal{W}, \quad (4.59)$$

onde $f(w)$ é a densidade incondicional de W , $\mathcal{W}$ é o suporte de W e $F(x_1, x_2)$ a função de distribuição bivariada de x_1 e x_2 .

Essa teoria pode ser aplicada às cópulas, uma vez que elas são funções de distribuição, obtendo assim:

$$F(x_1, x_2|w) = C(F_1(x_1|w), F_2(x_2|w)|w), \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (4.60)$$

Assumindo que a variável condicionante é uma sigma-álgebra (ou σ -álgebra) $\mathcal{F}_{t-1}$:

$$\mathcal{F}_{t-1} = \sigma\{x_{1,t-1}, \dots, x_{d,t-1}, \dots, x_{1,t-T+1}, \dots, x_{d,t-T+1}\}. \quad (4.61)$$

O teorema de Sklar é estendido para:

$$F_t(x_{1,t}, \dots, x_{d,t} | \mathcal{F}_{t-1}) = C_t(F_{1,t}(x_{1,t} | \mathcal{F}_{t-1}), \dots, F_{d,t}(x_{d,t} | \mathcal{F}_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1}), \quad (4.62)$$

onde C_t é a cópula condicional de $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ condicional ao conjunto de informações $\mathcal{F}_{t-1}$ e à função de distribuição condicional F_t . A variável aleatória $\mathbf{X}$ é distribuída como $X_i | \mathcal{F}_{t-1} \sim F_{i,t}$.

As distribuições marginais são então estimadas como modelos AR-GARCH, implicando assim que cada variável aleatória está condicionada apenas aos seus próprios valores passados e não aos valores passados de outras variáveis. Para se estimar a cópula condicional, subconjuntos da σ -álgebra precisam ser criados. Logo, $\mathcal{F}_{i,t-1}$ pode ser definido como o menor subconjunto de $\mathcal{F}_{t-1}$ de modo que:

$$X_{i,t} | \mathcal{F}_{i,t-1} = X_{i,t} | \mathcal{F}_{t-1}. \quad (4.63)$$

Desse modo, cada distribuição marginal está condicionada aos seus próprios valores passados $\mathcal{F}_{i,t-1}$ enquanto a cópula está condicionada aos valores passados de todas as variáveis $\mathcal{F}_{t-1}$. A densidade da cópula condicional é derivada como nas Equações (4.23) e (4.24):

$$f(x_1, \dots, x_d | w) = \frac{\partial^d F(x_1, \dots, x_d | w)}{\partial x_1 \dots \partial x_d} = c(u_1, \dots, u_d | w) \prod_i^d f_i(x_i | w_i). \quad (4.64)$$

4.5.1. Cópulas elípticas dinâmicas

Considerando a estrutura de dependência proposta por Patton (2006), a estrutura dinâmica de uma cópula elíptica bivariada assume a seguinte forma:

$$\rho_t = \Lambda \left(\omega_\rho + \beta_\rho \rho_{t-1} + \alpha_\rho \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Phi^{-1}(u_{1,t-j}) \Phi^{-1}(u_{2,t-j}) \right), \quad (4.65)$$

onde $\Lambda(x) = (1 - e^{-x})(1 + e^{-x})^{-1} \begin{cases} \text{Cópula Gaussiana} \\ \text{Cópula } t \text{ Student} \end{cases}$.

A transformação logística modificada $\Lambda(x)$, também conhecida como transformação de Fisher, é projetada para estabilizar a variância do coeficiente de correlação linear e manter ρ_t sempre no intervalo $[-1,1]$, que são os limites do parâmetro de dependência Gaussiana. Antes da transformação⁴, o parâmetro de dependência segue um processo ARMA(1, n), com termo autoregressivo ρ_{t-1} incluído como um regressor para capturar qualquer persistência na dependência. Patton incorpora como variável motriz, a média do produto das últimas n observações das variáveis transformadas $\Phi^{-1}(u_{1,t-j})$ e $\Phi^{-1}(u_{2,t-j})$, para então capturar qualquer variação da dependência de curto prazo. Caso os dados sejam positivamente (negativamente) dependentes, então $\Phi^{-1}(u_{1,t-j})$ e $\Phi^{-1}(u_{2,t-j})$ possuirão sinais iguais (diferentes) e, portanto, espera-se que o parâmetro α_ρ seja positivo (negativo). Segundo Creal *et al.* (2008), o parâmetro n , que representa o tamanho da janela, pode ser interpretado como um parâmetro suavizador. É possível encontrar diferentes tamanhos de janelas utilizados na literatura que adota as especificações de Patton (2006) para cópulas dinâmicas. Os tamanhos variam de $n = 1$, como em Dias e Embrechts (2003), até $n = 20$, como em Benediktsdottir e Scotti (2009). O tamanho adotado por Patton (2006), que também será utilizado no presente estudo, é de $n = 10$. Assim, a estrutura dinâmica da cópula elíptica, descrita pela Equação (4.65), segue um processo ARMA(1,10), podendo ser reescrita da seguinte forma:

$$\rho_t = \Lambda \left(\omega_\rho + \beta_\rho \rho_{t-1} + \alpha_\rho \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} \Phi^{-1}(u_{1,t-j}) \Phi^{-1}(u_{2,t-j}) \right). \quad (4.66)$$

4.5.2. Cópulas arquimedianas dinâmicas

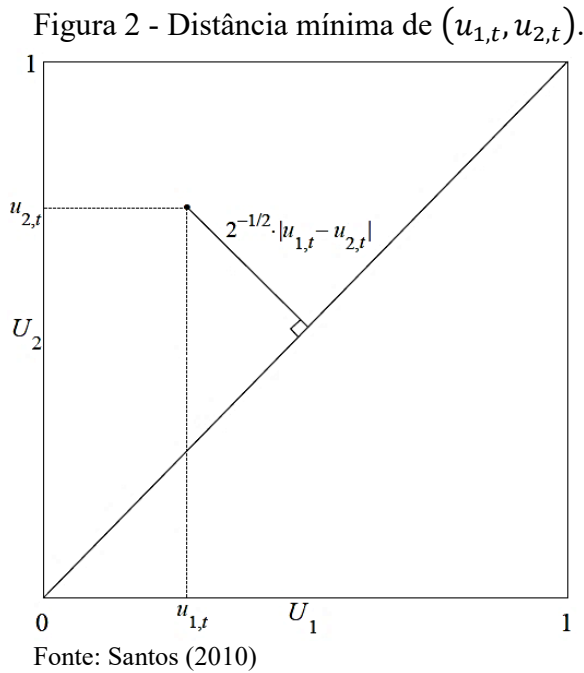
A estrutura dinâmica das cópulas arquimedianas, conforme Patton (2006), é dada por:

$$\theta_t = \tilde{\Lambda} \left(\tilde{\omega}_\theta + \tilde{\beta}_\theta \theta_{t-1} + \tilde{\alpha}_\theta \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} |u_{1,t-j} - u_{2,t-j}| \right), \quad (4.67)$$

onde $\tilde{\Lambda}(x) = e^x + 1 \rightarrow$ Cópula de Gumbel e $\tilde{\Lambda}(x) = e^x \rightarrow$ Cópula de Clayton.

⁴ Após a transformação, o processo deixa de seguir uma estrutura ARMA, visto que esta transformação não é linear e, portanto, não preserva a linearidade, que é uma propriedade necessária em processos do tipo ARMA.

A transformação $\tilde{\Lambda}(x)$ é projetada para estabilizar a variância do coeficiente de correlação linear e manter θ_t sempre no intervalo $[0,1]$. Quando as variáveis são comonótonas a distância entre elas é zero, enquanto com variáveis contramonótonas a distância entre elas é maximizada e, portanto, igual a um. Isso implica que a variável de forçamento está sempre em $[0,1]$. Antes da transformação, o parâmetro de dependência segue um processo ARMA(1, n), com $n = 10$. O termo autoregressivo θ_{t-1} captura a persistência na dependência. A variável motriz da estrutura arquimediana representa a média da diferença absoluta entre $u_{1,t}$ e $u_{2,t}$ sobre as últimas n observações. Patton baseou sua escolha no conceito de comonotonicidade, (dependência positiva perfeita). Considerando que X_1 e X_2 possuem dependência positiva perfeita, então suas respectivas transformações quantílicas U_1 e U_2 pertencerão sempre à diagonal principal do quadrado unitário. A Figura 2 ilustra a distância mínima do ponto $(u_{1,t}, u_{2,t})$ em relação à diagonal principal, para a dependência positiva perfeita.



A distância mínima entre um ponto qualquer $(u_{1,t}, u_{2,t})$ no quadrado unitário e a sua diagonal principal é dada por $2^{-1/2} |u_{1,t} - u_{2,t}|$, ou seja, a variável motriz arquimediana nada mais é que a proporção dessa distância. Portanto, a média das últimas $n = 10$ observações é um indicador da distância que os dados estão da comonotonicidade. Conforme Patton (2006), o valor médio da distância é inversamente proporcional à ordenação de concordância das cópulas, de modo que sob dependência perfeita positiva o valor esperado é zero, sob independência o valor é $1/3$ e sob dependência perfeita negativa é $1/2$.

4.6. Métodos de estimação para cópulas

O método de “Máxima Verossimilhança” (MV) é a principal ferramenta utilizada para a estimativa dos parâmetros da função cópula. Dentre as principais vantagens do método MV, destacam-se a consistência, eficiência assintótica e normalidade assintótica. Como a própria cópula é uma função de distribuição, resta apenas especificar a densidade correspondente e então realizar a estimativa. Pelo princípio da MV, as estimativas podem ser obtidas por meio de três abordagens distintas: Máxima Verossimilhança Exata (MVE), Inferência para Margens (IM) e Máxima Verossimilhança Canônica (MVC). Seja $\mathbf{y}_t = (y_{1,t}, \dots, y_{d,t})$ um vetor de variáveis reais com densidades marginais $f_1, \dots, f_d$ e densidade conjunta f . O método MVE envolve estimar as margens univariadas e o parâmetro da cópula juntos em uma única etapa. Logo, as margens paramétricas univariadas devem ser conhecidas. Assim, a probabilidade logarítmica para o método MVE pode ser escrita como:

$$\ln L(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n; \boldsymbol{\theta}^{MVE}) = \sum_{t=1}^T \ln c \left(F_1(y_{1,t}), \dots, F_d(y_{d,t}) \right) + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^d \ln f_j(y_{j,t}), \quad (4.68)$$

onde $\boldsymbol{\theta}^{MVE}$ é o conjunto completo de parâmetros estimados.

A estimativa da função cópula com o método MVE é computacionalmente muito extensa, por isso ela é realizada em um procedimento de duas-etapas, desenvolvido por Joe e Xu (1996), conhecido como método de ‘Inferência para Margens’ (IM). Na primeira etapa, são estimadas as margens paramétricas univariadas. Em seguida, na segunda etapa, a função cópula é condicionada aos parâmetros das margens univariadas. A densidade canônica de uma cópula representada pela Equação (4.24) possibilita a estimativa em um procedimento de duas-etapas, já que a mesma demonstra a possibilidade da disjunção entre a cópula e as densidades marginais. Deste modo, a verossimilhança completa para o método IM é dada por:

$$L^{IM}(\boldsymbol{\theta}^M, \boldsymbol{\theta}^C) = L_M^{IM}(\boldsymbol{\theta}^M) + L_C^{IM}(\boldsymbol{\theta}^C, \boldsymbol{\theta}^M), \quad (4.69)$$

onde $L_M^{IM}(\boldsymbol{\theta}^M)$ é a probabilidade das margens e $L_C^{IM}(\boldsymbol{\theta}^C, \boldsymbol{\theta}^M)$ é a probabilidade da cópula.

Na primeira etapa, cada margem univariada é estimada separadamente:

$$\ln L_M^{IM}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n; \boldsymbol{\theta}^M) = \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^d \ln f_j(y_{jt}). \quad (4.70)$$

Na segunda etapa, é estimada a função cópula, condicionada ao parâmetro das margens univariadas $\boldsymbol{\theta}^M$:

$$\ln L_C^{IM}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n; \boldsymbol{\theta}^C, \hat{\boldsymbol{\theta}}^M) = \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(y_{1,t}), \dots, F_d(y_{d,t}), \hat{\boldsymbol{\theta}}^M). \quad (4.71)$$

Por fim, o estimador IM assume a forma:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{IM} = (\hat{\boldsymbol{\theta}}^M, \hat{\boldsymbol{\theta}}^C)'. \quad (4.72)$$

O vetor de parâmetros estimados das margens univariadas é dado por:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^M = \arg \max L_M^{IM}(\boldsymbol{\theta}^M) \quad (4.73)$$

O vetor de parâmetros estimados da cópula é dado por:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^C = \arg \max L_C^{IM}(\boldsymbol{\theta}^C, \hat{\boldsymbol{\theta}}^M) \quad (4.74)$$

Segundo Joe (2005), este procedimento pode levar a resultados ineficientes em comparação a métodos onde todos os parâmetros são estimados em uma única etapa. Porém, conforme Grziska (2014), independentemente da ineficiência do método de duas-etapas, compensa utilizá-lo, uma vez que ele reduz significativamente o número de parâmetros a serem estimados em cada etapa. Além disso, o procedimento de duas-etapas apresenta normalidade assintótica como demonstrado por Joe e Xu (1996) e Joe (2005):

$$\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{IM} - \boldsymbol{\theta}_0) \rightarrow N(0, V^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)). \quad (4.75)$$

De modo que a “Matriz de Informação de Godambe” V é dada por:

$$V(\boldsymbol{\theta}_0) = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{D}^{-1}. \quad (4.76)$$

De acordo com Durrleman *et al.* (2000) ao estimar o vetor de pontuação completo $\mathbf{D}$ é importante definir antes um vetor de pontuação g :

$$g = (g_1, \dots, g_d, g_m)', \quad (4.77)$$

onde $m = d + 1$ e $g_j(\boldsymbol{\theta}^{IM}) = \left(\frac{\partial L_{M,j}^{IM}}{\partial \theta_j^M}, \frac{\partial L_C^{IM}}{\partial \theta^C} \right)'$.

Desse modo, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{M}$ são dados por:

$$\mathbf{D} = \mathbb{E} \left\{ \frac{\partial g(\boldsymbol{\theta}^{IM})}{\partial (\boldsymbol{\theta}^{IM})'} \right\} \text{ e } \mathbf{M} = \mathbb{E}\{gg'\}. \quad (4.78)$$

Outro método de estimativa das funções cópula é a “Máxima Verossimilhança Canônica” (MVC). Segundo Fermanian e Scaillet (2005), a estimativa do parâmetro de dependência de cópula pode ser tendenciosa quando as distribuições marginais são mal especificadas. Nesse sentido, o método MVC busca superar esse problema, substituindo as margens dos parâmetros. A primeira alternativa às margens paramétricas é a f.d.c.c. empírica que assume a forma:

$$\hat{F}_d(y_i) = \frac{1}{d+1} \sum_{i=1}^d \mathbf{1}(Y_i \leq y), \quad (4.79)$$

onde $\mathbf{1}(\cdot)$ é a função indicadora.

Utilizando-se as funções de distribuições empíricas $\hat{F}_d(y_i)$, é feita a transformação das observações $(y_{1,t}, y_{2,t})$ em variáveis uniformes $(u_{1,t}, u_{2,t})$. Contudo, McNeil e Frey (2004) consideravam o f.d.c.c. empírico um estimador pobre para as marginais e por isso propõem uma segunda alternativa: o método de estimação semiparamétrico. Pela abordagem dos autores, modelos GARCH univariados são ajustados às séries temporais financeiras e são construídos retornos padronizados. Em seguida, são definidos limites para a cauda esquerda e para a cauda direita. Então, os valores dos limites da cauda direita e da cauda esquerda são modelados conforme a “Distribuição Generalizada de Pareto”. Os valores entre os dois limites são modelados através da f.d.c.c. empírica e, então, a função cópula é estimada com base nessas margens semiparamétricas.

A função de densidade de Pareto generalizada é escrita como:

$$G(t) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi_t/\beta)^{-1/\xi}, & \text{se } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\{-t/\beta\}, & \text{se } \xi = 0 \end{cases} \quad (4.80)$$

onde $\beta > 0$, $t \geq 0$ se $\xi \geq 0$ e $0 \leq t \leq -\frac{\beta}{\xi}$ se $\xi \leq 0$.

A estimativa da cauda superior ($y > s$) é dada por:

$$\hat{F}_s(y) = 1 - \frac{n}{T} \left(1 + \xi_n \frac{y-s}{\beta_n} \right)^{-1/\xi_n}, \quad (4.81)$$

onde $\frac{n}{T}$ é a proporção de dados na cauda.

O estimador da cauda inferior de forma semelhante é definido por:

$$\hat{F}_i(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right). \quad (4.82)$$

A função log-verossimilhança MVC é então dada por:

$$\ln L_C^{MVC}(\hat{\mathbf{u}}_t; \boldsymbol{\theta}^C) = \sum_{t=1}^T \ln c\left(\hat{F}_1(y_{1,t}), \dots, \hat{F}_d(y_{d,t})\right). \quad (4.83)$$

E o estimador é maximizado por meio de:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^C = \arg \max L_C^{MVC}(\boldsymbol{\theta}^C). \quad (4.84)$$

Para informações mais detalhadas das propriedades do estimador MVC, recomendamos consultar Genest *et al.* (1995), Chen e Fan (2006) e Chen *et al.* (2006).

5. MEDIDAS DE DEPENDÊNCIA

5.1. Definições e propriedades básicas

Diversas medidas de concordância e dependência podem ser relacionadas às cópulas. Uma boa medida de concordância/dependência deve agir exclusivamente como um funcional da cópula e ser independente das distribuições marginais. Antes de apresentar as definições e propriedades das medidas utilizadas no presente trabalho, é importante adentrar à algumas propriedades que uma medida deve atender para medir adequadamente a associação entre quaisquer duas variáveis aleatórias. Conforme Nelsen (2006), existem duas métricas de associação que determinam duas classes de medidas: a métrica concordância e a métrica dependência. O conceito de concordância é a mais básica definição de associação entre duas variáveis aleatórias. Um par de variáveis aleatórias é concordante se valores "grandes" (pequenos) de uma tendem a ser associados a valores "grandes" (pequenos) da outra.

Formalmente, considerando que (x_i, y_i) e (x_j, y_j) denotam duas observações de um vetor (X, Y) de variáveis aleatórias contínuas, (x_i, y_i) e (x_j, y_j) são concordantes se $x_i < x_j$ e $y_i < y_j$, ou se $x_i > x_j$ e $y_i > y_j$. De forma análoga, dizemos que (x_i, y_i) e (x_j, y_j) são discordantes se $x_i < x_j$ e $y_i > y_j$ ou se $x_i > x_j$ e $y_i < y_j$. As medidas de dependência e as medidas de concordância são definidas pelos intervalos $[-1, 1]$ e $[0, 1]$, respectivamente. Nota-se por essa propriedade que as medidas de concordância indicam o sentido da associação entre as variáveis, enquanto as medidas de dependência mostram apenas se as variáveis são funcionalmente dependentes ou não. Para que uma medida possa aferir adequadamente a associação entre variáveis aleatórias, são necessárias algumas propriedades. Conforme Embrechts *et al.* (2002), seja $\delta(\cdot)$ uma medida de dependência⁵ que atribui um número real a qualquer par de variáveis aleatórias de valor real X e Y , as propriedades necessárias para que essa medida seja adequada, são:

- i) $\delta(X, Y) = \delta(Y, X)$ (simetria),
- ii) $-1 \leq \delta(X, Y) \leq 1$ (normalização),
- iii) $\delta(X, Y) = 1 \leftrightarrow X, Y$ co-monotônicas e $\delta(X, Y) = -1 \leftrightarrow X, Y$ contra-monotônicas,

⁵ Embrechts *et al.* (2002) usam o termo dependência como sinônimo de associação, desconsiderando a distinção entre os conceitos e as propriedades de dependência e concordância apresentados em Nelsen (2006).

iv) Para $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma transformação estritamente monotônica no domínio X :

$$\delta(T(X), Y) = f(x) = \begin{cases} \delta(X, Y), & \text{para } T \text{ crescente} \\ -\delta(X, Y), & \text{para } T \text{ decrescente} \end{cases}.$$

O índice de correlação linear satisfaz apenas as propriedades (i) e (ii). As medidas obtidas a partir das correlações de posto satisfazem as propriedades (iii) a (iv), se X e Y forem contínuos. Contudo, os autores destacam que as propriedades acima são apenas uma seleção e a lista pode ser alterada e/ou estendida de várias maneiras. Como exemplo de extensão, tem-se que:

v) $\delta(X, Y) = 0 \leftrightarrow X, Y$ são independentes.

Entretanto, essa adição (v) contradiz a propriedade (iv) de não alteração da medida sobre transformações monotônicas. Conforme apresentado no capítulo 3, a metodologia de cópulas permite decompor uma distribuição cumulativa em uma estrutura composta pelas distribuições marginais e em outra composta pelas relações de dependência entre as variáveis aleatórias da distribuição multivariada. Portanto, muitas das medidas de associação podem ser determinadas diretamente a partir da função cópula C .

Dentre as inúmeras medidas de concordância, destacam-se na literatura a correlação de Spearman e o tau de Kendall. Ambas são medidas de correlação entre os postos (*ranking*) das variáveis e, por isso, são também conhecidas como correlações de posto (*rank correlation*). Consequentemente, nas palavras de Hoeffding (1940, 1941), tais medidas são "invariáveis à escala", isto é, permanecem inalteradas sob transformações estritamente crescentes das variáveis aleatórias. Devido a sua maior popularidade, nosso estudo utilizará como correlação de posto o tau de Kendall. A correlação de Pearson, por sua vez, conhecida também como coeficiente de correlação linear, é uma medida de concordância aplicável apenas a variáveis com distribuições elípticas⁶. Quanto às medidas de dependência, as que mais se destacam são as dependências quantílica e de caudas, que serão amplamente utilizadas neste estudo. Todas essas medidas de associação/dependência serão mais aprofundadas nas seções a seguir.

⁶ Distribuições elípticas possuem função de densidade como uma função de uma forma quadrática de suas distribuições marginais

5.2. Correlação de Pearson

O coeficiente de correlação de Pearson, também conhecido como coeficiente de correlação produto-momento de Pearson, é uma medida de dependência linear entre duas variáveis. Formalmente, seja X e Y duas variáveis aleatórias com variâncias finitas e não nulas, a correlação entre elas é a razão entre a sua covariância e o produto de seus desvios padrão, ou seja:

$$\rho = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X)}\sqrt{var(Y)}}, \quad cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y). \quad (5.1)$$

Por ser simples de se calcular, o coeficiente de Pearson é uma das medidas mais populares nos estudos relacionados à dependência. Como obter o cálculo dos segundos momentos (variâncias e covariâncias) de distribuições bivariadas é relativamente simples, derivar o coeficiente de Pearson se torna igualmente uma tarefa simples. Além disso, a correlação e a covariância são fáceis de se manipular em operações lineares. Contudo, embora o coeficiente de Pearson seja a medida mais utilizada para medir a associação entre duas variáveis, ele apresenta diversas limitações. Embrechts *et al.* (2002) lista as principais deficiências do coeficiente de Pearson:

- i) As variâncias de X e Y devem ser finitas para que o coeficiente de correlação linear seja definido. Caso contrário, o estimador não será apropriado para medir dependência em distribuições com cauda pesadas.
- ii) A independência entre X e Y implica correlação linear nula, porém a correlação linear nula não implica, em geral, independência. Só é possível interpretar a não correlação como implicando independência no caso de X e Y seguirem uma distribuição normal bivariada. Contudo, até mesmo essa implicação deixa de ser válida quando apenas as distribuições marginais são normais e a distribuição conjunta é não normal.
- iii) A correlação linear não é invariante sob transformações não lineares estritamente crescentes das variáveis. Um exemplo de transformação estritamente crescente inválida é a transformação logarítmica, i.e. a correlação de $\log(X)$ e $\log(Y)$ será, em geral, diferente da correlação de X e Y .
- iv) A dependência perfeita, positiva ou negativa, entre X e Y não implica, necessariamente, que o valor numérico do coeficiente é igual a 1 ou -1.

5.3. Tau de Kendall

O coeficiente de correlação de Kendall, ou tau de Kendall, é uma medida de concordância entre duas variáveis ordinais, ou seja, ele avalia a dependência monotônica entre duas variáveis. Isso significa que, se uma das variáveis aumenta, a outra tende consistentemente a aumentar ou diminuir, sem a necessidade dessa relação ser linear. Assim, enquanto o coeficiente de correlação de Pearson mede a dependência linear, o tau de Kendall mede a força e a direção de uma associação monotônica entre duas variáveis. Por isso, o tau de Kendall é especialmente útil quando a relação entre as variáveis não é linear. A versão amostral da medida de associação tau de Kendall, é então definida em termos de concordância. Seja $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ uma amostra aleatória de n observações de um vetor (X, Y) de variáveis aleatórias contínuas. Existem $\binom{n}{2}$ pares distintos (x_i, y_i) e (x_j, y_j) de observações na amostra, e cada par é concordante ou discordante. O tau de Kendall para a amostra é definida como (NELSEN, 2006):

$$t = \frac{c-d}{c+d} = \frac{c-d}{n/2}, \quad (5.2)$$

onde c é o número de pares concordantes, d é o número de pares discordantes e t é a probabilidade de concordância menos a probabilidade de discordância para um par de observações (x_i, y_i) e (x_j, y_j) escolhido aleatoriamente na amostra.

Considerando (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) vetores aleatórios independentes e de distribuição idêntica, ambos com a função de distribuição conjunta H . A versão populacional do tau de Kendall é definida como a probabilidade de concordância menos a de discordância:

$$\tau = \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]. \quad (5.3)$$

Para demonstrar o papel que as cópulas desempenham na concordância e nas medidas de associação como o tau de Kendall, é primeiramente definido uma "função de concordância" Q , que representa a diferença das probabilidades de concordância e discordância entre dois vetores independentes (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) de variáveis aleatórias contínuas com diferentes

distribuições articulares H_1 e H_2 , respectivamente, com margens comuns F (de X_1 e X_2) e G (de Y_1 e Y_2). Seja C_1 e C_2 as cópulas de (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) , respectivamente, de modo que:

$$H_1(x, y) = C_1(F(x), G(y)), \quad (5.4)$$

$$H_2(x, y) = C_2(F(x), G(y)). \quad (5.5)$$

A função de concordância Q pode ser expressa como:

$$Q = \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0], \quad (5.6)$$

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C_2(u_1, u_2) dC_1(u_1, u_2) - 1. \quad (5.7)$$

Comparando as Equações (5.5), (5.6) e (5.7), sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas cuja cópula é C . A versão populacional do tau de Kendall para X e Y em termos da função cópula C é dada por:

$$\begin{aligned} \tau &= Q(C, C) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1 \\ &= Q(C, C) = 1 - 4 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} d \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_2} du_1 du_2. \end{aligned} \quad (5.8)$$

A integral na Equação (5.8) pode ser interpretada como o valor esperado da função $C(U, V)$ de variáveis aleatórias uniformes $(0,1)$ U e V cuja função de distribuição conjunta é C . A Equação (5.8) pode ser representada por:

$$\tau = 4\mathbb{E}[C(U_1, U_2)] - 1. \quad (5.9)$$

O tau de Kendall mantém suas propriedades sob monótonas transformações crescentes das variáveis aleatórias. Conforme Linskov *et al.* (2003), o tau de Kendall para cópulas elípticas é dado por:

$$\tau^{Gau} = \tau^T = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho, \quad (5.10)$$

onde ρ é o coeficiente de correlação bivariada.

Grziska (2014), Genest e MacKay (1986) e Genest e Rivest (1986) derivaram, por meio da função geradora $\Psi(w)$, o caso arquimediano para o tau de Kendall:

$$\tau^\Psi = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\Psi(w)}{\Psi'(w)} dw. \quad (5.11)$$

Considerando que:

$$\frac{\Psi(w)}{\Psi'(w)} = \frac{1}{\theta} w \ln w, \quad (5.12)$$

onde ρ é o coeficiente de correlação bivariada.

Então para a cópula de Gumbel, o tau de Kendall é calculado como

$$\begin{aligned} \tau^{Gum} &= 1 + 4 \int_0^1 \frac{1}{\theta} w \ln w dw \\ &= 1 + 4 \frac{1}{\theta} \left[\frac{1}{2} w^2 \ln w - \int_0^1 \frac{1}{2} w dw \right]_0^1 \\ &= 1 + 4 \frac{1}{\theta} \left(0 - \frac{1}{4} \right) = \frac{\theta-1}{\theta}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde $\theta = 1 \Rightarrow \tau(X, Y) = 0$ e $\theta \rightarrow \infty \Rightarrow \tau(X, Y) = 1$.

Já para a cópula de Clayton, o tau de Kendall é calculado como:

$$\begin{aligned} \tau^{clay} &= 1 + 4 \int_0^1 \frac{1}{\theta} (w^{\theta+1} - w) dw \\ &= 1 + 4 \frac{1}{\theta} \left[\frac{1}{\theta+2} w^{\theta+2} - \frac{1}{2} w^2 \right]_0^1 \\ &= 1 + 4 \frac{1}{\theta} \left(\frac{1}{\theta+2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\theta}{\theta+2}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde $\theta = -1 \Rightarrow \tau(X, Y) = -1$, $\theta = 0 \Rightarrow \tau(X, Y) = 0$ e $\theta \rightarrow \infty \Rightarrow \tau(X, Y) = 1$.

A introdução completa e as inúmeras provas para medidas de dependência relacionadas às cópulas é encontrado em Nelsen (2006).

5.4. Dependência Quantílica

Seguindo Coles *et al.* (1999), a dependência quantílica mede a probabilidade de duas variáveis estarem ambas abaixo ou acima de um determinado quantil de suas distribuições univariadas. Formalmente, considerando o limiar superior ε^+ e o limiar inferior ε^- , a dependência quantílica superior e inferior entre as duas variáveis é dada por:

$$\lambda(\varepsilon^+) = \mathbb{P}[X_1 > F_1^{-1}(\varepsilon^+) | X_2 > F_2^{-1}(\varepsilon^+)], \quad (5.15)$$

$$\lambda(\varepsilon^-) = \mathbb{P}[X_1 \leq F_1^{-1}(\varepsilon^-) | X_2 \leq F_2^{-1}(\varepsilon^-)]. \quad (5.16)$$

Pelas Equações (5.15) e (5.16), fica evidente que a dependência quantílica é uma medida diretamente associada ao conceito econômico de *Value-at-Risk* (VaR) e pode ser expressa por:

$$\lambda(\varepsilon^+) = \mathbb{P}[X_1 > \text{VaR}_{X_1}(\varepsilon^+) | X_2 > \text{VaR}_{X_2}(\varepsilon^+)], \quad (5.17)$$

$$\lambda(\varepsilon^-) = \mathbb{P}[X_1 \leq \text{VaR}_{X_1}(\varepsilon^-) | X_2 < \text{VaR}_{X_2}(\varepsilon^-)]. \quad (5.18)$$

Utilizando a transformação integral de probabilidade é possível obter a representação da medida em termos da função cópula C , de modo que:

$$\lambda(u) = \begin{cases} \mathbb{P}(U_1 > u | U_2 > u) = \frac{\hat{C}(u,u)}{u} = \frac{1-2u+C(u,u)}{1-u}, & \forall u > 1/2 \\ \mathbb{P}(U_1 \leq u | U_2 \leq u) = \frac{\hat{C}(u,u)}{u} = \frac{2u+C(u,u)}{u}, & \forall u \leq 1/2 \end{cases}. \quad (5.19)$$

5.5. Dependência Caudal

A dependência de cauda é uma medida assintótica dos valores extremos de distribuições bivariadas, i.e., a dependência caudal representa o limite das dependências quantílicas. Formalmente, sejam X e Y duas variáveis aleatórias distribuídas uniformemente no intervalo unitário $(0,1)$, com o limiar u tendendo aos extremos zero, no caso de dependência da cauda inferior, ou 1, no caso de dependência da cauda superior.

O coeficiente de dependência da cauda assintótica superior é expresso como:

$$\lambda_{sup} = \lim_{u \rightarrow 1} \mathbb{P}[X > F_X^{-1}(u) | Y > F_Y^{-1}(u)], \quad (5.20)$$

onde $F^{-1}(u)$ é o inverso da função de distribuição de probabilidade cumulativa para u .

Logo, λ_{sup} representa a probabilidade de se observar um valor de X maior no u -ésimo quantil dado que Y foi observado no u -ésimo quantil, no limite em que u se aproxima de 1. Analogamente, o coeficiente de dependência da cauda assintótica inferior é escrito como:

$$\lambda_{inf} = \lim_{u \rightarrow 0} \mathbb{P}[X \leq F_X^{-1}(u) | Y \leq F_Y^{-1}(u)]. \quad (5.21)$$

Portanto, a dependência da cauda evidencia a probabilidade de um evento extremo de uma variável ocorrer, condicionado a um evento extremo de outra variável. Segundo Nelsen (2006), caso as margens da variável aleatória sejam contínuas, a dependência da cauda superior está conectada à função cópula via:

$$\begin{aligned} \lambda_{sup} &= \lim_{u \rightarrow 1} \mathbb{P}[X > F_X^{-1}(u), Y > F_Y^{-1}(u)] \\ &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\mathbb{P}[X > F_X^{-1}(u), Y > F_Y^{-1}(u)]}{\mathbb{P}[Y > F_Y^{-1}(u)]} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\bar{C}(u, u)}{1 - u}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

E a dependência da cauda inferior por:

$$\begin{aligned} \lambda_{inf} &= \lim_{u \rightarrow 0} \mathbb{P}[X \leq F_X^{-1}(u), Y \leq F_Y^{-1}(u)] \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}[X \leq F_X^{-1}(u), Y \leq F_Y^{-1}(u)]}{\mathbb{P}[Y \leq F_Y^{-1}(u)]} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2u + C(u, u)}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{C(u, u)}{u}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Desse modo, caso $\lambda_{sup} \in (0,1]$, a cópula C terá dependência na cauda superior e, caso $\lambda_{sup} = 0$, a cópula C não apresentará dependência na cauda superior. Similarmente, caso $\lambda_{inf} \in (0,1]$, a cópula C terá dependência na cauda inferior e, caso $\lambda_{inf} = 0$, a cópula C não apresentará dependência na cauda inferior. Conforme Embrechts *et al.* (2003), a partir da Equação (5.22), é possível derivar o parâmetro de dependência da cauda superior da cópula Gaussiana, dado por:

$$\begin{aligned}\lambda_{sup}^{Gau} &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1-2u+C(u,u)}{1-u} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\bar{C}^{Gau}(u,u)}{1-u} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{d\bar{C}^{Gau}(u,u)}{du} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1} \left(-2 + \frac{\partial}{\partial_s} C^{Gau}(s,t)|_{s=t=u} + \frac{\partial}{\partial_t} C^{Gau}(s,t)|_{s=t=u} \right) \\ &= \lim_{u \rightarrow 1} (\mathbb{P}[V > u|U = u] + \mathbb{P}[U > u|V = u]).\end{aligned}\quad (5.24)$$

onde $\bar{C}$ é a cópula de sobrevivência⁷ Gaussiana.

Simplificando a derivação do parâmetro de dependência da cauda superior, obtém-se:

$$\lambda_{sup}^{Gau} = 2 \lim_{u \rightarrow 1} \mathbb{P}[V > u|U = u]. \quad (5.25)$$

Já a partir da Equação (5.23), é possível derivar o parâmetro de dependência da cauda inferior da cópula Gaussiana, dado por

$$\begin{aligned}\lambda_{inf}^{Gau} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2u+C^{Gau}(u,u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\bar{C}^{Gau}(u,u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{d\bar{C}^{Gau}(u,u)}{du} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\partial}{\partial_s} C^{Gau}(s,t)|_{s=t=u} + \frac{\partial}{\partial_t} C^{Gau}(s,t)|_{s=t=u} \right) \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} (\mathbb{P}[V \leq u|U = u] + \mathbb{P}[U \leq u|V = u]).\end{aligned}\quad (5.26)$$

Simplificando a derivação do parâmetro de dependência da cauda inferior, obtém-se:

$$\lambda_{inf}^{Gau} = 2 \lim_{u \rightarrow 0} \mathbb{P}[V \leq u|U = u]. \quad (5.27)$$

⁷ O conceito de cópula de sobrevivência se relaciona à modelagem da estrutura de dependência entre tempos de sobrevivência. Os tempos de sobrevivência se referem ao tempo até que ocorra um evento de interesse. Esses tempos são frequentemente denotados por $t_1, t_2, \dots, t_n$.

Assim sendo, a dependência da cauda superior da cópula Gaussiana é dada por:

$$\lambda_{sup}^{Gau} = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\Phi_V^{-1}(V) > u | \Phi_U^{-1}(U) = u] = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}[Y > x | X = x]. \quad (5.28)$$

Considerando $Y|X = x \sim \mathbb{N}(\rho x, 1 - \rho^2)$, temos que:

$$\lambda_{sup}^{Gau} = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{\Phi}\left(\frac{x - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{\Phi}\left(\frac{x\sqrt{1 - \rho}}{\sqrt{1 + \rho}}\right), \quad (5.29)$$

onde $\bar{\Phi}(\cdot)$ é a função de sobrevivência da distribuição Gaussiana padrão.

Como resultado das propriedades simétricas, a dependência da cauda inferior da cópula Gaussiana é dada por:

$$\lambda_{inf}^{Gau} = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{\Phi}\left(\frac{x\sqrt{1 - \rho}}{\sqrt{1 + \rho}}\right) = \lambda_{sup}^G. \quad (5.30)$$

Assim, os eventos nas caudas da cópula Gaussiana são independentes entre si e não estão relacionados ao coeficiente de correlação. Em contrapartida, a cópula t -Student apresenta alguma dependência da cauda. De acordo com Demarta e McNeil (2005), a dependência da cauda superior da cópula t é dada por

$$\begin{aligned} \lambda_{sup}^T &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}[t_v^{-1}(V) > u | t_v^{-1}(U) = u] = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}[Y > x | X = x] \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} t_{v+1} \left(- \left(\frac{v+1}{v+x^2} \right)^{1/2} \frac{x - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \\ &= 2 t_{v+1} \left(- \frac{\sqrt{1 - \rho} \sqrt{v+1}}{\sqrt{1 + \rho}} \right), \end{aligned} \quad (5.31)$$

onde $Y|X \sim t_{v+1} \left(\rho x, \left(\frac{v+x}{v+1} \right) (1 - \rho^2) \right)$.

Assim, o parâmetro de dependência da cauda da cópula t -Student depende do coeficiente de correlação e do parâmetro de grau de liberdade v . A dependência da cauda é inversamente proporcional ao parâmetro de grau de liberdade e é diretamente proporcional ao parâmetro de correlação aumenta.

A cópula t -Student, assim como a cópula Gaussiana, é simétrica, ou seja:

$$\lambda_{inf}^T = 2 t_{v+1} \left(-\frac{\sqrt{1-\rho} \sqrt{v+1}}{\sqrt{1+\rho}} \right) = \lambda_{sup}^T. \quad (5.32)$$

Para uma cópula arquimediana, os parâmetros de dependência da cauda podem ser expressos em termos de limites envolvendo o gerador e seu inverso (NELSEN, 2006; EMBRECHTS *et al*; 2003). Seja φ um gerador estrito tal que φ^{-1} pertença à classe das transformadas de Laplace⁸ de variáveis aleatórias estritamente positivas. Considerando $\tilde{\varphi}(u) = \frac{\partial}{\partial u} C(u, v)$, se $\tilde{\varphi}^{-1}(0)$ for finito, então a cópula $C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$ não tem dependência da cauda superior. Se C possui dependência da cauda superior, então $\tilde{\varphi}^{-1}(0) = -\infty$ e o coeficiente de dependência da cauda superior é dado por:

$$\begin{aligned} \lambda_{sup} &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\bar{c}(u, u)}{1-u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1-2u+\varphi^{-1}(2\varphi(u))}{1-u} \\ &= 2 - 2 \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\varphi'(2\varphi^{-1}(u))}{\varphi'(\varphi^{-1}(u))} \\ &= 2 - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi'(2x)}{\varphi'(x)}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

O coeficiente de dependência da cauda inferior para a cópula C é dado por:

$$\begin{aligned} \lambda_{inf} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\bar{c}(u, u)}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2u+\varphi^{-1}(2\varphi(u))}{u} \\ &= 2 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\varphi'(2\varphi^{-1}(u))}{\varphi'(\varphi^{-1}(u))} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi'(2x)}{\varphi'(x)}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

⁸ A transformada de Laplace é uma transformada integral que converte uma função de uma variável real em uma função de uma variável complexa.

Considerando a cópula arquimediana de Gumbel com gerador $\varphi(t) = (-\ln t)^\theta$, temos:

$$\varphi^{-1}(x) = \exp(-x^{1/\theta}), \quad (5.35)$$

onde sua derivada é $\varphi'(x) = -\frac{x^{1/\theta-1} \exp(-x^{1/\theta})}{\theta}$.

Assim, utilizando as Equações (5.33) e (5.34), conclui-se que para a cópula de Gumbel $\lambda_{inf} = 0$ e o coeficiente de dependência da cauda superior é dado por:

$$\begin{aligned} \lambda_{sup}^{Gum} &= 2 - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi'(2x)}{\varphi'(x)} \\ &= 2 - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^{1/\theta-1} \exp(-(2x)^{1/\theta})/\theta}{x^{1/\theta-1} \exp(-x^{1/\theta})/\theta} \\ &= 2 - 2^{1/\theta}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Considerando a cópula arquimediana de Clayton com gerador $\varphi(x) = (t^{-\theta} - 1)/\theta$, segue que:

$$\varphi^{-1}(x) = (1 + \theta x)^{-1/\theta}, \quad (5.37)$$

onde sua derivada é $\varphi'(x) = -(1 + \theta x)^{-1/\theta-1}$.

Assim, utilizando as Equações (5.33) e (5.34), conclui-se que para a cópula de Clayton $\lambda_{sup} = 0$ e o coeficiente de dependência da cauda inferior é dado por:

$$\begin{aligned} \lambda_{inf}^{clay} &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi'(2x)}{\varphi'(x)} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-(1+2\theta x)^{-1/\theta-1}}{-(1+\theta x)^{-1/\theta-1}} \\ &= 2^{1/\theta}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

6. CONTÁGIO VIA CÓPULAS ESTÁTICAS E DINÂMICAS

6.1. Dados

A análise empírica do contágio financeiro das variações quantílicas dos retornos do preço do petróleo sobre os retornos das ações foi realizada com base em dados diários, compreendendo o período de 2 de janeiro de 2017 a 2 de janeiro de 2022. O banco de dados cobriu o período da pandemia da COVID-19, ocorrida em 2020. Desse modo, é possível avaliar se houveram mudanças significativas na dependência entre os quantis dos índices e o quantil do petróleo em meio à crise pandêmica, em comparação aos períodos de estabilidade, evidenciando assim a presença de contágio financeiro nos termos do *shift contagion*, definidos por Rigobon (2001). Para representar os preços do petróleo, utilizou-se uma das principais referências da precificação do petróleo: o preço à vista do petróleo Brent FOB⁹. O petróleo Brent se refere aos componentes do ‘Complexo Brent’, um mercado de petróleo negociado física e financeiramente com base no Mar do Norte, do Noroeste da Europa. O Brent, em particular, é útil para precificar qualquer produto petrolífero na Bacia do Atlântico. Para avaliar o efeito do petróleo Brent sobre as ações, consideraram-se os índices de preços de ações de um conjunto de economias emergentes, incluindo o Brasil, a Índia, o México e a China, representados pelos índices IBOVESPA¹⁰, NIFTY-500¹¹, S&P/BMV-IPC¹² e SSE¹³, respectivamente, e um conjunto de economias desenvolvidas, incluindo os Estados Unidos, o Reino Unido, a Alemanha e o Japão, representados pelos índices S&P-500¹⁴, FTSE-100¹⁵, DAX¹⁶ e NIKKEI-225¹⁷, respectivamente.

⁹ *Free on Board* (FOB) é um termo de remessa que define o ponto na cadeia de abastecimento quando um comprador ou vendedor assume a responsabilidade pelas mercadorias transportadas. Termos FOB como Origem FOB e Destino FOB ajudam a definir propriedade, risco e custos de transporte para compradores e vendedores.

¹⁰ IBOVESPA é o índice de desempenho médio das cotações das ações negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo (B3).

¹¹ NIFTY-500 é o primeiro índice de mercado de ações de base ampla do mercado de ações indiano.

¹² S&P/BMV-IPC mede o desempenho das ações de maior tamanho e liquidez, listadas na Bolsa Mexicana de Valores (BMV).

¹³ SSE é um índice do mercado de ações de todas as ações negociadas na Bolsa de Valores de Xangai.

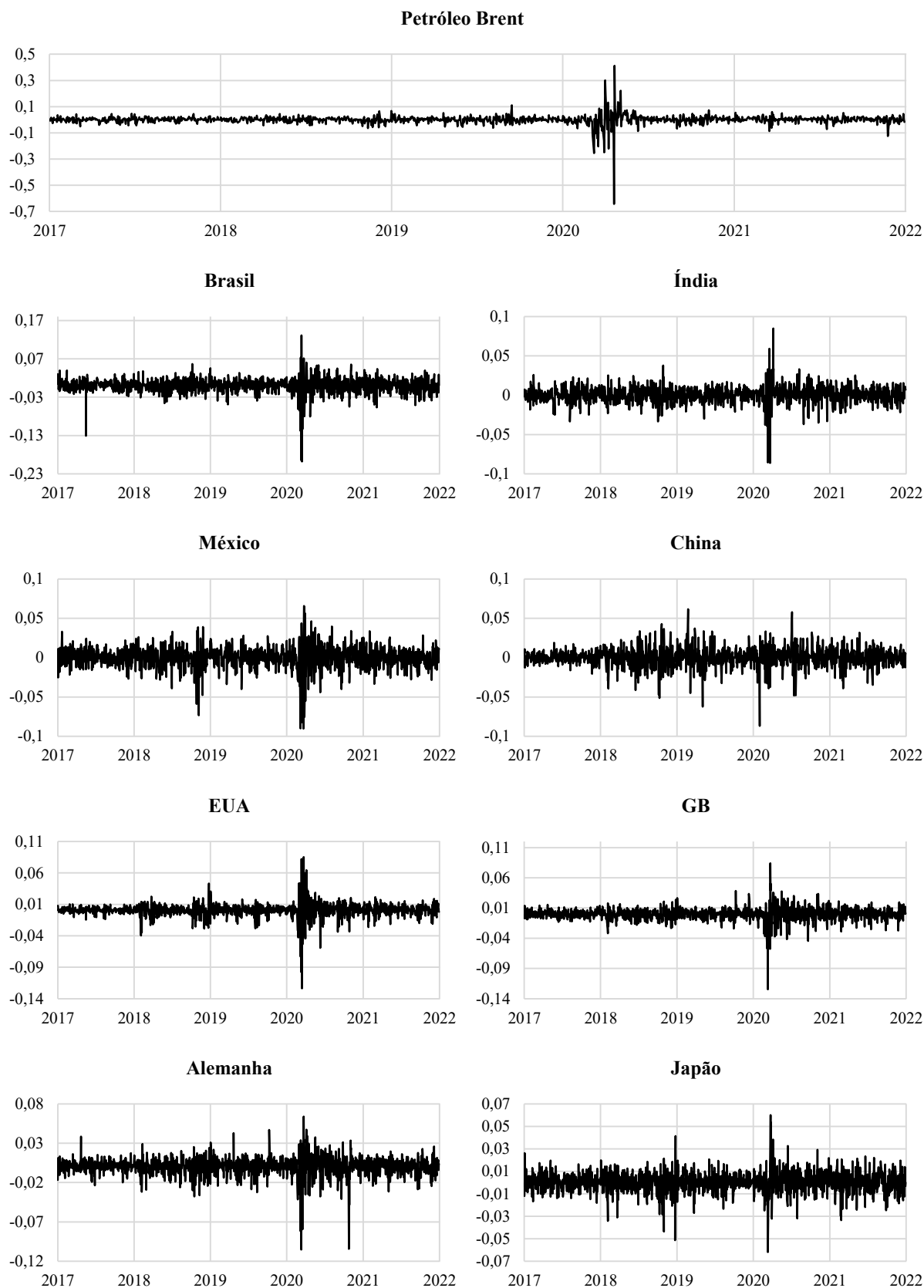
¹⁴ S&P-500 é o índice composto por 500 ativos cotados nas bolsas de NYSE ou NASDAQ de Nova York, qualificados com base em seu tamanho de mercado, sua liquidez e sua representação de grupo industrial.

¹⁵ FTSE-100 é um índice que representa um pool de 100 ações representativas da Bolsa de Valores de Londres.

¹⁶ DAX é uma relação das 30 companhias abertas de melhor performance financeira da Alemanha, com base no sistema Xetra da Bolsa de Valores de Frankfurt.

¹⁷ NIKKEI-225 é o índice da Bolsa de Valores de Tóquio, formado por ações de 225 empresas de maior capitalização do mercado.

Figura 3 – Evolução dos retornos diários do petróleo e dos índices de ações no período de 2017-2022.



Fonte: O autor, 2024.

O petróleo e os índices de preços de ações foram obtidos pelo banco de dados *Datastream-Refinitiv*. O *Datastream* fornece informações sobre índices de ações globais em seis níveis diferentes, onde o nível 1 é o índice total do mercado e o nível 2 divide o mercado de cada país em dez setores (petróleo e gás; materiais básicos; materiais industriais; bens de consumo; serviços ao consumidor; saúde; telecomunicações; serviços públicos; finanças; e tecnologia). Conforme Sukcharoen *et al.* (2014) e Reboredo e Ugolini (2015), utilizamos os índices de preços de ações de nível 2 e os seus valores de mercado correspondentes para construir novos índices agregados do mercado de ações, excluindo o setor de petróleo e gás, para assim eliminar o impacto direto dos preços do petróleo nos retornos das ações. Seguindo os procedimentos de Reboredo e Ugolini (2015), os novos índices agregados foram construídos ponderando os índices de preços com os correspondentes valores totais de mercado de suas ações. As ponderações foram atualizadas semestralmente. Além disso, para ter em conta o impacto das taxas de câmbio na relação entre os retornos das ações petrolíferas, cada índice agregado calculado foi expresso em dólares americanos, utilizando a taxa de câmbio do dólar face à respectiva moeda nacional. Feito isso, os gráficos presentes no Anexo C, ilustram a evolução das variáveis em nível (Figura 6) e dos índices de ações modificados pela exclusão do setor de petróleo e gás (Figura 7), ao longo do período amostral completo. A partir destes gráficos é possível observar quebras estruturais em praticamente todas as séries, ocorrida a partir de março de 2020, o que coincide precisamente com o início da pandemia da COVID-19. A quebra não foi tão evidente apenas para o índice de ações chinês.

Em seguida, os retornos dos índices foram computados de forma logarítmica, por meio da diferença dos preços, conforme descrito pela Equação (3.1). A Figura 3 mostra a dinâmica temporal dos retornos dos preços do petróleo e dos índices de ações analisados. É possível identificar diferenças no tamanho e no momento das oscilações entre o petróleo e as ações nos diferentes mercados, enquanto compartilham momentos de alta volatilidade em torno do início da crise da COVID-19, em março de 2020. A dimensão e a dinâmica da volatilidade dos preços também diferiram bastante entre os países analisados. A Tabela 3 fornece estatísticas descritivas para os índices de retorno de ações e os retornos do petróleo para a amostra total e para os períodos antes e depois do início da pandemia da COVID-19, tomando como ponto de ruptura o dia 11 de março de 2020¹⁸.

¹⁸ Em 11 de março de 2020, a COVID-19 foi caracterizada pela Organização Mundial da Saúde (OMS) como uma pandemia.

Tabela 3 – Estatísticas descritivas dos retornos diários do petróleo e das ações.

	Brasil	Índia	México	China	USA	GB	Alemanha	Japão	Brent
Painel A: AMOSTRA GERAL									
Média	0.0000	0.0005	0.0002	0.0003	0.0005	0.0002	0.0004	0.0002	0.0003
Máximo	0.1309	0.0849	0.0659	0.0616	0.0854	0.0843	0.0640	0.0601	0.4120
Mínimo	-0.1978	-0.0862	-0.0904	-0.0869	-0.1237	-0.1245	-0.1053	-0.0618	-0.6437
Desv. P.	0.0199	0.0105	0.0137	0.0119	0.0113	0.0106	0.0122	0.0094	0.0361
Assimetria	-1.798	-0.550	-0.844	-0.5074	-1.248	-1.400	-1.569	-0.2700	-3.462
Curtose	21.810	14.241	9.400	7.919	17.216	14.051	16.018	8.126	103.016
JB	19926*	6931.6*	2380.4*	1370.8*	32202*	24504*	9742.7*	1443.3*	546116*
	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]
BP	82.57*	50.05*	77.79*	101.41*	418.01*	100.15*	80.09*	32.83*	170.68*
	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.035]	[0.000]
ARCH-LM	514.03*	318.06*	470.35*	60.49*	610.13*	337.54*	225.81*	227.21*	281.64*
	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]
Corr. Brent	0.2230	0.1002	0.2041	0.1320	0.2709	0.2477	0.2514	0.0762	-
Painel B: PRÉ-PANDEMIA DA COVID-19									
Média	0.0005	0.00003	0.0000	0.0002	0.0004	0.0002	0.0003	0.0003	0.0003
Máximo	0.0565	0.0380	0.0392	0.0616	0.0432	0.0383	0.0472	0.0415	0.1107
Mínimo	-0.1306	-0.0333	-0.0732	-0.0624	-0.0397	-0.0319	-0.0377	-0.0514	-0.0645
Desv. P.	0.0142	0.0087	0.0114	0.0113	0.0073	0.0071	0.0093	0.0083	0.0185
Assimetria	-1.052	-0.120	-0.579	-0.2304	-0.720	-0.061	-0.228	-0.6179	0.003
Curtose	12.482	4.182	6.496	7.159	8.249	5.644	5.722	7.119	5.390
JB	3069.8*	47.35*	441.38*	569.94*	964.2*	227.96*	247.82*	601.87*	185.94*
	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]
BP	28.16*	36.22*	33.55*	42.65*	33.85*	28.62*	38.39*	41.76*	58.64*
	[0.100]	[0.014]	[0.029]	[0.002]	[0.027]	[0.095]	[0.008]	[0.003]	[0.000]
ARCH-LM	4.82	25.63	137.88*	73.22*	113.58*	50.74*	26.12	91.65*	40.23*
	[0.999]	[0.178]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.162]	[0.000]	[0.005]
Corr. Brent	0.1404	0.0322	0.1632	0.1219	0.1287	0.1637	0.1839	0.0594	-
Painel C: PANDEMIA DA COVID-19									
Média	-0.0007	0.0012	0.0003	0.0004	0.0007	0.0001	0.0004	0.0001	0.0002
Máximo	0.1309	0.0849	0.0659	0.0581	0.0854	0.0843	0.0640	0.0601	0.4120
Mínimo	-0.1978	-0.0862	-0.0904	-0.0869	-0.1237	-0.1244	-0.1053	-0.0618	-0.6437
Desv. P.	0.0263	0.0128	0.0165	0.0128	0.0156	0.0143	0.0155	0.0109	0.0525
Assimetria	-1.653	-0.801	-0.933	-0.798	-1.123	-1.402	-1.836	-0.0205	-2.8279
Curtose	16.296	15.150	9.953	8.425	18.671	17.582	16.198	8.725	57.851
JB	4082.9*	3266.9*	846.66*	695.52*	5451.2*	4795.8*	3020.6*	485.72*	66134*
	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]
BP	68.23*	49.17*	59.09*	21.86	284.35*	64.68*	69.66*	46.47*	90.21*
	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.348]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.001]	[0.000]
ARCH-LM	243.88*	135.96*	248.99*	16.932	247.62*	132.39*	91.165*	120.27*	107.69*
	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.657]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]
Corr. Brent	0.2512	0.1304	0.2321	0.1551	0.3082	0.2729	0.2818	0.0983	-

Fonte: O autor, 2024.

Nota: * indica significância até 10%.

JB é a estatística de Jarque-Bera para normalidade, BP é a estatística de Box-Pierce para correlação serial dos resíduos com 20 defasagens, ARCH-LM é o teste de heterocedasticidade condicional autorregressiva baseado no Multiplicador Lagrange dos resíduos com 20 defasagens e 'Corr. Brent' é a correlação de Pearson entre os retornos do petróleo Brent e dos índices de ações.

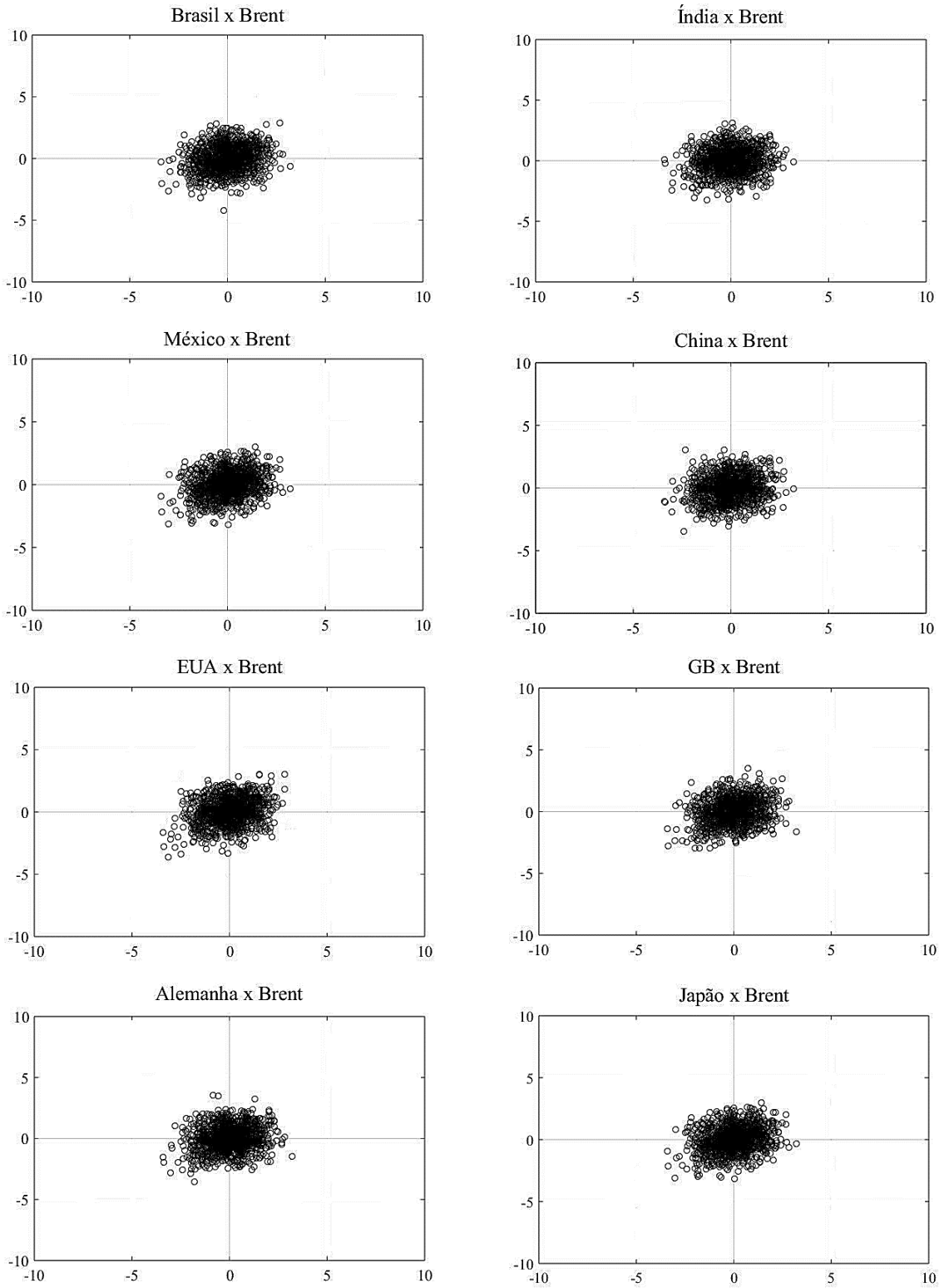
p -valor em [].

Como é comum para retornos financeiros, os retornos diários apresentaram valores médios próximos de zero. Todos demonstraram assimetria negativa e curtose > 3 , indicando distribuição leptocúrtica, principalmente no período da pandemia da COVID-19. Nota-se também que no período de pandemia, o desvio padrão dos retornos diários é superior à média (valor da amostra geral), enquanto que para o período pré-crise, o desvio padrão é inferior à média, indicando maior volatilidade durante o período de pandemia. O aumento percentual da volatilidade durante a crise foi de 85% para o IBOVESPA, 47% para o NIFTY500, 44% para o S&P/BMV-IPC, 13% para o SSE, 113% para o S&P500, 101% para o FTSE100, 67% para o DAX, 31% para o NIKKEI-225 e 183% para o petróleo Brent.

Pelos resultados do teste de normalidade de Jarque-Bera (JB), rejeitou-se a hipótese nula em todas as séries testadas, indicando que as distribuições são não normais. A estatística Box-Pierce (BP) para a amostra geral, evidenciou a presença de correlação serial dos resíduos em todas as séries analisadas, visto que todos os testes apresentaram significância estatística ao nível de 10%. A mesma situação ocorre nos testes de heterocedasticidade condicional autorregressiva baseado no multiplicador lagrange (ARCH-LM). Observamos significância estatística em todos os casos analisados da amostra geral à 10%, indicando assim presença de efeitos ARCH para todas as séries, ou seja, podemos considerar que esses modelos apresentam heteroscedasticidade condicional. As evidências referentes à correlação linear de Pearson (Corr. Brent) sugerem que os retornos das ações são positivamente correlacionados com os retornos do petróleo Brent para o período total da amostra. Com destaque para os índices dos Estados Unidos e do Japão, que apresentaram a maior e a menor correlação com o petróleo, iguais a 0.27 e 0.08, respectivamente. Considerando a dependência linear dos períodos pré e pós-início da pandemia da COVID-19, as estimativas dos coeficientes constataram uma dependência relativamente baixa antes da crise e um aumento considerável da mesma após o início da pandemia. Na Seção (6.2), será analisado por meio de funções cópula como esse fato pode ter implicações em termos de dependência quantílica.

A Figura 4 apresenta os gráficos de dispersão da amostra geral, para as combinações entre o petróleo e os índices de ações, e ilustra o comportamento da distribuição conjunta bivariada entre os pares analisados. É possível afirmar, que o mercado que aparenta ter a maior associação em relação ao petróleo é o americano, visto que, em termos relativos, uma significativa parte das observações se concentra no quadrante inferior esquerdo e no quadrante superior direito. Isso pode ser interpretado como um indicativo de sensibilidade do mercado dos Estados Unidos frente aos co-movimentos dos preços do petróleo Brent. Além disso, a direção ascendente dos pontos no gráfico indica que a correlação entre ambos é positiva.

Figura 4 – Diagrama de dispersão dos retornos diários do petróleo e dos índices.



Fonte: O autor, 2024.

6.2. Especificações dos modelos marginais

Os retornos financeiros possuem fatos estilizados bem conhecidos na literatura, tais como caudas pesadas, efeitos de alavancagem e autocorrelação, como destacado em Chiou e Lee (2009), Mohammadi e Su (2010) e Reboredo (2011). Nesse sentido, Bauwens e Laurent (2005), procurando captar o excesso de curtose, perceberam que os modelos GARCH combinados com erros na forma de t -Student desempenharam melhor do que o uso de erros normais para a modelagem de séries financeiras. Entretanto, o efeito alavancagem não foi capturado por nenhuma das duas densidades, uma vez que ambas são simétricas. Por isso, uma alternativa para se modelar tal assimetria consiste na combinação do uso de distribuições de caudas pesadas e especificações GARCH assimétricas.

Para confirmar tal hipótese, o presente estudo testou três especificações diferentes (GARCH, EGARCH e GJR-GARCH) seguindo três distribuições diferentes (GED, t -Student e t -Student Assimétrica), para os oito índices de mercado e o petróleo. Os testes das especificações dos modelos marginais estão disponíveis na Tabela 12 do Anexo D. Com base no Critério de informação Akaike (AIC), comprovou-se que de fato os melhores ajustes são verificados em especificações assimétricas do GARCH e com distribuição de cauda pesada. Em todos os casos analisados, o melhor modelo foi o GJR-GARCH com distribuição t -Student Assimétrica. Nesse sentido, para capturarmos as características mais importantes dos retornos à vista do petróleo e dos retornos das ações, as distribuições marginais de $R_{BRENT,t}$, $R_{IBOV,t}$, $R_{NIFTY,t}$, $R_{IBOV,t}$, $R_{SPBMV,t}$, $R_{SSE,t}$, $R_{SP500,t}$, $R_{FTSE,t}$, $R_{DAX,t}$ e $R_{NIKKEI,t}$ são parametrizadas de acordo com modelos $ARMA(p_1, q_1)$ -GJR-GARCH(p_2, q_2), i.e. para $i = BRENT, IBOV, NIFTY, SPBMV, SSE, SP500, FTSE, DAX$ e $NIKKEI$, temos:

$$R_{i,t} = \phi_{i,0} + \sum_{i=1}^{p_1} \phi_i R_{t-i} + \sum_{i=1}^{q_1} \delta_i z_{t-i} + u_{i,t}, \quad (6.1)$$

$$u_{i,t} = h_{i,t}^{1/2} z_{i,t}, \quad (6.2)$$

$$h_{i,t} = \alpha_{i,0} + \alpha_{i,1} u_{i,t-1}^2 + \beta_i h_{i,t-1} + \gamma_i I_{i,t-1} u_{i,t-1}^2, \quad (6.3)$$

$$z_{i,t} \sim \mathbb{T}^A(z_i | v, \lambda, a, b, c), \quad (6.4)$$

onde $\mathbb{T}^A$ denota a distribuição t -Student assimétrica.

As Equações (6.1), (6.2), (6.3) e (6.4) são explicadas a seguir. Começando pela Equação (6.1), ela decompõe o retorno do tempo t em uma constante $\phi_{i,0}$, em p_1 e q_1 defasagens de $R_{i,t}$ e $z_{i,t}$, respectivamente, para controlar correlações seriais dos retornos dos ativos, e em um resíduo $u_{i,t}$. A Equação (6.2) define este resíduo como o produto da volatilidade condicional e a inovação. O termo de alavancagem da Equação (6.3), captura o efeito de alavancagem com $I_{i,t-1} = 1$ quando $u_{i,t-1}$ é negativo, caso contrário, $I_{i,t-1} = 0$. Além disso, as ordens de defasagem do modelo GJR são todas especificadas como 1, visto que, conforme Brooks (2002), um modelo da família GARCH com ordem de defasagem de 1 pode descrever suficientemente bem o agrupamento de volatilidade nos retornos de ativos. Ao mesmo tempo, pouca literatura financeira utilizou modelos de ordem superior a 1. As defasagens apropriadas para média condicional (p_1 e q_1) foram selecionadas usando valores entre 0 e 1, tomando como estrutura de defasagem os valores que mais minimizaram o AIC (Tabela 12 – Anexo D). Foram também utilizados como parâmetros de escolha da melhor estrutura de defasagem dos modelos marginais, a significância dos parâmetros estimados e o diagnóstico dos resíduos (teste BP e teste ARCH-LM). Deste modo, as especificações selecionadas das distribuições marginais dos retornos da amostra geral, são: ARMA(0,0) GJR-GARCH(1,1) para o BRENT, ARMA(1,0) GJR-GARCH(1,1) para o IBOV, ARMA(1,0) GJR-GARCH(1,1) para o NIFTY, ARMA(1,0) GJR-GARCH(1,1) para o SPBMV, ARMA(1,0) GJR-GARCH(1,1) para o SSE, ARMA(1,0) GJR-GARCH(1,1) para o SP500, ARMA(1,0) GJR-GARCH(1,1) para o FTSE, ARMA(1,0) GJR-GARCH(1,1) para o DAX e ARMA(0,1) GJR-GARCH(1,1) para o NIKKEI.

As estimativas dos parâmetros são apresentadas na Tabela 4 e analisadas na Seção 6.3. A Equação (6.4) especifica que os resíduos padronizados seguem uma distribuição t -Student assimétrica de Hansen (1994), dada pela Equação (3.24), apresentada anteriormente no Capítulo 3. Os desvios mais comuns da normalidade são caudas pesadas e assimetria. A densidade Gaussiana não captura nem o excesso de curtose e nem a assimetria, e apesar da densidade t -Student ser capaz de descrever o excesso de curtose, o mesmo não se pode dizer para a assimetria. A densidade t -Student assimétrica, por sua vez, consegue capturar ambos os efeitos e, portanto, pode descrever com mais precisão as distribuições dos retornos do petróleo e das ações. A distribuição Gaussiana é obtida quando $\lambda = 0$ e a distribuição t -Student quando $\lambda = 0$ e $\nu \rightarrow \infty$. Segundo Patton (2006), a modelagem de cópulas requer que os modelos de distribuições marginais sejam distinguíveis dos verdadeiros. Se um modelo marginal for mal especificado, as transformadas integrais de probabilidade não serão uniformes (0,1) e, consequentemente, qualquer modelo de cópula será automaticamente mal especificado.

6.3. Resultados dos modelos marginais

Antes de analisarmos o impacto das mudanças quantílicas do petróleo sobre os mercados acionários, por meio de cópulas variantes e invariantes no tempo, destacamos primeiramente as estimativas encontradas para os modelos marginais dos retornos do petróleo e dos índices de ações, a partir dos quais foram calculados seus respectivos quantis. A Tabela 4 apresenta as estimativas dos parâmetros e testes de ajuste para os modelos marginais da amostra geral. Destacamos que foram estimados também os modelos marginais dos períodos de pré e pós-início da pandemia da COVID-19, presentes no Anexo E.

As estimativas dos parâmetros para a média condicional demonstram que os coeficientes Autorregressivos (AR) e de Média Móvel (MA) foram significativos, ao nível de 10%, em algumas das séries, o que evidencia dependência serial. Quanto à variância condicional, as estimativas dos parâmetros demonstraram que os componentes GARCH (β_1) foram estatisticamente significativos em todas as séries, enquanto os componentes ARCH (α_1) apresentaram significância para os retornos dos índices de Brasil, China, Estados Unidos, e para os retornos do petróleo Brent. Todas as distribuições apresentaram uma alta persistência da variância, visto que α_i mais β_i são ≈ 1 . Já pelo componente GJR (γ), observou-se efeitos de alavancagem em todas as séries, exceto para o índice chinês. Logo, os retornos responderam de forma assimétrica aos choques de informação. Além disso, os valores estimados para assimetria (λ) e o parâmetro de grau de liberdade (ν) confirmaram que os termos de erro não seguem uma distribuição normal e, portanto, foram bem caracterizados pela distribuição com assimetrias e caudas pesadas, i.e., a função de distribuição *t*-Student assimétrica garante um bom ajuste ao modelo marginal. Ainda considerando os graus de liberdade da distribuição, o mercado chinês apresentou o menor valor, em torno de 3.84, indicando que suas caudas são as mais pesadas. Por outro lado, o México apresentou o maior valor, em torno de 8.78, o que indica uma menor probabilidade de ocorrerem eventos extremos no mercado mexicano.

A Tabela 4 também fornece informações sobre os testes de ajuste para os modelos marginais estimados. Conforme as estatísticas BP e ARCH-LM, não foram identificados correlação serial e efeitos ARCH nos resíduos do modelo. Avaliou-se também a adequação da distribuição *t*-Student assimétrica, inspecionando se a distribuição dos resíduos do modelo padronizado era uniforme (0,1). Para tanto, utilizamos o teste de *goodness-of-fit* qui-quadrado de Pearson ajustado χ^2 . O teste χ^2 compara as funções de distribuição empírica e teórica para avaliar se há evidências de que a especificação da distribuição do modelo analisado é adequada.

Tabela 4 – Estimativas dos modelos de distribuição marginal da amostra geral.

	Brasil	Índia	México	China	USA	GB	Alemanha	Japão	Brent
Média									
μ	0.0004 (0.00) [0.381]	0.0004 (0.00) [0.196]	0.0001 (0.00) [0.707]	0.0005* (0.00) [0.061]	0.0004* (0.00) [0.006]	0.0001 (0.00) [0.559]	0.0003 (0.00) [0.180]	0.0002 (0.00) [0.193]	0.0007 (0.00) [0.227]
ϕ_1	-0.001 (0.03) [0.968]	0.075* (0.03) [0.009]	0.092* (0.03) [0.001]	-0.041* (0.02) [0.099]	-0.047 (0.03) [0.121]	-0.058* (0.02) [0.027]	-0.034 (0.03) [0.229]	-	-
δ_1	-	-	-	-	-	-	-	-0.116* (0.03) [0.001]	-
Variância									
α_0	0.1642* (0.06) [0.100]	0.0752* (0.03) [0.017]	0.0574 (0.04) [0.122]	0.0228* (0.01) [0.071]	0.0238* (0.01) [0.000]	0.0146* (0.01) [0.085]	0.0311* (0.02) [0.044]	9.3401* (2.75) [0.001]	0.2793* (0.07) [0.000]
α_1	0.0650* (0.02) [0.025]	0.0117 (0.01) [0.558]	0.0194 (0.02) [0.371]	0.0737* (0.02) [0.000]	0.0469* (0.03) [0.092]	0.0096 (0.02) [0.619]	0.0072 (0.02) [0.655]	0.0434 (0.03) [0.152]	0.0236* (0.02) [0.002]
β_1	0.8311* (0.07) [0.000]	0.8494* (0.04) [0.000]	0.8996* (0.05) [0.000]	0.9135* (0.02) [0.000]	0.7988* (0.04) [0.000]	0.9208* (0.04) [0.000]	0.9126* (0.03) [0.000]	0.7413* (0.06) [0.000]	0.8540* (0.02) [0.000]
γ	0.0978* (0.05) [0.055]	0.1189* (0.03) [0.001]	0.0832* (0.03) [0.008]	0.0143 (0.03) [0.642]	0.2843* (0.07) [0.000]	0.1041* (0.03) [0.001]	0.1079* (0.03) [0.001]	0.1993* (0.06) [0.000]	0.1252* (0.04) [0.001]
λ	-0.0831* (0.03) [0.034]	-0.0775* (0.04) [0.033]	-0.1065* (0.04) [0.008]	-0.0368 (0.03) [0.217]	-0.1748* (0.04) [0.000]	-0.1868* (0.04) [0.000]	-0.1896* (0.04) [0.000]	-0.0996* (0.04) [0.008]	-0.1377* (0.04) [0.000]
ν	6.779* (1.39) [0.000]	5.935* (0.97) [0.000]	8.775* (1.87) [0.000]	3.839* (0.49) [0.000]	5.298* (0.86) [0.000]	5.078* (0.72) [0.000]	4.588* (0.68) [0.000]	7.691* (1.47) [0.000]	4.824* (0.69) [0.000]
LM	3551.7	4274.4	3939.9	4105.9	4623.2	4444.4	4193.3	4384.7	3229.9
BP	10.627 [0.936]	20.906 [0.342]	18.094 [0.516]	22.572 [0.257]	25.684 [0.139]	23.718 [0.164]	16.928 [0.595]	17.764 [0.538]	21.162 [0.388]
ARCH-LM	0.228 [0.999]	0.989 [0.442]	0.802 [0.713]	0.514 [0.962]	0.601 [0.914]	1.209 [0.237]	0.243 [0.999]	0.892 [0.598]	0.7813 [0.739]
$\chi^2(1)$	[0.201]	[0.242]	[0.377]	[0.137]	[0.135]	[0.403]	[0.111]	[0.147]	[0.139]
$\chi^2(2)$	[0.322]	[0.829]	[0.484]	[0.113]	[0.164]	[0.683]	[0.739]	[0.857]	[0.134]
$\chi^2(3)$	[0.264]	[0.376]	[0.728]	[0.494]	[0.949]	[0.651]	[0.284]	[0.788]	[0.818]

Fonte: O autor, 2024.

Nota: * indica significância até 10%.

LM é o valor do log da máxima verossimilhança, BP é a estatística Box-Pierce para correlação serial dos resíduos com 20 defasagens, ARCH-LM é o teste de heterocedasticidade condicional autorregressiva baseado no Multiplicador Lagrange dos resíduos com 20 defasagens e χ^2 é o teste de *goodness-of-fit* qui-quadrado de Pearson ajustado para a amostra geral (1), subamostra de 2017-2019 (2) e subamostra de 2020-2022 (3). Os p -valores de χ^2 abaixo de 0,05 indicam rejeição da hipótese nula de especificação correta. Erro padrão em () e p -valor em [].

Conforme os p -valores obtidos, em todos os modelos da amostra geral aceitou-se a hipótese nula de especificação correta da distribuição do modelo. Aliás, como a dependência linear entre os retornos do petróleo e dos índices de ações alterou após o início da pandemia da COVID-19, como destacado anteriormente na Tabela 3, examinamos também se a adequação da distribuição t -Student assimétrica foi mantida nos períodos pré e pós-início da COVID-19. As estatísticas obtidas para as duas subamostras novamente evidenciam que a especificação dos modelos é correta. Desse modo, os testes de ajuste concluem que não há erros de especificação nos modelos de distribuição marginal estudados, possibilitando assim, a estimação dos modelos cópula estática/dinâmica por meio dos resíduos padronizados das variáveis analisadas, extraídos dos modelos marginais.

6.4. Resultados das cópulas estáticas e dinâmicas pré-COVID-19

As Figuras 9, 10, 11 e 12, do Anexo H, apresentam os gráficos de evolução da correlação quantílica entre os retornos do petróleo e das ações ao longo do tempo amostral completo. A linha pontilhada representa o coeficiente de correlação incondicional (ρ, θ) , captado pela cópula estática/constante. A linha inteira representa a evolução do coeficiente de correlação condicional (ρ_t, θ_t) , captado pelas estruturas dinâmicas de Patton descritas pelas Equações (5.66) e (5.67). O traço vertical representa o ponto de ruptura em que se inicia a pandemia da COVID-19 (11 de março de 2020). Praticamente todas as estruturas de correlação apresentaram um padrão semelhante, de modo que a partir do ponto de ruptura, a correlação ficou acima da média constante. Observa-se que no intervalo de crise (2020-2022), ρ_t ou θ_t permanece por mais tempo acima da média incondicional, o que pode representar um indício de contágio financeiro. As estimativas dos coeficientes da cópula estática e dinâmica, para amostra geral, estão apresentadas na Tabela 15 e 16, respectivamente, presentes no Anexo G.

No entanto, para se examinar a presença de contágio financeiro entre ambos, os coeficientes de correlação das funções de cópula estática e dinâmica foram re-estimados separando os períodos de pré-crise $(\rho_0, \theta_0, \rho_{t,0}, \theta_{t,0})$ e crise $(\rho_1, \theta_1, \rho_{t,1}, \theta_{t,1})$ da COVID-19. A intuição para a divisão dos períodos parte do pressuposto de que o processo que governa a dependência entre as variáveis é distinto entre os dois períodos. Sendo assim, testar a hipótese de contágio financeiro implica em avaliar se essas variáveis correlacionadas são significantes, o que representaria uma intensificação do canal de transmissão de choques, durante o período

Tabela 5 – Tau’s de Kendall e parâmetros iniciais das cópulas no período de 2017-2020.

Cópula	Tau de Kendall	Parâmetro Inicial Gaussiano	Parâmetro Inicial t -Student	Parâmetro Inicial Gumbel	Parâmetro Inicial Clayton
Brasil	$\tau_0 = 0.0889$	$\rho^{Gau} = 0.0889$	$\rho^T = 0.0889$	$\theta^{Gum} = 1.0976$	$\theta^{Clay} = 0.1951$
Índia	$\tau_0 = 0.0208$	$\rho^{Gau} = 0.0208$	$\rho^T = 0.0208$	$\theta^{Gum} = 1.0212$	$\theta^{Clay} = 0.0425$
México	$\tau_0 = 0.1219$	$\rho^{Gau} = 0.1219$	$\rho^T = 0.1219$	$\theta^{Gum} = 1.1388$	$\theta^{Clay} = 0.2776$
China	$\tau_0 = 0.0704$	$\rho^{Gau} = 0.0704$	$\rho^T = 0.0704$	$\theta^{Gum} = 1.0757$	$\theta^{Clay} = 0.1515$
USA	$\tau_0 = 0.0654$	$\rho^{Gau} = 0.0654$	$\rho^T = 0.0654$	$\theta^{Gum} = 1.0700$	$\theta^{Clay} = 0.1400$
GB	$\tau_0 = 0.1010$	$\rho^{Gau} = 0.1010$	$\rho^T = 0.1010$	$\theta^{Gum} = 1.1123$	$\theta^{Clay} = 0.2247$
Alemanha	$\tau_0 = 0.0970$	$\rho^{Gau} = 0.0970$	$\rho^T = 0.0970$	$\theta^{Gum} = 1.1074$	$\theta^{Clay} = 0.2148$
Japão	$\tau_0 = 0.1229$	$\rho^{Gau} = 0.1229$	$\rho^T = 0.1229$	$\theta^{Gum} = 1.1401$	$\theta^{Clay} = 0.2802$

Fonte: O autor, 2024.

de crise, corroborando assim com a definição de *shift contagion* descrita por Rigobon (2001). Assim, foram estimados diferentes modelos de cópulas, tomando como pseudo-amostra a transformação integral de probabilidade dos resíduos padronizados dos modelos marginais para os períodos de pré e pós-início da pandemia da COVID-19. Em outras palavras, os resíduos foram transformados em observações uniformes $u_{1,t}$ e $u_{2,t}$ por meio da função empírica de distribuição, descrita pela Equação (4.79), e seus respectivos histogramas são descritos na Figura 8 do Anexo F.

As Tabelas 6 e 7 relatam as evidências encontradas para o período pré-pandêmico das cópulas estáticas e dinâmicas, respectivamente. A partir dos valores obtidos do critério de informação AIC, foi escolhida a cópula que melhor se ajusta aos dados e que, por consequência, captura a melhor estimativa da característica de dependência das caudas. Neste caso, a minimização de AIC determina o melhor modelo. Começando a análise pelas cópulas estáticas, sua modelagem foi realizada a partir de parâmetros iniciais obtidos por meio dos tau’s de Kendall, presentes na Tabela 5. Os valores τ_0 demonstram que, no período pré-pandêmico, os quantis dos retornos das ações e do petróleo apresentam dependência monotônica positiva e relativamente baixa, com destaque para o mercado indiano que exibiu o menor valor, em torno de 0.02. Após a obtenção dos parâmetros iniciais, os coeficientes incondicionais das cópulas estáticas foram estimados a partir do método de máxima verossimilhança.

Pelas estimativas das cópulas estáticas incondicionais, descritas na Tabela 6, a cópula Gaussiana foi a que melhor se ajustou aos mercados de Brasil, Índia, México, Reino Unido e Japão, com valores AIC iguais a -13.7 , 0.3 , -23.4 , -10.1 , -19.8 e -22.9 , respectivamente, indicando ausência de dependência caudal entre o petróleo e estes mercados. Os índices de ações chinês, americano e alemão se ajustaram melhor às cópulas de Clayton (dependência de cauda inferior), de Gumbel (dependência de cauda superior) e t -Student (dependência de cauda

Tabela 6 – Estimativas do modelo de cópula estática para retornos do petróleo e das ações no período de 2017-2020.

	Brasil	Índia	México	China	EUA	GB	Alemanha	Japão
Gaussiana								
ρ_0	0.121* (0.03) [0.000]	0.039* (0.04) [0.267]	0.159* (0.04) [0.000]	0.119* (0.04) [0.001]	0.088* (0.04) [0.002]	0.139* (0.03) [0.000]	0.135* (0.04) [0.000]	0.157* (0.03) [0.000]
AIC	-13.7	0.3	-23.4	-9.1	-7.0	-19.8	-16.9	-22.9
<i>t</i> -Student								
ρ_0	0.122* (0.04) [0.000]	0.039 (0.04) [0.187]	0.159* (0.04) [0.000]	0.119* (0.04) [0.002]	0.089* (0.04) [0.004]	0.142* (0.04) [0.000]	0.142* (0.04) [0.000]	0.158* (0.04) [0.000]
AIC	-11.6	3.2	-21.4	-10.5	-9.0	-18.2	-19.7	-20.9
Gumbel								
θ_0	1.058* (0.03) [0.000]	1.005* (0.02) [0.000]	1.085* (0.03) [0.000]	1.063* (0.02) [0.000]	1.055* (0.02) [0.000]	1.073* (0.03) [0.000]	1.078* (0.03) [0.000]	1.078* (0.03) [0.000]
AIC	-10.7	1.9	-16.8	-6.2	-10.1	-14.2	-15.6	-15.6
Clayton								
θ_0	0.175* (0.05) [0.000]	0.048* (0.04) [0.217]	0.258* (0.05) [0.000]	0.161* (0.04) [0.000]	0.120* (0.04) [0.002]	0.205* (0.05) [0.000]	0.195* (0.05) [0.000]	0.258* (0.05) [0.000]
AIC	-9.7	0.7	-14.7	-14.1	-3.5	-17.0	-18.1	-15.7

Fonte: O autor, 2024.

Nota: * indica significância até 10%.

AIC é o critério de informação Akaike.

Erro padrão em (), *p*-valor em [] e valor mínimo do AIC em negrito.

simétrica), respectivamente. Os coeficientes de correlação incondicional se mostraram baixos e positivos em todos os casos, com destaque para Índia que apresentou uma correlação em torno de 0.04. Logo, a evidência empírica invariante no tempo mostra que durante o período pré-pandêmico os retornos do petróleo e das ações foram co-movidos fracamente e há pouca evidência de dependência da cauda (superior e/ou inferior), uma vez que a maioria dos mercados analisados se ajustou à distribuição Gaussiana.

Com relação às cópulas dinâmicas condicionais (DCC), observa-se pela Tabela 7 que os resultados foram semelhantes aos das cópulas invariantes. Os valores AIC revelam que a cópula DCC-Gaussiana novamente se ajustou melhor às economias do Brasil, Índia, México, Reino Unido e Japão, indicando que pela análise dinâmica estes mercados acionários também não apresentam evidências de dependência caudal. Além disso, os mercados de China, Estados Unidos e Alemanha, ajustaram-se melhor às cópulas de DCC-Clayton (dependência dinâmica de cauda inferior), de DCC-Gumbel (dependência dinâmica de cauda superior) e DCC-*t*-Student (dependência dinâmica simétrica), respectivamente.

Tabela 7 – Estimativas do modelo de cópula dinâmica para retornos do petróleo e das ações no período de 2017-2020.

	Brasil	Índia	México	China	EUA	GB	Alemanha	Japão
DCC-Gaussian								
ω_{ρ_0}	0.341 (0.34) [0.319]	0.011 (0.32) [0.972]	0.249 (0.01) [0.434]	0.241* (0.09) [0.007]	0.053 (0.03) [0.116]	0.047 (0.26) [0.856]	-0.026* (0.02) [0.273]	0.232 (0.31) [0.456]
β_{ρ_0}	-1.099* (0.17) [0.000]	-1.757* (0.18) [0.000]	-1.736* (0.13) [0.000]	-1.589* (0.63) [0.011]	-1.808* (0.12) [0.000]	-2.009* (0.19) [0.000]	1.991* (0.03) [0.000]	-1.683* (0.16) [0.000]
α_{ρ_0}	0.154 (0.37) [0.680]	0.954* (0.52) [0.065]	0.386 (0.38) [0.317]	-0.302 (0.38) [0.428]	0.115* (0.06) [0.063]	0.553 (0.35) [0.124]	0.047 (0.04) [0.257]	0.390 (0.38) [0.311]
AIC	-9.9	1.3	-20.6	-5.8	-9.4	-16.9	-19.4	-20.2
DCC-t-Student								
ω_{ρ_0}	0.160 (0.18) [0.381]	0.700* (0.29) [0.016]	0.233 (0.29) [0.430]	0.192 (0.59) [0.748]	0.088 (0.17) [0.598]	0.536* (0.29) [0.064]	-0.022* (0.01) [0.028]	0.246 (0.29) [0.412]
β_{ρ_0}	-1.896* (0.16) [0.000]	-1.750* (0.17) [0.000]	-0.380* (0.21) [0.065]	-0.068 (6.98) [0.992]	-1.124* (0.00) [0.000]	-1.942* (0.07) [0.000]	-1.999* (0.01) [0.000]	-0.603* (0.18) [0.001]
α_{ρ_0}	0.426* (0.24) [0.071]	-1.127* (0.56) [0.039]	0.363 (0.41) [0.374]	0.107 (0.56) [0.849]	0.266* (0.15) [0.021]	-0.077 (0.21) [0.718]	0.049* (0.01) [0.000]	0.406 (0.38) [0.286]
AIC	-5.7	6.9	-14.8	-5.8	-3.9	-13.6	-20.0	-14.6
DCC-Gumbel								
$\tilde{\omega}_{\theta_0}$	1.391 (1.15) [0.228]	-0.514* (0.09) [0.000]	2.002* (0.51) [0.000]	-0.282 (3.02) [0.926]	0.374 (1.30) [0.774]	2.303* (0.22) [0.000]	0.140 (1.66) [0.933]	2.055* (0.53) [0.000]
$\tilde{\beta}_{\theta_0}$	-0.839* (0.10) [0.000]	0.461* (0.17) [0.007]	-1.391* (0.41) [0.000]	0.549* (0.28) [0.049]	0.135* (0.08) [0.092]	-1.708* (0.21) [0.000]	0.309* (0.14) [0.022]	-1.445* (0.42) [0.000]
$\tilde{\alpha}_{\theta_0}$	-0.745* (0.38) [0.049]	0.405 (1.11) [0.714]	-0.692 (0.93) [0.457]	-0.212 (0.57) [0.710]	-0.877* (0.48) [0.068]	-0.521 (0.51) [0.306]	-0.661 (0.75) [0.378]	-0.734 (0.99) [0.459]
AIC	-8.5	5.8	-12.8	-2.1	-9.6	-13.5	-15.4	-11.8
DCC-Clayton								
$\tilde{\omega}_{\theta_0}$	0.635 (2.06) [0.758]	-4.802 (3.82) [0.209]	1.284* (0.21) [0.000]	0.772 (3.06) [0.720]	1.986* (0.51) [0.000]	2.052* (1.08) [0.058]	1.118* (0.55) [0.043]	1.297* (2.10) [0.537]
$\tilde{\beta}_{\theta_0}$	-6.783* (4.08) [0.096]	-2.551* (1.48) [0.085]	-5.489* (1.51) [0.000]	-0.426 (5.79) [0.941]	-8.236* (3.29) [0.012]	-6.281* (1.19) [0.000]	-6.664* (1.33) [0.000]	-5.350* (1.48) [0.000]
$\tilde{\alpha}_{\theta_0}$	-3.261 (6.79) [0.631]	5.706* (1.14) [0.000]	-5.716 (7.35) [0.437]	-7.682* (4.54) [0.091]	-9.244* (5.50) [0.093]	-7.593* (3.19) [0.017]	-4.644* (0.95) [0.000]	-5.564* (7.29) [0.445]
AIC	-7.0	3.9	-14.6	-12.5	-2.4	-16.3	-16.6	-14.9

Fonte: O autor, 2024.

Nota: * indica significância até 10%.

AIC é o critério de informação Akaike e DCC é o parâmetro dinâmico condicional ($q = 10$).

Erro padrão em (), P-Valor em [] e Valor mínimo do AIC em negrito.

Analizando os pares DCC-Gaussianos, $\{\text{Brasil} \times \text{Brent}\}$, $\{\text{Índia} \times \text{Brent}\}$, $\{\text{México} \times \text{Brent}\}$, $\{\text{GB} \times \text{Brent}\}$ e $\{\text{Japão} \times \text{Brent}\}$, pelas estimativas de β_{ρ_0} , que capta mudanças de persistência do processo, a dependência entre estes mercados e o petróleo mostrou-se persistente, visto que todos os coeficientes foram estatisticamente significantes e exibiram valores elevados, destacando-se principalmente o mercado britânico que apresentou o maior β_{ρ_0} , de aproximadamente -2.01 . Quanto às estimativas relativas a α_{ρ_0} , apenas o coeficiente referente à Índia foi significativo, e demonstrou que os retornos do mercado indiano e do petróleo são positivamente dependentes. Em nenhum dos pares DCC-Gaussianos se verificou significância estatística para os coeficientes ω_{ρ_0} , que captam o deslocamento no nível do processo, descrito pela Equação (4.66).

Examinando o par de DCC-Gumbel, $\{\text{EUA} \times \text{Brent}\}$, os coeficientes $\tilde{\beta}_{\theta_0}$ e $\tilde{\alpha}_{\theta_0}$ foram significantes, e indicaram que há baixa persistência e dependência negativa do petróleo com o mercado americano. Para a relação DCC-Clayton, $\{\text{China} \times \text{Brent}\}$, verificou-se significância estatística apenas para o coeficiente $\tilde{\alpha}_{\theta_0} = -7.68$, ou seja, os retornos do petróleo também são negativamente correlacionados com o índice chinês. Em relação ao par DCC-*t*-Student, $\{\text{Alemanha} \times \text{Brent}\}$, todos os coeficientes foram significantes, de modo que β_{ρ_0} e α_{ρ_0} indicaram dependência persistente e positiva, e o deslocamento no nível ω_{ρ_0} , foi baixo e negativo, em torno de -0.02 , implicando que o nível do processo de correlação quantílica entre o petróleo Brent e o índice de ações alemão é ínfimo durante o período de estabilidade econômica.

Quadro 3 – Melhores cópulas do período de 2017-2020.

Cópula	Família	Modelo Estático	Modelo Dinâmico			AIC
		ρ_0, θ_0	$\omega_{\rho_0}, \tilde{\omega}_{\theta_0}$	$\beta_{\rho_0}, \tilde{\beta}_{\theta_0}$	$\alpha_{\rho_0}, \tilde{\alpha}_{\theta_0}$	
Brasil	Gaussiana	0.121*	-	-	-	-13.7
Índia	Gaussiana	0.039*	-	-	-	0.3
México	Gaussiana	0.159*	-	-	-	-23.4
China	Clayton	0.161*	-	-	-	-14.1
EUA	Gumbel	1.055*	-	-	-	-10.1
GB	Gaussiana	0.139*	-	-	-	-19.8
Alemanha	DCC- <i>t</i> -Student	-	-0.022*	-1.999*	0.049*	-20.0
Japão	Gaussiana	0.157*	-	-	-	-22.9

Fonte: O autor, 2024.

Nota: * indica significância até 10%.

AIC é o critério de informação Akaike.

DCC indica o parâmetro de correlação condicional dinâmico da cópula ($q = 10$).

Por fim, quando comparamos os valores AIC das melhores cópulas estáticas às melhores cópulas dinâmicas, percebe-se que as relações analisadas, em sua maioria, seguem uma estrutura de dependência incondicional, caracterizada pelas cópulas Gaussiana, Gumbel e Clayton, com valores relativamente baixos e positivos para a dependência média e para a cauda. Somente a Alemanha exibiu dependência condicional, descrita pela cópula DCC- t -Student, com evidências de períodos longos de baixa dependência positiva. As melhores cópulas do período pré-pandêmico e suas principais características, são descritas no Quadro 3.

6.5. Resultados das cópulas estáticas e dinâmicas pós-COVID-19

Considerando o período pandêmico, a Tabela 8 exibe os tau's de Kendall e os parâmetros iniciais das cópulas. Conforme as estimativas, todos os valores destes coeficientes aumentaram em algum grau, após o advento da COVID-19. É possível constatar um crescimento significativo da correlação para Brasil, Índia, Estados Unidos, Reino Unido e Alemanha, um crescimento moderado para México e Japão, e um crescimento praticamente nulo para China. Portanto, logo de início, evidenciamos um aumento da dependência monotônica entre o petróleo e a maioria dos mercados analisados, no período de crise pandêmica. Analisando as cópulas estáticas que minimizaram o AIC, presentes na Tabela 9, percebe-se que a forma e a intensidade da dependência quantílica do petróleo mudaram bastante durante a pandemia. Os mercados de petróleo e de ações moveram-se na mesma direção, exibindo sempre algum tipo de dependência caudal, já que nenhuma das relações analisadas se ajustou à cópula Gaussiana.

Tabela 8 – Tau's de Kendall das cópulas elípticas e arquimedianas no período de 2020-2022.

Cópula	Tau de Kendall	Parâmetro Inicial Gaussiano	Parâmetro Inicial t -Student	Parâmetro Inicial Gumbel	Parâmetro Inicial Clayton
Brasil	$\tau_1 = 0.1489$	$\rho^{Gau} = 0.1489$	$\rho^T = 0.1489$	$\theta^{Gum} = 1.1750$	$\theta^{Clay} = 0.3499$
Índia	$\tau_1 = 0.0997$	$\rho^{Gau} = 0.0997$	$\rho^T = 0.0997$	$\theta^{Gum} = 1.1107$	$\theta^{Clay} = 0.2215$
México	$\tau_1 = 0.1479$	$\rho^{Gau} = 0.1479$	$\rho^T = 0.1479$	$\theta^{Gum} = 1.1736$	$\theta^{Clay} = 0.3471$
China	$\tau_1 = 0.0790$	$\rho^{Gau} = 0.0790$	$\rho^T = 0.0790$	$\theta^{Gum} = 1.0858$	$\theta^{Clay} = 0.1716$
USA	$\tau_1 = 0.1986$	$\rho^{Gau} = 0.1986$	$\rho^T = 0.1986$	$\theta^{Gum} = 1.2478$	$\theta^{Clay} = 0.4956$
GB	$\tau_1 = 0.1828$	$\rho^{Gau} = 0.1828$	$\rho^T = 0.1828$	$\theta^{Gum} = 1.2237$	$\theta^{Clay} = 0.4474$
Alemanha	$\tau_1 = 0.1425$	$\rho^{Gau} = 0.1425$	$\rho^T = 0.1425$	$\theta^{Gum} = 1.1662$	$\theta^{Clay} = 0.3324$
Japão	$\tau_1 = 0.1479$	$\rho^{Gau} = 0.1499$	$\rho^T = 0.1499$	$\theta^{Gum} = 1.1763$	$\theta^{Clay} = 0.3527$

Fonte: O autor, 2024.

Pelas estimativas AIC, os mercados americano e britânico apresentaram dependência incondicional simétrica com o petróleo, se ajustando melhor à cópula *t*-Student. Todos os demais mercados acionários se ajustaram melhor à cópula de Clayton, indicando forte presença de dependência invariante no tempo de cauda inferior. A correlação incondicional entre os retornos do petróleo e das ações de todos os países apresentou valores positivos e altos, principalmente quando comparamos aos valores encontrados no período pré-pandêmico, exceto para o mercado chinês que praticamente não sofreu alteração em seu coeficiente de correlação e, ainda, manteve a mesma estrutura de dependência caudal (inferior). Portanto, a evidência empírica mostra que, ao contrário do período pré-pandêmico, durante o período pós-pandêmico os retornos do petróleo e dos índices de ações, com exceção da China, foram co-movidos fortemente, e há uma predominante evidência de dependência de cauda inferior. Os coeficientes de correlação que sofreram maior aumento foram observados principalmente nos mercados de Índia, Estados Unidos e Reino Unido. Em contrapartida, o mercado chinês exibe uma variação quase nula em seus coeficientes.

Tabela 9 – Estimativas do modelo de cópula estática para retornos do petróleo e das ações no período de 2020-2022.

	Brasil	Índia	México	China	EUA	GB	Alemanha	Japão
Gaussiana								
ρ_1	0.234* (0.04) [0.000]	0.173* (0.04) [0.000]	0.264* (0.04) [0.000]	0.143* (0.04) [0.000]	0.309* (0.04) [0.000]	0.321* (0.04) [0.000]	0.232* (0.04) [0.000]	0.266* (0.04) [0.000]
AIC	-26.4	-13.4	-34.9	-8.7	-49.2	-52.7	-26.3	-35.5
<i>t</i> -Student								
ρ_1	0.232* (0.04) [0.000]	0.167* (0.05) [0.000]	0.249* (0.05) [0.000]	0.141* (0.04) [0.002]	0.308* (0.04) [0.000]	0.300* (0.05) [0.000]	0.224* (0.05) [0.000]	0.247* (0.05) [0.000]
AIC	-26.7	-12.9	-35.9	-6.5	-58.6	-57.7	-30.2	-37.1
Gumbel								
θ_1	1.152* (0.04) [0.000]	1.140* (0.03) [0.000]	1.158* (0.04) [0.000]	1.068* (0.03) [0.000]	1.216* (0.04) [0.000]	1.229* (0.04) [0.000]	1.129* (0.04) [0.000]	1.171* (0.04) [0.000]
AIC	-20.9	-9.7	-23.4	-4.6	-39.0	-45.5	-12.9	-25.7
Clayton								
θ_1	0.350* (0.06) [0.000]	0.222* (0.06) [0.000]	0.347* (0.06) [0.000]	0.172* (0.05) [0.001]	0.496* (0.07) [0.000]	0.447* (0.07) [0.000]	0.334* (0.06) [0.000]	0.347* (0.06) [0.000]
AIC	-27.0	-17.4	-41.0	-10.2	-58.1	-52.1	-40.9	-41.0

Fonte: O autor, 2024.

Nota: * indica significância até 10%.

AIC é o critério de informação Akaike.

Erro padrão em (), *p*-valor em [] e valor mínimo do AIC em negrito.

Tabela 10 – Estimativas do modelo de cópula dinâmica para retornos do petróleo e das ações no período de 2020-2022.

	Brasil	Índia	México	China	USA	GB	Alemanha	Japão
DCC-Gaussian								
ω_{ρ_1}	0.183 (0.22) [0.406]	0.144 (0.34) [0.677]	0.104* (0.00) [0.000]	0.045 (0.22) [0.835]	0.139 (0.11) [0.206]	0.279 (0.38) [0.464]	-0.251 (0.26) [0.328]	0.022 (0.04) [0.596]
β_{ρ_1}	0.301* (0.12) [0.011]	-0.923* (0.15) [0.000]	2.073* (0.00) [0.000]	-0.062 (0.19) [0.755]	1.549* (0.51) [0.002]	-0.201 (0.19) [0.290]	0.002 (0.79) [0.998]	2.046* (0.08) [0.000]
α_{ρ_1}	0.487 (0.39) [0.221]	0.540 (0.52) [0.300]	-0.017* (0.00) [0.000]	0.397 (0.46) [0.392]	0.179 (0.14) [0.219]	0.637 (0.59) [0.277]	1.065* (0.47) [0.026]	-0.029 (0.03) [0.317]
AIC	-24.4	-10.8	-35.2	-6.5	-48.5	-52.1	-31.3	-34.3
DCC- <i>t</i> -Student								
ω_{ρ_1}	0.142 (0.20) [0.488]	0.598 (0.53) [0.256]	1.149* (0.37) [0.002]	0.026 (0.19) [0.892]	0.123 (0.32) [0.705]	0.272 (0.47) [0.563]	1.142* (0.46) [0.014]	2.034* (0.32) [0.000]
β_{ρ_1}	0.323* (0.12) [0.007]	-2.148* (0.07) [0.000]	-1.923* (0.69) [0.053]	-0.112 (0.15) [0.446]	1.599* (0.88) [0.070]	2.526* (0.28) [0.000]	-2.177* (0.02) [0.000]	-2.328* (0.13) [0.000]
α_{ρ_1}	0.458 (0.38) [0.226]	1.009 (0.77) [0.190]	-0.306 (0.40) [0.452]	0.514* (0.04) [0.000]	0.275 (0.22) [0.222]	0.329 (0.38) [0.383]	0.756* (0.46) [0.100]	-0.495* (0.21) [0.019]
AIC	-25.6	-7.5	-32.9	-1.4	-52.5	-60.8	-29.4	-30.7
DCC-Gumbel								
$\tilde{\omega}_{\theta_1}$	-0.923* (0.27) [0.001]	2.164* (0.23) [0.000]	0.195 (0.81) [0.809]	-1.317* (0.00) [0.000]	-0.106 (0.17) [0.535]	1.314* (0.79) [0.091]	2.309* (0.12) [0.000]	2.138* (0.11) [0.000]
$\tilde{\beta}_{\theta_1}$	1.052* (0.10) [0.000]	1.431* (0.29) [0.000]	0.251* (0.13) [0.054]	1.367* (0.00) [0.000]	0.467* (0.14) [0.001]	-0.618 (0.72) [0.393]	-1.418* (0.20) [0.000]	-1.256* (0.12) [0.000]
$\tilde{\alpha}_{\theta_1}$	0.302 (0.45) [0.498]	-1.033 (0.79) [0.189]	-0.445* (0.23) [0.052]	0.328* (0.00) [0.000]	-0.130 (0.36) [0.723]	-0.629 (0.59) [0.289]	-1.519* (0.59) [0.009]	-1.168* (0.38) [0.002]
AIC	-17.2	-7.9	-19.8	-2.3	-32.4	-40.9	-10.4	-24.4
DCC-Clayton								
$\tilde{\omega}_{\theta_1}$	-1.782* (0.16) [0.000]	0.831 (1.15) [0.469]	4.587* (1.50) [0.002]	0.998 (0.95) [0.293]	7.372* (2.50) [0.003]	5.494* (0.00) [0.000]	-0.214 (2.17) [0.921]	4.333* (1.52) [0.004]
$\tilde{\beta}_{\theta_1}$	0.124 (0.75) [0.869]	-5.651* (1.18) [0.000]	-4.484* (0.29) [0.000]	-0.559 (2.13) [0.793]	-5.766* (0.56) [0.000]	5.956* (0.00) [0.000]	1.232 (3.30) [0.709]	-4.504* (0.31) [0.000]
$\tilde{\alpha}_{\theta_1}$	2.669* (0.55) [0.000]	-3.051 (3.75) [0.416]	7.719 (4.95) [0.119]	-8.219* (2.64) [0.002]	17.518* (9.12) [0.055]	-6.796* (0.00) [0.000]	-3.020 (4.09) [0.461]	-13.022* (4.99) [0.009]
AIC	-21.4	-13.8	-43.1	-8.1	-62.3	-53.5	-38.2	-42.9

Fonte: O autor, 2024.

Nota: * indica significância até 10%.

AIC é o critério de informação Akaike e DCC é o parâmetro dinâmico condicional ($q = 10$).Valor mínimo de AIC em negrito, erro padrão em () e p -valor em [].

Considerando as cópulas dinâmicas que minimizaram o AIC, presentes na Tabela 10, os resultados demonstram que, assim como para a cópula estática, todos os mercados de ações exibiram alguma dependência de cauda. Os mercados do Brasil e do Reino Unido se ajustaram melhor à cópula DCC-*t*-Student, o que indica dependência de cauda simétrica. As demais economias minimizaram o AIC para a cópula DCC-Clayton, evidenciando forte presença de dependência dinâmica de cauda inferior no período da COVID-19. Em relação aos pares DCC-Clayton, {México $\times$ Brent}, {Índia $\times$ Brent}, {China $\times$ Brent}, {EUA $\times$ Brent}, {Alemanha $\times$ Brent} e {Japão $\times$ Brent}, pelas estimativas de $\tilde{\beta}_{\theta_1}$, apenas os coeficientes de Alemanha e China não apresentaram significância estatística, os demais foram significantes e indicaram dependência quantílica persistente. Neste quesito, o mercado americano foi o que apresentou o maior valor, em torno de -5.77 . O coeficiente $\tilde{\alpha}_{\theta_1}$, por sua vez, foi estatisticamente significativo para China, Estados Unidos e Japão, e detectou-se dependência negativa para o índice chinês e positiva para os demais. O coeficiente de deslocamento $\tilde{\omega}_{\theta_1}$, foi significativo e muito alto para México, Estados Unidos e Japão, indicando que o nível do processo que governa a correlação linear destes mercados com o petróleo bruto é significativamente elevado no período da pandemia da COVID-19. Analisando os pares DCC-*t*-Student, {Brasil $\times$ Brent} e {GB $\times$ Brent}, pelas estimativas de β_{ρ_1} , ambos os coeficientes foram significantes, porém, indicaram resultados opostos, demonstrando baixa persistência para o Brasil ($\beta_{\rho_1} = 0.32$) e alta para o Reino Unido ($\beta_{\rho_1} = 2.53$). Não se verificou significância nos demais coeficientes.

Comparando então os valores AIC das melhores cópulas estáticas às melhores cópulas dinâmicas, observa-se que diferentemente do período pré-pandêmico, no período de pandemia da COVID-19 não houve predominância da estrutura incondicional. Dessa vez apenas Brasil, Índia, China e Alemanha, apresentaram dependência estática, descrita pela cópula de Clayton,

Quadro 4 – Melhores funções de cópula no período de 2020-2022.

Cópula	Família	Modelo Estático	Modelo Dinâmico			AIC
		ρ_1, θ_1	$\omega_{\rho_1}, \tilde{\omega}_{\theta_1}$	$\beta_{\rho_1}, \tilde{\beta}_{\theta_1}$	$\alpha_{\rho_1}, \tilde{\alpha}_{\theta_1}$	
Brasil	Clayton	0.234*	-	-	-	-27.0
Índia	Clayton	0.173*	-	-	-	-17.4
México	DCC-Clayton	-	4.587*	-4.484*	7.719	-43.1
China	Clayton	0.143*	-	-	-	-10.2
EUA	DCC-Clayton	-	7.372*	-5.766*	17.518*	-62.3
GB	DCC- <i>t</i> -Student	-	0.272	2.526*	0.329	-60.8
Alemanha	Clayton	0.334*	-	-	-	-40.9
Japão	DCC-Clayton	-	4.333*	-4.504*	-13.022*	-42.9

Fonte: O autor, 2024.

Nota: * indica significância até 10%.

AIC é o critério de informação Akaike.

DCC indica o parâmetro de correlação condicional dinâmico da cópula ($q = 10$).

com valores relativamente elevados e positivos para a dependência. Enquanto os mercados de México, Estados Unidos, Reino Unido e Japão, apresentaram dependência condicional dinâmica, caracterizada pelas cópulas DCC-*t*-Student e DCC-Clayton, com evidências de períodos longos de elevada dependência positiva. As melhores cópulas do período pandêmico e suas principais características, são descritas no Quadro 4.

Assim sendo, comparamos os resultados dos melhores modelos do período pandêmico aos resultados do período pré-pandêmico, da Seção 6.4, para assim avaliar se há evidências de mudanças drásticas nos co-movimentos do petróleo e das ações do período de estabilidade para o período de instabilidade, o que configuraria evidência de contágio financeiro. Primeiramente, se analisarmos os quatro pares estáticos, {Brasil $\times$ Brent}, {Índia $\times$ Brent}, {China $\times$ Brent} e {Alemanha $\times$ Brent}, começando pela China, não observamos grande mudança em seu coeficiente de correlação estático, aumentando apenas 7% em relação ao período anterior. Sua forma de associação não mudou também, mantendo a dependência de cauda inferior em ambos os períodos, o que demonstra a resistência do mercado chinês ao contágio financeiro do petróleo. Por outro lado, a presença de contágio é evidente para Brasil, Índia e Alemanha, uma vez que, após o advento da COVID-19, houveram mudanças significativas tanto na estrutura quanto na intensidade da dependência quantílica destes mercados com os retornos do petróleo. Enquanto no período pré-pandêmico, estas três economias apresentaram estruturas de dependência caracterizadas pelas cópulas Gaussiana e DCC-*t*-Student, no período pandêmico, as dependências foram predominantemente incondicionais de cauda inferior (cópula de Clayton). Além disso, seus coeficientes de correlação aumentaram bastante na transição entre os períodos, com destaque para a dependência indiana que cresceu 361%, como descrito abaixo:

$$\begin{aligned} \text{Clayton}(\theta_0^{\text{Brasil}}) &= 0.18^* & \text{e} & \text{Clayton}(\theta_1^{\text{Brasil}}) = 0.35^* \\ \text{Clayton}(\theta_0^{\text{Índia}}) &= 0.05^* & \text{e} & \text{Clayton}(\theta_1^{\text{Índia}}) = 0.22^* \\ \text{Clayton}(\theta_0^{\text{Alemanha}}) &= 0.19^* & \text{e} & \text{Clayton}(\theta_1^{\text{Alemanha}}) = 0.33^* \end{aligned}$$

Considerando os quatro pares dinâmicos, {México $\times$ Brent}, {EUA $\times$ Brent}, {GB $\times$ Brent} e {Japão $\times$ Brent}, percebe-se que em todos os casos a estrutura de dependência alterou. Se antes da crise a forma de associação destes mercados era majoritariamente Gaussiana, durante a crise passou a ser caracterizada pelas cópulas DCC-*t*-Student e Clayton. Começando a análise pelo Reino Unido, único a se ajustar à cópula DCC-*t*-Student, o coeficiente β_{ρ_1} foi estatisticamente significativo, apresentando um valor elevado, ligeiramente maior que o encontrado para β_{ρ_0} , como descrito abaixo:

$$\text{DCC-}t\text{-Student}(\beta_{\rho_0}^{\text{GB}}) = -1.94 \quad \text{e} \quad \text{DCC-}t\text{-Student}(\beta_{\rho_1}^{\text{GB}}) = 2.53$$

Portanto, no período de crise ocorre um aumento relativamente moderado na persistência da dependência. Não se verificou significância nos demais coeficientes (α_{ρ_1} e ω_{ρ_1}), ou seja, os sinais de contágio não são claros para o Reino Unido. Porém, como a estrutura de dependência mudou de um período para outro, sendo Gaussiana antes da crise e DCC-*t*-Student durante a crise, podemos considerar isto como uma fraca evidência de contágio financeiro. Analisando as cópulas DCC-Clayton (México, Estados Unidos e Japão), pelas estimativas de $\tilde{\beta}_{\theta_1}$, todos os parâmetros foram significantes e altos. Comparando-os aos coeficientes $\tilde{\beta}_{\theta_0}$, observa-se que os valores dos coeficientes não sofreram mudanças drásticas:

$$\begin{aligned} \text{DCC-Clayton}(\tilde{\beta}_{\theta_0}^{\text{México}}) &= -5.49 & \text{e} & \text{DCC-Clayton}(\tilde{\beta}_{\theta_1}^{\text{México}}) = -4.48 \\ \text{DCC-Clayton}(\tilde{\beta}_{\theta_0}^{\text{EUA}}) &= -5.24 & \text{e} & \text{DCC-Clayton}(\tilde{\beta}_{\theta_1}^{\text{EUA}}) = -5.77 \\ \text{DCC-Clayton}(\tilde{\beta}_{\theta_0}^{\text{Japão}}) &= -5.35 & \text{e} & \text{DCC-Clayton}(\tilde{\beta}_{\theta_1}^{\text{Japão}}) = 4.50 \end{aligned}$$

Logo, a persistência da dependência entre o petróleo e estes três mercados não sofreu grande alteração durante a crise. O coeficiente $\tilde{\alpha}_{\theta_1}$, por sua vez, foi estatisticamente significativa para Estados Unidos e Japão, onde se detectou dependência positiva e negativa, respectivamente, como segue abaixo:

$$\begin{aligned} \text{DCC-Clayton}(\tilde{\alpha}_{\theta_0}^{\text{EUA}}) &= -8.24 & \text{e} & \text{DCC-Clayton}(\tilde{\alpha}_{\theta_1}^{\text{EUA}}) = 17.52 \\ \text{DCC-Clayton}(\tilde{\alpha}_{\theta_0}^{\text{Japão}}) &= -5.56 & \text{e} & \text{DCC-Clayton}(\tilde{\alpha}_{\theta_1}^{\text{Japão}}) = -13.02 \end{aligned}$$

Assim, no período de crise a variância dos retornos do petróleo são diretamente proporcionais à variância do índice americano, enquanto, para o japonês, o oposto ocorre. Pelas estimativas de $\tilde{\omega}_{\theta_1}$, todos os coeficientes de deslocamento foram significantes, positivos e muito altos, principalmente se compararmos aos valores de $\tilde{\omega}_{\theta_0}$, como segue abaixo:

$$\begin{aligned} \text{DCC-Clayton}(\tilde{\omega}_{\theta_0}^{\text{México}}) &= 1.28 & \text{e} & \text{DCC-Clayton}(\tilde{\omega}_{\theta_1}^{\text{México}}) = 4.59 \\ \text{DCC-Clayton}(\tilde{\omega}_{\theta_0}^{\text{EUA}}) &= 1.99 & \text{e} & \text{DCC-Clayton}(\tilde{\omega}_{\theta_1}^{\text{EUA}}) = 4.37 \\ \text{DCC-Clayton}(\tilde{\omega}_{\theta_0}^{\text{Japão}}) &= 1.29 & \text{e} & \text{DCC-Clayton}(\tilde{\omega}_{\theta_1}^{\text{Japão}}) = 4.33 \end{aligned}$$

O aumento significativo do deslocamento durante a pandemia demonstra que o nível do processo que governa a correlação linear θ_t se eleva expressivamente no período de crise, evidência esta a favor da presença de contágio financeiro dos co-movimentos do petróleo sobre os mercados mexicano, americano e japonês. O Quadro 5 resume os principais resultados referentes ao contágio financeiro, obtidos através da análise estática/dinâmica.

Quadro 5 – Contágio financeiro pela análise de cópulas estáticas e dinâmicas.

Cópula	Família (Pré-crise)	Família (Crise)	Modelo Estático (Crise)	Modelo Dinâmico (Crise)			Evidência de Contágio	
			ρ_1, θ_1	$\omega_{\rho_1}, \tilde{\omega}_{\theta_1}$	$\beta_{\rho_1}, \tilde{\beta}_{\theta_1}$	$\alpha_{\rho_1}, \tilde{\alpha}_{\theta_1}$	<i>Forte</i>	<i>Fraca</i>
Brasil	Gaussiana	Clayton	$\uparrow +$				×	
Índia	Gaussiana	Clayton	$\uparrow +$				×	
México	Gaussiana	DCC-Clayton		$\uparrow$	$\downarrow$	NS	×	
China	Clayton	Clayton	$\downarrow +$					×
EUA	Gumbel	DCC-Clayton		$\uparrow$	$\downarrow$	–	×	
GB	Gaussiana	DCC- <i>t</i> -Student		NS	$\downarrow$	NS		×
Alemanha	DCC- <i>t</i> -Student	Clayton	$\uparrow +$				×	
Japão	Gaussiana	DCC-Clayton		$\uparrow$	$\downarrow$	+	×	

Fonte: O autor, 2024.

Nota: $\uparrow$ indica aumento significativo no valor do coeficiente pós-início da COVID-19.

$\downarrow$ indica que não houve mudança significativa no valor do coeficiente pós-início da COVID-19.

– indica que houve mudança no sinal do coeficiente pós-início da COVID-19.

+ indica que não houve mudança no sinal do coeficiente pós-início da COVID-19.

NS indica não significância estatística.

Forte indica forte evidência de contágio financeiro.

Fraca indica fraca evidência de contágio financeiro.

A partir das evidências relativas à estrutura de dependência bivariada entre os quantis dos retornos do petróleo e dos índices de ações, de países emergentes e desenvolvidos, podemos extrair as seguintes conclusões:

- i) No período pré-pandêmico, em geral, a correlação média foi estática, positiva e exibiu valores relativamente baixos, havendo para maioria dos países presença de independência caudal (Gaussiana e DCC-Gaussiana), com exceção de China, Estados Unidos e Alemanha que apresentaram dependência de cauda inferior (Clayton), dependência de cauda superior (Gumbel) e dependência dinâmica de cauda simétrica (DCC-*t*-Student), respectivamente;
- ii) No período pandêmico, em geral, a correlação média apresentou maior alternância em relação às estruturas temporais (estática e dinâmica). Os valores dos coeficientes foram relativamente altos, havendo forte presença de dependência de cauda inferior (Clayton e DCC-Clayton), com exceção apenas do Reino Unido que apresentou dependência dinâmica de cauda simétrica (DCC-*t*-Student);
- iii) A estrutura de dependência simétrica caracterizada na cópula *t*-Student implica que os mercados de petróleo e de ações do Reino Unido estão ligados no mesmo grau durante períodos de alta e de baixa. Os demais mercados também estão ligados, porém, variam em proporções diferentes, visto que suas respectivas estruturas de dependência são assimétricas.
- iv) A maioria das economias analisadas, apresentaram fortes evidências de contágio financeiro dos co-movimentos do petróleo, sendo elas: Brasil, Índia, México, Estados

Unidos, Alemanha e Japão. Quanto ao Reino Unido, as evidências de contágio existem, porém, são frágeis. E, por fim, para o mercado chinês, os indícios de efeito de contágio inexistem;

- v) A resiliência do mercado chinês aos co-movimentos do petróleo pode ser atribuída à adoção de políticas fiscais e monetárias expansionistas por parte do governo, visando atenuar os impactos das flutuações nos preços do petróleo Brent sobre sua economia.
- vi) O mercado dos Estados Unidos foi o que exibiu mais evidências de contágio, demonstrando assim uma possível sensibilidade do mesmo diante dos co-movimentos do petróleo, em um período de crise. Sua dependência quantílica com o petróleo alterou em estrutura, sentido e intensidade. Em contrapartida, o mercado chinês foi o que demonstrou maior resistência ao contágio financeiro.
- vii) Em relação aos mercados desenvolvidos e emergentes, não se verificou comportamento distinto ou padrões de dependência para retornos de petróleo e ações ao longo do período amostral.

7. CONTÁGIO VIA CÓPULAS DE MUDANÇA DE REGIME DE MARKOV

7.1. Modelos de mudança de regime e cópulas

Para complementar nosso estudo sobre contágio, optamos por uma abordagem que, além de medir mudanças “abruptas” na dependência, fosse capaz de superar uma das principais limitações da análise empírica estática e dinâmica, a determinação *ad hoc* do período de crise. Nesse contexto, a metodologia que se mostrou mais apropriada foram as denominadas “cópulas de mudança de regime de Markov”, ou apenas “MS-cópulas”. Segundo Chollete *et al.* (2009), modelos de mudança de regime baseado em cópulas consistem em modelos *d*-variados de dependência assimétrica que possibilitam modelar o parâmetro de dependência entre retornos de ativos financeiros de maneira mais realista e flexível.

Contudo, antes de nos aprofundarmos na abordagem de MS-cópulas, é importante compreender inicialmente alguns fundamentos dos modelos de mudança de regime (RS). Segundo Piger (2007), os modelos RS são normalmente usados para modelar dados de séries temporais que flutuam entre “estados” ou “regimes”. Nesse caso, os parâmetros estimados podem assumir valores diferentes conforme o regime que ele está inserido. Para tanto, é incluído como parte do modelo um processo estocástico supostamente responsável pela “mudança de regime”. O regime em operação pode até ser observável em algumas situações específicas, entretanto, geralmente não é observável, exigindo assim que sejam realizadas inferências sobre qual regime o processo se encontrava em momentos passados. O principal uso dos modelos RS na literatura tem sido para a análise das mudanças no comportamento dinâmico de séries temporais macroeconômicas e financeira.

Os modelos RS são divididos em duas categorias: modelos “autorregressivos com limiar” e modelos de “mudança de Markov”. A principal diferença entre essas abordagens está na forma como é modelado o processo de evolução dos regimes. Enquanto os modelos autorregressivos com limiar assumem que as mudanças de regime são desencadeadas pelo nível de variáveis observadas em relação a um limiar não observado, os modelos de mudança de Markov assumem que as mudanças de regime evoluem de acordo com uma cadeia de Markov. Em particular, o presente estudo trabalhará apenas com os modelos de mudança de Markov, entretanto, as referências clássicas para os modelos autorregressivos com limiar são Tong e Lim (1980) e Tong (1983).

Os modelos de mudança de regime de Markov (MS) foram originalmente introduzidos pelos trabalhos seminais de Goldfeld e Quandt (1973) e Cosslett e Lee (1985), mas só passaram a ter maior utilização no desenvolvimento de estudos empíricos a partir do trabalho de Hamilton (1989): “*A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle*”. Os modelos MS introduzem a variação do tempo nos parâmetros na forma de seu “estado” ou “regime”. Estes modelos admitem comportamentos diferentes em estados da natureza distintos, ao mesmo tempo que possibilitam a estimativa da ocorrência de transição de um estado para outro. A variação de tempo segue um processo estocástico de valor discreto latente com memória limitada, i.e. o valor atual do indicador de estado é determinado apenas pelo valor do indicador de estado do período anterior, implicando na chamada “propriedade de Markov”. Um processo estocástico que segue esta propriedade é conhecido como “processo de Markov” ou “cadeia de Markov”. Considerando φ_t uma cadeia Markov de primeira ordem, isso implica que o regime atual φ_t depende apenas do regime imediatamente anterior, φ_{t-1} . Assim, o modelo é completo definindo-se as probabilidades de transição de um regime para o outro, conforme descrito abaixo:

$$\mathbb{P}(\varphi_t = 1 | \varphi_{t-1} = 1) = p_{11}, \quad (7.1)$$

$$\mathbb{P}(\varphi_t = 2 | \varphi_{t-1} = 1) = p_{12}, \quad (7.2)$$

$$\mathbb{P}(\varphi_t = 1 | \varphi_{t-1} = 2) = p_{21}, \quad (7.3)$$

$$\mathbb{P}(\varphi_t = 2 | \varphi_{t-1} = 2) = p_{22}. \quad (7.4)$$

Logo, p_{ij} representa a probabilidade da cadeia de Markov se mover do regime i , no tempo $t - 1$, para o regime j no tempo t . Como os valores p_{ij} definem probabilidades, eles não podem ser negativos e a soma das probabilidades de transição e de permanência de cada regime devem ser iguais a 1, conforme descrito pela matriz de probabilidade de transição P a seguir:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} p_{11} + p_{12} = 1 \\ p_{21} + p_{22} = 1 \end{cases}. \quad (7.5)$$

Dentre as principais vantagens dos modelos MS, destacam-se duas: (i) A estimativa da probabilidade de ocorrências de regime em cada um dos períodos amostrais usando métodos de filtragem/suavização; e, (ii) A estimativa dos parâmetros específicos do regime. Isso possibilita a interpretação dos parâmetros associados a regimes específicos combinados às probabilidades

do regime. A especificação dentro de cada regime é linear e as probabilidades de transição que conduzem os movimentos de um regime para outro são estimadas seguindo uma estrutura Markoviana, resultando em um modelo de séries de tempo não linear. O modelo geral MS, conforme descrito por Nasri *et. al.* (2020), considera φ_t uma cadeia de Markov de tempo discreto homogênea no regime $R = \{1, \dots, r\}$, com matriz de transição P em $R \times R$. Para dado $\varphi_1 = k_1, \dots, \varphi_n = k_n$, as observações $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ são independentes com densidades $g_{\beta_{k_t}}$, onde $t \in \{1, \dots, n\}$. Seja $\theta = (\beta_1, \dots, \beta_r, P)$ o vetor de parâmetros. Então a densidade conjunta de $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ e $\mathbf{X}$ é dada por:

$$f_{\theta}(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{X}) = \left(\prod_{t=1}^n P_{\varphi_{t-1}, \varphi_t} \right) \times \prod_{t=1}^n g(X_t; \beta_{\varphi_t}). \quad (7.6)$$

A Equação (7.6) pode ser reescrita como:

$$\log f_{\theta}(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{X}) = \sum_{t=1}^n \log P_{\varphi_{t-1}, \varphi_t} + \sum_{t=1}^n \log g(X_t; \beta_{\varphi_t}). \quad (7.7)$$

Para aplicação em cópulas, considera-se a densidade g_{β} como a densidade de uma família paramétrica de cópulas C_{β} , onde $\{C_{\beta}; \beta \in \mathcal{B}\}$. Formalmente, seja $\mathbf{X}_t = (X_{1t}, \dots, X_{dt})$ uma série temporal d -variada. Para cada $j \in \{1, \dots, d\}$, $\mathcal{F}_{j,t-1}$ possui informações passadas de $X_{j,1}, \dots, X_{j,t-1}$ e existem funções $G_{\alpha_{j,t}}$ contínuas, crescentes e $\mathcal{F}_{j,t-1}$ -mensuráveis¹⁹ de modo que as inovações $\varepsilon_{j,t} = G_{\alpha_{j,t}}(X_{j,t})$ são i.i.d. com função de distribuição contínua F_j e densidade f_j , para algum parâmetro desconhecido $\alpha \in \mathcal{A}$. Assim, a dependência entre as séries temporais, é uma sequência de cópulas C_t , $\mathcal{F}_{t-1}$ -mensuráveis, de modo que a função de distribuição condicional conjunta K_t de $\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\varepsilon_{1,t}, \dots, \varepsilon_{d,t})$ dado $\mathcal{F}_{t-1}$ seja:

$$K_t(\mathbf{x}) = C_t\{F(\mathbf{x})\}, \quad (7.8)$$

De modo que:

$$F(\mathbf{x}) = (F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \quad (7.9)$$

¹⁹ Funções mensuráveis são variáveis aleatórias completamente definidas em espaços de probabilidade.

Em particular:

$$\mathbf{U}_t = F(\boldsymbol{\varepsilon}_t) \sim C_t, \text{ com } t \in \{1, \dots, n\} \quad (7.10)$$

Selecionamos então o modelo de cópula de mudança de regime C_t para uma série d -variada $\mathbf{U}_t$. Isso significa que existe uma cadeia de Markov finita φ_t em $\{1, \dots, r\}$ com matriz de transição P , de modo que para dado $(\varphi_1 = i_1, \dots, \varphi_n = i_n)$, $(\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n)$ são independentes e $\mathbf{U}_t \sim C_{\beta_{it}}$. Como os regimes de φ_t não são observáveis, a estimativa dos parâmetros da cópula pode ser obtida através do chamado “Algoritmo Expectativa-Maximização”, ou apenas Algoritmo EM. O Algoritmo EM é uma abordagem amplamente aplicável ao cálculo iterativo de estimativas de máxima verossimilhança, útil em uma variedade de problemas relacionados a dados incompletos (DEMPSTER *et al.*; 1977). Cada iteração do algoritmo EM envolve duas etapas: a etapa de expectativa (Etapa-E) e a etapa de maximização (Etapa-M). A Etapa-E estima as variáveis latentes, enquanto a Etapa-M otimiza os parâmetros do modelo para melhor explicar os dados. Para implementar o algoritmo EM, procedemos da seguinte maneira:

(Etapa-E) Definimos $Q_x(\theta; \theta^{(k)})$ como o valor esperado da função log da verossimilhança de θ , em relação à distribuição condicional atual de φ dado $\mathbf{X}$ e às estimativas atuais dos parâmetros $\theta^{(k)}$:

$$Q_x(\theta; \theta^{(k)}) = \mathbb{E}_{\theta^{(k)}}\{\log f(\varphi, \mathbf{X}; \theta)\}. \quad (7.11)$$

(Etapa-M) Encontramos os parâmetros que maximizam esta quantidade:

$$\theta^{(k+1)} = \arg \max_{\theta} Q_x(\theta; \theta^{(k)}). \quad (7.12)$$

Partindo de um valor inicial $\theta^{(0)}$, à medida que o número de iterações $k \rightarrow \infty$, $\theta^{(k)}$ converge para θ^* , onde θ^* representa o estimador de máxima verossimilhança da densidade de $\mathbf{X}$. O presente estudo optou por trabalhar com $k = 1000$ iterações do algoritmo EM. A estrutura econométrica completa das etapas do algoritmo EM está disponível no **Anexo I**.

Alguns estudos recentes utilizaram a abordagem de cópulas de mudança de regime, como no caso de Stöber e Czado (2014), que associaram o modelo de mudança de regime a cópulas *vine*²⁰, para avaliar mudanças repentinas em estruturas de dependência. Fink *et al.* (2017), por sua vez, empregou a mesma metodologia para investigar a existência de diferentes regimes de dependência global. Härdle *et al.* (2015), utilizando modelos de mudança de regime associado a cópulas hierárquicas arquimedianas, propuseram avaliar o comportamento de séries temporais em uma estrutura de dependência multidimensional. Contudo, em nenhum destes estudos constatamos um teste formal capaz de medir a qualidade de ajuste dos modelos. Além disso, a seleção do número de regimes é normalmente baseada em comparações pouco confiáveis de verossimilhanças. Devido à ausência de uma teoria de suporte a essa metodologia, Nasri *et al.* (2020) desenvolveram, com base no *p*-valor, seu próprio teste formal de *goodness-of-fit* baseado na estatística de Cramér-von Mises para modelos de mudança de regime de Markov associado à cópulas (elípticas e arquimedianas), assim como encontram uma nova maneira de determinar o número ótimo de regimes. Para tanto, os autores realizaram simulações de Monte Carlo com diferentes tamanhos de amostra e demonstraram que o teste de *goodness-of-fit* proposto é correto e poderoso o suficiente para distinguir entre as diferentes famílias de cópulas com mudança de regime, assim como selecionar o número ótimo de regimes. A seguir, na Seção 7.2, descrevemos com mais detalhes o teste de *goodness-of-fit* e a seleção do número de regimes, conforme proposto por Nasri *et al.* (2020).

Assim sendo, neste capítulo será empregado o modelo de cópulas de mudança de regime de Markov, com distribuições elípticas (Gaussiana e *t*-Student) e arquimedianas (Gumbel e Clayton), utilizando como suporte os testes de qualidade de ajuste e de seleção de regimes desenvolvidos por Nasri *et al.* (2020). A partir destas metodologias, avaliaremos se existem evidências de contágio financeiro, no sentido do *shift contagion* descrito por Rigobon (2001), entre os retornos diários do petróleo e dos mercados de ações de um conjunto de países emergentes e desenvolvidos. Para tanto, será examinado por meio das estimativas dos coeficientes de correlação das cópulas Markovianas, se na transição entre os regimes de baixa e alta volatilidade ocorrem mudanças abruptas nas relações de dependência quantílica entre os retornos do petróleo e dos mercados acionários.

²⁰ As cópulas *vine* estruturam a dependência em uma sequência de cópulas bivariadas, permitindo uma modelagem mais flexível e detalhada das interações entre as variáveis.

Embora o processo de “mudança de regime” se assemelhe ao processo de “quebra estrutural”, abordado anteriormente na análise empírica estática/dinâmica, ambos representam conceitos diferentes. Quanto à “natureza da mudança”, a mudança de regime é estocástica e pode ocorrer repetidamente, dependendo das probabilidades de transição, enquanto a quebra estrutural é determinística e ocorre em pontos específicos, resultando em uma mudança permanente na estrutura. Quanto à “modelagem e aplicação”, nos modelos de mudança de regime existem múltiplos regimes possíveis e o sistema pode transitar entre eles com base em probabilidades, já na quebra estrutural, presume-se que há uma mudança única ou em pontos específicos no tempo, que altera permanentemente os parâmetros do modelo. Por fim, quanto ao “objetivo analítico”, a mudança de regime é usada para capturar e modelar padrões cíclicos ou repetitivos em séries temporais, enquanto a quebra estrutural se foca em detectar pontos específicos de mudança que afetam a estrutura do modelo subjacente.

7.2. Teste de *goodness-of-fit* e número de regimes

Nesta seção, é descrito o teste de *goodness-of-fit* baseado na estatística de Cramér-von Mises, desenvolvido por Nasri *et. al.* (2020), que mede a qualidade do ajuste dos modelos de cópula MS. Primeiramente, seguindo Rémillard (2013), sob o modelo geral MS, descrito na Seção 7.1, para todo $t \geq 1$, a densidade condicional de X_t dado $X_1, \dots, X_{t-1}$, denotada por f_t , é expressa como:

$$\begin{aligned} f_t(x_t|x_1, \dots, x_{t-1}) &= Z_{t|t-1} = \sum_{i=1}^r f^{(i)}(x_t) \sum_{j=1}^r \eta_{t-1}(j) P_{ji} \\ &= \sum_{i=1}^r f^{(i)}(x_t) W_{t-1}^{(i)}, \end{aligned} \quad (7.13)$$

onde:

- a) $i \in \{1, \dots, r\}$,
- b) $f^{(i)} = g_{\beta_i}$,
- c) $W_{t-1}^{(i)} = \sum_{j=1}^r \eta_{t-1}(j) P_{ji}$,
- d) $\eta_t(j) = \frac{f^{(j)}(y_t)}{Z_{t|t-1}} \sum_{i=1}^r \eta_{t-1}(j) P_{ji}$.

Desse modo, considerando as seguintes propriedades:

- i) $Z^{(i)} = (Z_1^{(i)}, \dots, Z_d^{(i)})$ é um vetor aleatório d -dimensional com densidade $f^{(i)}$,
- ii) $f_{1:q}^{(i)}$ é a densidade de $(Z_1^{(i)}, \dots, Z_q^{(i)})$ para qualquer $q \in \{1, \dots, d\}$,
- iii) $f_q^{(i)}$ é a densidade condicional de $Z_q^{(i)}$ para dado $(Z_1^{(i)}, \dots, Z_{q-1}^{(i)})$,
- iv) $F_q^{(i)}$ é a função de distribuição correspondente à densidade $f_q^{(i)}$,

é então realizada a transformação quantílica de Rosenblatt, brevemente discutida no Capítulo 4, Seção 4.2, que pode ser descrita como:

$$z = (z_1, \dots, z_d) \rightarrow T^{(i)}(Z^{(i)}) = \left(F_1^{(i)}(z_1), F_2^{(i)}(z_1, z_2), \dots, F_d^{(i)}(z_1, \dots, z_d) \right)^T, \quad (7.14)$$

onde o vetor aleatório $T^{(i)}(Z^{(i)})$ é uniformemente distribuído em $[0,1]^d$.

Como a densidade da distribuição condicional, Equação (7.13), é uma mistura das densidades $f_1, \dots, f_r$ com pesos $W_{1,t}, \dots, W_{r,t}$, segue-se que para todo $z_1, \dots, z_d \in \mathbb{R}$, a transformação de Rosenblatt $\mathfrak{R}_t$ correspondente à densidade (7.13) é dada por:

$$\mathfrak{R}_t^{(1)}(z_{1,t}) = \sum_{i=1}^r W_{t-1}^{(i)} F_1^{(i)}(z_{1,t}). \quad (7.15)$$

Para $q \in \{2, \dots, d\}$:

$$\mathfrak{R}_t^{(q)}(z_{1,t}, \dots, z_{q,t}) = \frac{\sum_{i=1}^r W_{t-1}^{(i)} f_{1:q-1}^{(i)}(z_{1,t}, \dots, z_{q-1,t}) F_q^{(i)}(z_{q,t})}{\sum_{i=1}^r W_{t-1}^{(i)} f_{1:q-1}^{(i)}(z_{1,t}, \dots, z_{q-1,t})}. \quad (7.16)$$

Supondo que $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n$ seja uma amostra aleatória de tamanho n com vetores d -dimensionais extraídos de uma distribuição contínua conjunta $\mathbf{P}$, pertencente a uma família paramétrica de modelos de cópula de mudança de regime, com r regimes. As hipóteses a serem testadas podem ser descritas como:

$$H_0: \mathbf{P} \in \mathbb{P} \quad \text{e} \quad H_1: \mathbf{P} \notin \mathbb{P}, \quad (7.17)$$

onde $\mathbb{P} = \{\mathbf{P}_\theta; \theta \in \mathcal{O}\}$.

Pela hipótese nula H_0 , temos que $\mathbf{V}_1 = \mathfrak{R}_1(\mathbf{U}_1, \boldsymbol{\theta}), \dots, \mathbf{V}_n = \mathfrak{R}_n(\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n, \boldsymbol{\theta})$ são i.i.d. uniformes em $(0,1)^d$, de modo que $\mathfrak{R}_1(\cdot, \boldsymbol{\theta}), \dots, \mathfrak{R}_n(\cdot, \boldsymbol{\theta})$ são as transformadas de Rosenblatt dos parâmetros verdadeiros $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{O}$. O parâmetro $\boldsymbol{\theta}$ deve então ser estimado por $\boldsymbol{\theta}_n$ e os vetores aleatórios $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n$, por não serem observáveis, devem ser substituídos pelos níveis normalizados $\mathbf{u}_{n_t}$ das pseudo-observações $\mathbf{e}_{n_t}$, com $t \in \{1, \dots, n\}$. Assim, as pseudo-observações podem ser definidas como:

$$\mathbf{V}_{n_t} = \mathfrak{R}_t(\mathbf{u}_{n_t}, \boldsymbol{\theta}_n). \quad (7.18)$$

E para $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d) \in [0,1]^d$, a função de distribuição empírica é definida como:

$$D_n(\mathbf{u}) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \prod_{j=1}^d \mathbf{1}(V_{n_{j,t}} \leq u_j). \quad (7.19)$$

Para testar H_0 contra H_1 , como sugerido por Genest *et al.* (2009), é utilizado a estatística de Cramér–von Mises S_n que pertence ao grupo de estatísticas de *goodness-of-fit* baseadas na comparação da função de distribuição empírica de uma dada amostra com a distribuição teórica a ser testada. A estatística de Cramér–von Mises é definida por:

$$\begin{aligned} S_n &= \mathcal{S}_n(\mathbf{V}_{n,1}, \dots, \mathbf{V}_{n,n}) \\ &= n \int_{[0,1]^d} \{D_n(\mathbf{u}) - \prod_{j=1}^d u_j\}^2 d\mathbf{u} \\ &= \frac{n}{3^d} + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sum_{i=1}^n \prod_{q=1}^d \left\{ 1 - \max(V_{n_{q,t}}, V_{n_{q,i}}) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2^{d-1}} \sum_{t=1}^n \prod_{q=1}^d (1 - V_{n_{q,t}}^2). \end{aligned} \quad (7.20)$$

A estatística S_n pode ser interpretada como a distância da distribuição empírica e a distribuição teórica. Como $\mathbf{V}_{n_t}$, $t \in \{1, \dots, n\}$, são quase uniformemente distribuídos em $(0,1)^d$ sob H_0 , grandes valores de S_n leva à rejeição da hipótese nula. Segundo Nasri e Rémillard (2019), a distribuição limite do teste depende do parâmetro desconhecido $\boldsymbol{\theta}$, mas não depende dos parâmetros estimados da série temporal univariada.

Para se estimar os p -valores do teste de *goodness-of-fit* é utilizado o método *bootstrap* paramétrico, que permite gerar amostras baseadas em uma distribuição de probabilidade conhecida. Este método utiliza como parâmetros da distribuição a estimativa dos mesmos, obtida através da amostra geral. Formalmente, o *bootstrap* paramétrico pode ser descrito conforme o algoritmo descrito no Anexo J. Assim, o p -valor aproximado para o teste de *goodness-of-fit* baseado na estatística de Cramér–von Mises S_n é dado por:

$$\text{GoF} = \frac{1}{B} \sum_{k=1}^B \mathbf{1} \left(S_n^{(k)} > S_n \right). \quad (7.21)$$

O GoF será estatisticamente significativo quando seu valor for maior que 5%. Foi utilizado pelo presente estudo $B = 1000$ amostras *bootstrap* para a realização dos testes GoF. Nos resta então especificar o número de regimes para as MS-cópuas. É bem sabido que um dos grandes desafios do modelo de mudança de regime é definir o número ideal de regimes para a cadeia de Markov. Rémillard (2013) sugere que, para um modelo de mudança de regime, o número ótimo de regimes r^* é o primeiro r para o qual o p -valor para o teste de *goodness-of-fit* baseado na estatística de Cramér–von Mises é maior que 5%. Entretanto, pelos testes econométricos realizados por Nasri *et al.* (2020), esse procedimento é funcional apenas quando o tamanho da amostra é grande o suficiente e há menos de três regimes. Segundo os autores, para $r \geq 3$, o tamanho da amostra deve ser maior que 1000 observações. Nosso estudo possui 1305 observações para o período amostral completo (2017-2022), o que possibilitaria a utilização de três regimes ou mais.

Intuitivamente, como o objetivo do presente estudo reside em evidenciar mudanças ocorridas na relação conjunta dos retornos do petróleo e de mercados acionários na transição entre períodos de estabilidade e de crise econômica, espera-se a ocorrência de dois regimes, um de baixa e outro de alta volatilidade. Assim, inicialmente, optamos por testar modelos de cópuas de mudança de regime de Markov com dois regimes e, em seguida, seguindo a recomendação de Nasri *et al.* (2020), realizamos os mesmos procedimentos, porém, com três regimes. Dessa forma, comparando as estimativas, será possível determinar qual dos modelos, $r = 2$ ou $r = 3$, possui melhor qualidade de ajuste GoF e, simultaneamente, evidenciar se ambos compartilham das mesmas conclusões relativas ao contágio financeiro.

7.3. Resultados das cópulas de mudança de regime de Markov com dois regimes

Foram então estimados diferentes modelos de MS-cópula (MS-Gaussiana, MS-*t*-Student, MS-Gumbel e MS-Clayton), tomando como pseudo-amostra a transformação de Rosenblatt dos resíduos padronizados dos modelos marginais estimados na Seção 6.3. Diferentemente da abordagem utilizada no Capítulo 6, a dependência quantílica não será dividida em períodos de pré e pós-início da pandemia da COVID-19, delimitados por um determinado ponto de ruptura. Dessa vez, será estimado o período amostral completo, que compreende os anos de 2017 a 2022. As épocas de “crise” e “não crise” são de agora em diante determinados pelos regimes de Markov. A Tabela 11 descreve as evidências empíricas encontradas para as MS-cópulas com dois regimes ou, simplificada, MS-2R-cópulas. Os regimes foram ordenados conforme suas respectivas variâncias, o que significa que o regime de baixa volatilidade é o 1 e o regime de alta volatilidade é o 2. A partir dos *p*-valores do teste de *goodness-of-fit* baseado na estatística de Cramér-von Mises, GoF, selecionamos a família do modelo de cópula MS que melhor se ajusta aos dados, para assim capturar a melhor estimativa da característica de dependência das caudas. A significância estatística dos modelos é constatada pela rejeição da hipótese nula quando $\text{GoF} > 5\%$ e o melhor ajuste é aquele que maximiza o valor GoF.

Assim, a partir do Algoritmo EM, foram estimados os coeficientes de correlação das MS-cópulas. Conforme as estimativas dos valores GoF, descritos na Tabela 11, observa-se que todas as relações analisadas apresentaram alguma dependência de cauda. Assim como na análise empírica estática/dinâmica, presente na Seção 6.5, os modelos de cópula com melhor ajuste foram observados nas estruturas de dependência simétrica e inferior, caracterizadas pelas cópulas MS-*t*-Student e MS-Clayton, respectivamente. No entanto, pela análise empírica Markoviana, não se verificou predominância da dependência de cauda inferior, uma vez que metade das economias analisadas se ajustaram melhor à cópula MS-*t*-Student, sendo elas: Brasil, Estados Unidos, Reino Unido e Alemanha, com valores GoF iguais a 68.3, 70.8, 61.0 e 10.2, respectivamente. Os demais mercados, constituídos por Índia, México, China e Japão, com GoF's iguais a 40.4, 38.0, 68.8, e 38.2, respectivamente, se ajustaram melhor às MS-Clayton.

Analisando o regime de baixa volatilidade (R1), para as cópulas MS-*t*-Student, {Brasil $\times$ Brent}, {EUA $\times$ Brent}, {GB $\times$ Brent} e {Alemanha $\times$ Brent}, percebe-se que os valores dos coeficientes de correlação foram relativamente baixos, principalmente para o Reino Unido

Tabela 11 – Estimativas das MS-cópuas com dois regimes.

	MS-Gaussiana		MS- <i>t</i> -Student		MS-Gumbel		MS-Clayton	
	R1	R2	R1	R2	R1	R2	R1	R2
Brasil	0.1426*	0.2141*	0.1183*	0.8882*	1.0000*	1.3185*	0.0462*	0.4149*
	(0.025)	(0.030)	(0.024)	(0.029)	(0.026)	(0.028)	(0.023)	(0.026)
	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.044]	[0.000]
	0.51 0.49		0.94 0.06		0.62 0.38		0.53 0.47	
	0.49 0.51		0.74 0.26		0.52 0.48		0.48 0.52	
GoF	61.8		68.3		31.6		43.4	
Índia	0.0970*	0.0971*	0.0961*	0.0961*	1.0425*	1.0425*	0.1226*	0.1227*
	(0.026)	(0.029)	(0.026)	(0.029)	(0.022)	(0.029)	(0.026)	(0.030)
	[0.000]	[0.001]	[0.000]	[0.001]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]
	0.50 0.50		0.50 0.50		0.50 0.50		0.50 0.50	
	0.50 0.50		0.50 0.50		0.50 0.50		0.50 0.50	
GoF	22.2		36.8		30.8		40.4	
México	0.0702*	0.5927*	0.1866*	0.2343*	1.0000*	1.3344*	0.0079	0.5853*
	(0.024)	(0.029)	(0.025)	(0.029)	(0.025)	(0.028)	(0.022)	(0.026)
	[0.003]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.719]	[0.000]
	0.89 0.11		0.51 0.49		0.63 0.37		0.74 0.26	
	0.30 0.70		0.49 0.51		0.45 0.55		0.14 0.86	
GoF	17.6		29.6		0.4		38.0	
China	0.1229*	0.1229*	0.1206*	0.1206*	1.0613*	1.0613*	0.1598*	0.1598*
	(0.025)	(0.030)	(0.027)	(0.029)	(0.026)	(0.030)	(0.018)	(0.029)
	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]
	0.50 0.50		0.50 0.50		0.50 0.50		0.50 0.50	
	0.50 0.50		0.50 0.50		0.50 0.50		0.50 0.50	
GoF	3.8		4.0		0.2		68.8	
EUA	-0.0562*	0.5481	0.1330*	0.2537*	1.0000*	1.5201*	0.0006	0.5529*
	(0.025)	(0.029)	(0.026)	(0.029)	(0.026)	(0.030)	(0.027)	(0.029)
	[0.024]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.982]	[0.000]
	0.93 0.07		0.51 0.49		0.69 0.31		0.59 0.41	
	0.10 0.90		0.49 0.51		0.56 0.44		0.40 0.60	
GoF	34.8		70.8		34.0		35.2	
GB	0.0064	0.6340*	-0.0652*	0.4388*	1.0000*	1.7975*	0.0704*	0.9274*
	(0.016)	(0.030)	(0.025)	(0.028)	(0.014)	(0.024)	(0.026)	(0.029)
	[0.689]	[0.000]	[0.009]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.007]	[0.000]
	0.72 0.28		0.78 0.22		0.54 0.46		0.74 0.26	
	0.14 0.86		0.09 0.91		0.20 0.80		0.16 0.87	
GoF	37.5		61.0		29.2		54.0	
Alemanha	-0.0962*	0.5590	-0.0704*	0.4644*	1.0000*	2.0923*	0.0000	11.0872
	(0.024)	(0.028)	(0.025)	(0.028)	(0.025)	(0.028)	(∅)	(∅)
	[0.000]	[0.000]	[0.005]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[∅]	[∅]
	0.78 0.22		0.61 0.39		0.48 0.52		0.00 0.99	
	0.16 0.84		0.25 0.75		0.14 0.86		0.00 0.99	
GoF	1.6		10.2		0.2		0.0	
Japão	0.0734*	0.0735*	0.0737*	0.0739*	1.0307*	1.0307*	0.0926*	0.0926*
	(0.024)	(0.029)	(0.025)	(0.029)	(0.025)	(0.028)	(0.018)	(0.026)
	[0.002]	[0.011]	[0.003]	[0.011]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]
	0.50 0.50		0.50 0.50		0.50 0.50		0.50 0.50	
	0.50 0.50		0.50 0.50		0.50 0.50		0.50 0.50	
GoF	7.6		21.2		4.8		38.2	

Fonte: O autor, 2024.

Nota: * indica significância até 10%.

R1 é o regime 1 (regime de baixa volatilidade)

R2 é o regime 2 (regime de alta volatilidade).

GoF é o *Goodness-of-Fit* baseado na estatística de Cramér-von Mises (em porcentagem).Desvio padrão em (), *p*-valor em [], matriz de transição em | | e valor máximo do GoF em negrito.

Que apresentou o menor valor (em módulo) dentre todos, em torno de -0.0652 . Então, assim como esperado, em um regime de maior estabilidade a dependência quantílica entre estes mercados e o petróleo é relativamente baixa, sendo positiva para o Brasil e Estados Unidos, e negativa para os demais. Para as cópulas MS-Clayton, $\{\text{Índia} \times \text{Brent}\}$, $\{\text{México} \times \text{Brent}\}$, $\{\text{China} \times \text{Brent}\}$ e $\{\text{Japão} \times \text{Brent}\}$, observamos a mesma situação, isto é, valores baixos para a dependência em todas as relações, com destaque para o México que apresentou o menor parâmetro dentre todas as cópulas analisadas, em torno de 0.0079, no entanto, o mesmo não apresentou significância estatística.

Comparando agora os regimes 1 e 2 das cópulas MS-*t*-Student, observa-se que em todas as relações houve um aumento significativo da dependência quantílica na transição do estado de baixa volatilidade para o estado de alta volatilidade, com destaque para o mercado brasileiro que apresentou um aumento de 651% no valor de seu coeficiente de correlação, como descrito no Quadro 6. Isso demonstra uma provável vulnerabilidade do índice brasileiro às flutuações do preço do petróleo em períodos de instabilidade e, portanto, acaba sendo um forte indicativo de contágio financeiro. Contudo, é importante destacar que, conforme as estimativas referentes à matriz de transição, a magnitude das probabilidades de cada regime sugere que o regime 1 é mais persistente do que o 2, visto que há 94% de chance da dependência entre o petróleo e o índice brasileiro permanecer no regime baixa volatilidade, enquanto no regime de alta volatilidade é de apenas 26%. Constatamos então que para o Brasil ocorreram períodos curtos de alta dependência com os preços do petróleo, o que nos leva a crer que o contágio financeiro de fato existe, porém, não é persistente.

Quadro 6 – Melhores funções de cópula MS com dois regimes.

Cópula	Família	Modelo de Mudança de Regime		p_{11} (%)	p_{22} (%)	GoF (%)	Δ (%)
		R1	R2				
Brasil	<i>t</i> -Student	0.1183*	0.8882*	94	26	68.3	651
Índia	Clayton	0.1226*	0.1227*	50	50	40.4	0
México	Clayton	0.0079	0.5853*	74	86	38.0	7309
China	Clayton	0.1598*	0.1598*	50	50	68.8	0
EUA	<i>t</i> -Student	0.1330*	0.2537*	51	51	70.8	91
GB	<i>t</i> -Student	-0.0652*	0.4388*	78	91	61.0	573
Alemanha	<i>t</i> -Student	-0.0704*	0.4644*	61	75	10.2	560
Japão	Clayton	0.0926*	0.0926*	50	50	38.2	0

Fonte: O autor, 2024.

Nota: * indica significância até 10%.

R1 é o regime 1 (regime de baixa volatilidade).

R2 é o regime 2 (regime de alta volatilidade).

p_{11} é a probabilidade média do regime 1.

p_{22} é a probabilidade média do regime 2.

GoF é o *p*-valor para *Goodness-of-Fit* baseado na estatística de Cramér-von Mises.

Δ é a variação do coeficiente de correlação do regime 1 para o regime 2.

Já os coeficientes relativos aos mercados do Reino Unido e da Alemanha, não só apresentaram uma elevação significativa em seus valores, 573% e 560%, respectivamente, como também tiveram seus sinais alterados na transição dos regimes. Observou-se dependência negativa para o Regime 1, e o oposto para o Regime 2. Neste caso, além da magnitude da dependência, houve também mudança no seu sentido, deixando ainda mais evidente o efeito de contágio financeiro do petróleo com os mercados britânico e alemão. Com relação à matriz de transição, a probabilidade de estar no regime 1 varia de 61% (Alemanha) a 78% (Reino Unido). Já a probabilidade de estar no regime 2 varia de 75% (Alemanha) a 91% (Reino Unido). Logo, ao contrário do caso brasileiro, o regime de alta volatilidade e, portanto, de alta dependência quantílica com o petróleo persiste por mais tempo nos mercados alemão e britânico, demonstrando então um elevado grau de sensibilidade dos mesmos diante da variância do mercado petrolífero.

No caso americano, mesmo que o índice dos Estados Unidos tenha demonstrado maior resistência à quebra estrutural da variância, ainda assim, seu coeficiente de dependência quantílica com os retornos do petróleo praticamente dobrou na transição do regime de baixa volatilidade para o regime de alta volatilidade. Mais precisamente, verificou-se um aumento de 91% no valor de seu parâmetro de correlação. Os resultados referentes à matriz de transição foram inconclusivos, já que a probabilidade média de permanência no regime foi igual em ambos os regimes, igual a 51%. Portanto, o aumento na magnitude da dependência com o petróleo é a única evidência de contágio financeiro encontrada para o caso americano.

Com relação às cópulas MS-Clayton, tanto a magnitude quanto o sentido da dependência não se alteraram após a quebra estrutural da variância para os mercados de Índia, China e Japão. Isso indica que não existem amplos sinais de contágio do petróleo em relação a estas três economias. Especificamente para o caso chinês, as presentes estimativas corroboram com os resultados encontrados na análise estática/dinâmica. Em contrapartida, dentre todos os mercados analisados, o mexicano foi o que apresentou maior crescimento no nível de dependência com o petróleo, em torno de 7309%. Todavia, conforme o p -valor, o coeficiente de correlação do regime de baixa volatilidade não apresentou significância estatística ao nível de 10%, o que impossibilita saber ao certo qual a real magnitude do crescimento na dependência quantílica entre o petróleo e o mercado mexicano. De qualquer forma, o valor do parâmetro do regime 2 é bastante alto, em torno de 0.5853, o que demonstra um elevado grau de dependência no contexto de instabilidade. A probabilidade média de permanecer no regime de alta volatilidade é também elevada, em torno de 86%, ou seja, os indícios são de longos períodos de alta dependência positiva da relação México e petróleo, indicando assim uma fraca evidência de contágio, já que não temos a exata dimensão do crescimento da correlação entre os dois.

Quadro 7 – Contágio financeiro a partir de MS-cópulas com dois regimes.

Cópula	Estrutura	Mudança de Regime de Markov	Evidência de Contágio	
		R1 → R2	<i>Forte</i>	<i>Fraca</i>
Brasil	MS- <i>t</i> -Student	↑ +	×	
Índia	MS-Clayton	↓ +		×
México	MS-Clayton	NS +		×
China	MS-Clayton	↓ +		×
EUA	MS- <i>t</i> -Student	↑ +	×	
GB	MS- <i>t</i> -Student	↑ –	×	
Alemanha	MS- <i>t</i> -Student	↑ –	×	
Japão	MS-Clayton	↓ +		×

Fonte: O autor, 2024.

Nota: R1 → R2 indica transição do regime 1 (baixa volatilidade) para o regime 2 (alta volatilidade).

↑ indica aumento significativo no valor do coeficiente após a transição de R1 para R2.

↓ indica que não houve mudança significativa no valor do coeficiente após a transição de R1 para R2.

– indica que houve mudança no sinal do coeficiente após a transição de R1 para R2.

+ indica que não houve mudança no sinal do coeficiente após a transição de R1 para R2.

NS indica não significância estatística,

Forte indica forte evidência de contágio financeiro.

Fraca indica fraca evidência de contágio financeiro.

As principais evidências empíricas Markovianas de contágio financeiro, são resumidas no Quadro 7. Assim sendo, a partir dos resultados das MS-2R-cópulas, referentes à estrutura de dependência bivariada entre os quantis dos retornos do petróleo e dos índices de ações, de países emergentes e desenvolvidos, podemos extrair as seguintes conclusões:

- i) A estrutura de dependência de cauda foi predominantemente simétrica e inferior, onde Brasil, Estados Unidos, Reino Unido e Alemanha se ajustaram à cópula MS-*t*-Student e os demais se ajustaram à cópula MS-Clayton.
- ii) A estrutura de dependência simétrica (MS-*t*-Student) implica que os mercados petrolífero e de ações de Brasil, Estados Unidos, Reino Unido e Alemanha, estão ligados no mesmo grau durante os mercados em alta e em baixa. Os demais mercados flutuam em proporções diferentes, visto que suas respectivas estruturas de dependência são arquimedianas assimétricas.
- iii) Para o regime de baixa volatilidade (R1), em geral, a correlação média foi relativamente baixa, sendo negativa para Reino Unido e Alemanha e, para os demais países, positiva;
- iv) Para o regime de alta volatilidade (R2), em geral, a correlação média foi alta, sendo positiva em todos os casos analisados;
- v) Pela análise Markoviana, em comparação à análise estática/dinâmica, menos mercados se mostraram suscetíveis ao contágio financeiro dos co-movimentos do petróleo. Apenas Brasil, Estados Unidos, Reino Unido e Alemanha exibiram claras evidências de

contágio. Enquanto, China, Índia e Japão, não apresentaram qualquer indício de contágio. Para o México os resultados foram inconclusivos;

- vi) O mercado britânico demonstrou maior sensibilidade aos co-movimentos do petróleo no regime de instabilidade, pois, na transição entre os regimes, constatou-se que sua dependência variou em intensidade e sentido, mantendo-se persistente.
- vii) Os mercados asiáticos (Índia, China e Japão) demonstraram maior resistência aos co-movimentos do petróleo no regime de instabilidade, uma vez que na transição entre os regimes não se constatou mudanças relevantes em sua estrutura de dependência;
- viii) A resiliência dos mercados asiáticos pode ser explicada por fatores como: matriz energética diversificada, composição industrial e setorial menos sensível às flutuações do petróleo, intervenções e controles políticos, dentre outros.
- ix) Em relação ao fato de os mercados serem desenvolvidos e emergentes, não se verificou comportamento distinto ou padrões de dependência para retornos de petróleo e ações ao longo do período amostral.

7.4. Resultados das cópulas de mudança de regime de Markov com três regimes

Como destacado na Seção 7.5, seguindo Nasri *et al.* (2020), trabalharemos agora com modelo de MS-cópulas utilizando três regimes (3R). Os regimes foram ordenados conforme suas respectivas variâncias, porém, desta vez, como são três regimes, o regime de baixa volatilidade será o 1 e o regime de alta volatilidade será o 3. O regime 2 será tratado como regime de média volatilidade. Os testes GoF, descritos na Tabela 17, presente no Anexo K, demonstram que a qualidade de ajuste de alguns modelos aumentou com a utilização de três regime, porém, a maioria dos modelos MS-2R-cópulas exibiram valores GoF maiores, como descrito no Quadro 8. As conclusões obtidas a partir das MS-3R-cópulas seguem alinhadas às conclusões dos modelos com dois regimes. Começando pelos melhores ajustes das MS-3R-cópulas, novamente os mercados de Brasil, Estados Unidos, Reino Unido e Alemanha, se ajustaram à cópula MS-*t*-Student, com valores GoF iguais a 66.4, 28.8, 39.3 e 27.2, respectivamente. Os demais países, Índia, México, China e Japão, se ajustaram melhor à cópula MS-Clayton com GoF's iguais a 38.8, 63.6, 67.6 e 31.2, respectivamente. Deste modo, assim como nas MS-2R-cópulas, todos os modelos apresentaram significância ao nível de 5% e a dependência de cauda foi predominantemente simétrica e inferior.

Quadro 8 – Valores GoF das MS-cópuas com dois e três regimes

Cópula	MS-Gaussiana	MS- <i>t</i> -Student	MS-Gumbel	MS-Clayton
Brasil (2R)	61.8	68.3	31.6	43.4
Brasil (3R)	60.0	66.4	13.6	35.2
Índia (2R)	22.2	36.8	30.8	40.4
Índia (3R)	25.2	38.0	34.8	38.8
México (2R)	17.6	29.6	0.4	38.0
México (3R)	12.8	29.2	0.4	63.6
China (2R)	3.8	4.0	0.2	68.8
China (3R)	4.4	4.8	0.4	67.6
EUA (2R)	34.8	70.8	34.0	35.2
EUA (3R)	17.6	28.8	6.8	9.6
GB (2R)	37.5	61.0	29.2	54.0
GB (3R)	5.2	39.3	25.6	29.6
Alemanha (2R)	1.6	10.2	0.2	0.0
Alemanha (3R)	0.4	27.2	0.4	3.2
Japão (2R)	7.6	21.2	4.8	38.2
Japão (3R)	8.8	27.6	6.0	31.2

Fonte: O autor, 2024.

Nota: Maior valor GoF por modelo em negrito.

Os resultados das MS-3R-cópuas assemelham-se também no fato do regime de baixa volatilidade (R1), tanto para as cópuas MS-*t*-Student, {Brasil $\times$ Brent}, {EUA $\times$ Brent}, {GB $\times$ Brent} e {Alemanha $\times$ Brent}, quanto para as cópuas MS-Clayton, {Índia $\times$ Brent}, {México $\times$ Brent}, {China $\times$ Brent} e {Japão $\times$ Brent}, apresentarem valores relativamente baixos para seus respectivos coeficientes de correlação, com destaque novamente para o mercado mexicano que apresentou o menor dentre todas as cópuas analisadas. Considerando o mercado brasileiro, na transição do regime 1 para o 3, verificou-se novamente um aumento significativo no valor do coeficiente de correlação, cerca de 699%, de modo que o regime 1 foi o que demonstrou maior persistência, com 48% de chance da dependência entre o petróleo e o índice brasileiro permanecer na baixa volatilidade, como descrito no Quadro 11, Anexo K. Períodos curtos de alta dependência quantílica indicam que a presença de contágio existe, porém, não dura muito tempo. Os resultados das MS-3R-cópuas para o Reino Unido e a Alemanha também ratificam as estimativas dos modelos com dois regimes, ou seja, o contágio do petróleo com ambos os mercados existe e é persistente, uma vez que, na transição do regime de baixa para o de alta volatilidade, constatou-se: (i) Mudança de sinais; (ii) Aumento significativo dos coeficientes de correção; e, (iii) Maior probabilidade média do regime de alta volatilidade.

Para o caso americano, o coeficiente de correlação teve um crescimento de aproximadamente 102%, sendo mais uma vez a única evidência de contágio financeiro encontrada para os Estados Unidos. No caso mexicano, o coeficiente de correlação do regime de baixa volatilidade novamente não foi estatisticamente significativo, e por isso é impossível determinar qual foi o real crescimento da dependência quantílica na transição entre os regimes. Por outro lado, o coeficiente do regime de alta volatilidade apresentou significância, de modo que seu valor e sua probabilidade de permanência no regime 3 indicam longos períodos de alta dependência positiva para a relação entre o petróleo e o índice de ações mexicano. Ou seja, a evidência de contágio existe, porém, continua frágil na análise com três regimes. Por fim, os mercados de Índia, China e Japão, assim como na análise de dois regimes, não apresentaram sinais de contágio financeiro com o petróleo. As principais evidências empíricas Markovianas, com três regimes, de contágio financeiro, são resumidas no Quadro 9. Fica então evidente que a análise de três regimes ratifica os resultados e conclusões encontrados nos testes com dois regimes. Assim, as principais conclusões referentes à estrutura de dependência bivariada entre os quantis dos retornos do petróleo e dos índices de ações, de países emergentes e desenvolvidos, permanecem idênticas às apresentadas no tópico anterior.

Quadro 9 – Contágio financeiro a partir de MS-cópulas com três regimes.

Cópula	Estrutura	Mudança de Regime de Markov	Contágio Financeiro	
		R1 → R3	<i>Forte</i>	<i>Fraca</i>
Brasil	MS- <i>t</i> -Student	↑ +	×	
Índia	MS-Clayton	↓ +		×
México	MS-Clayton	<i>NS</i> +		×
China	MS-Clayton	↓ +		×
EUA	MS- <i>t</i> -Student	↑ +	×	
GB	MS- <i>t</i> -Student	↑ –	×	
Alemanha	MS- <i>t</i> -Student	↑ –	×	
Japão	MS-Clayton	↓ +		×

Fonte: O autor, 2024.

Nota: R1 → R3 indica transição do regime 1 (baixa volatilidade) para o regime 3 (alta volatilidade).

↑ indica aumento significativo no valor do coeficiente após a transição de R1 para R3.

↓ indica que não houve mudança significativa no valor do coeficiente após a transição de R1 para R3.

– indica que houve mudança no sinal do coeficiente após a transição de R1 para R3.

+ indica que não houve mudança no sinal do coeficiente após a transição de R1 para R3.

NS indica não significância estatística,

Forte indica forte evidência de contágio financeiro.

Fraca indica fraca evidência de contágio financeiro.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo utilizando modelos de cópula estática, dinâmica e de mudança de regime de Markov, buscou analisar o efeito de contágio financeiro entre o petróleo e o mercado de ações de um conjunto de economias desenvolvidas, representadas por Estados Unidos, Reino Unido, Alemanha e Japão, e um conjunto de economias emergentes, representadas por Brasil, Índia, México e China, durante a recente crise econômica de 2020, ocasionada pela pandemia da COVID-19. Para tanto, modelamos as distribuições marginais usando um modelo $\text{ARMA}(p_1, q_1)$ -GJR-GARCH(p_2, q_2) com erros seguindo uma função de distribuição t -Student assimétrica. Para o modelo conjunto, empregamos diversas funções de cópula (Gaussiana, t -Student, Gumbel e Clayton), com diferentes estruturas de dependência caudal. Realizamos então as análises estatísticas da dependência quantílica entre mercados obtidas a partir de cópulas estáticas, dinâmicas e Markovianas. As principais conclusões da presente tese são resumidas a seguir e podem ter implicações importantes para a execução de estratégias de alocação de ativos, diversificação de carteiras de investimento, políticas regulatórias, gerenciamento dos efeitos colaterais causados pelo contágio, gestão de riscos energéticos, elaboração/planejamento de políticas energéticas.

- i) Utilizando amostras diárias de preços à vista do petróleo Brent e os índices IBOVESPA, NIFTY-500, S&P/BMV-IPC, SSE, S&P-500, FTSE-100, DAX e NIKKEI-225, foram encontradas evidências de mudanças significativas no grau e na natureza da dependência entre o petróleo e os mercados de ações desde a pandemia da COVID-19. Logo, as estimativas demonstram a existência de contágio financeiro no sentido da definição de Rigobon (2001), i.e., um aumento significativo nas ligações entre mercados após um choque em uma economia (ou em um grupo de economias).
- ii) Pela análise estática/dinâmica do período pré-início pandemia da COVID-19, observou-se predominantemente independência caudal, visto que as economias de Brasil, Índia, México, Reino Unido e Japão foram descritas mais adequadamente pela cópula Gaussiana. Já os mercados de China, Estados Unidos e Alemanha se ajustaram melhor à cópula de Clayton (dependência de cauda inferior), de Gumbel (dependência de cauda superior) e t -Student (dependência de cauda superior e inferior simétrica), respectivamente. No geral, as estimativas dos parâmetros indicam que a correlação média foi baixa e positiva.

- iii) Pela análise estática/dinâmica do período pós-início da pandemia da COVID-19, constatamos que a dependência quantílica de Brasil, Índia, México, China, Estados Unidos, Alemanha e Japão, ajustaram-se à cópula de Clayton, alternando entre estruturas variantes e invariantes no tempo. Apenas o Reino Unido se ajustou à cópula DCC- t -Student. Evidenciamos então apenas duas estruturas de dependência caudal: inferior e simétrica. As estimativas dos parâmetros, no geral, indicaram correlação média relativamente alta em comparação ao período de pré-pandemia, exceto para o mercado chinês.
- iv) Pela análise estática/dinâmica, existem fortes evidências de contágio financeiro para a maioria dos mercados analisados, com exceção da China que não apresentou qualquer sinal de contágio, e do Reino Unido, que exibiu estimativas inconclusivas devido à ausência de significância estatística de coeficientes. Todavia, é importante lembrar que a definição de *shift contagion* é restritiva, já que é aplicável apenas afirmativamente e não no sentido oposto. Nesse caso, não podemos considerar a inexistência de contágio financeiro para China e Reino Unido, é possível apenas concluir que as evidências de contágio são frágeis para estes mercados.
- v) Pela análise Markoviana, para dois e três regimes, são novamente identificadas apenas dependência de cauda simétrica e de cauda inferior. Porém, dessa vez apenas Brasil, Estados Unidos, Reino Unido e Alemanha, se ajustaram à cópula de MS-Clayton. Enquanto os demais mercados se ajustaram à cópula MS- t -Student. As estimativas dos parâmetros em geral indicaram aumento significativo da correlação média na mudança do regime de baixa volatilidade para o de alta volatilidade, exceto para os mercados asiáticos (Índia, China e Japão).
- vi) Pela análise Markoviana, existem fortes indícios de contágio financeiro do petróleo com a maioria dos mercados analisados, exceto para os mercados asiáticos (China, Índia e Japão). Essa falta de evidências demonstra a resiliência destes mercados diante da variância dos preços do petróleo, em períodos de instabilidade econômica. Em especial para o caso chinês, que não apresentou indícios de contágio tanto pela análise estática/dinâmica, quanto pela Markoviana.
- vii) Os mercados que demonstraram maior vulnerabilidade ao contágio financeiro do petróleo em períodos de crise, foram os Estados Unidos, pela análise estática/dinâmica, e os mercados europeus (Reino Unido e Alemanha), pela análise Markoviana. Ou seja, espera-se diante deste cenário, que os investidores e as autoridades reguladoras destes

países busquem mitigar os efeitos da volatilidade dos preços do petróleo mediante estratégias de alocação de ativos e políticas regulatórias mais eficientes.

- viii) Em relação ao fato dos mercados analisados serem desenvolvidos e emergentes, não se verificou comportamento distinto ou padrões de dependência entre o petróleo e as ações, tanto pela análise estática/dinâmica quanto pela análise Markoviana.
- ix) A presente tese, em consonância com o estudo de Wen *et al.* (2012), considera que o aumento da dependência da cauda é uma dimensão real do contágio entre o petróleo e as ações. Confiar na suposição de independência caudal ou negligenciar as mudanças na dependência caudal, tanto em grau quanto em natureza, pode levar à subestimação do risco financeiro durante uma crise.

Nosso estudo não explora as explicações para a existência de contágio, porém, algumas possíveis razões poderiam elucidar melhor o resultado empírico. Uma delas seria que a ocorrência de uma crise econômica de grandes proporções, como foi o caso da crise ocasionada pela pandemia da COVID-19, faz com que os fundamentos macroeconômicos sejam mais incertos, uma vez que a demanda, a oferta e os preços do petróleo tornam-se mais voláteis. Esta condição instável de oferta/demanda do petróleo pode ter refletido nas expectativas econômicas incertas da época, e os preços das ações responderam em conformidade. Outra razão poderia ser o rápido processo de financeirização²¹ que, em comparação com ciclos passados, aumentou a exposição dos preços do petróleo aos choques financeiros e tornou-os mais suscetíveis ao estado de natureza do mercado financeiro. Segundo Tang e Xiong (2012), apesar dos preços do petróleo serem determinados sobretudo pela oferta e demanda, como resultado do rápido processo de financeirização, o preço de uma mercadoria individual passa a ser fortemente influenciado também pelo comportamento do investidor e pela sua propensão agregada ao risco. Assim, estes mercados se tornam mais vulneráveis a choques macroeconômicos/financeiros e, portanto, o efeito de contágio continuará provavelmente a existir entre o petróleo e os mercados acionários em tempos de instabilidade econômica, especialmente para as economias que mais consomem energia no mundo. Estas conclusões nos conduzem a algumas considerações quanto à gestão de riscos e à elaboração de políticas públicas no sentido de atenuar os impactos do contágio financeiro entre os preços do petróleo Brent e os mercados acionários. Nesse sentido, no Quadro 10, são descritas sugestões que podem ser adotadas por governos, reguladores e formuladores de políticas públicas.

²¹ O processo de financeirização se refere ao aumento das negociações de derivativos de petróleo e, portanto, representa uma mudança significativa na composição dos negociadores de derivativos (WEN *et al.*; 2012).

Quadro 10 – Sugestões para atenuar os impactos do contágio financeiro.

Área de Intervenção	Sugestões
Diversificação Econômica	a) Reduzir a dependência do petróleo por meio de investimentos em setores não-petrolíferos e energias renováveis, pode ajudar a reduzir o impacto de flutuações abruptas nos preços do petróleo.
Regulação e Supervisão dos Mercados Financeiros	a) Criar ou reforçar fundos soberanos para estabilizar a economia contra choques nos preços do petróleo; b) Estabelecer regulações mais rígidas para transações especulativas e alavancagem financeira em mercados futuros de petróleo para minimizar o risco de volatilidade excessiva nos mercados de ações e commodities.
Instrumentos Financeiros	a) Incentivar o uso de <i>hedge</i> com derivativos (contratos futuros, opções) para mitigar riscos de flutuações dos preços do petróleo; b) Assegurar mercados de derivativos transparentes e bem regulados para evitar práticas especulativas excessivas e manipulação de mercado.
Gestão Fiscal e Monetária	a) Implementar políticas fiscais contracíclicas para responder às flutuações dos preços do petróleo; b) Preparar bancos centrais para utilizar reservas e outras ferramentas monetárias para estabilizar os mercados financeiros durante crises financeiras.
Integração e Cooperação Internacional	a) Promover cooperação internacional para estabilizar preços globais de petróleo e reduzir volatilidade por meio de políticas coordenadas; b) Estabelecer acordos regionais ou multilaterais de segurança financeira entre bancos centrais, como linhas de <i>swap</i> cambial, para conter crises de contágio financeiro.
Monitoramento e Análise de Riscos	a) Desenvolver modelos avançados para prever e quantificar o impacto dos choques nos preços do petróleo; b) Manter comunicação transparente sobre medidas econômicas adotadas durante crises, para evitar pânico nos mercados financeiros e garantir a confiança dos investidores.
Educação e Capacitação	a) Capacitar empresas para melhorar a gestão de riscos financeiros e diversificação de portfólios, especialmente aquelas mais expostas a flutuações dos preços do petróleo.
Políticas de Prevenção de Crises	a) Criar mecanismos rápidos de resposta a crises, como facilidades de crédito de emergência, para apoiar empresas e setores mais afetados; b) Implementar políticas de estabilização de preços ou subsídios temporários para produtos essenciais afetados pela volatilidade dos preços do petróleo, como alimentos, para reduzir os impactos sociais.

Fonte: O autor, 2024.

Por outro lado, a resiliência dos mercados dos países asiáticos (Japão, Índia e China) frente aos co-movimentos dos preços do petróleo Brent, pode ser explicada por uma série de fatores. Começando pelo Japão, sua resistência ao contágio se dá possivelmente pela menor dependência que a economia japonesa possui em relação a esta *commodity*, em comparação a outras economias. Após a crise do petróleo na década de 1970, a matriz energética japonesa foi significativamente diversificada, mudando para diversas fontes, tais como: energia nuclear, gás natural, energias renováveis, dentre outras. Logo, as flutuações nos preços do petróleo Brent têm geralmente um impacto direto reduzido em sua economia e, por consequência, em sua bolsa

de valores, em comparação a países fortemente dependentes do petróleo. No caso da Índia, sua composição industrial e setorial tende a ser menos sensível às flutuações de curto prazo nos preços de matérias-primas, como o petróleo. Determinados setores-chave, como serviços de TI, têxteis e de bens de consumo, possuem níveis variados de dependência com os preços do petróleo, reduzindo o impacto direto no desempenho econômico e na estabilidade do mercado de ações indiano. Por fim, no caso da China, onde não se observou evidências de contágio em ambas as análises empíricas, a explicação mais plausível reside nas intervenções e controles políticos do governo chinês. Estas incluem medidas para estabilizar os mercados durante os períodos de volatilidade, o que permite mitigar os potenciais efeitos de contágio de choques externos, como os movimentos dos preços do petróleo. Tal teoria é corroborada pelo estudo de Cheng *et al.* (2019), que investigando os impactos dinâmicos da incerteza nos preços internacionais do petróleo sobre a economia chinesa, concluíram que um aumento da volatilidade nos preços do petróleo tende a reduzir seu produto interno bruto real e o investimento, o que, por sua vez, incentiva o governo chinês a estabilizar a economia mediante políticas fiscais e monetárias expansionistas. Portanto, a rápida ação das autoridades chinesas, ainda mais quando lembramos que a China foi o epicentro da pandemia da COVID-19, esclarece o porquê de não haver qualquer evidência de contágio entre o petróleo e o seu índice de ações.

Para finalizar, recomenda-se que trabalhos futuros prestem mais atenção aos efeitos de contágio entre *commodities* e mercados financeiros, e responda questões do tipo: existe efeito de contágio entre essas *commodities* e os mercados acionários? Que fatores podem estar atribuídos ao fenômeno de contágio financeiro? Como o contágio pode ser medido com a máxima precisão? Outras funções de cópula podem ser também testadas, afinal existe uma gama enorme de famílias de cópulas presentes na literatura econométrica. Recomenda-se ainda que análise de contágio seja realizada com outros países, e.g. Rússia ou Arábia Saudita, que também são grandes *players* do mercado de energia. Por fim, as metodologias apresentadas na presente tese podem ser aplicáveis em outros contextos, e.g. para o cálculo de pesos ótimos de carteira, índices de *hedge*, dentre outros.

REFERÊNCIAS

AKHTARUZZAMAN, Md; BOUBAKER, Sabri; SENSOY, Ahmet. Financial contagion during COVID-19 crisis. *Finance Research Letters*, Amsterdam, v.38, 2021.

ANDERSON, T. G.; BOLLERSLEV, T. Answering the sceptics: Yes, standard volatility models do provide accurate forecasts. *International Economic Review*, Philadelphia, v.39, n.4, p.885-905, 1998.

APERGIS, Nicholas; MILLER, Stephen M. Do structural oil-market shocks affect stock prices? *Energy Economics*, Amsterdam, v.31, n.4, p.569-575, 2009.

ASLAM, Faheem; KANG, Hyoung-Goo. How different terrorist attacks affect stock markets. *Defence and Peace Economics*, London, v.26, p.634-648, 2013.

ASLAM, Faheem; RAFIQUE, Amir; SALMAN, Aneel; KANG, Hyoung-Goo; MOHTI, Wahbeeah. The impact of terrorism on financial markets: Evidence from Asia. *The Singapore Economic Review*, Singapore, v.63, n.5, p.1183-1204, 2018.

AWAN, Tahir Mumtaz; KHAN, Muhammad Shoaib; HAQ, Inzamam; KAZMI, Sarwat. Oil and stock markets volatility during pandemic times: a review of G7 countries. *Green Finance*, Bingley, v.3, n.1, p.15-27, 2021.

BAE, K.; KAROLYI, G.; STULZ, R. A new approach to measuring financial contagion. *The Review of Financial Studies*, New York, v.16, n.3, p.717-763, 2003.

BAIG, Taimur; GOLDFAJN, Ilan. Financial markets contagion in the Asian crises. *IMF Staff Papers*, Washington, D.C., v.46, n.2, p.167-195, 1999.

BAKAS, Dimitrios; TRIANTAFYLLOU, Athanasios. Volatility forecasting in commodity markets using macro uncertainty. *Energy Economics*, Amsterdam, v.81, p.79-94, 2019.

BASU, Susanto; BUNDICK, Brent. Uncertainty shocks in a model of effective demand. *Econometrica*, New York, v.85, n.3, p.937-958, 2017.

BAUWENS, Luc; LAURENT, Sébastien. A new class of multivariate skew densities, with application to generalized autoregressive conditional heteroscedasticity models. *Journal of Business & Economic Statistics*, Alexandria, v.23, n.3, p.346-54, 2005.

BENEDIKTSDOTTIR, S.; SCOTTI, C. Exchange Rates Dependence: What Drives It? *International Finance Discussion Paper*, Washington, D.C., v.45, p.549-565, 2009.

BENKRAIEM, Ramzi; GARFATTA, Riadh; LAKHAL, Faten; ZORGATI, Imen. Financial contagion intensity during the COVID-19 outbreak A copula approach. *International Review of Financial Analysis*, Amsterdam, v.81, 2022.

BERGMANN, Daniel Reed; SECURATO, José Roberto; SAVOIA, José Roberto Ferreira; CONTANI, Eduardo Augusto do Rosário. Contágio da crise norte-americana do subprime

sobre os mercados dos BRIC e da União Europeia. *Revista de Administração*, São Paulo, v.50, n.2, p.229-240, 2015.

BLACK, Fischer. Studies of stock price volatility changes. *Proceedings of the 1976 meetings of the Business and Economics Statistics Section*, American Statistical Association, Washington DC, p.177-181, 1976.

BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, Amsterdam, v.31, p.307-327, 1986.

BOLLERSLEV, T.; ENGLE, R. F.; NELSON, D. B. *ARCH Models*. In: ENGLE, R. F.; MCFADDEN, D. L. *Handbook of Econometrics*. Amsterdam: Elsevier, 1994.

BOLLERSLEV, T.; ENGLE, R. F.; WOOLDRIDGE, J. M. A capital asset pricing model with time-varying covariances. *The Journal of Political Economy*, Chicago, v.96, p.116-131, 1988.

BONCIANI, Dario; VAN ROYE, Björn. Uncertainty shocks, banking frictions and economic activity. *Journal of Economic Dynamics and Control*, Amsterdam, v.73, p.200-219, 2016.

BOYER, B. H.; GIBSON, M. S.; LORETAN, M. Pitfalls in tests for changes in correlations. *International Finance Discussion Paper*, Washington, D.C., 1999.

BRENNAN, M. J.; SCHWARTZ, E. S. Evaluating natural resource investments. *The Journal of Business*, Chicago, v.58, n.2, p.135-157, 1985.

BROCKWELL, Peter J.; DAVIS, Richard A. *Introduction to Time Series and Forecasting*. 3. ed. Berlin: Springer, 2002.

BROOKS, Chris. *Introductory Econometrics for Finance*. 4. ed. New York: Cambridge University Press, 2002.

BUYUKSAHIN, Bahattin; ROBE, Michel A. Speculators, commodities and cross-market linkages. *Journal of International Money and Finance*, Amsterdam, v.42, p.38-70, 2014.

CALVO, Sara; REINHART, Carmen. *Capital flows to Latin America: is there evidence of contagion effect?* In: CALVO, Guillermo A.; GOLDSTEIN, Morris; HOCHREITER, Eduard. *Private capital flows to emerging markets after the Mexican crisis*. Washington DC: Institute for International Economics, 1996.

CAMPBELL, J. Y.; HENTSCHEL, L. No News is Good News: An asymmetric model of changing volatility in stock returns. *Journal of Financial Economics*, Amsterdam, v.31, p.281-318, mar. 1992

CHAN-LAU, Jorge A.; MATHIESON, Donald J.; YAO, James Y. Extreme contagion in equity markets. *IMF Staff Papers*, Washington, D.C., v.51, n.2, p.386-408, 2004.

CHEN, X.; FAN, Y. Estimation and model selection of semiparametric copulabased multivariate dynamic models under copula misspecification. *Journal of Econometrics*, Amsterdam, v.125, p.125-154, 2006.

CHEN, X.; FAN, Y.; TSYRENNIKOV, V. Efficient Estimation of semiparametric multivariate copula models. *Journal of the American Statistical Association*, Alexandria, v.101, p.1228-1240, 2006.

CHENG, Dong; SHI, Xunpeng; YU, Jian; ZHANG, Dayong. How does the Chinese economy react to uncertainty in international crude oil prices? *International Review of Economics and Finance*, Amsterdam, v.64, p.147-164, 2019.

CHERUBINI, U.; LUCIANO, E.; VECCHIATO, W. *Copula Methods in Finance*. New York: John Wiley & Sons Ltd., 2004.

CHESNEY, François; JONDEAU, Eric. Does correlation between stock returns really increase during turbulent periods? *Economic Notes by Banca Monte dei Paschi di Siena SpA*, Siena, v.30, n.1, p.53-80, 2001.

CHIANG, Thomas C.; JEON, Bang Nam; LI, Huimin. Dynamic correlation analysis of financial contagion: evidence from Asian markets. *Journal of International Money and Finance*, Amsterdam, v.26, n.7, p.1206-1228, 2007.

CHIOU, Jer-Shiou; LEE, Yen-Hsien. Jump dynamics and volatility: oil and stock markets. *Energy*, Amsterdam, v.34, n.6, p.788-796, 2009.

CHOLLETE, L.; HEINEN, A.; VALDESOGO, A. Modeling international financial returns with a multivariate regime switching copula. *Journal of Financial Econometrics*, [s.l.], v.7, n.4, p.437-480, 2009.

CHRISTIE, Andrew A. The stochastic behavior of common stock variances: value, leverage, and interest rate effects. *Journal of Financial Economics*, Amsterdam, v.10, n.4, p.407-432, 1982.

CLAESSENS, S.; DORNBUSCH, R.; PARK, Y. C. Contagion: understanding how It spreads. *World Bank Research Observer*, Washington, D.C., v.15, n.2, p.177-97, 2000.

CLAYTON, D. G. A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial dependency in chronic disease incidence. *Biometrika*, Oxford, v.65, p.141-151, 1978.

COLES, Stuart; HEFFERNAN, Janet; TAWN, Jonathan. Dependence measures for extreme value analyses. *Extremes*, [s.l.], v.2, n.4, p.339-365, 1999.

CONG, Rong-Gang; WEI, Yi-Ming; JIAO, Jian-Lin; FAN, Ying. Relationships between oil price shocks and stock market: an empirical analysis from China. *Energy Policy*, Amsterdam, v.36, n.9, p.3544-3553, 2008.

CORSETTI, Giancarlo; PERICOLI, Marcello; SBRACIA, Massimo. Some contagions, some interdependence: more pitfalls in Tests of Financial Contagion. *Journal of International Money and Finance*, Amsterdam, v.24, n.8, p.1177-1199, dez. 2005.

COSSLETT, Stephen R.; LEE Lung-Fei. Serial correlation in discrete variable models. *Journal of Econometrics*, v.27, n.1, p.79-97, 1985.

CREAL, Drew; KOOPMAN, Siem Jan; LUCAS, André. A general framework for observation driven time-varying parameter models. *Tinbergen Institute Discussion Paper*, nov. 2008.

DAY, Theodore E.; LEWIS, Craig M. Stock market volatility and the information content of stock index options. *Journal of Econometrics*, Amsterdam, v.52, n.1-2, p.267-287, 1992.

DEMARTA, S.; MCNEIL, A. J. The t Copula and Related Copulas. *International Statistical Review*, Hoboken, v.73, n.1, p.111-129, 2005.

DEMIRER, Riza; GUPTA, Rangan; PIERDZIOCH, Christian; SHAHZAD, Syed Jawad Hussain. The predictive power of oil price shocks on realized volatility of oil: A note. *Resources Policy*, Amsterdam, v.69, 2020.

DEMIRGUC-KUNT, Asli; PEDRAZA, Alvaro; RUIZ-ORTEGA, Claudia. Banking sector performance during the covid-19 crisis, *Journal of Banking and Finance*, Amsterdam, v.133, p.106-305, 2021.

DEMPSTER, A. P.; LAIRD, N. M.; RUBIN, D. B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society*, London, v.39, n.1, p.1-38, 1977.

DEVPURA, Neluka; NARAYAN, Paresh Kumar. Hourly oil price volatility: The role of COVID-19. *Energy Research Letters*, Bristol, v.1, n.1, p.1-4, 2020.

DIAS, Alexandra; EMBRECHTS, Paul. Dynamic copula models for multivariate high frequency data in finance. *Department of Mathematics*, ETH Zurich, Switzerland, 2003.

DUNGEY, Mardi; ZHUMABEKOVA, Diana. Testing for contagion using correlations: some words of caution. *Pacific Basin Working Paper*, Federal Reserve Bank of San Francisco, 2001.

DURRLEMANN, V.; NIKEGHBALI, A.; RONCALLI, T. Which Copula is the Right One? *Groupe de Recherche Opérationnelle*, Crédit Lyonnais, 2000.

EDWARDS, Sebastian. Contagion. *The World Economy*, Hoboken v.23, n.7, p.873-900, 2000.

EDWARDS, Sebastian. Interest Rate Volatility, Capital Controls, and Contagion. *National Bureau of Economic Research*, 1998.

EICHENGREEN, Barry; ROSE, Andrew K.; WYPLOSZ, Charles. Contagious currency crises. *National Bureau of Economic Research*, 1996.

EMBRECHTS, P.; LINDSKOG, F.; MCNEIL, A. J. *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*. In: Rachev, S.T. (Ed.), *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*. Amsterdam: Elsevier, 2003.

EMBRECHTS, P.; MCNEIL, A. J.; STRAUMMANN, D. Correlation: Pitfalls and Alternatives. *Risk Magazine*, London, v.12, p.69-71, 1999.

EMBRECHTS, P.; MCNEIL, A. J.; STRAUMAN, D. *Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls*. In: M.A.H. Dempster (Ed.), *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

ENDERS, W. *Applied Econometric Time Series*. New York: John Wiley & Sons Ltd., 1995.

ENGLE, Robert F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, New York, v.50, p.987-1007, 1982.

ENGLE, Robert F.; HONG, Che-Hsiung; KANE, Alex. Valuation of variance forecasts with simulated option markets. *National Bureau of Economic Research*, 1990.

FERREIRA, S; KARALI, B. Do earthquakes shake stock markets? *Public Library of Science One*, San Francisco, v.10, n.7, 2015.

FILIS, George. Macro economy, stock market and oil prices: do meaningful relationship exist among their cyclical fluctuations? *Energy Economics*, Amsterdam, v.32, n.4, p.877-886, 2010.

FILLETI, J.; HOTTA, L.; ZEVALLOS, M. Analysis of contagion in emerging markets. *Journal of Data Science*, v.6, p.601-626, 2008.

FINK, H.; KLIMOVA, Y.; CZADO, C.; STÖBER, J. Regime switching vine copula models for global equity and volatility indices. *Econometrics*, Basel, v.5, p.1-38, 2017.

FISHER, R.A. *Statistical methods for research workers*. Edinburgh: Oliver and Boyd, 1932.

FORBES, K.; RIGOBON, R. Measuring contagion: Conceptual and empirical issues. *International financial contagion*, London, v.1, p.43-66, 2001.

FORBES, K.; RIGOBON, R. No contagion, only interdependence: measuring stock market comovements. *The Journal of Finance*, New York, v.57, n.5, p.2223-2261, 2002.

FRÉCHET, M. Sur le tableaux de corrélation dont les marges sont données. *Annales de l'Université de Lyon*, Lyon, p.53-77, 1951.

FRENCH, K. R.; SCHWERT, G. W.; STAMBAUGH, R. F. Expected stock returns and volatility. *Journal of Financial Economics*, Amsterdam, v.19, p.3-29, 1987.

FURENMO, Gustav. Are GARCH models appropriate for analysing volatility structures in fundamental valuations of the OMXS30? *Department of Statistics Lund University*, Lund, 2019.

GENEST, C.; GHOUDI, K.; RIVEST, L. P. A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions. *Biometrika*, Oxford, v.82, n.3, p.543-552, 1995.

GENEST, C.; MACKAY, J. Copules archimédiennes et familles de lois bidimensionnelles dont les marges sont données. *Canadian Journal of Statistics*, Toronto, v.14, p.145-159, 1986.

GENEST, C.; RÉMILLARD, B.; BEAUDOIN, D. Omnibus goodness-of-fit tests for copulas: A review and a power study. *Insurance: Mathematics and Economics*, Amsterdam, v.44, p.199-213, 2009.

GENEST, C.; RIVEST, L. P. The joy of copulas: Bivariate distributions with uniform marginals. *The American Statistician*, Washington, D.C., v.40, p.280-283, 1986.

GHORBEL, Achraf; JERIBI, Ahmed. Contagion of COVID-19 pandemic between oil and financial assets the evidence of multivariate Markov switching GARCH models. *Journal of Investment Compliance*, Bingley, v.22, n.2, 2021.

GLOSTEN, L.; JAGANNATHAN, R.; RUNKLE, D. Relationship between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *Journal of Finance*, New York, v.48, p.1779-1801, 1993.

GOLDFELD, Stephen M.; QUANDT, Richard E. A Markov Model for Switching Regressions, *Journal of Econometrics*, Amsterdam, v.1, p.3-16, 1973

GREENE, W. H. *Econometric Analysis*. 6. ed. New Jersey: Upper Saddle River, 2008.

GRZISKA, Martin. *Multivariate GARCH and Dynamic Copula Models for Financial Time Series With an Application to Emerging Markets*. 2014. Tese (Doutorado em Economia). Ludwig Maximilian University of Munich: Faculty of Mathematics, Computer Science and Statistics, Munich, 2014.

GUMBEL, E. J. Bivariate exponential distributions. *Journal of the American Statistical Association*, Philadelphia, v.55, n.292, p.698-707, 1960.

GURU, Biplab Kumar; PRADHAN, Ashis Kumar; BANDARU, Ramakrishna. Volatility contagion between oil and the stock markets of G7 countries plus India and China. *Resources Policy*, Amsterdam, v.81, 2023.

HAMILTON, James D. A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica*, New York, v.57, n.2, p.357-384, 1989.

HAMILTON, James D. *Time Series Analysis*. New Jersey: Princeton University Press, 1994.

HANSEN, B. E. Autoregressive Conditional Density Estimation. *International Economic Review*. Philadelphia, v.35, n.3, p.705-730, 1994.

HANSEN, P. R.; LUNDE, A. A forecast comparison of volatility models: Does anything beat a GARCH(1,1)? *Journal of Applied Econometrics*, Hoboken, v.20, n.7, p.873-889, 2005.

HAQ, I. U.; AWAN, T. M. Impact of e-banking service quality on e-loyalty in pandemic times through interplay of e-satisfaction. *Vilakshan-XIMB J Manage*, Bhubaneswar, v.17, p.39-55, 2020.

HÄRDLE, W. K.; OKHRIN, O.; WANG, W. Hidden Markov structures for dynamic copulae. *Econometric Theory*, Cambridge, v.31, p.981-1015, 2015.

HENDRICKS, K. B.; JACOBS, B. W.; SINGHAL, V. R. Stock market reaction to supply chain disruptions from the 2011 Great East Japan Earthquake. *Manufacturing & Service Operations Management*, Catonsville, v.22, p.683-699, 2020.

HENRY, C. Investment decisions under uncertainty: the “irreversibility effect”. *The American Economic Review*, Nashville, v.64, n.6, p.1006-1012, 1974.

HOEFFDING, W. Masztabinvariante Korrelationstheorie. *Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin*, Berlin, v.5, p.179-233, 1940.

HUANG, R. D.; MASULIS, R. W.; STOLL, H. R. Energy shocks and financial markets. *Journal of Futures Markets*, Hoboken, v.16, n.1, p.1-27, 1996.

JAWORSKI, Piotr; DURANTE, Fabrizio; HARDLE, Wolfgang Karl; RYCHLIK, Tomasz. *Copula theory and its applications*. Proceedings of the workshop held in Warsaw. Poland: Springer, 2009.

JOE, Harry. Asymptotic efficiency of the two-stage estimation for copula-based models. *Journal of Multivariate Analysis*, Amsterdam, v.94, n.2, p.401-419, 2005.

JOE, Harry. *Dependence modeling with copulas*. Monographs on Statistics and Applied probability, v.134. New York: Chapman & Hall/CRC, 2014.

JOE, Harry. *Multivariate models and dependence concepts*. Monographs on Statistics and Applied Probability, v.73. New York: Chapman & Hall/CRC, 1997.

JOE, Harry; XU, James Jianmeng. The estimation method of inference functions for margins for multivariate models. Technical Report No. 166, Department of Statistics, University of British Columbia, *Open Journal of Statistics*, [s.l.], v.6, n.4, 1996.

JOËTS, M.; MIGNON, V.; RAZAFINDRABE, T. Does the volatility of commodity prices reflect macroeconomic uncertainty? *Energy Economics*, Amsterdam, v.68, p.313-326, 2017.

JONES, C. M.; GAUTAM, K. Oil and the stock markets. *The Journal of Finance*, New York, v.51, n.2, p.463-491, 1996.

KAMINSKY, Graciela; REINHART, Carmen. On Crises, Contagion, and Confusion. University of Maryland Mimeo, *Journal of International Economics*, Amsterdam, v.51, n.1, p.145-168, 1998.

KING, Mervyn A.; WADHWANI, Sushil. Transmission of volatility between stock markets. *The Review of Financial Studies*, New York, v.3, n.1, p.5-33, Dorado Beach, 1990.

LAMOUREUX, C. G.; LASTRAPES, W. D. Heteroskedasticity in stock return data: Volume versus GARCH effects. *Journal of Finance*, New York, v.45, n.1, p.221-229, 1990.

LAUTIER, Delphine; RAYNAUD, Franck. Systemic risk in energy derivative markets: a graphtheory analysis. *The Energy Journal*, Columbus, v.33, n.3, p.215-239, 2012.

LI, David X. On default correlation: A copula function approach. *Journal of Fixed Income*, New York, v.9, n.4, p.43-54, 1999.

LIN, Arthur J.; CHANG, Hai-Yen. Volatility Transmission from Equity, Bulk Shipping, and Commodity Markets to Oil ETF and Energy Fund—A GARCH-MIDAS Model. *Mathematics*, Basel, v.8, n.9, p.1-21, 2020.

LINDSKOG, F.; MCNEIL, A. J.; SCHMOCK, U. *Kendall's tau for elliptical distributions*. In: BOL, G.; NAKHEIZADEH, G.; RACHEV, S. T.; RIDDER, T.; VOLLMER, K. H. Credit risk: measurement, evaluation and management. Heidelberg: Physica-Verlag, 2003.

LOMBARDI, Italo Trevellin; GALVAO, Ana Beatriz; LAURINI, Marcio Poletti; VALLS PEREIRA, Pedro L. A dinâmica do contágio entre brasil e argentina. *Working paper IBMEC-SP*, 2004.

LONGIN, François; SOLNIK, Bruno. Extreme correlations of international equity markets. *The Journal of Finance*, New York, v.56, n.2, p.649-676, 2001.

LONGIN, François; SOLNIK, Bruno. Is the correlation in international equity returns constant: 1960-1990. *Journal of International Money and Finance*, Amsterdam, v.14, n.1, p.3-26, 1995.

MANEEJUK, Paravee; THONGKAIRAT, Sukrit; SRICHAIKUL, Wilawan. Time-varying co-movement analysis between COVID-19 shocks and the energy markets using the Markov Switching Dynamic Copula approach. *Energy Reports*, Amsterdam, v.7, n.3, p.81-88, 2021.

MANZANEDO, Rubén D.; MANNING, Peter. COVID-19: Lessons for the climate change emergency. *Science of The Total Environment*, Amsterdam, v.742, p.140-563, 2020.

MCNEIL, A. J.; FREY, R. Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. *Journal of Empirical Finance*, Amsterdam, v.7, n.3, p.271-300, 2004.

MCNEIL, A. J.; FREY, R.; EMBRECHTS, P. *Quantitative Risk Management*. New Jersey: Princeton University Press, 2005.

MENDES, B. V. M. Asymmetric extreme interdependence in emerging equity markets. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, Hoboken, v.21, 2005.

MIKOSCH, T. Copulas: tales and facts. *Extremes*, [s.l.], v.9, n.1, p.3-20, 2006.

MILLER, J. Isaac; RATTI, Ronald A. Crude oil and stock markets: stability, instability, and bubbles. *Energy Economics*, Amsterdam, v.31, n.4, p.559-568, 2009.

MOHAMMADI, Hassan; SU, Lixian. International evidence on crude oil price dynamics: application of ARIMA-GARCH models. *Energy Economics*, Amsterdam, v.32, n.5, p.1001-1008, 2010.

MOHAMMED, Mikidadu; BARRALES-RUIZ, Jose. Pandemics and Oil Shocks. *Oil and The Macroeconomy Discussion Paper Series*, Cambridge, v.3, 2020.

NASRI, Bouchra R.; RÉMILLARD, Bruno N. Copula-based dynamic models for multivariate time series. *Journal of Multivariate Analysis*, Amsterdam, v.172, p.107-121, 2019.

NASRI, Bouchra R.; RÉMILLARD, Bruno N.; THIOUB, Mamadou Y. Goodness-of-fit for regime-switching copula models with application to option pricing. *Canadian Journal of Statistics*, Toronto, v.48, n.1, p.79-96, 2020.

NELSEN, Roger B. *An Introduction to Copulas*. 2. ed. New York: Springer Series in Statistics, 2006.

NELSON, Daniel B. Conditional heteroscedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica*, New York, v.59, n.2, p.347-370, 1991.

OBERNDORFER, U. Energy prices, volatility, and the stock market: evidence from the Eurozone. *Energy Policy*, Amsterdam, v.37, n.12, p.5787-5795, 2009.

PARK, J.; RATTI, R. A. Oil price shocks and stock markets in the U.S. and 13 European countries. *Energy Economics*, Amsterdam, v.30, p.2587-2608, 2008.

PATA, Ugur Korkut. Is the COVID-19 Pandemic a financial disaster for G7 countries? Evidence from a Fourier cointegration test. *SSRN Electronic Journal*, New York, 2020.

PATTON, A. J. *Copula-based models for financial time series*. In: ANDERSEN, T. G.; DAVIS, R. A.; KREISS, J. P.; MIKOSCH, T. Handbook of Financial Time Series. Berlin: Springer, 2009.

PATTON, A. J. Modelling asymmetric exchange rate dependence. *International Economic Review*, Philadelphia, v.47, n.2, p.527-556, 2006.

PATTON, A. J. On the out-of-sample importance of skewness and asymmetric dependence for asset allocation. *Journal of Financial Econometrics*, [s.l.], v.2, p.130-168, 2004.

PERICOLI, M.; SBRACIA, M. A primer on financial contagion. *Journal of Economic Surveys*, [s.l.], v.17, n.4, p.571-608, 2003.

PIGER, J. *Econometrics: Models of Regime Changes*. In: MEYERS, R. Encyclopedia of Complexity and Systems Science. New York: Springer, 2007.

POPP, A; ZHANG, F. The macroeconomic effects of uncertainty shocks: The role of the financial channel. *Journal of Economic Dynamics and Control*, Amsterdam, v.69, p.319-349, 2016.

PROKOPCZUK, M; STANCU, A; SYMEONIDIS, L. The economic drivers of commodity market volatility. *Journal of International Money and Finance*, Amsterdam, v.98, 2019.

RAMCHAND, L.; SUSMEL, R. Volatility and cross correlation across major stock markets. *Journal of Empirical Finance*, Amsterdam, v.5, n.4, p.397-416, 1998.

REBOREDO, Juan C. How do crude oil prices co-move? A copula approach. *Energy Economics*, Amsterdam, v.33, p.948-955, 2011.

REBOREDO, Juan C; UGOLINI, Andrea. Quantile dependence of oil price movements and stock returns. *Energy Economics*, Amsterdam, 2015.

RIGOBON, R. *Contagion: how to measure it?* In: EDWARDS, S.; FRANKEL, J. Preventing currency crises in emerging markets. National Bureau of Economic Research. Chicago: University of Chicago Press, 2001.

RODRIGUEZ, J. Measuring financial contagion: A copula approach. *Journal of Empirical Finance*, Amsterdam, v.14, n.3, p.401-423, 2007.

ROSENBLATT, Murray. Remarks on a multivariate transformation. *The Annals of Mathematical Statistics*, Hayward, v.23, n.3, p.470-472, 1952.

SANTOS, Ricardo Pires de Souza. *Modelando contágio financeiro através de cópulas*. 2010. 94 f. Dissertação (Mestrado em Economia) - Fundação Getúlio Vargas, São Paulo, 2010.

ŞENOL, Z.; ZEREN, F. Coronavirus (COVID-19) and stock markets: The effects of the pandemic on the global economy. *Eurasian Journal of Researches in Social and Economics*, Istanbul, v.7, p.1-16, 2020.

SILVENNOINEN, A.; THORPY, S. Financialization, crisis and commodity correlation dynamics. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, Amsterdam, v.24, p.42-65, 2010.

SKLAR, A. Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut Statistique de l'Université de Paris*, Paris, v.8, p.229-231, 1959.

STÖBER, J; CZADO, C. Regime switches in the dependence structure of multidimensional financial data. *Computational Statistics and Data Analysis*, Amsterdam, v.76, p.672-686, 2014.

SUKCHAROEN, K.; ZOHRABYAN, T.; LEATHMAN, D.; Wu, X. Interdependence of oil prices and stock market indices: a copula approach. *Energy Economics*, Amsterdam, v.44, p.331-339, 2014.

TANG, Ke; XIONG, Wei. Index investment and financialization of commodities. *Financial Analysts Journal*, Charlottesville, v.68, n.6, 2012.

TAYLOR, S. J. *Modelling Financial Time Series*. Chichester: John Wiley & Sons, 1986.

TRIAANTIS, Alexander J.; HODDER, James E. Valuing flexibility as a complex option. *The Journal of Finance*, New York, v.45, n.2, p.549-565, 1990.

TRIVEDI, Pravin K.; ZIMMER, David M. Copula modeling: an introduction for practitioners. *Foundations and Trends in Econometrics*, Hanover, v.1, n.1, 2007.

TSAY, Ruey S. *Analysis of Financial Time Series*. New York: John Wiley & Sons Ltd., 2005.

VENTER, Gary G. *Tails of copulas*. In: Proceedings. Washington: ASTIN, p.66-113, 2001.

VIALE, Ariel M.; BESSLER, David A.; KOLARI, James W. On the structure of financial contagion: Econometric tests and mercosur evidence. *Journal of Applied Economics*, Buenos Aires, v.17, n.2, p.373-400, 2014.

WANG, Haiying; YUAN, Ying; WANG, Tianyang. The dynamics of cross-boundary fire—Financial contagion between the oil and stock markets. *Journal of Futures Markets*, John Wiley & Sons, Ltd., Hoboken, v.41, n.10, p.1655-1673, 2021.

WEERASINGHE, Anuda. *COVID-19: The Economic Impact Simplified*. In: Medium: Where good ideas find you, 2020. Disponível em: <<https://medium.com/@anudaweerasinghe/covid-19-the-economic-impact-simplified-14897e7b2631>>. Acesso em: 15 mai. 2024.

WEN, Xiaoqian; WEI, Yu; HUANG, Dengshi. Measuring contagion between energy market and stock market during financial crisis: a copula approach. *Energy Economics*, Amsterdam, v.34, n.5, p.1435-1446, 2012.

WORLDOMETER. *Oil consumption by country*. In: Worldometer - real time world statistics, 2024. Disponível em: <<https://www.worldometers.info/oil/oil-consumption-by-country>>. Acesso em: 15 jan. 2024.

XU, Sa; DU, Ziqing; ZHANG, Hai. Can crude oil serve as a hedging asset for underlying securities? Research on the heterogenous correlation between crude oil and stock index. *Energies*, Basel, v.13, n.12, p.31-39, 2020.

ZAMBRANO-MONSERRATE, Manuel A.; RUANO, María Alejandra; SANCHEZ-ALCALDE, Luis. Indirect effects of COVID-19 on the environment. *Science of The Total Environment*, Amsterdam, v.728, 2020.

ANEXO A – Modelo autorregressivo de média móvel

A família de modelos ARMA captura a dinâmica do primeiro momento de uma série temporal financeira univariada. O processo u é um ruído branco se satisfaz a seguintes propriedades:

- i) $E\{\varepsilon\} = 0$,
- ii) $E\{\varepsilon^2\} = h, \quad h < \infty$,
- iii) $E\{\varepsilon_t \varepsilon_j\} = 0, \quad t \neq j$,

onde $E\{\}$ é o operador de expectativas usual.

O processo de média móvel MA consiste em um “ruído branco”. Caso ε_t e ε_j ainda sejam independentes, para $t \neq j$, o processo é um “ruído branco estrito”. Considerando uma série temporal de vetores de valor real $\mathbf{x}$, então um processo MA de ordem q pode ser descrito como:

$$x_t = \varepsilon_t - \delta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \delta_q \varepsilon_{t-q},$$

onde ε_t é o ruído branco e $\delta_1 \dots \delta_q$ são os parâmetros a serem estimados.

A condição de estacionariedade é satisfeita se:

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\delta_i| < \infty.$$

O operador de defasagem L pode ser definido como:

$$L(\varepsilon_t) = \varepsilon_{t-1}, \quad L^2(\varepsilon_t) = \varepsilon_{t-2}, \dots, \quad L^q(\varepsilon_t) = \varepsilon_{t-q}.$$

Ou seja, o operador de defasagem L desloca o índice de tempo t um período para trás. Assim, um MA(q) assume a forma:

$$\varepsilon_t - \delta_1 L \varepsilon_t - \dots - \delta_q L^q \varepsilon_t = x_t \rightarrow \delta(L) \varepsilon_t = x_t.$$

De modo que:

$$\delta(L) = 1 - \delta_1 L - \dots - \delta_q L^q.$$

Já um processo autorregressivo de primeira ordem AR(1) é descrito como:

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Se $|\phi_1| < 1$, x_t é estacionário e ergódico. Os momentos de x_t são calculados usando as somas infinitas:

$$E\{x_t\} = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i E\{\varepsilon_{t-i}\} = 0,$$

$$var\{x_t\} = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{2i} var\{\varepsilon_{t-i}\} = \frac{h}{1-\phi_1^2}.$$

Se a Equação (3.4) for estimada com uma constante, têm-se:

$$x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t.$$

O valor esperado da média passa a ser:

$$E\{x_t\} = \frac{\phi_0}{1-\phi_1}.$$

Um modelo AR(p_1), com $p_1 > 1$, é dado por:

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \dots + \phi_{p_1} x_{t-p_1} + \varepsilon_t,$$

onde $\phi_1 \dots \phi_{p_1}$ são os parâmetros a serem estimados.

As condições estacionárias deste modelo são derivadas através das raízes complexas do processo.

O operador de defasagem L pode ser definido como:

$$L(x_t) = x_{t-1}, \quad L^2(x_t) = x_{t-2}, \dots, \quad L^{p_1}(x_t) = x_{t-p_1}.$$

Ou seja, o operador de defasagem L desloca o índice de tempo t um período para trás. Assim, um $AR(p_1)$ assume a forma:

$$x_t - \phi_1 L x_t + \dots + \phi_{p_1} L^{p_1} x_t = \varepsilon_t.$$

Ou:

$$\phi(L)x_t = \varepsilon_t.$$

De modo que:

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_{p_1} L^{p_1}.$$

Deriva-se então as raízes complexas por meio do Teorema Fundamental da Álgebra, i.e., qualquer polinômio pode ser fatorado em:

$$\phi(z) = (1 - \lambda_1^{-1} z) \dots (1 - \lambda_{p_1}^{-1} z),$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_z$ são as raízes complexas de z .

Se todas as raízes complexas estiverem fora do círculo unitário, i.e. $|\lambda_i| > 1$, para todo i , o modelo $AR(p_1)$ é estacionário e ergódico. Os momentos condicionais de um processo $AR(p_1)$ são definidos como:

$$E\{x_t\} = 0,$$

$$var\{x_t\} = h \sum_{i=1}^{p_1} \phi_i.$$

Ao estimar a Equação (3.14) com uma constante, o valor esperado da média passa a ser:

$$E\{x_t\} = \frac{\phi_0}{1 - \sum_{i=1}^p \phi_i}.$$

Em geral, os processos ARMA exibem as mesmas condições estacionárias que os processos $AR(p_1)$. No exemplo a seguir será usado o processo ARMA para modelar o comportamento variante no tempo de cópulas, que será introduzido no próximo capítulo. Um modelo $ARMA(1,1)$ pode ser escrito como:

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \delta_1 \varepsilon_{t-1} + u_t,$$

$$u_t = h_t^{1/2} \varepsilon_t.$$

Se $\delta(L)$ ou $\phi(L)$ são inversíveis, na notação do operador de defasagem têm-se:

$$x_t = (\phi(L))^{-1} \delta(L) \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t = (\delta(L))^{-1} \phi(L) x_t.$$

No caso de um processo $ARMA(1,1)$, a inversibilidade e a estacionariedade são garantidas se $|\delta| < 1$ e $|\phi| < 1$. As condições de momento de um $ARMA(1,1)$ são:

$$E\{x_t\} = 0,$$

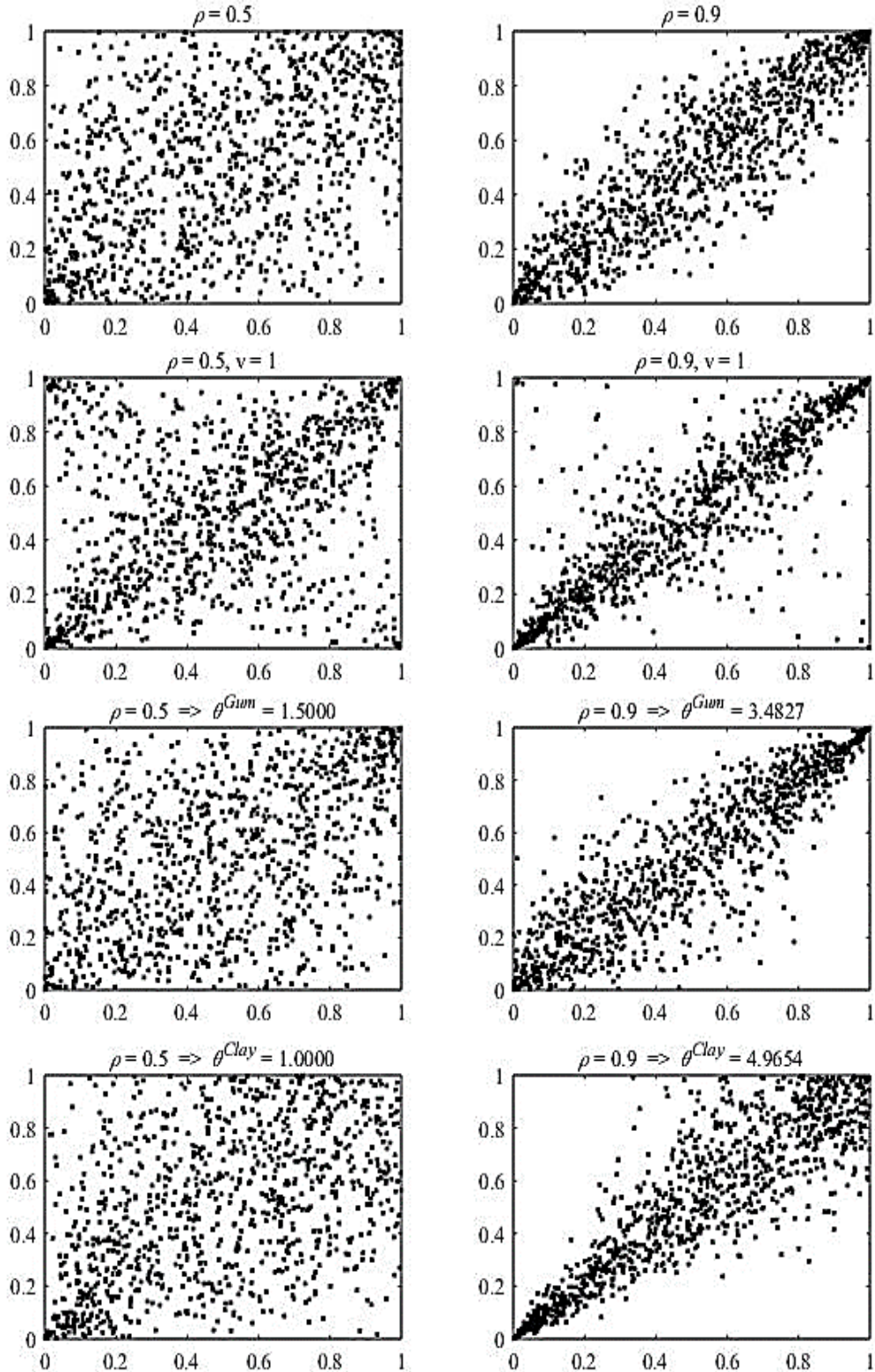
$$var\{x_t\} = \frac{1 + \delta_1^2 - 2\phi_1\delta_1}{1 - \phi_1^2}.$$

No caso de uma constante, a média esperada passa a ser:

$$E\{x_t\} = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1}.$$

ANEXO B – Gráficos de dispersão das cópulas

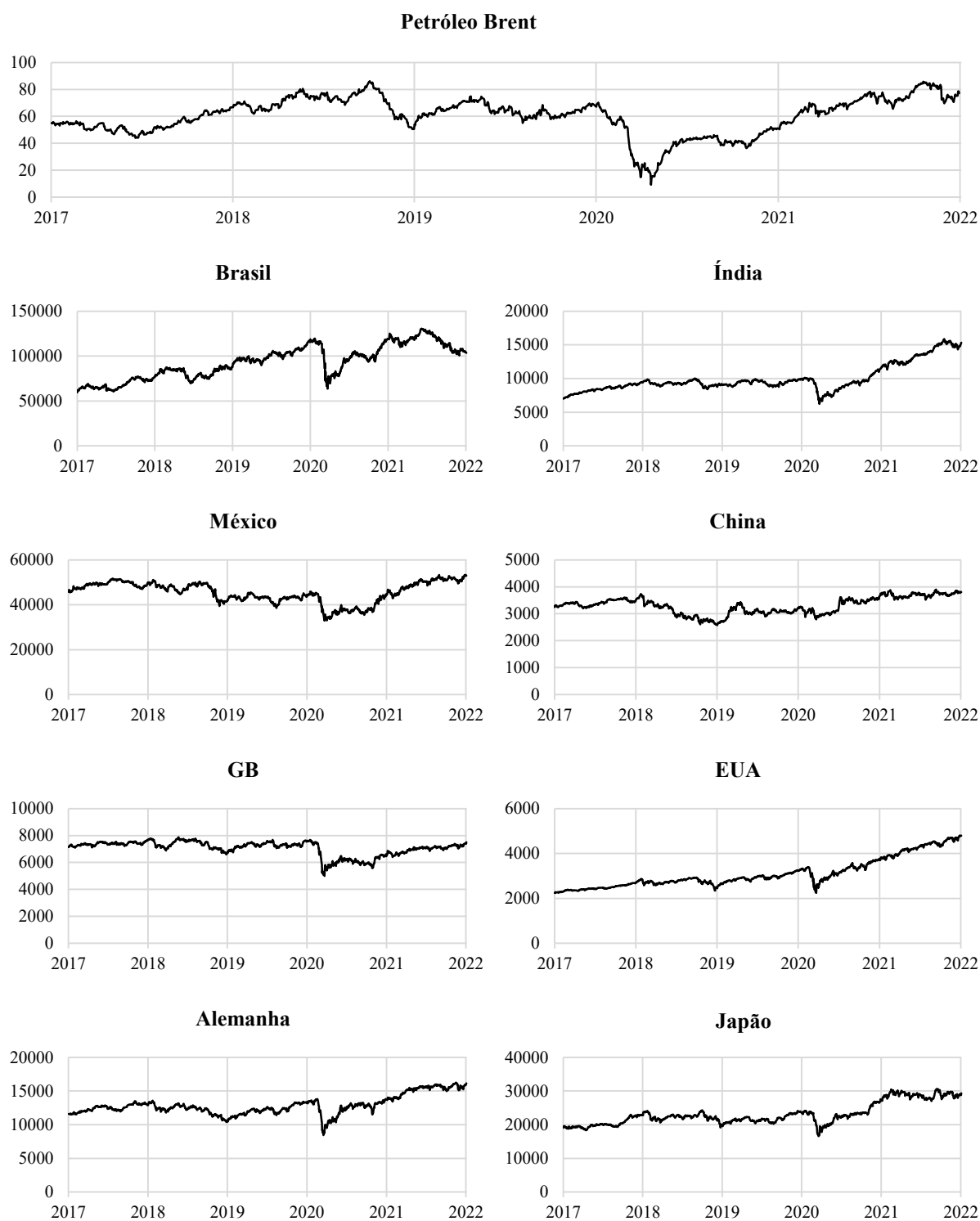
Figura 5 – Diagramas de dispersão das cópulas bivariadas: Gaussiana (1ª Linha), t -Student (2ª Linha), Gumbel (3ª Linha) e Clayton (4ª Linha) com marginais $N(0,1)$.



Fonte: O autor, 2024.

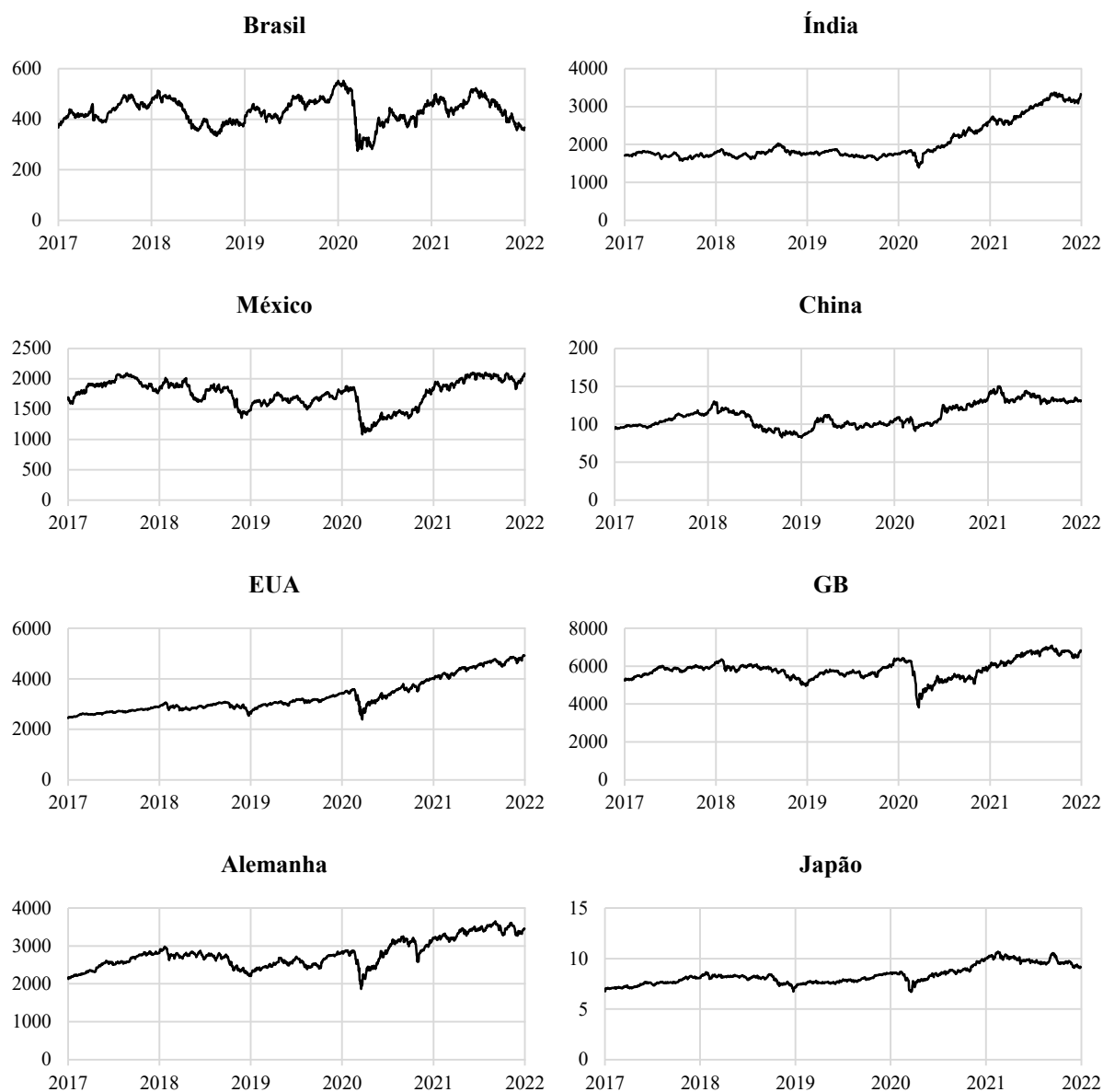
ANEXO C – Gráficos dos preços do petróleo e dos índices de mercado

Figura 6 – Evolução dos preços do petróleo e dos índices de mercado no período de 2017-2022.



Fonte: O autor, 2024.

Figura 7 – Evolução dos índices de mercado modificados no período de 2017-2022.



Fonte: O autor, 2024.

ANEXO D – Especificações dos modelos marginais pelo critério AIC

Tabela 12 – Estimativas das especificações dos modelos de distribuição marginal no período de 2017-2022.

MC	VC	DP	Brent	Brasil	Índia	México	China	EUA	GB	Alemanha	Japão
ARMA(0,0)	GARCH(1,1)	G	-4.923	-5.421	-6.533	-6.015	-6.301	-7.038	-6.764	-6.378	-6.685
ARMA(1,0)	GARCH(1,1)	G	-4.922	-5.422	-6.536	-6.019	NaN	-7.043	-6.766	-6.382	-6.698
ARMA(0,1)	GARCH(1,1)	G	-4.922	-5.419	-6.536	-6.019	-6.301	-7.041	-6.764	-6.379	-6.698
ARMA(1,1)	GARCH(1,1)	G	-4.921	-5.421	-6.534	-6.018	-6.302	-7.042	-6.764	-6.381	-6.698
ARMA(0,0)	GARCH(1,1)	T	-4.928	-5.427	-6.529	-6.015	-6.285	-7.040	-6.770	-6.389	-6.683
ARMA(1,0)	GARCH(1,1)	T	-4.926	-5.428	-6.533	-6.021	-6.287	-7.043	-6.772	-6.392	-6.695
ARMA(0,1)	GARCH(1,1)	T	-4.926	-5.426	-6.533	-6.021	-6.286	-7.042	-6.772	-6.389	-6.695
ARMA(1,1)	GARCH(1,1)	T	-4.926	-5.427	-6.531	-6.019	-6.285	-7.044	-6.771	-6.391	-6.694
ARMA(0,0)	GARCH(1,1)	T ^A	-4.934	-5.429	-6.530	-6.017	-6.285	-7.049	-6.784	-6.402	-6.684
ARMA(1,0)	GARCH(1,1)	T ^A	-4.933	-5.431	-6.533	-6.024	-6.286	-7.053	-6.788	-6.406	-6.698
ARMA(0,1)	GARCH(1,1)	T ^A	-4.933	-5.428	-6.533	-6.024	-6.285	-7.053	-6.787	-6.403	-6.699
ARMA(1,1)	GARCH(1,1)	T ^A	-4.933	-5.429	-6.532	-6.022	-6.285	-7.058	-6.786	-6.404	-6.698
ARMA(0,0)	EGARCH(1,1)	G	-4.828	-5.398	-6.498	-5.899	-5.585	-6.921	-6.644	-6.249	-6.552
ARMA(1,0)	EGARCH(1,1)	G	-4.825	-5.310	-6.390	-5.903	-6.170	-6.924	-6.644	-6.249	-6.564
ARMA(0,1)	EGARCH(1,1)	G	-4.826	-5.310	-6.390	-5.903	-6.167	-6.924	-6.644	-6.249	-6.566
ARMA(1,1)	EGARCH(1,1)	G	-4.824	-5.319	-6.389	-5.901	-6.167	-6.923	-6.643	-6.248	-6.567
ARMA(0,0)	EGARCH(1,1)	T	-4.882	-5.396	-6.499	-5.983	-6.238	-6.993	-6.724	-6.353	-6.673
ARMA(1,0)	EGARCH(1,1)	T	-4.881	-5.394	-6.504	-5.992	-6.240	-6.992	-6.724	-6.352	-6.680
ARMA(0,1)	EGARCH(1,1)	T	-4.881	-5.394	-6.503	-5.992	-6.224	-6.992	-6.724	-6.352	-6.681
ARMA(1,1)	EGARCH(1,1)	T	-4.880	-5.393	-6.501	-5.991	-6.222	-6.994	-6.723	-6.351	-6.681
ARMA(0,0)	EGARCH(1,1)	T ^A	-4.890	-5.405	-6.470	-5.893	-6.247	-7.023	-6.742	-6.368	-6.557
ARMA(1,0)	EGARCH(1,1)	T ^A	-4.889	-5.403	-6.475	-5.999	-6.250	-7.020	-6.745	-6.373	-6.567
ARMA(0,1)	EGARCH(1,1)	T ^A	-4.889	-5.403	-6.477	-5.900	-6.249	-7.019	-6.743	-6.369	-6.568
ARMA(1,1)	EGARCH(1,1)	T ^A	-4.889	-5.310	-6.477	-5.998	-6.249	-7.028	-6.744	-6.372	-6.568
ARMA(0,0)	GJRGARCH(1,1)	G	-4.931	-5.425	-6.541	-6.021	-6.299	-7.058	-6.780	-6.390	-6.701
ARMA(1,0)	GJRGARCH(1,1)	G	-4.930	-5.426	-6.544	-6.025	-6.301	-7.061	-6.782	-6.394	-6.711
ARMA(0,1)	GJRGARCH(1,1)	G	-4.930	-5.423	-6.544	-6.024	-6.299	-7.059	-6.780	-6.391	-6.711
ARMA(1,1)	GJRGARCH(1,1)	G	-4.929	-5.425	-6.543	-6.023	-6.300	-7.060	-6.780	-6.394	-6.710
ARMA(0,0)	GJRGARCH(1,1)	T	-4.934	-5.432	-6.537	-6.020	-6.284	-7.064	-6.785	-6.399	-6.700
ARMA(1,0)	GJRGARCH(1,1)	T	-4.933	-5.433	-6.541	-6.026	-6.285	-7.064	-6.787	-6.402	-6.708
ARMA(0,1)	GJRGARCH(1,1)	T	-4.933	-5.430	-6.541	-6.026	-6.284	-7.064	-6.786	-6.399	-6.709
ARMA(1,1)	GJRGARCH(1,1)	T	-4.932	-5.431	-6.540	-6.025	-6.284	-7.064	-6.786	-6.401	-6.707
ARMA(0,0)	GJRGARCH(1,1)	T ^A	-4.943	-5.434	-6.539	-6.023	-6.293	-7.077	-6.801	-6.416	-6.703
ARMA(1,0)	GJRGARCH(1,1)	T ^A	-4.941	-5.435	-6.546	-6.031	-6.305	-7.080	-6.805	-6.419	-6.712
ARMA(0,1)	GJRGARCH(1,1)	T ^A	-4.941	-5.432	-6.543	-6.029	-6.294	-7.078	-6.803	-6.415	-6.714
ARMA(1,1)	GJRGARCH(1,1)	T ^A	-4.940	-5.433	-6.542	-6.028	-6.293	-7.077	-6.802	-6.417	-6.711

Fonte: O autor, 2024.

Nota: Valor mínimo do AIC em negrito.

MC é o modelo de média condicional,

VC é o modelo de variância condicional.

DP é a distribuição de probabilidade.

G é a distribuição GED.

T é a distribuição *t*-Student.T^A é a distribuição *t*-Student assimétrica.

ANEXO E – Modelos marginais pré e pós-início da COVID-19

Tabela 13 – Estimativas dos modelos de distribuição marginal no período de 2017-2020.

	Brasil	Índia	México	China	USA	GB	Alemanha	Japão	Brent
Média									
μ	0.0006 (0.00) [0.274]	0.0000 (0.00) [0.942]	0.0001 (0.00) [0.719]	0.0005* (0.00) [0.072]	0.0004* (0.00) [0.025]	0.0002 (0.00) [0.328]	0.0003 (0.00) [0.209]	0.0003 (0.00) [0.123]	0.0003 (0.00) [0.641]
ϕ_1	-0.521* (0.13) [0.000]	0.089* (0.03) [0.011]	0.095* (0.04) [0.008]			-0.045* (0.04) [0.201]	-0.046 (0.04) [0.199]	-	-
δ_1	0.608* (0.14) [0.000]	-	-	-	-	-	-	-0.178* (0.05) [0.002]	-
Variância									
α_0	0.391 (0.32) [0.222]	7.948* (4.51) [0.078]	0.099 (0.06) [0.116]	0.013* (0.01) [0.100]	2.036* (0.58) [0.000]	4.830* (2.54) [0.057]	3.899* (2.19) [0.076]	8.691* (2.72) [0.002]	0.074* (0.04) [0.032]
α_1	0.006* (0.02) [0.818]	0.007 (0.02) [0.766]	0.004 (0.04) [0.917]	0.048 (0.02) [0.039]	0.004 (0.03) [0.899]	0.014 (0.02) [0.556]	-0.013 (0.02) [0.407]	0.033 (0.05) [0.529]	-0.004 (0.02) [0.861]
β_1	0.716* (0.18) [0.000]	0.828* (0.07) [0.000]	0.871* (0.08) [0.000]	0.928* (0.02) [0.000]	0.826* (0.03) [0.000]	0.806* (0.08) [0.000]	0.906* (0.04) [0.000]	0.731* (0.08) [0.000]	0.949* (0.02) [0.000]
γ	0.144* (0.09) [0.122]	0.118* (0.05) [0.028]	0.083* (0.04) [0.045]	0.038 (0.03) [0.248]	0.256* (0.07) [0.000]	0.165* (0.06) [0.004]	0.128* (0.05) [0.008]	0.184* (0.07) [0.010]	0.062* (0.02) [0.009]
λ	-0.073* (0.05) [0.182]	-0.020 (0.04) [0.626]	-0.044 (0.05) [0.374]	-0.021 (0.04) [0.598]	-0.111* (0.04) [0.009]	-0.157* (0.04) [0.000]	-0.133* (0.05) [0.006]	-0.129* (0.05) [0.009]	-0.109* (0.05) [0.021]
ν	6.058* (1.48) [0.000]	8.635* (2.46) [0.000]	6.973* (1.58) [0.000]	4.051* (0.65) [0.000]	5.503* (1.18) [0.000]	6.309* (1.49) [0.000]	4.201* (0.77) [0.000]	7.556* (1.81) [0.000]	6.290* (1.54) [0.000]
LM	2271.7	2627.8	2432.0	2515.5	2918.1	2814.7	2623.1	2719.3	2051.6
BP	20.760 [0.292]	17.892 [0.529]	14.977 [0.724]	25.385 [0.187]	25.680 [0.177]	22.992 [0.238]	18.567 [0.485]	16.877 [0.598]	16.459 [0.688]
ARCH-LM	0.133 [0.999]	0.371 [0.995]	1.427 [0.102]	0.770 [0.751]	0.652 [0.874]	0.969 [0.499]	0.482 [0.973]	0.349 [0.996]	0.851 [0.650]
$\chi^2(2)$	[0.322]	[0.829]	[0.484]	[0.103]	[0.164]	[0.683]	[0.739]	[0.857]	[0.134]

Fonte: O autor, 2024.

Nota: * indica significância até 10%.

LM é o valor do log da verossimilhança, BP é a estatística Box-Pierce para correlação serial no modelo residual com 20 defasagens, respectivamente, ARCH-LM é o teste LM (Método de Lagrange) de Engle para o efeito ARCH em resíduos até a 20ª ordem e χ^2 é o teste de *goodness-of-fit* qui-quadrado de Pearson Ajustado para subamostra de 2017-2019 (2).

Erro padrão em () e P-Valor em [].

Tabela 14 – Estimativas dos modelos de distribuição marginal no período de 2020-2022.

	Brasil	Índia	México	China	USA	GB	Alemanha	Japão	Brent
Média									
μ	-0.0008 (0.00) [0.320]	0.0009 (0.00) [0.049]	0.0001 (0.00) [0.800]	0.0003* (0.00) [0.531]	0.0006* (0.00) [0.052]	0.0000 (0.00) [0.935]	0.0006 (0.00) [0.243]	0.0001 (0.00) [0.843]	0.0010 (0.00) [0.289]
ϕ_1	-0.048 (0.00) [0.337]	-	0.109* (0.05) [0.019]	-0.088* (0.04) [0.031]	-0.084 (0.05) [0.106]	-	-	-	-
δ_1	-	-	-	-	-	-0.071* (0.05) [0.124]	-	-	-
Variância									
α_0	0.556* (0.21) [0.008]	0.100* (0.05) [0.049]	0.056 (0.06) [0.331]	0.132 (0.19) [0.489]	0.055* (0.02) [0.019]	0.028* (0.02) [0.225]	0.092* (0.04) [0.012]	0.122* (0.06) [0.048]	0.413* (0.16) [0.010]
α_1	0.142* (0.06) [0.028]	-0.006 (0.04) [0.868]	0.024 (0.03) [0.416]	0.082* (0.04) [0.056]	0.105* (0.05) [0.052]	0.047 (0.04) [0.281]	0.104* (0.04) [0.011]	0.007 (0.04) [0.849]	0.038 (0.05) [0.439]
β_1	0.695 (0.08) [0.000]	0.860* (0.06) [0.000]	0.897* (0.06) [0.000]	0.831* (0.16) [0.000]	0.702* (0.08) [0.000]	0.894* (0.05) [0.000]	0.810* (0.04) [0.000]	0.771* (0.10) [0.000]	0.813* (0.06) [0.000]
γ	0.108 (0.07) [0.148]	0.148* (0.06) [0.000]	0.102* (0.06) [0.065]	0.049 (0.14) [0.716]	0.439* (0.21) [0.037]	0.106* (0.05) [0.027]	0.082* 0.06 [0.183]	0.225* (0.07) [0.003]	0.202* (0.08) [0.011]
λ	-0.157* (0.07) [0.035]	-0.141* (0.05) [0.011]	-0.198* (0.07) [0.008]	-0.066 (0.05) [0.159]	-0.277* (0.07) [0.000]	-0.207* (0.07) [0.005]	-0.295* (0.07) [0.000]	-0.047 (0.06) [0.430]	-0.199* (0.06) [0.018]
ν	10.511* (4.17) [0.012]	4.182* (0.92) [0.000]	11.231* (4.92) [0.023]	3.661* (0.78) [0.000]	5.266* (1.21) [0.000]	4.293* (0.84) [0.000]	5.572* (1.41) [0.000]	9.588* (3.37) [0.005]	4.020* (0.72) [0.000]
LM	1292.8	1650.8	1510.2	1592.4	1709.8	1627.8	1576.5	1670.7	1183.9
BP	12.109 [0.881]	12.252 [0.907]	16.505 [0.623]	19.024 [0.455]	24.133 [0.191]	20.929 [0.283]	19.426 [0.494]	12.603 [0.320]	15.679 [0.736]
ARCH-LM	0.469 [0.977]	1.242 [0.227]	0.805 [0.709]	0.339 [0.997]	0.329 [0.998]	1.120 [0.324]	0.190 [0.999]	1.018 [0.439]	0.394 [0.992]
$\chi^2(3)$	[0.264]	[0.376]	[0.728]	[0.494]	[0.949]	[0.651]	[0.284]	[0.788]	[0.818]

Fonte: O autor, 2024.

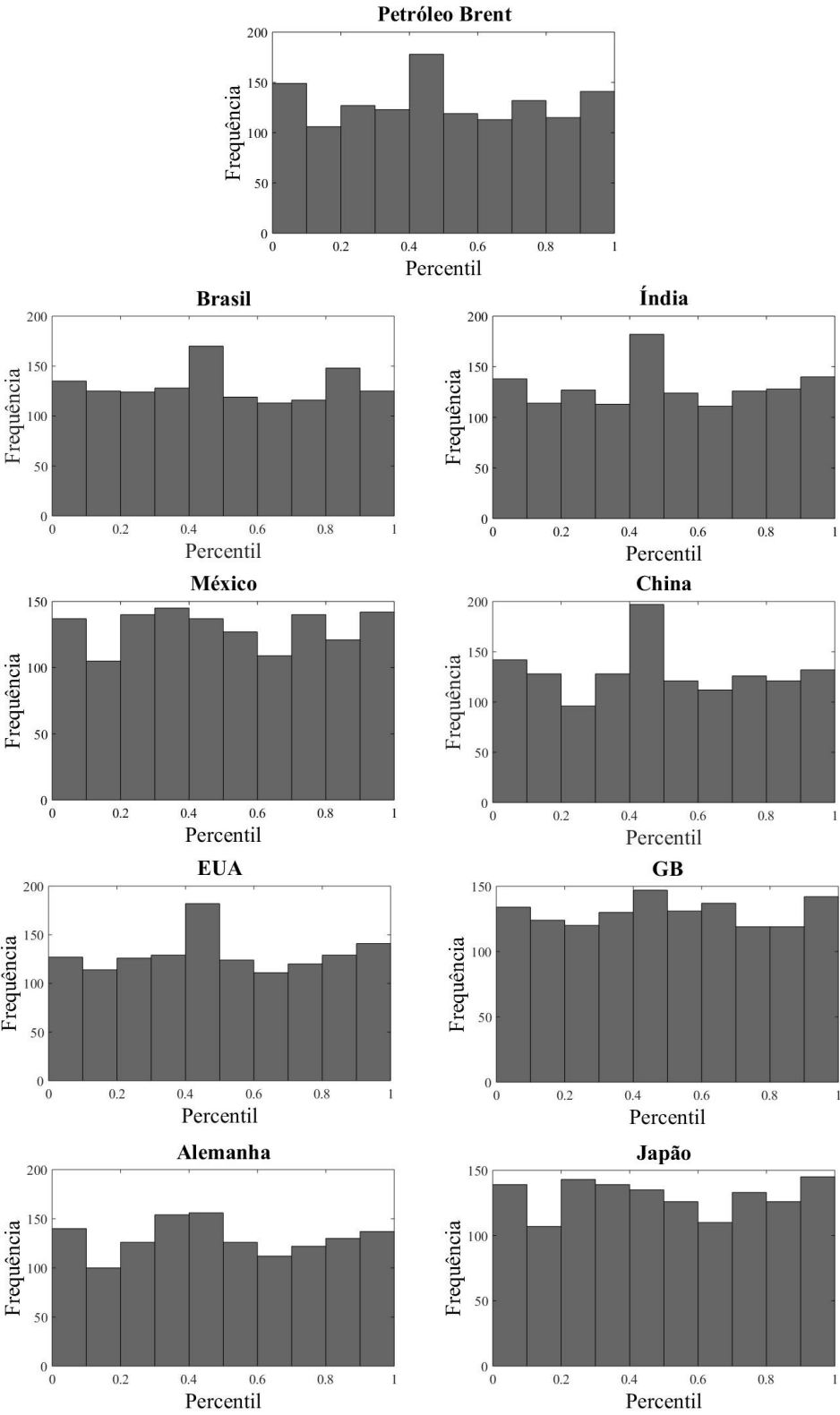
Nota: * indica significância até 10%.

LM é o valor do log da verossimilhança, BP é a estatística Box-Pierce para correlação serial no modelo residual com 20 defasagens, respectivamente, ARCH-LM é o teste LM (Método de Lagrange) de Engle para o efeito ARCH em resíduos até a 20ª ordem e χ^2 é o teste de *goodness-of-fit* qui-quadrado de Pearson Ajustado para a subamostra de 2020-2021 (3).

Erro padrão em () e P-Valor em [].

ANEXO F – Transformação quantílica

Figura 8 – Histogramas dos quantis dos resíduos padronizados dos retornos do petróleo e dos índices de mercado.



Fonte: O autor, 2024.

ANEXO G – Cópulas estáticas e dinâmicas para a amostra geral

Tabela 15 – Estimativas da cópula estática para os retornos do petróleo e das ações no período de 2017-2022.

	Brasil	Índia	México	China	EUA	GB	Alemanha	Japão
Gaussiana								
$\square$	0.1793* (0.03) [0.000]	0.0985* (0.03) [0.000]	0.2145* (0.03) [0.000]	0.1255* (0.03) [0.000]	0.1965* (0.03) [0.000]	0.2239* (0.03) [0.000]	0.1882* (0.03) [0.000]	0.2133* (0.03) [0.000]
AIC	-40.3	-10.6	-59.1	-18.4	-48.5	-64.5	-44.3	-58.8
<i>t</i> -Student								
ρ	0.1788* (0.03) [0.000]	0.0970* (0.03) [0.000]	0.2117* (0.03) [0.000]	0.1229* (0.03) [0.000]	0.1946* (0.03) [0.000]	0.2168* (0.03) [0.000]	0.1875* (0.03) [0.000]	0.2106* (0.03) [0.000]
AIC	-39.4	-8.8	-59.1	-19.4	-64.4	-74.6	-56.2	-58.9
Gumbel								
$\square$	1.1073* (0.02) [0.000]	1.0460* (0.02) [0.000]	1.1249* (0.02) [0.000]	1.0654* (0.02) [0.000]	1.1316* (0.02) [0.000]	1.1439* (0.02) [0.000]	1.1129* (0.02) [0.000]	1.1251* (0.02) [0.000]
AIC	-31.5	-4.8	-39.8	-12.9	-45.2	-53.8	-31.9	-40.2
Clayton								
θ	0.2544* (0.04) [0.000]	0.1178* (0.03) [0.000]	0.3011* (0.04) [0.000]	0.1546* (0.03) [0.000]	0.2793* (0.04) [0.000]	0.3064* (0.04) [0.000]	0.2594* (0.04) [0.000]	0.3011* (0.04) [0.000]
AIC	-35.0	-14.8	-60.2	-24.8	-49.9	-68.7	-61.7	-60.1

Fonte: O autor, 2024.

Nota: * indica significância até 10%.

Erro padrão em () e P-Valor em [].

Tabela 16 – Estimativas da cópula dinâmica para os retornos do petróleo e das ações no período de 2017-2022.

	Brasil	Índia	México	China	USA	GB	Alemanha	Japão
DCC-Gaussiana								
ω_{ρ_1}	0.0444 (0.14) [0.758]	0.0119 (0.16) [0.939]	0.4697 (0.33) [0.152]	0.1947 (0.23) [0.407]	-0.0637* (0.02) [0.012]	0.0307 (0.07) [0.653]	0.0247 (0.12) [0.831]	0.4702 (0.33) [0.155]
β_{ρ_1}	0.1937 (0.16) [0.226]	-0.2198* (0.13) [0.091]	-0.8832* (0.16) [0.000]	-1.0376* (0.17) [0.000]	1.8292* (0.09) [0.000]	1.3994* (0.51) [0.005]	0.6179 (1.13) [0.586]	-0.8837 (1.58) [0.575]
α_{ρ_1}	0.4264 (0.37) [0.261]	0.3279 (0.29) [0.262]	0.2316 (0.26) [0.372]	0.2909 (0.29) [0.328]	0.1592* (0.05) [0.003]	0.1658 (0.12) [0.168]	0.3555 (0.29) [0.232]	0.2244 (0.26) [0.385]
AIC	-42.2	-8.6	-56.0	-15.6	-64.4	-66.1	-45.9	-55.7
DCC- <i>t</i> -Student								
ω_{ρ_1}	0.0501 (0.10) [0.627]	0.0256 (0.13) [0.845]	0.4959* (0.23) [0.030]	0.1588 (0.29) [0.596]	-0.0484* (0.02) [0.021]	0.0458 (0.11) [0.673]	0.0865 (0.13) [0.512]	0.4919* (0.23) [0.034]
β_{ρ_1}	0.6759* (0.17) [0.000]	-0.3479* (0.12) [0.004]	-1.1459 (0.95) [0.227]	0.0248 (2.65) [0.992]	1.8259* (0.09) [0.000]	1.4300* (0.80) [0.075]	0.5870* (0.19) [0.002]	-1.1377 (0.97) [0.241]
α_{ρ_1}	0.3299 (0.26) [0.205]	0.3750 (0.28) [0.174]	0.3013 (0.23) [0.192]	0.1742 (0.24) [0.468]	0.1571 (0.05) [0.003]	0.1463 (0.13) [0.260]	0.3105 (0.26) [0.240]	0.2978 (0.24) [0.207]
AIC	-40.0	-4.1	-53.2	-15.4	-79.1	-74.3	-56.1	-52.9
DCC-Gumbel								
$\tilde{\omega}_{\theta_1}$	1.6498 (1.45) [0.254]	-1.3437 (0.94) [0.154]	1.9952* (0.34) [0.000]	1.2652 (3.56) [0.722]	0.2118 (0.89) [0.812]	1.4209* (0.75) [0.059]	-0.3271 (1.19) [0.784]	1.9933* (0.34) [0.000]
$\tilde{\beta}_{\theta_1}$	-1.1146 (1.32) [0.399]	1.5324* (0.83) [0.066]	-1.3087 (0.28) [0.000]	-0.8462 (3.27) [0.796]	0.2713 (0.71) [0.704]	-0.7415 (0.63) [0.241]	0.6683 (0.99) [0.503]	-1.3074* (0.28) [0.000]
$\tilde{\alpha}_{\theta_1}$	-0.4690 (0.48) [0.328]	-0.1595 (0.28) [0.577]	-0.8339 (0.52) [0.110]	-0.4284 (0.64) [0.504]	-0.6518 (0.45) [0.145]	-0.8724* (0.43) [0.042]	-0.3548 (0.41) [0.384]	-0.8259 (0.52) [0.111]
AIC	-27.0	-1.3	-36.4	-9.0	-45.4	-53.5	-29.3	-36.8
DCC-Clayton								
$\tilde{\omega}_{\theta_1}$	0.1078 (1.42) [0.939]	0.5378 (1.55) [0.729]	2.7823* (0.97) [0.004]	2.3398 (1.53) [0.127]	1.1679 (1.82) [0.522]	2.0960 (1.29) [0.105]	1.7200 (3.22) [0.594]	2.7638* (0.97) [0.004]
$\tilde{\beta}_{\theta_1}$	-5.7175* (1.96) [0.004]	-7.3727* (3.45) [0.033]	-4.7492* (0.42) [0.000]	-5.9048* (1.52) [0.000]	-0.1162 (2.82) [0.967]	-3.5913* (1.47) [0.015]	-1.8329 (5.44) [0.736]	-4.7485* (0.42) [0.000]
$\tilde{\alpha}_{\theta_1}$	-1.4322 (4.45) [0.748]	-5.0839 (5.88) [0.387]	-9.1109* (3.38) [0.007]	-10.0000* (5.55) [0.071]	-8.2110* (4.42) [0.063]	-6.9315* (3.85) [0.072]	-7.9363 (6.60) [0.229]	-9.0265* (3.35) [0.007]
AIC	-33.8	-11.8	-63.0	-26.4	-56.6	-68.9	-63.9	-62.9

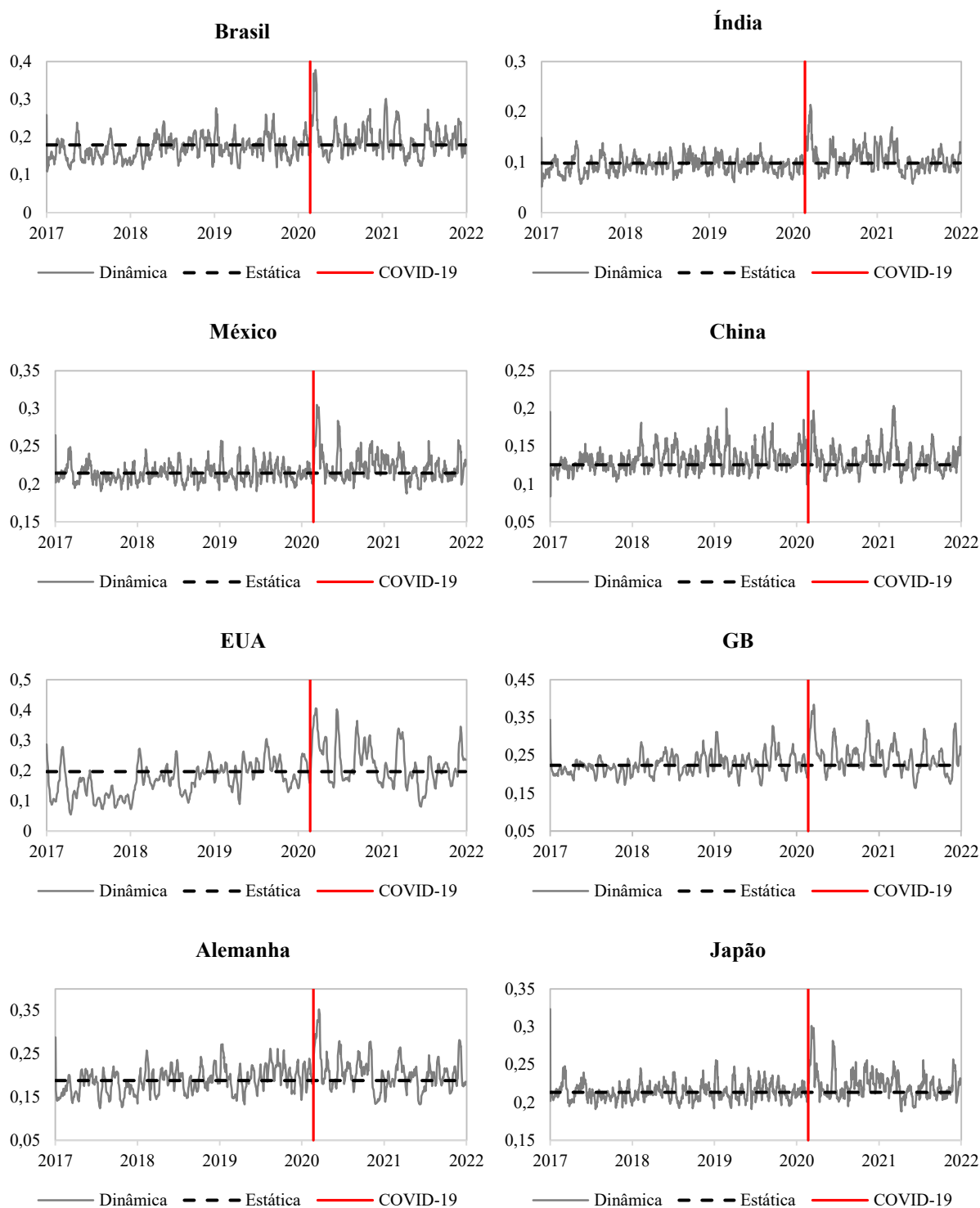
Fonte: O autor, 2024.

Nota: * indica significância até 10%.

AIC é o critério de informação Akaike e DCC é o parâmetro variável no tempo (q foi definido como 10).Erro padrão em () e p -valor em [].

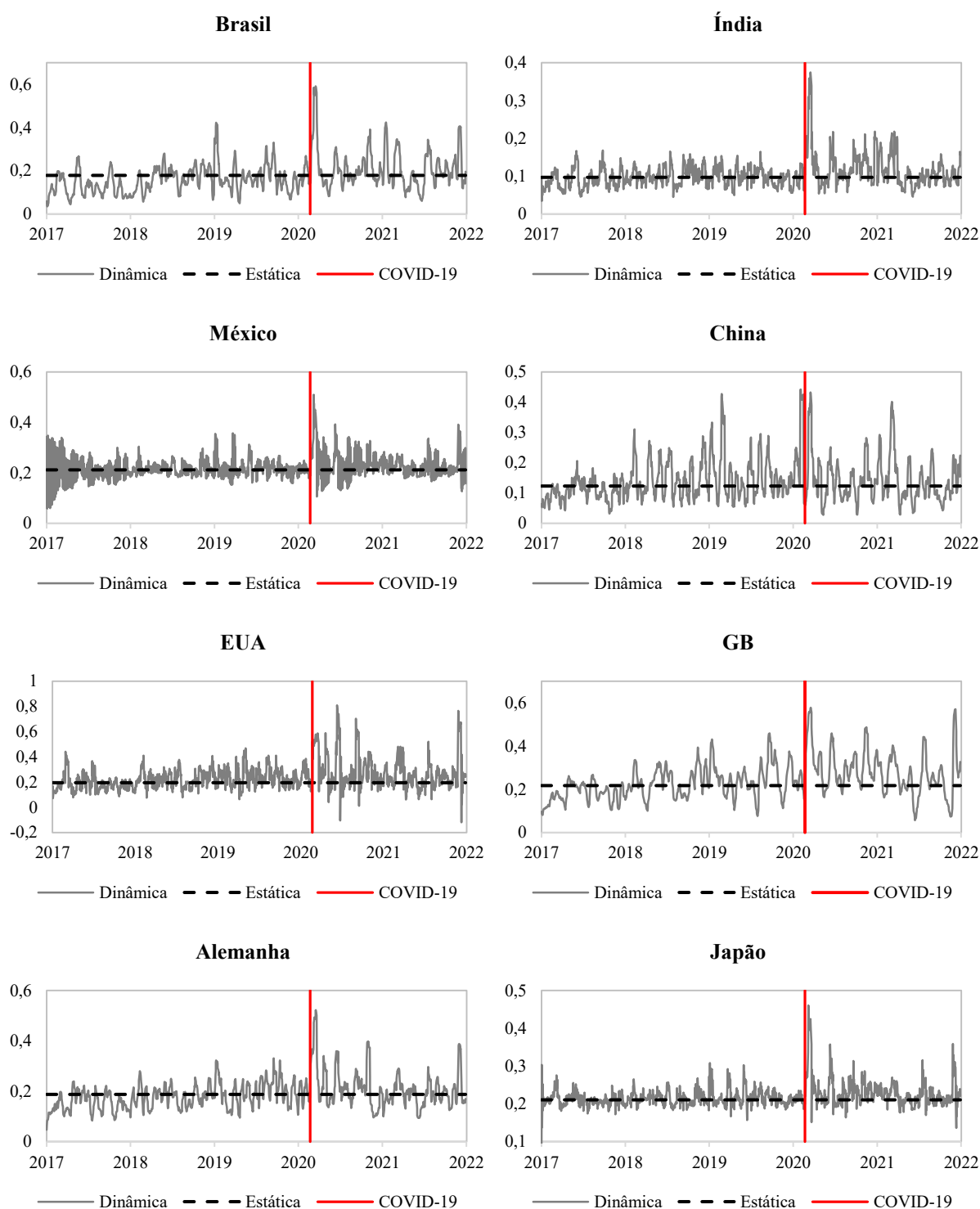
ANEXO H – Gráficos das cópulas estáticas e dinâmicas para a amostra geral

Figura 9 – Evolução do coeficiente de correlação linear das cópulas Gaussianas estáticas e dinâmicas.



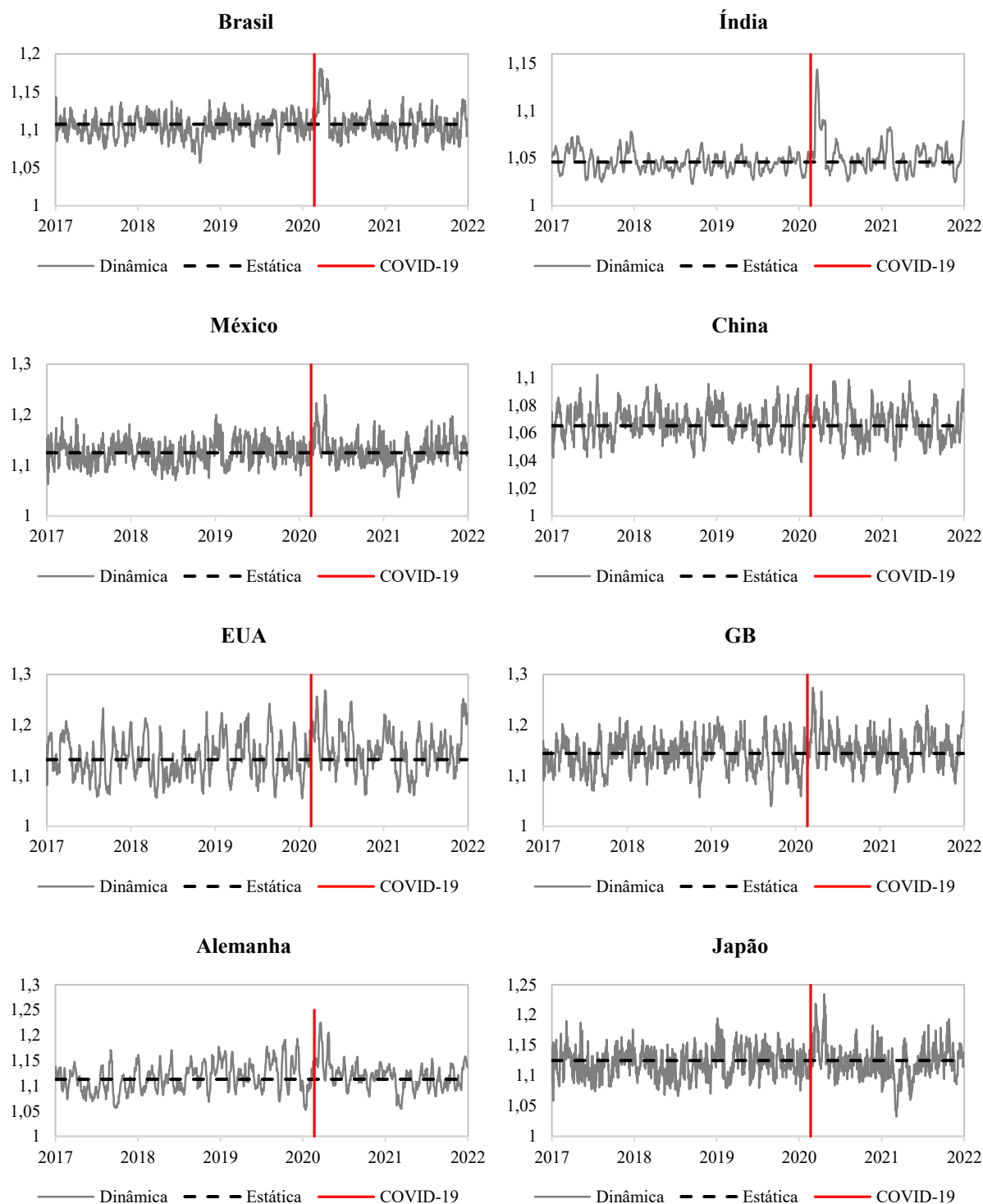
Fonte: O autor, 2024.

Figura 10 – Evolução do coeficiente de correlação das cópulas t -Student estáticas e dinâmicas.



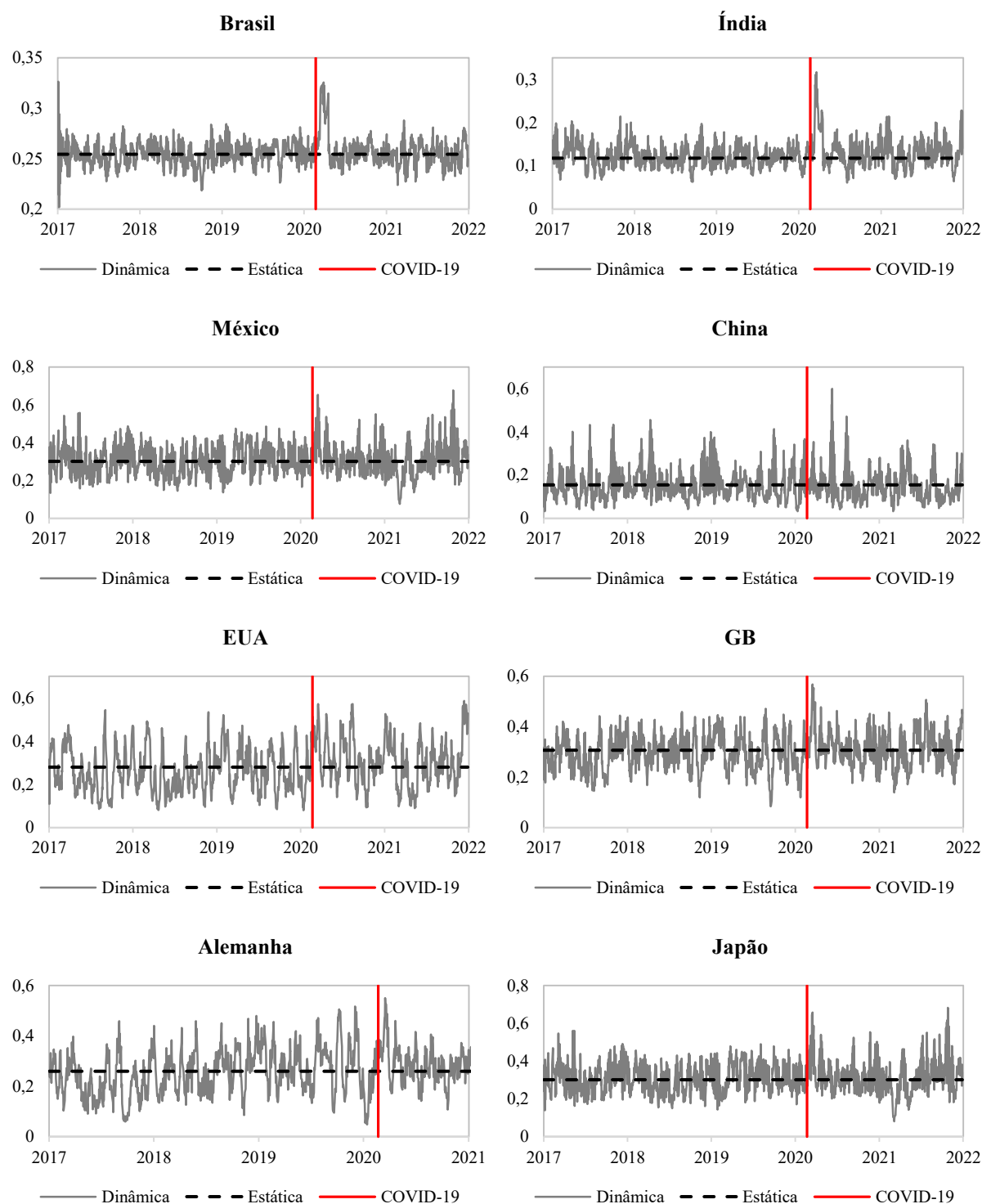
Fonte: O autor, 2024.

Figura 11 – Evolução do coeficiente de correlação das cópulas de Gumbel estáticas e dinâmicas.



Fonte: O autor, 2024.

Figura 12 – Evolução do coeficiente de correlação das cópulas de Clayton estáticas e dinâmicas.



Fonte: O autor, 2024.

ANEXO I – Algoritmo Expectativa-Maximização

Considerando o modelo geral MS, descrito na Seção 7.1, seja $\tilde{\theta} = (\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_r, \tilde{P})$ o vetor de parâmetros. Então, de acordo com Rémillard (2013), para a Etapa-E é calculado:

$$\begin{aligned} Q_x(\tilde{\theta}, \theta) &= \mathbb{E}_\theta \{ \log f_{\tilde{\theta}}(\varphi, X) | X = x \} \\ &= \sum_{t=1}^n \sum_{j \in S} \sum_{k \in S} \mathbb{P}_\theta(\tau_{t-1} = j, \varphi_t = k | X = x) \log \tilde{P}_{jk} + \\ &\quad \sum_{t=1}^n \sum_{j \in S} \mathbb{P}_\theta(\varphi_t = j | X = x) \log g(x_t; \tilde{\beta}_j) \\ &= \sum_{t=1}^n \sum_{j \in S} \sum_{k \in S} \Lambda_{\theta,t}(j, k) \log \tilde{P}_{jk} + \sum_{t=1}^n \sum_{j \in S} \lambda_{\theta,t}(j) \log g(x_t; \tilde{\beta}_j), \end{aligned}$$

onde:

- a) $\lambda_{\theta,t}(j) = \mathbb{P}(\varphi_t = j | X = x), \quad \forall t \in \{1, \dots, n\} \text{ e } j \in R,$
- b) $\Lambda_{\theta,t}(j, k) = \mathbb{P}(\varphi_{t-1} = j, \varphi_t = k | X = x), \quad \forall t \in \{1, \dots, n\} \text{ e } j, k \in R.$

Em seguida, para todos $j \in S$, $\bar{\eta}_{\theta,n}(j) = \frac{1}{r}$ e $\bar{\eta}_{\theta,0}(j) = \frac{1}{r}$, temos:

$$\bar{\eta}_{\theta,t}(j) = \mathbb{P}(\varphi_t = j | x_{t+1}, \dots, x_n), \quad t = 1, \dots, n-1,$$

$$\eta_{\theta,t}(j) = \mathbb{P}(\varphi_t = j | x_1, \dots, x_t), \quad t = 1, \dots, n.$$

Segue-se que para $t = 1, \dots, n$:

$$\eta_t(j) = \frac{g(x_t; \beta_j)}{Z_{t|t-1}} \sum_{i=1}^r \eta_{t-1}(i) P_{ij},$$

onde $Z_{t|t-1} = \sum_{j=1}^r g(x_t; \beta_j) \sum_{i=1}^r \eta_{t-1}(i) P_{ij}$.

A seguir, para todos $i \in \{1, \dots, r\}$ e $t = 1, \dots, n-1$:

$$\bar{\eta}_{\theta,t}(i) = \frac{\sum_{z=1}^r \bar{\eta}_{\theta,t+1}(z) P_{iz} g(x_{t+1}; \beta_z)}{\sum_{k=1}^r \sum_{z=1}^r \bar{\eta}_{\theta,t+1}(z) P_{k\beta} g(x_{t+1}; \beta_z)},$$

$$\lambda_{\theta,t}(i) = \frac{\eta_{\theta,t}(i) \bar{\eta}_{\theta,t}(i)}{\sum_{k=1}^r \eta_{\theta,t}(k) \bar{\eta}_{\theta,t}(k)}.$$

Assim, para todo $i, j \in \{1, \dots, r\}$ e $t = 1, \dots, n$

$$\Lambda_{\theta,t}(i, j) = \frac{P_{ij} \eta_{\theta,t-1}(i) \bar{\eta}_{\theta,t}(j) g(x_t; \beta_j)}{\sum_{k=1}^r \sum_{z=1}^r P_{kz} \eta_{\theta,t-1}(k) \bar{\eta}_{\theta,t}(z) g(x_t; \beta_z)}.$$

Como resultado, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$ e $t = 1, \dots, n$, temos:

$$\sum_{j=1}^r \Lambda_{\theta,t}(i, j) = \lambda_{\theta,t-1}(i).$$

Na para a Etapa-M, é calculado:

$$\theta^{(k+1)} = \arg \max_{\theta} Q_x(\theta, \theta^{(k)}).$$

À medida que $k \rightarrow \infty$, o coeficiente $\theta^{(k)}$ converge para o estimador de máxima verossimilhança da densidade de $\mathbf{X}$. Considerando:

$$\lambda_t^{(k)}(i) = \lambda_{\theta^{(k)},t}(i),$$

$$\Lambda_t^{(k)}(i, j) = \Lambda_{\theta^{(k)},t}(i, j).$$

Segue da “Etapa-E” que:

$$\theta^{(k+1)} = \arg \max_{\theta} \sum_{t=1}^n \sum_{i,j \in S} \Lambda_t^{(k)}(i, j) \log P_{ij} + \sum_{t=1}^n \sum_{i \in S} \lambda_t^{(k)}(i) \log g(x_t; \beta_i).$$

Usando multiplicadores de Lagrange, a função a maximizar é:

$$h(\theta, \psi) = \sum_{t=1}^n \sum_{i,j \in S} \Lambda_t^{(k)}(i, j) \log P_{ij} + \sum_{t=1}^n \sum_{i \in S} \lambda_t^{(k)}(i) \log g(x_t; \beta_i) + \sum_{i=1}^r \psi_i (1 - \sum_{j=1}^r P_{ij}),$$

onde $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_r)$.

Para $i, j \in S$ temos:

$$\frac{\partial h}{\partial P_{ij}} = \sum_{t=1}^n \Lambda_t^{(k)}(i, j) \frac{1}{P_{ij}} - \psi_i.$$

Como resultado, para qualquer $i, j \in S$, a derivada parcial de h com respeito a P_{ij} é zero se e somente se:

$$\psi_i P_{ij} = \sum_{t=1}^n \Lambda_t^{(k)}(i, j).$$

A soma de j rende:

$$\psi_i = \sum_{j=1}^r \psi_i P_{ij} = \sum_{j=1}^r \sum_{t=1}^n \Lambda_t^{(k)}(i, j) = \sum_{t=1}^n \lambda_{t-1}^{(k)}(i) = \sum_{t=1}^n \lambda_{\theta^{(k)}, t-1}(i).$$

Por isso:

$$P_{ij}^{(k+1)} = \frac{\sum_{t=1}^n \Lambda_t^{(k)}(i, j)}{\sum_{t=1}^n \lambda_{t-1}^{(k)}(i)}.$$

ANEXO J – Algoritmo para o método *bootstrap* paramétrico

Para um dado número de regimes r , obtemos o estimador θ de θ_n através do algoritmo EM, descrito na Seção 7.3, aplicado às pseudo-observações $\mathbf{u}_{n,t}$, com $t \in \{1, \dots, n\}$. A partir daí, calcula-se a estatística $S_n = \mathcal{S}_n(\mathbf{V}_{n,1}, \dots, \mathbf{V}_{n,n})$, usando as pseudo-observações $\mathbf{V}_{n,t} = \mathfrak{R}_t(\mathbf{u}_{n,t}, \theta_n)$, com $t \in \{1, \dots, n\}$. Assim, para $k = 1, \dots, B$, com B grande o suficiente, segue-se os seguintes passos:

- (Passo 1) Gerar uma amostra aleatória $\mathbf{U}_1^*, \dots, \mathbf{U}_n^*$ da distribuição $\mathbf{P}_{\theta_n}$ de um modelo de cópula de mudança de regime com parâmetro θ_n ;
- (Passo 2) Obter o estimador θ_n^* de $\mathbf{U}_1^*, \dots, \mathbf{U}_n^*$;
- (Passo 3) Calcular as classificações normalizadas $\mathbf{u}_{n,1}^*, \dots, \mathbf{u}_{n,n}^*$ de $\mathbf{U}_1^*, \dots, \mathbf{U}_n^*$;
- (Passo 4) Calcular as pseudo-observações $\mathbf{V}_{n,t}^* = \mathfrak{R}_t(\mathbf{u}_{n,1}^*, \theta_n^*)$, $t \in \{1, \dots, n\}$; e,
- (Passo 5) Calcular $S_n^{(k)} = \mathcal{S}_n(\mathbf{V}_{n,1}^*, \dots, \mathbf{V}_{n,n}^*)$.

ANEXO K – Cópulas de mudança de regime de Markov com três regimes

Tabela 17 – Estimativas das MS-cópulas com três regimes.

	Gaussiana			<i>t</i> -Student			Gumbel			Clayton		
	R1	R2	R3	R1	R2	R3	R1	R2	R3	R1	R2	R3
Brasil	0.148* (0.021) [0.000]	0.167* (0.023) [0.000]	0.220* (0.027) [0.000]	0.111* (0.021) [0.000]	0.125* (0.025) [0.000]	0.887* (0.030) [0.000]	1.019* (0.018) [0.000]	1.021* (0.020) [0.000]	1.951* (0.028) [0.000]	0.073* (0.021) [0.001]	0.100* (0.024) [0.000]	0.529* (0.027) [0.000]
	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33	0.48 0.47 0.37	0.46 0.46 0.36	0.06 0.07 0.27	0.46 0.45 0.24	0.44 0.44 0.24	0.10 0.10 0.52	0.35 0.34 0.32	0.34 0.34 0.32	0.31 0.32 0.36
GoF		60.0			66.4			13.6			35.2	
Índia	0.097* (0.021) [0.000]	0.097* (0.023) [0.000]	0.097* (0.027) [0.000]	0.096* (0.020) [0.000]	0.096* (0.023) [0.000]	0.096* (0.029) [0.001]	1.042* (0.021) [0.000]	1.042* (0.025) [0.000]	1.042* (0.028) [0.000]	0.122* (0.020) [0.000]	0.123* (0.024) [0.000]	0.123* (0.026) [0.000]
	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33
GoF		25.2			38.0			34.8			38.8	
México	0.059* (0.020) [0.003]	0.066* (0.024) [0.006]	0.595* (0.030) [0.000]	0.172* (0.021) [0.000]	0.190* (0.023) [0.000]	0.269* (0.027) [0.000]	1.028* (0.021) [0.000]	1.033* (0.024) [0.000]	1.741* (0.029) [0.000]	0.0004 (0.019) [0.996]	0.296* (0.024) [0.000]	0.592* (0.029) [0.000]
	0.46 0.45 0.16	0.42 0.42 0.17	0.12 0.13 0.67	0.34 0.34 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.34 0.34	0.47 0.46 0.19	0.43 0.43 0.20	0.10 0.11 0.61	0.42 0.33 0.27	0.32 0.33 0.32	0.26 0.34 0.41
GoF		12.8			29.2			0.4			63.6	
China	0.123* (0.025) [0.000]	0.123* (0.026) [0.000]	0.124* (0.031) [0.000]	0.121* (0.022) [0.000]	0.121* (0.025) [0.000]	0.121* (0.032) [0.000]	1.061* (0.025) [0.000]	1.061* (0.036) [0.000]	1.062* (0.047) [0.000]	0.159* (0.022) [0.000]	0.159* (0.026) [0.000]	0.159* (0.029) [0.000]
	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33
GoF		4.4			4.8			0.4			67.6	
EUA	-0.202* (0.021) [0.000]	0.386* (0.023) [0.000]	0.552* (0.031) [0.000]	0.133* (0.021) [0.000]	0.177* (0.022) [0.000]	0.269* (0.029) [0.000]	1.000* (0.022) [0.000]	1.003* (0.023) [0.000]	1.654* (0.030) [0.000]	0.000 (0.021) [0.999]	0.225* (0.023) [0.000]	0.671* (0.027) [0.000]
	0.59 0.63 0.04	0.39 0.30 0.05	0.02 0.07 0.91	0.34 0.34 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.34 0.34	0.42 0.42 0.22	0.40 0.40 0.21	0.18 0.18 0.57	0.53 0.36 0.24	0.28 0.30 0.29	0.19 0.34 0.47
GoF		17.6			28.8			6.8			9.6	
GB	0.076* (0.013) [0.000]	0.086* (0.024) [0.000]	0.737* (0.030) [0.000]	-0.050* (0.021) [0.017]	0.234* (0.025) [0.000]	0.768* (0.042) [0.000]	1.006* (0.017) [0.000]	1.009* (0.023) [0.000]	1.844* (0.028) [0.000]	0.019 (0.021) [0.376]	0.246* (0.023) [0.000]	1.303* (0.028) [0.000]
	0.56 0.41 0.13	0.36 0.45 0.31	0.08 0.14 0.56	0.46 0.46 0.18	0.44 0.44 0.20	0.10 0.10 0.62	0.44 0.44 0.18	0.43 0.42 0.18	0.13 0.14 0.64	0.53 0.42 0.15	0.39 0.41 0.28	0.08 0.17 0.57
GoF		5.2			39.3			25.6			29.6	
Alemanha	0.347* (0.022) [0.000]	-0.348* (0.025) [0.000]	0.354* (0.029) [0.000]	-0.065* (0.022) [0.003]	-0.115* (0.023) [0.000]	0.568* (0.035) [0.000]	1.000* (0.021) [0.000]	1.005* (0.024) [0.000]	2.123* (0.032) [0.000]	0.000 (0.023) [0.999]	0.237* (0.024) [0.000]	0.843* (0.029) [0.000]
	0.35 0.38 0.15	0.42 0.52 0.09	0.23 0.10 0.76	0.37 0.37 0.26	0.31 0.34 0.22	0.32 0.29 0.52	0.44 0.43 0.26	0.43 0.43 0.25	0.13 0.14 0.49	0.57 0.37 0.19	0.31 0.33 0.27	0.12 0.30 0.54
GoF		0.4			27.2			0.4			3.2	
Japão	0.074* (0.020) [0.000]	0.074* (0.024) [0.002]	0.074* (0.030) [0.014]	0.073* (0.021) [0.000]	0.074* (0.023) [0.001]	0.074* (0.027) [0.006]	1.031* (0.021) [0.000]	1.031* (0.024) [0.000]	1.031* (0.029) [0.000]	0.093* (0.022) [0.000]	0.093* (0.024) [0.000]	0.093* (0.029) [0.001]
	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33	0.33 0.33 0.33
GoF		8.8			27.6			6.0			31.2	

Fonte: O autor, 2024.

Nota: * indica significância até 10%.

R1 é o regime 1 (regime de baixa volatilidade).

R2 é o regime 2 (regime de média volatilidade).

R3 é o regime 3 (regime de alta volatilidade).

GoF é o *p*-valor para *Goodness-of-Fit* baseado na estatística de Cramér-von Mises em porcentagem.Desvio padrão em (), *p*-valor em [], matriz de transição em | | e valor máximo de GoF em negrito.

Quadro 11 – Melhores funções de cópula MS com três regimes.

Cópula	Família	Modelo de Mudança de Regime			p_{11} (%)	p_{22} (%)	p_{33} (%)	GoF (%)	Δ (%)
		R1	R2	R3					
Brasil	<i>t</i> -Student	0.1110*	0.1251*	0.8870*	48	46	27	66.4	699.1
Índia	Clayton	0.1227*	0.1227*	0.1227*	33	33	33	38.8	0.0
México	Clayton	0.0004	0.2957*	0.5922*	42	33	41	63.6	84471.4
China	Clayton	0.1597*	0.1598*	0.1598*	33	33	33	67.6	0.0
EUA	<i>t</i> -Student	0.1332*	0.1769*	0.2699*	34	33	34	28.8	102.2
GB	<i>t</i> -Student	-0.0503*	0.2335*	0.7685*	46	44	62	39.3	1436.0
Alemanha	<i>t</i> -Student	-0.0648*	-0.1147*	0.5684*	37	34	52	27.2	773.8
Japão	Clayton	0.0926*	0.0926*	0.0926*	33	33	33	31.2	0.0

Fonte: O autor, 2024.

Nota: * indica significância até 10%.

R1 é o regime 1 (regime de baixa volatilidade).

R2 é o regime 2 (regime de média volatilidade).

R3 é o regime 3 (regime de alta volatilidade).

p_{11} é a probabilidade média do regime 1.

p_{22} é a probabilidade média do regime 2.

p_{33} é a probabilidade média do regime 3.

GoF é o *p*-valor para *Goodness-of-Fit* baseado na estatística de Cramér-von Mises.

Δ é a variação do coeficiente de correlação do regime 1 para o regime 3.