Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Educação e Humanidades
Faculdade de Formação de Professores

Rinaldo Inácio da Silva Junior

O jogo da senha numérica: uma proposta para o ensino dos princípios multiplicativo e aditivo baseada na teoria dos registros de representação semiótica

São Gonçalo
2024

Rinaldo Inácio da Silva Junior

O jogo da senha numérica: uma proposta para o ensino dos princípios multiplicativo e aditivo baseada na teoria dos registros de representação semiótica

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Matemática na Educação Básica.

Orientadora: Prof.ª Dra. Daniela Mendes Vieira da Silva
Coorientadora: Prof.ª Dra. Fabiana Chagas de Andrade

São Gonçalo
2024

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/REDE SIRIUS/BIBLIOTECA CEH/D

S586 TESE
Silva Junior, Rinaldo Inácio da.
O jogo da senha numérica: uma proposta para o ensino dos princípios multiplicativo e aditivo baseada na teoria dos registros de representação semiótica / Rinaldo Inácio da Silva Junior. – 2024.
88f. : il.

Orientadora: Prof.ª Dra. Daniela Mendes Vieira da Silva.
Coorientadora: Prof.ª Dra. Fabiana Chagas de Andrade.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Formação de Professores.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Jogos no ensino de matemática – Teses. I. Silva, Daniela Mendes Vieira da. II. Andrade, Fabiana Chagas de. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Faculdade de Formação de Professores. IV. Título.

CRB7 – 6150 CDU 51-8

Assinatura Data

Rinaldo Inácio da Silva Junior

O jogo da senha numérica: uma proposta para o ensino dos princípios multiplicativo e aditivo baseada na teoria dos registros de representação semiótica

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Matemática na Educação Básica.

Aprovada em 06 de agosto de 2024.

Banca Examinadora:

Prof.ª Dra. Daniela Mendes Vieira da Silva (Orientadora)
Faculdade de Formação de Professores – UERJ

Prof.ª Dra. Fabiana Chagas de Andrade (Coorientadora)
Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca

Prof.ª Dra. Marcele Câmara de Souza
Faculdade de Formação de Professores – UERJ

Prof. Dr. Ion Moutinho Gonçalves
Universidade Federal Fluminense

São Gonçalo
2024

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a meus atuais e futuros alunos, bem como a todos os meus amigos de profissão, licenciados em matemática.

AGRADECIMENTOS

Eis que chegou o momento mais aguardado e delicado de toda a minha jornada acadêmica do mestrado do PROFMAT. Como sou grato por toda a experiência que adquiri nesta jornada.

Primeiramente, quero agradecer ao meu Pai Celestial, que me deu fé e saúde para conseguir seguir de pé até o final, mesmo com tantos percalços.

À minha esposa Aline, que esteve ao meu lado, aconselhou e me ajudou a ter mais tempo para me dedicar ao mestrado.

À professora Doutora Fabiana Andrade, por me conduzir na coorientação desse trabalho. Suas explicações maravilhosas de como fazer uma boa pesquisa e escrita me ajudaram muito.

À professora Doutora Daniela Mendes, por me conduzir na orientação desta pesquisa. Sua cordialidade em responder dúvidas da pesquisa, com respeito, paciência e delicadeza, revelaram sua excelência como professora e orientadora.

Aos queridos professores da Faculdade de Formação de Professores, as boas lembranças de suas aulas me trouxeram de volta. Vocês foram os melhores professores que eu poderia ter nessa jornada acadêmica. Um carinho especial pela professora Doutora Rosa García Márquez pelo carinho para comigo e pelas palavras de incentivo.

À minha maravilhosa turma do PROFMAT 2022. Nunca me esquecerei de vocês. Estudamos, lutamos, batalhamos e vencemos juntos. Amo vocês! A amizade de vocês foi muito importante para mim durante toda a jornada do curso.

Ao Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), pela oportunidade concedida.

À agência de fomento da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) - Brasil - Código de Financiamento 001, por ter financiado todo o meu curso.

A todos, mais uma vez, muito obrigado! Todos vocês fazem parte desse trabalho.

RESUMO

SILVA JUNIOR, Rinaldo Inácio da. *O jogo da senha numérica:* uma proposta para o ensino dos princípios multiplicativo e aditivo baseada na teoria dos registros de representação semiótica. 2024. 88f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2024.

Esta pesquisa buscou alinhar três perspectivas teóricas: jogos na Educação, o conceito de Investigação em Educação Matemática e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval como formas de contribuição para o ensino dos Princípios Multiplicativo e Aditivo do conteúdo de Análise Combinatória para turmas do 8° ano do Ensino Fundamental. Quanto à metodologia, a pesquisa é natureza qualitativa e do tipo descritiva, em que foi desenvolvida e construída uma versão do jogo *MasterMind*, também conhecido como Jogo da Senha Numérica, e uma atividade investigativa baseada no jogo, em busca de uma forma diferenciada para ensinar o conteúdo proposto. Como resultados, foi evidenciado que a aplicação do jogo alinhado à tarefa investigativa pode possibilitar ao aluno utilizar diferentes tipos de representações semióticas. Essas representações, que podem estar presentes no conteúdo de Análise Combinatória, sob a forma de tabelas, árvores de possibilidades e listagens ordenadas são recursos que permitem que o aluno compreenda melhor os conceitos e podem ser utilizadas no contexto da TRRS. Assim, podemos descrever as diferentes representações matemáticas que são meios de acessar os objetos matemáticos. A versão do jogo, o desenvolvimento da sequência investigativa e as diferentes representações de uma possível construção de senha podem abrir um caminho para os alunos explorarem os registros de representação, promovendo a construção do conceito dos Princípios Multiplicativo e Aditivo. A versão do Jogo da Senha mostrou-se um bom recurso didático que permite diferentes possibilidades para trabalhar o conteúdo. Essas estratégias evidenciaram um caminho possível de compreensão para os estudantes.

Palavras-chave: ensino de matemática; investigação matemática; princípio multiplicativo; teoria dos registros de representação semiótica.

ABSTRACT

SILVA JUNIOR, Rinaldo Inácio da. *The numerical password game:* a proposal for teaching the multiplicative and additive principle based on the theory of semiotic representation registers. 2024. 88f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2024.

This research sought to align three theoretical perspectives: games in Education, the concept of Research in Mathematics Education and Duval's Semiotic Representation Register Theory as forms of contribution to teaching the Multiplicative and Additive Principle of Combinatorial Analysis content for 8th grade classes. year of Elementary School. As for the methodology, the research is qualitative and descriptive in nature, in which a version of the MasterMind game, also known as the Numerical Password Game, and an investigative activity based on the game were developed and built, in search of a different way to teach proposed content. As a result, its development process was highlighted throughout the proposal, providing guidance for teachers who teach mathematics regarding the application of the game and the investigative task based on the game, in which the representation of data using tables, trees of possibilities and ordered lists, for example, they are resources that can make the student observe the statement of the question and, thus, choose a resolution method. These representations, that may be present in the combinatorial analysis content can be used in the context of TRRS. Thus, we can describe the different mathematical representations that are means of accessing mathematical objects. The game version, the development of the investigative sequence and the different representations of a possible password construction can open a way for students to explore the representation registers, promoting the construction of the concept of Multiplicative and Additive Principles. The Password Game version proved to be a good teaching resource that allows different possibilities for working on the content. These strategies highlighted a possible path to understanding for students.

Keywords: mathematics teaching; mathematical investigation; multiplicative principle; theory of registers of semiotic representation.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCN-EM	Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
TRRS	Teoria dos Registros de Representação Semiótica

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A experiência de onze anos lecionando matemática para turmas do Ensino Fundamental II, no município de Maricá, e turmas do Ensino Médio, na rede estadual do Rio de Janeiro, apresentou-me uma realidade nas salas de aulas: os alunos enxergam a matemática como algo bem difícil de compreender. Especificamente, o conteúdo de Análise Combinatória, que, durante a minha caminhada como professor de Matemática, lecionei para turmas do 3º ano do Ensino Médio.

Desse modo, tive a primeira experiência com o conteúdo de Princípio Multiplicativo e percebi que, por parte dos alunos, existia muita dificuldade para resolver situações problema com relação à aplicação do conceito. As evidências de sala de aula indicavam que o raciocínio e o pensamento sem o uso de algo lúdico e concreto era desafiador e desgastante, que só a explicação teórica no quadro não favorecia a aprendizagem dos alunos. A situação também revelou a dificuldade em conceitos de matemática básica do Ensino Fundamental, parecendo agravar a dificuldade de aprender o conteúdo.

No ano de 2022, na rede estadual, fiquei responsável por turmas do 1º ano do Ensino Médio. Nesse período, perdi o contato com o conteúdo do Princípio Multiplicativo, já que este tópico, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), não é trabalhado nesse ano de escolaridade. Porém o conteúdo e o seu processo de ensino e aprendizagem continuaram a ser uma questão de reflexão em minha prática docente.

Na prefeitura de Maricá, lecionei para turmas do 8º ano do Ensino Fundamental, nas quais o conteúdo de Princípio Multiplicativo estava presente no referencial curricular do Regimento Escolar da Rede Pública Municipal de Ensino de Maricá (SEMED, 2012). Assim, encontrei uma oportunidade para iniciar uma investigação sobre o assunto. A experiência de lecionar tal conteúdo para essas turmas mostrou a dificuldade dos alunos e a oportunidade de aprofundar meus conhecimentos ao melhorar a minha formação no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Com isso, houve a ideia de ensinar o Princípio Multiplicativo de forma lúdica aos alunos, a partir de um jogo que fizesse com que eles aprendessem de forma natural, divertida, buscando mudar o pensamento de que a matemática, principalmente a Análise Combinatória, é algo difícil de aprender.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para o campo da Matemática do Ensino Fundamental destacam a disciplina como um componente importante na construção da cidadania, tendo em vista a grande utilização do conhecimento científico e recursos tecnológicos, devendo estar ao alcance de todos. Na mesma concepção de formação, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) afirma que “O conhecimento matemático é necessário para todos, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais.” (BRASIL, 2018, p. 265).

As percepções durante minha trajetória profissional se somam aos resultados da avaliação de 2022 na área de Matemática do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), em que 27% dos alunos brasileiros alcançaram o nível 2 de proficiência em matemática, considerado o patamar mínimo de aprendizado, enquanto a média dos países da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) na disciplina é 69%. De acordo com a classificação dos dados, segundo a OCDE (2023), o nível 2 do Pisa é considerado o adequado e necessário para o exercício da cidadania, caracterizando que a pessoa tem capacidade de usar conceitos de matemática no dia a dia. Assim, os dados referentes ao Brasil na referida avaliação significam que cerca de três quartos dos estudantes não alcançaram sequer o nível adequado.

Apenas 1% dos estudantes no país conseguiram os níveis 5 ou 6, considerados os mais altos, nos quais os alunos resolvem problemas complexos, comparam e avaliam estratégias, no qual a média da OCDE foi 9%. De acordo com a interpretação dos dados apresentados em 2022 pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) sobre o que os estudantes sabem e podem fazer em matemática, no mínimo, eles podem interpretar e reconhecer, sem instruções diretas, como uma situação simples pode ser representada matematicamente (por exemplo, comparar a distância total de duas rotas alternativas ou converter preços em uma moeda diferente).

Além dos dados dessa avaliação de larga escala, Viana (2023) enfatiza uma realidade que precisa ser transformada no ensino de Matemática: a crença de que matemática é algo difícil. Carvalho (1994) aponta que, nos diferentes momentos do ensino da matemática para o entendimento de diferentes conceitos, indo do concreto ao mais abstrato, o ensino se dá de forma mecanizada, fazendo os alunos decorarem fórmulas e reproduzirem respostas parecidas com outros exercícios feitos pelo professor.

Para Baldino (2016), o ensino mecanizado é uma expressão típica do contexto escolar e da literatura em Educação Matemática, a qual se aproxima da definição para Ensino Tradicional Vigente (ETV), no qual o processo de ensino e aprendizagem é centrado no professor e no conteúdo e a memorização é a medida da aprendizagem, além de existir um contrato didático implícito, que mantém professor e alunos atuando conforme o sistema vigente. Nesse contrato, o professor mostra domínio do conteúdo ministrado, espera que o aluno participe com perguntas, frequente o mínimo de aulas exigido para aprovação e, principalmente, saiba resolver as questões da prova escrita. Em contrapartida, o aluno espera que o professor não registre suas ausências, o que muitas vezes ocorre; não exija que faça outras atividades senão a prova e, no máximo, participe da aula com perguntas.

Podemos evidenciar essa forma “mecanizada” no ensino de Análise Combinatória não somente pela minha experiência docente. Segundo Roda (2018), muitas vezes, nas salas de aula, esse conteúdo é resumido a algumas fórmulas prontas, dadas em forma de exemplos e seguidas de questões que muito se assemelham ao exposto pelo professor. Ao ensinar Análise Combinatória dessa maneira, Morgado et al. (1991) indicam que se perde a essência matemática de estímulo ao raciocínio, transformando o aluno em um mero copiador de fórmulas de um conteúdo complicado.

> [...] se a aprendizagem destes conceitos se faz de maneira mecânica, limitando-se a empregá-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cria-se a impressão de que a Análise Combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas (MORGADO et al., 1991, p. 2).

Essa forma de ensinar pode tirar o interesse discente por aprender, além de gerar dificuldades no processo de ensino e aprendizagem desses alunos. Segundo Roda (2019), o entendimento do Princípio Multiplicativo é importante no contexto da resolução de problemas matemáticos, pois é um dos assuntos mais importantes para o desenvolvimento de estudos no campo da Análise Combinatória, por servir para abordagem de diferentes temas trabalhados, tais como: arranjo, combinação de permutação.

Morgado et al. (1991) indicam que o Princípio Multiplicativo possibilita uma maior visão para os estudantes quando chegam ao Ensino Médio, principalmente, por esses conteúdos se apresentarem de formas normais e serem estudados a partir de modelos trabalhados, tanto na Análise Combinatória, quanto no estudo da probabilidade. Assim, é preciso que sejam utilizadas estratégias e recursos eficazes para o aluno. Segundo Giraldo (2018), ensinar matemática se torna cada vez mais um desafio para o professor, pois ele sempre precisará buscar novas metodologias para favorecer a aprendizagem e gerar o interesse do aluno pela disciplina, mostrando a que a matemática não é algo extremamente complexo.

Portanto, o objeto desta pesquisa é o conceito de Princípio Fundamental da Contagem, também denominado Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Enumeração. Além deste, o Princípio Aditivo também foi abordado.

Diante das situações apresentadas, o objetivo desta pesquisa é descrever o desenvolvimento de uma proposta de tarefa investigativa para o ensino dos Princípios Multiplicativo e Aditivo, utilizando uma adaptação do Jogo da Senha, com base nos registros de representação semiótica de Duval. Neste sentido, a questão que buscamos responder é: como a teoria dos registros de representação semiótica em uma tarefa investigativa baseada no Jogo da Senha pode favorecer a aprendizagem dos Princípios Multiplicativo e Aditivo?

A atividade foi pensada e direcionada para o segundo segmento do Ensino Fundamental (8º ano), mas também pode ser adaptada e utilizada no Ensino Médio. Para Grando (2000), os jogos no Ensino Médio possuem a função de desencadear ações de aprendizagem e desenvolver o diálogo com as ações do jogo, uma busca exploratória de informações do conteúdo, favorecendo a aproximação com a matemática.

Com a proposta de atividade alinhada à discussão, esperamos apresentar o Jogo da Senha numérica como um possível recurso para auxiliar e enriquecer o ensino dos Princípios Multiplicativo e Aditivo.

Para desenvolver essa investigação, estruturamos a dissertação da seguinte forma: no primeiro capítulo, apresentamos pesquisas que contribuíram para o ensino da Análise Combinatória com a utilização de jogos. Essas pesquisas evidenciam a importância da utilização de jogos, resolução de problemas, investigação e como os registros de representação semiótica podem contribuir para o ensino e aprendizagem do conteúdo.

No capítulo 2, exporemos o referencial teórico que embasa a pesquisa, subdividido em quatro óticas: a primeira é a ótica matemática, apresentando o conteúdo de Análise Combinatória e os Princípios Multiplicativo e Aditivo; a segunda é a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2009), seus elementos principais e a relação com a Análise Combinatória; na terceira, refletiremos sobre o lúdico no ensino de matemática por meio dos jogos, mostrando que eles são uma possibilidade para a sala de aula, pois podem contribuir para o processo de ensino e aprendizagem. A quarta e última é o ponto de vista da investigação matemática, utilizando as contribuições de Ponte (2003), o qual afirma que a investigação é algo importante para todos os tipos de pessoas e a prática deve estar presente em todas as etapas escolares, já que o ensino e a investigação são atividades completamente distintas.

No capítulo 3, descreveremos o tipo e natureza da pesquisa, além do percurso metodológico, quando apresentamos a versão do jogo desenvolvida, o Jogo da Senha Numérica, também como desenvolvemos o jogo, para qual público é direcionado e sua relação com o desenvolvimento da tarefa investigativa baseada em jogo. No capítulo 4, realizamos a descrição, a análise e os possíveis resultados de como a atividade investigativa pode ser realizada e interpretada pelos alunos.

Caminhando para o fim, apresentamos as considerações finais que realizamos a partir da pesquisa desenvolvida, as ideias, limitações, respostas diante da questão proposta e os possíveis futuros estudos relacionados.

1 UMA REVISÃO DE LITERATURA SOBRE ANÁLISE COMBINATÓRIA: APRESENTANDO ALGUMAS PRODUÇÕES NA ÁREA

Uma realidade vivenciada no ensino de Análise Combinatória são as diferentes falas dos alunos, como “gravar as fórmulas é difícil”, “se usarmos a palavra “e” em um problema, então multiplicamos os resultados” e “se usarmos a palavra “ou” somamos os resultados”. Essas falas evidenciam uma falta de compreensão dos Princípios Aditivo e Multiplicativo.

Na Análise Combinatória, os Princípios aditivo e multiplicativo são fundamentais, pois, segundo Roda (2019), o raciocínio na construção desses princípios é um componente essencial do pensamento formal e um pré-requisito importante para o raciocínio lógico geral, que se apresentará ao longo da Análise Combinatória. De acordo com Zacarias et al. (2008), na sala de aula, podemos ver uma exploração repetitiva e mecânica no modo do professor ensinar, utilizando memorização de fórmulas e cálculos de problemas parecidos, ou seja, ensina-se o aluno a decorar.

Esta forma de abordagem do ensino da matemática, logo, do Princípio Aditivo e Multiplicativo, não está de acordo com as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais para Ensino Médio (PCN-EM, Brasil, 2002):

> Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais (BRASIL, 2002, p. 40).

Apesar do cenário de dificuldades de ensino e aprendizagem, podemos verificar, no Brasil, pesquisas e estudos na área. No Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, há o GERAÇÃO (Grupo de Estudos em Raciocínios Combinatório e Probabilístico), um grupo de pesquisa cujas produções e materiais têm como objetivo desenvolver e divulgar pesquisas sobre o ensino e aprendizagem de combinatória para alunos desde os anos iniciais até o Ensino Médio, tendo publicações até para a Educação Inclusiva e a Educação de Jovens e Adultos.

Segundo Borba (2010), membro do grupo, o raciocínio combinatório destacado pelo grupo GERAÇÃO é definido como um modo de pensar presente na análise de situações, nas quais dados determinados conjuntos, deve-se agrupar seus elementos, de modo a atender critérios específicos de escolha e/ou ordenação dos elementos, e determinar-se, de forma direta ou indireta, o número total de agrupamentos possíveis. Borba (2010) utiliza problemas com as classificações de produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação para o desenvolvimento do raciocínio combinatório de estudantes de diferentes níveis de ensino. Ao trazer o desenvolvimento desse tipo de raciocínio ao jogo, criamos uma possibilidade do pensar necessário em diversas situações.

Borba, Rocha e Azevedo (2015) explicam que os problemas de produto cartesiano se referem àqueles em que dois ou mais conjuntos disjuntos são combinados para formarem um terceiro conjunto. Já na permutação, todos os elementos do conjunto são utilizados para formar sequências ordenadas. No caso dos problemas de arranjo de um grupo de elementos, são selecionados alguns subgrupos, de forma que a ordem dos elementos gera novas possibilidades, o que os diferencia dos problemas de combinação, em que a ordem dos elementos não gera possibilidades distintas.

Utilizando problemas com esse tipo de classificação, as pesquisas de Borba, Rocha e Azevedo (2015) apontam que os alunos dos anos iniciais apresentam uma certa compreensão a respeito dos problemas. Uma evidência são as resoluções com criatividade, coerência e lógica. Com o avançar da escolaridade, os alunos vão compreendendo cada vez mais o assunto.

> A importância do desenvolvimento desse tipo de raciocínio se deve ao fato de possibilitar um modo de pensar necessário em situações cotidianas (tais como organização de equipes, de campeonatos esportivos, de cardápios etc.) e, também, aplicado a diversas áreas do conhecimento (tais como Biologia, Química, Estatística, Ciências da Computação dentre outras – em situações classificatórias, por exemplo) (BORBA; ROCHA; AZEVEDO, 2015, p. 1349).

Pessoa e Borba (2009) apontam a importância de estimular o raciocínio combinatório nos primeiros anos de escolaridade, um trabalho que deve ocorrer de forma simples, para depois dar início à exploração de problemas mais complexos.

> Ao realizar entrevistas clínicas com crianças da Educação Infantil, com idades entre 5 e 6 anos, por meio de uso de figuras. As crianças eram questionadas

> sobre quatro situações, uma de cada tipo de problema combinatório. Foi observado que as crianças bem novas já entendem alguns invariantes da Combinatória, principalmente os relacionados com a escolha de elementos. O invariante de ordenação teve um maior grau de dificuldade, e, ainda mais difícil foi esgotar todas as possibilidades solicitadas no problema. Assim, situações combinatórias simples podem ser trabalhadas de modo concreto desde a Educação Infantil (PESSOA; BORBA, 2009, p. 75).

No processo de leitura dos trabalhos que envolvem a temática desse conteúdo, identificamos três pesquisas que se articulam com os nossos objetivos e se mostraram promissoras a partir de seus resultados, como a melhora da aprendizagem, do empenho e interesse dos estudantes pelas aulas em que foram utilizadas metodologias diferenciadas.

Os trabalhos de Gonçalves Filho (2016), Alcântara (2018) e Sato (2021) são produções que evidenciam o uso de jogos, sendo que a investigação matemática e a resolução de problemas matemáticos são trabalhadas em Gonçalves Filho (2016) e Alcântara (2018). Já na pesquisa de Sato (2021), temos a utilização da Teoria de Registros de Representação Semiótica (TRRS). As pesquisas destacadas são evidências de que uma prática diferenciada pode permitir um espaço para a sala de aula no trabalho de Análise Combinatória indo além do ensino tradicional e alinhadas aos direcionamentos da BNCC (2018). Assim, temos um apontamento de contribuição para o desenvolvimento do pensamento e do processo de aprendizagem do aluno para um caminho natural na escola, em termos de objetos de conhecimento. A seguir, apresentamos as ideias detalhadas de cada uma dessas pesquisas.

Em seu trabalho, de natureza bibliográfica, exploratória e analítica, Gonçalves Filho (2016) utiliza o “Jogo Senha” ou “*MasterMind*” como recurso didático-pedagógico para um ensino diferenciado da Análise Combinatória. Explorando um estudo de contagem a partir de análises matemáticas que o jogo propicia, a atividade busca tornar o estudo mais atraente, compreensivo e dinâmico. O autor apresenta a proposta de cinco atividades. A proposta associa as técnicas de contagem com o jogo e oferece uma forma lúdica para o ensino do conteúdo.

As atividades criadas por Gonçalves Filho (2016) mostram que as diferentes técnicas de contagem também podem ser aplicadas nos casos do Jogo Senha. O autor cria problemas cuja resolução é idêntica às situações do Jogo da Senha, mostrando que diferentes problemas com diferentes elementos podem trazer a mesma ideia matemática. Ele mostra situações, por exemplo, com a diferença de que um ordena peças na formação de uma senha, enquanto o outro ordena letras para formar um anagrama. Ele também apresenta alguns problemas que não possuem semelhança de forma completa, porém, a estrutura da organização e os cálculos são iguais. Segundo Gonçalves Filho (2016, p. 49),

> O interessante do tema em estudo é a forte relação com o raciocínio no desenvolver dos problemas, uma parte da Matemática onde dificilmente um aluno irá errar o resultado de algum problema por erro de cálculo. Orienta-se um trabalho intensivo com problemas e, de acordo com o aparecimento dos erros comuns dos discentes, analisar que cada erro possui um significado relativo ao raciocínio, que fere a estratégia correta de resolução, ou seja, não devemos apenas afirmar "está errado" e refazer o problema. É fundamental analisar calmamente o porquê do erro e onde ele está".

A busca por melhorias no ensino das técnicas de contagem que a utilização do Jogo Senha, com a sua riqueza de possibilidades em relação ao tema, traz uma possibilidade de diferenciação metodológica com o foco na construção do conhecimento. Com os conceitos assimilados, pode ocorrer a articulação com a resolução e investigação dos casos do Jogo Senha com os problemas de Contagem comuns e frequentes em livros de matemática, oferecendo oportunidades de aulas mais atraentes e participativas, pois ocorre a inserção do aluno nos problemas e situações como parte predominante da ação.

Seu objeto de pesquisa é a importância do jogo como recurso didático, pois os benefícios de aprender por meio da experiência lúdica são reforçados, os conceitos são aprendidos e amplia-se o entendimento dos alunos sobre os métodos de contagem.

O trabalho de Gonçalves Filho (2016) do "Jogo da Senha" é um exemplo eficaz para o ensino dos métodos de contagem, pois proporciona uma aprendizagem significativa, estimula o pensamento crítico e o trabalho em equipe. Apesar de ter como direcionamento turmas do Ensino Médio, o jogo pode ser adaptado a diferentes níveis de aprendizado, tornando-o versátil e adequado para ser utilizado em diferentes contextos educacionais, como o Ensino Fundamental II, que trabalhamos nesta dissertação.

Sato (2021) também utilizou o "Jogo da Senha" para observar e apresentar de que maneiras o jogo poderia contribuir para o desenvolvimento do pensamento combinatório em turmas do 8º ano do Ensino Fundamental, utilizando a teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval (2009). Na aplicação do trabalho, foram realizadas três oficinas com os alunos de forma remota, utilizando a plataforma

Google Meet, devido ao ensino remoto emergencial estabelecido por conta da pandemia da Covid-19. A metodologia do trabalho é de natureza qualitativa, verificando de que forma os alunos mobilizam suas jogadas. O formato virtual permitia os *feedbacks* recebidos pelo sistema de forma automática e revisada pela autora.

A autora fez análises de respostas dos alunos a partir de situações para o descobrimento da senha, fazendo registros em língua materna nas jogadas e, considerados os registros, verificou-se se os alunos foram capazes de realizar as conversões entre as análises.

A produção dos dados analisados se deu por meio de registros de fotos feitas pelos alunos, preenchimento de um questionário em arquivo Word, diálogos pelo WhatsApp com a professora da turma e um outro formulário no Google Forms, criado pela autora, com nove questões qualitativas e quantitativas.

A análise dos dados foi feita sob a luz do referencial teórico de Duval, na qual Sato (2021) aponta que as ideias de diferentes objetos matemáticos são abstratas e existe uma possibilidade de representação em diferentes registros. O objeto, muitas vezes, pode ser confundido com uma de suas representações, assim, é importante realizar mobilizações entre vários registros de representações diferentes. Desse modo, o aluno pode diferenciar o objeto de sua representação.

Ao analisar as estratégias dos alunos durante a partida do jogo e como elas evoluem ao longo do tempo, é evidenciada a importância dos jogos e atividades práticas no ensino da matemática, fornecendo uma experiência concreta para explorar conceitos abstratos. A abordagem semiótica utilizada proporciona uma análise profunda dos signos presentes no jogo e como eles são interpretados pelos jogadores. O estudo destaca a relevância de estratégias e experimentação para aprimorar a habilidade de combinar elementos.

O trabalho ressalta a importância de práticas pedagógicas com jogos, tornando o aprendizado da matemática mais envolvente e significativo para os alunos. Os resultados evidenciam que o Jogo Senha contribuiu para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, pois possibilitou aos alunos refletirem e, com o auxílio do registro em língua materna, analisarem suas jogadas utilizando o raciocínio combinatório para concluir a partida.

Por fim, na pesquisa de Alcântara (2018) afirma-se que o ensino de Análise Combinatória na Educação Básica ainda ocorre de maneira mecânica, com a justificativa da dificuldade do professor ao se deparar com o ensino de Análise

Combinatória para os alunos. Essa prática, em geral, é repetida de maneira superficial, sem nenhuma forma de estimulação na construção do raciocínio e combinatório. Ao cursar a licenciatura em Matemática, são evidenciados problemas no ensino de combinatória para os licenciados, provocando, assim, um ciclo vicioso entre o ensino e a aprendizagem desse conteúdo.

Buscando romper com essa situação, sua proposta apresenta o “Jogo da Lanchonete”, um recurso didático para auxiliar no ensino dos conceitos de Princípio Aditivo e Princípio Multiplicativo, buscando a construção e comparação dos princípios fundamentais na combinatória.

Utilizando a metodologia de resolução de problemas de acordo com Polya (1995), as atividades são planejadas e propostas por meio de um Guia de Aula do Professor. Esse guia possui as orientações contendo as regras e materiais do jogo, além de uma orientação de como usá-lo em sala de aula. Para verificar a aprendizagem, a autora criou uma ficha do material para ser utilizada com os alunos a fim de auxiliar alguma correção ou conceito com deficiência de aprendizado.

Antes de apresentar o jogo e sua aplicação, a autora apresenta o método de resolução de problemas proposto por Polya (1955) a partir de quatro etapas: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto. Essas etapas têm o objetivo de auxiliar o aluno a resolver os problemas matemáticos tendo o professor como um auxiliar com sugestões, e não se recomenda interferir na linha do pensamento do aluno. Alcântara (2018) afirma que a metodologia é bastante flexível e no processo é necessário verificar se o aluno está raciocinando e em que ponto ele pode vir a chegar na construção das respostas.

O “Jogo da Lanchonete” é uma atividade inédita desenvolvida pela autora, que trabalha e articula os conceitos do Princípio Aditivo, Princípio Multiplicativo e a comparação entre eles. É formado por um tabuleiro, um cardápio e cartas-perguntas, divididas em 5 tipos, correspondentes às regiões do tabuleiro. Cada região representa um nível de complexidade dos conteúdos Princípio Aditivo e Princípio Multiplicativo. A simulação é de uma lanchonete, onde os estudantes assumem o papel de atendentes e são desafiados a realizar operações matemáticas relacionadas à adição e multiplicação. Eles precisam resolver problemas envolvendo cálculos simples, como somar o valor total de diferentes itens no cardápio ou calcular o preço total de múltiplos pedidos.

Ao jogar, os estudantes são incentivados a aplicar os Princípios Aditivo e Multiplicativo de maneira prática e contextualizada, ganham pontos ou moedas virtuais à medida que concluem as tarefas corretamente, o que proporciona um senso de conquista e incentivo à participação ativa. Com diferentes níveis de dificuldade, o jogo pode ser aplicado em qualquer nível de escolaridade e diferentes faixas etárias, permitindo que os professores personalizem a experiência de acordo com as habilidades e conhecimentos dos alunos, tornando-o versátil e adequado para diferentes contextos educacionais.

De acordo com a autora (*ibid.*), o "Jogo da Lanchonete" é uma ferramenta pedagógica inovadora que combina diversão e aprendizado. Ao proporcionar uma experiência prática e engajadora, ele auxilia os estudantes a compreenderem e aplicarem os Princípios Aditivo e Multiplicativo em diversas situações.

No contexto do banco de Dissertações de Mestrado dos alunos do PROFMAT, podemos encontrar contribuições no campo de Análise Combinatória como os trabalhos de Osório (2019), que realizou um estudo sobre o uso de materiais manipuláveis em aulas de matemática no Ensino Fundamental, analisando o ensino dos conteúdos de Princípio Multiplicativo, construção de gráficos de barras e de setores no 8° ano; Bezerra (2021), cujo trabalho volta-se para estimular professores e alunos na Educação de Jovens e Adultos (EJA) a utilizar o Princípio Multiplicativo, apontando esse método como uma ferramenta mais simples e prática para a compreensão e solução de muitos problemas de Análise Combinatória com situações práticas em sala de aula; e Souza (2023), que realizou um estudo abordando a importância do ensino do Princípio Multiplicativo na Educação Básica: Ensino Fundamental e Médio.

Todas essas pesquisas se voltam para o Princípio Multiplicativo, porém, não identificamos trabalhos relacionando, especificamente, esse conteúdo ao uso de jogos. Em particular, encontramos apenas um trabalho que utiliza o Jogo da Senha - o de Gonçalves (2016), e nenhum trabalho que faça a relação entre jogos e a teoria do Duval (2009), o que reforça a importância e relevância de nossa pesquisa.

2 **REFERENCIAL TEÓRICO**

Buscando estruturar a construção do objeto da pesquisa, realizamos uma análise na BNCC (2018) para verificar o que os documentos norteadores apontam sobre o conteúdo de Análise Combinatória. A partir desses documentos, buscamos a articulação entre alguns teóricos de quatro diferentes perspectivas da Matemática, (MORGADO; CARVALHO, 2019): a definição do Princípio Multiplicativo e Aditivo na Análise Combinatória; da Semiótica, com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Duval (2009); e da Educação Matemática, a partir da ludicidade com uso de jogos (GRANDO, 2000) e a investigação Matemática de (PONTE, 2003).

Assim, a partir desses direcionamentos, temos as bases para a inspiração, construção e análise do jogo e a atividade investigativa, de forma que tenhamos um material apropriado para aplicação em sala de aula com vistas à construção do conhecimento dos Princípios Multiplicativo e Aditivo.

2.1 **Análise combinatória: um olhar a partir da BNCC**

A cada tempo, podemos identificar desafios na aprendizagem de Análise Combinatória. Rocha (2019, p. 39) aponta um fator considerável: “A etapa do Ensino Básico em que o aluno teve (ou irá ter) o primeiro contato com a Análise Combinatória: a grande maioria dos alunos somente tiveram (ou irão ter) contato com este conteúdo no Ensino Médio”. Ou seja, o ensino desse conteúdo só tem início na última metade da Educação Básica, quando ocorrem noções de Análise Combinatória com o Princípio Multiplicativo. Porém, algumas ideias são antecipadas no Ensino Fundamental, já que, na BNCC (Brasil, 2018, p. 298), é apontado que:

> Da mesma forma que na fase anterior, a aprendizagem em Matemática no Ensino Fundamental – Anos Finais também está intrinsecamente relacionada à apreensão de significados dos objetos matemáticos. Esses significados resultam das conexões que os alunos estabelecem entre os objetos e seu cotidiano, entre eles e os diferentes temas matemáticos e, por fim, entre eles e os demais componentes curriculares. Nessa fase, precisa ser destacada a importância da comunicação em linguagem matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação.

É importante a consideração de conhecimentos matemáticos com todas as experiências vivenciadas do aluno, dando oportunidade para as situações que eles possam fazer análises da realidade para o desenvolvimento de conceitos do simples ao mais complexo. Ao analisarmos a BNCC (2018), podemos observar alguns exemplos de conhecimentos e habilidades relacionados à Análise Combinatória nas temáticas números e probabilidade e estatística, nas diferentes séries finais do Fundamental, conforme Quadro 1:

Quadro 1 – BNCC: conhecimento e habilidades relacionados à análise combinatória

UNIDADE TEMÁTICA NÚMEROS		
SÉRIE	CONTEÚDOS	HABILIDADES
6° Ano	Fluxograma para determinar a paridade de um número natural; Números e divisores de um número natural; Números primos e compostos.	(EF06MA04) Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par).
8° Ano	O Princípio Multiplicativo da contagem.	(EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio.
UNIDADE TEMÁTICA PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA		
SÉRIE	CONTEÚDOS	HABILIDADES
8° Ano	Princípio Fundamental da Contagem. Noções de probabilidade básica: espaço amostral, evento aleatório (equiprovável); contagem de possibilidade; cálculo de probabilidades simples.	(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o Princípio Multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1. (EM13MAQT310) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade.

Fonte: Brasil, 2018, p. 35.

Quando analisamos o Ensino Médio, a Análise Combinatória tem sua temática com concentração no objeto de conhecimento na probabilidade e estatística, diferente do Ensino Fundamental, que a distribui em outra unidade temática. Segundo a BNCC para o Ensino Médio (Brasil, 2018), algumas habilidades desenvolvidas pelo aluno quanto à aprendizagem da Análise Combinatória são apontadas no Quadro 2.

Quadro 2 – BNCC: conhecimento e habilidades relacionados à análise combinatória

UNIDADE TEMÁTICA PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA		
SÉRIE	CONTEÚDOS	HABILIDADES
2° Ano	Noções de combinatória: agrupamentos ordenáveis (arranjos) e não ordenáveis (combinações); Princípio Multiplicativo e Princípio Aditivo; modelos para contagem de dados: diagrama de árvore, listas, esquemas, desenhos etc.	(EM13MAQT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos Princípios Multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

Fonte: Brasil, 2018, p. 529.

Assim, a BNCC (Brasil, 2018) traz como proposta uma consolidação, ampliação e aprofundamento de aprendizagens essenciais do Ensino Fundamental, pois no seu processo de estrutura e sistematização da aprendizagem do conteúdo já se estabeleceu, buscando uma tentativa de exploração do conteúdo de forma mais transversal, com objetos de conhecimentos já trabalhados, com o contexto de vivência sociocultural do aluno, com a finalidade que o estudante tenha uma visão integrada da disciplina com a aplicação da sua realidade.

2.2 **Análise combinatória: demonstração dos princípios básicos de contagem**

Buscando aprofundar o conteúdo trabalhado na pesquisa, apresentaremos a perspectiva matemática, ou seja, a demonstração dos Princípios Aditivo e Multiplicativo, as duas bases da Análise Combinatória, de acordo com Morgado e Carvalho (2019).

Lema 3. (Princípio Aditivo) Se A e B são finitos e disjuntos, com $\#A = m \; e \; \#B = n$, então existe uma bijeção $f\colon I_{(m+n)} \to (A \cup B)$. Em outras palavras, se $(A \cap B) = \emptyset$, então:

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B.$$

Demonstração. Por hipótese, existem bijeções $g\colon I_m \to A \; e \; h\colon I_n \to B \; com \; m, n \; \in \; N$. Supondo $m \leq n$, definamos a função $f\colon I_{(m+n)} \to (A \cup B), que \; para \; i \in N$ tal que $1 \leq i \leq m \leq m + n$, faz corresponder o elemento $c_i = f(i)$ da seguinte forma:

$$f(i) = \{g(i), se\ 1 \leq i \leq m\ \ h(i), se\ m < i \leq m+n\}$$

Provemos que f assim definida é uma bijeção. Para tanto, veja que:

1. f é injetiva. De fato, tomando $i, j \in N, tais\ que\ 1 \leq i \leq j \leq m, segue\ que,\ f(i) = g(i) \neq g(j) = f(j), pois\ g$ é $bijeção$. Se tivermos $1 \leq i < m < j \leq m + n$, então $f(i) = g(i) \neq h(i) = f(j)$. Finalmente, se $m < i < j \leq m + n$, então $f(i) = h(i) \neq h(j) = f(j), pois\ h$ é $bijeção$.
2. f é sobrejetiva. De fato, tomando $c \in (A \cup B)$, temos que ou $c \in A\ ou\ c \in B, pois\ A \cap B = \emptyset$. No primeiro caso, existe $i \in N, com\ 1 \leq i \leq m, tal\ que\ g(i) = c, pois\ g$ é $bijeção\ e\ daí\ f(i) = g(i) = c$, pela definição de f. Caso contrário, se $c \in B, então\ existe\ i \in N, com\ 1 \leq i \leq n \leq m + n, tal\ que\ c = h(i), pois\ h{:}\, I_n \to B$ é bijeção e daí $f(i) = h(i) = c$.

Assim, $f{:}\, I_{(m+n)} \to (A \cup B)$ é bijeção e portanto,

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B.$$

Lema 11. (Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem). Se A e B são conjuntos finitos e não vazios, então:

$$\#(A \times B) = (\#A) \cdot (\#B)$$

Mais geralmente, se $A_1 \times \ldots \times A_n$ são conjuntos finitos e não vazios, então:

$$\#(A_1 \times \ldots \times A_n) = \prod_{j=1}^{n} (\#A_j).$$

Demonstração. Seja:

$$B = \{y_1, \ldots, y_n\} = \cup_{j=1}^{n} \{y_j\}$$

Temos que:

$$A \times B = A \times \left(\cup_{j=1}^{N} B_j\right) = \cup_{j=1}^{N} \left(A \times B_j\right) = \cup_{j=1}^{n} \left(A \times \{y_J\}\right), que\ é\ uma\ reunião\ disjunta.$$

Logo,

$$\#\cup_{j=1}^{n} \left(A \times \{y_J\}\right) = \sum_{j=1}^{N} \#\left(A \times \{y_J\}\right).$$

Perceba que a função $f{:}\, A \to A \times \{y_j\}$ dada por $f(x) = (x, y_j)$ é uma bijeção (com inversa $g{:}\, A \times \{y_j\}$ dada por $g(x, y_j) = (x)$, e, portanto, $\#A = \left(A \times \{y_j\}\right)$ para $1 \leq j \leq n$. Daí:

$$\#(A \times B) = \sum_{j=1}^{n} \#A = (\#A) \cdot m = (\#A) \cdot (\#B)$$

Morgado (1991, p.18) apresenta as definições do Princípio Aditivo e Princípio Multiplicativo da seguinte forma:

Princípio Aditivo: se uma decisão $d1$ pode ser tomada de x maneiras e uma decisão $d2$ pode ser tomada de y maneiras, então, o número de maneiras de se tomarem as decisões $d1$ ou $d2$, simultaneamente, é $x+y$. Na formulação de conjuntos: Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com m e n elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $m+n$ elementos.

Princípio Multiplicativo: se uma decisão $d1$ pode ser tomada de x maneiras e, se uma vez tomada a decisão $d1$, a decisão $d2$ puder ser tomada de y maneiras, então, o número de maneiras de se tomarem as decisões $d1$ e $d2$ é xy. Na formulação de conjuntos: se A e B são dois conjuntos disjuntos, com m e n elementos, respectivamente, então $A \times B$ possui mn elementos.

Além da preocupação com o conhecimento do conteúdo, os professores precisam conhecer teorias de aprendizagem, que Ball, Thames e Phelps (2008) chamam de conhecimento pedagógico. Sendo assim, passamos a focar na teoria de aprendizagem que escolhemos para desenvolver a proposta do jogo, a TRRS.

2.3 **A teoria dos registros de representação semiótica**

Responsável pelo desenvolvimento da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), o filósofo e psicólogo francês Raymond Duval (1944) buscou apresentar uma análise da influência das representações dos objetos matemáticos no processo de ensino e aprendizagem em matemática.

Os objetos representados em outras áreas do conhecimento científico, tais como Astronomia, Botânica, Física e Química, vão além da imaginação segundo Duval (1993). Eles são visíveis, palpáveis e, até mesmo, “real” por meio dos inúmeros instrumentos específicos de manuseio, como microscópio e telescópio, que tornam possível a visualização. Para termos acesso aos objetos matemáticos é preciso a utilização de suas representações e, para isso, é necessário pelo menos uma forma de registro de sua representação, podendo ser uma linguagem matemática, como um registro do sistema de números em forma de uma equação ou gráficos.

Segundo Santos *et al.* (2019), a matemática possui um fundamento sobre ela mesma e os seus padrões de rigor têm transformações ao longo do tempo. Silva (2017) indica que os registros semióticos possuem uma relação e têm sua criação para a representação de um objeto matemático ao qual ele quer se referir. Nem sempre um objeto matemático tem existência na natureza. Há objetos matemáticos que só possuem um significado apenas a própria matemática. Podemos destacar como exemplo os elementos dois, quadrado e a reta que só existem como objetos do conhecimento e, por assim o serem, só tem acesso permitido através de suas representações.

A TRRS apresentada por DUVAL (2009) tem como fato que os objetos matemáticos não tenham uma realidade física, sendo assim, não podem ser conhecidos através de uma percepção, eles possuem representações mentais e semióticas. Para Duval (2012, p. 268),

> As representações mentais recobrem o conjunto de imagens e, mais globalmente, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado. As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento.

As representações semióticas e mentais dos objetos matemáticos possuem uma relação de complexidade inerentes à própria natureza da atividade cognitiva. Assim, há alguns elementos que devem ser verificados com um olhar mais atento, como a semiose e noesis. Duval (2012) explica que a primeira é a apreensão conceitual de um objeto e a segunda é a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, com a atenção para o fato de que não há noesis sem a semiose, pois elas são inseparáveis.

O termo “registro” na TRRS é usado para uma designação de tipos diferentes de representações semióticas que podem ser usadas em matemática. Uma determinada representação não é capaz de uma completa representação de um objeto e as distintas representações são complemento uma das outras. Duval (2003) aponta que esses registros podem ser multifuncionais (tratamento que podem ter algoritmos) ou monofuncionais (são algoritmos), e as representações podem ser discursivas ou não discursivas. Um exemplo é apresentado no Quadro 3.

Quadro 3 - Tipos de registros de representação semiótica

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS (Os tratamentos não são algoritmizáveis)	Língua natural: associações verbais (conceituais); descrição, definição, explicação; Raciocínio: argumento a partir de observações, de crenças, …; dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensões 0, 1, 2 ou 3); Apreensão operatória e não somente perspectiva; construção com instrumentos; Modelização de estruturas físicas (cristais, moléculas, ...).
REGISTROS MONOFUNCIONAIS (Os tratamentos são principalmente algorítmicos)	Sistema de escrita: · numéricas (binária, decimal, fracionária, …); algébricas; simbólicas (línguas formais). Cálculo literal, algébrico, formal.	Gráficos cartesianos: mudança de sistema de coordenadas; interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval, 2003, p. 14.

Um tratamento, segundo Duval (2003, p.39), “[...] é uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro, aquele onde as regras de funcionamento são utilizadas; um tratamento mobiliza então apenas um registro de representação”.

O cálculo apresentado na Figura 1 é uma expressão de adição feita com números racionais na forma decimal. Podemos observar que o número resultado da expressão continua sendo um número racional na forma decimal. Portanto, a forma de representação permaneceu.

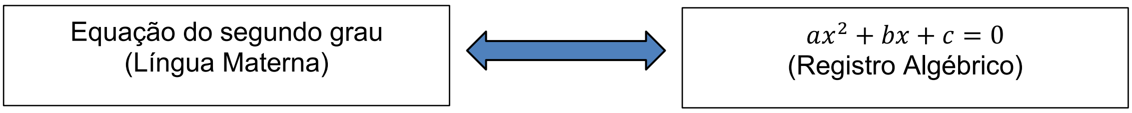
Figura 1 - Exemplo de Tratamento

0,8 + 4,6 = 5,4
(Número decimal) + (Número decimal) = Número decimal

Fonte: O autor, 2024.

Duval (2012) aponta que, nos registros de representação semiótica, encontram-se três características fundamentais: formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão. Vale ressaltar que as duas últimas atividades cognitivas, o tratamento e a conversão, são dois tipos de transformação de uma representação semiótica em outra representação semiótica. Tratamento são formas diferentes de atuação sobre o objeto matemático, são transformações internas, enquanto as conversões são as transformações de um registro em outro.

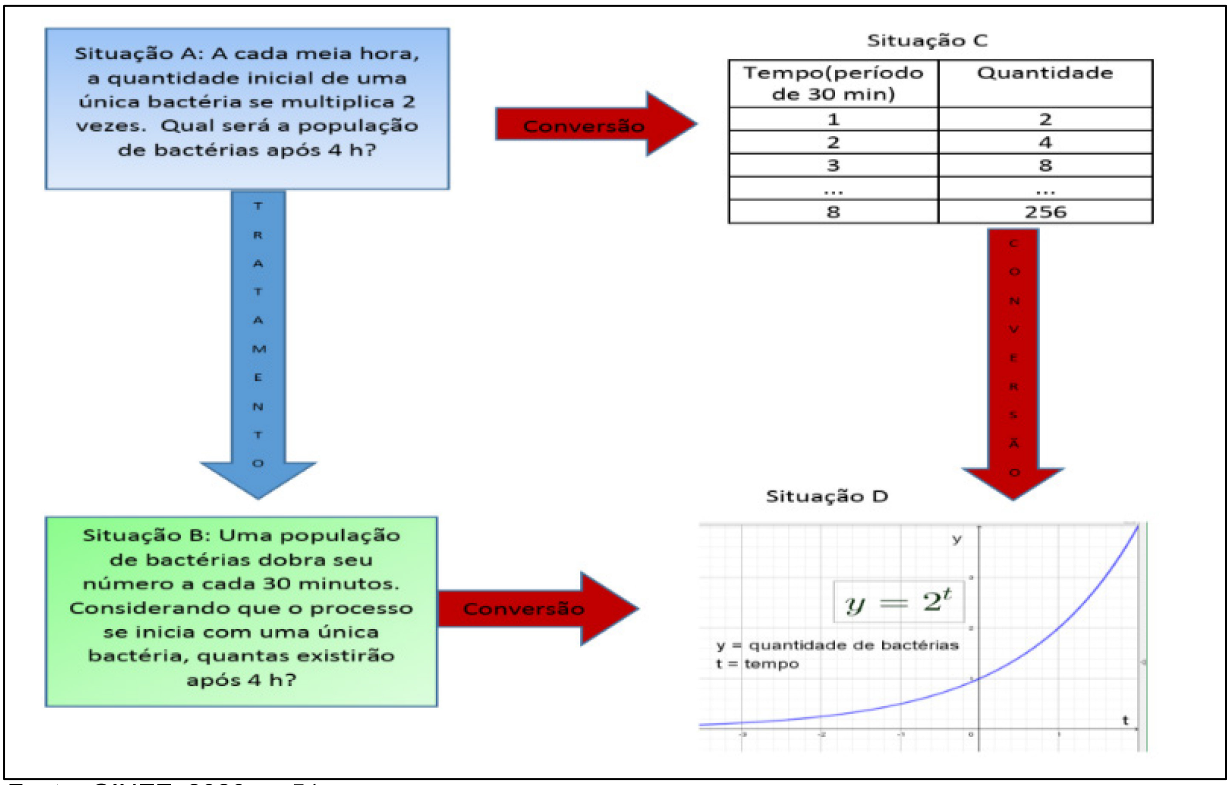
Figura 2 - Situação de Conversão



Fonte: O autor, 2024.

De acordo com Ginez (2020), a Figura 3 nos auxilia a compreender melhor a diferença de tratamentos e conversões.

Figura 3 - Exemplo de Conversão e Tratamento



Fonte: GINEZ, 2020, p. 51.

A Figura 3 apresenta conteúdos diferentes, como podemos observar os registros de representações nas situações A e B, que continuam no mesmo registro, o registro da língua materna. Da situação A para a situação B, houve uma mudança dentro do mesmo registro, ou seja, uma transformação interna de um registro, um tratamento, por meio das transformações em diferentes representações semióticas. A situação C, em comparação com a situação A, transforma o registro de representação da língua materna para o registro de representação em tabelas, ocorrendo, assim, uma conversão. Na situação B para a situação D, verifica-se a transformação do registro de representação em língua materna para o registro de representação de expressão algébrica com a construção do gráfico, outra transformação em que se dá uma conversão.

Em relação a formação de uma representação identificável, ela se apresenta como uma incidência dos símbolos, regras sintáticas e semânticas para uma composição e interpretação. Podemos apresentar como exemplo o enunciado de um problema, composição de um texto, desenho de uma figura geométrica, elaboração de um esquema, escrita de uma fórmula, temos que:

> Essa formação implica uma seleção de tratos e dados no conteúdo a representar. Essa seleção se faz em função das unidades e das regras de formação que são próprias ao registro semiótico no qual a representação é produzida. A esse título, a formação de uma representação poderia ser comparada à realização de uma tarefa de descrição. Essa formação deve respeitar as regras (gramática, para as línguas naturais, regras de formação num sistema formal, dificuldades de construção para as figuras...). A função dessas regras é assegurar, em primeiro lugar, as condições de identificação e de reconhecimento da representação e, em segundo lugar, a possibilidade de sua utilização para os tratamentos. Essas são as regras de conformidade, não são as regras de produção efetiva para um sujeito. Isso quer dizer que um conhecimento de regras de conformidade não implica a competência para formar as representações, mas somente a competência para reconhecê-las (DUVAL, 2012, p. 41).

Entendemos que uma atividade cognitiva centrada na identificação da representação a ser trabalhada, dependo do tratamento dado ao conteúdo a ser ensinado, leva em consideração as diferenças de representação. Cada registro tem suas próprias regras de formação e regras de tratamento específicas , porém: “Não existe e não pode existir regras de conversão como existem regras de conformidade e regras de tratamento e por essa razão a conversão das representações semióticas é a primeira fonte de dificuldade à compreensão em matemática” (DUVAL, 2012, p. 276).

Nesse processo, é importante que o aluno consiga realizar as diferentes transformações entre os registros de representação, pois pode possibilitar o desenvolvimento de habilidades e conhecimentos sobre determinado objeto, podendo em um momento ampliar sua compreensão matemática. As transformações de tratamento e conversão são consideráveis, entretanto, as conversões podem ocasionar dificuldades na compreensão matemática, pois a forma de representação do objeto de estudo muda, porém o objeto representado permanece o mesmo. Um exemplo da situação:

> Para a expressão de um número é preciso, de fato, distinguir a significação operatória ligada ao significante, em virtude das regras do sistema de expressão escrita (esta significação operatória não é a mesma para $0{,}25, \frac{1}{4}\ e\ 25 \times 10^{-2}$: não são os mesmos tratamentos que devem ser considerados para efetuar as adições 0,25 + 0,25 = 0,5, $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ e $25 \times 10^{-2} + 25 \times 10^{-2} = 50 \times 10^{-2}$ e o número representado que não é o significante 0,25, nem o significante ¼ e nem o significante25×10^{-2}" (DUVAL, 2012, p. 8).

No cenário da conversão, há de se destacar os fenômenos de congruência e não congruência entre registros de representação. Segundo Duval (2012), a conversão pode ser realizada intuitivamente e quase instantaneamente quando os registros de partida e chegada são congruentes. Para estabelecer uma congruência, embora não sejam suficientes, necessitamos de três critérios como descrito por Duval (2009) no Quadro 4.

Quadro 4 - Condições necessárias para a existência de congruência na conversão

Critério 1	**Critério 2**	**Critério 3**
Possibilidade de uma correspondência "semântica" dos elementos significantes: a cada unidade significante simples de uma das representações pode-se associar uma unidade significante elementar.	*Univocidade semântica terminal:* a cada unidade significante elementar no registro da representação de chegada tem um único entendimento possível.	*Organização dos elementos significantes:* as organizações respectivas dos elementos significantes de duas representações comparadas conduzem a apreender nelas as unidades em correspondência semântica segundo a mesma ordem de duas representações.

Fonte: DUVAL, 2009, p. 68-69.

Para realizar a análise de congruência de uma conversão segundo as condições necessárias estabelecidas por Duval (2009), é necessário fazer o segmento das unidades significativas do registro de partida e colocá-las em correspondência com as unidades significativas do registro de chegada. Com a segmentação realizada e efetuadas as respectivas correspondências, devemos analisar a relação entre as unidades significativas de ambos os registros. Para entendimento, observemos o Quadro 5.

Quadro 5 - Conversão de enunciados em Língua Natural para o Registro Algébrico

Registro de partida	Registro de chegada
Registro em Língua Materna	Registro Algébrico
O conjunto dos pontos cuja $ordenada_i$ é $superior$ à $abscissa_k$	$y_i > x_k$
O conjunto dos pontos que têm uma $abscissa_i$ $positiva_j$	$x_i > 0_j$
O conjunto dos pontos que têm $abscissa_i$ e $ordenada_j$ $de\ mesmo\ sinal$	$x_i \times y_j > 0$

Fonte: DUVAL, 2009, p. 64-65.

A correspondência termo a termo (unidade significante simples) é suficiente para comparar unidades significativas nos registros de partida e de chegada no enunciado (a). A unidade significativa ‘ordenada’ equivale à unidade significativa ‘y’. A unidade significativa ‘superior’ equivale à unidade significativa ‘>’. A unidade significativa ‘abscissa’ equivale à unidade significativa ‘x’. Mesmo se realizarmos a conversão inversa, é possível obter novamente o registro de partida: ‘y > x’ → ‘ordenada maior/superior a abscissa’.

Para Duval (2009), a conversão (a) atende aos critérios de correspondência semântica, de univocidade semântica terminal e de organização sintática das unidades significantes entre um registro de representação de partida e um registro de representação de chegada, que permitem classificá-la como congruente.

No enunciado (b), para que seja possível efetuar a conversão solicitada, é necessária a combinação de unidades significativas simples no registro de chegada para veicular uma informação expressa por uma única unidade no registro de partida. Se a unidade significativa ‘abscissa’ corresponde à unidade significativa ‘x’, isso não acontece com a unidade significativa ‘positiva’, que corresponde a duas unidades significativas no registro de chegada, a saber ‘>’ e ‘0’. Ao realizar a conversão inversa, podemos obter duas versões em língua natural, tal que ‘x > 0’ pode corresponder a ‘abscissa maior que zero’ ou a ‘abscissa positiva’. Assim, Duval (2009) conclui que esta conversão não atende ao primeiro critério, tratando-se de uma conversão não congruente.

No enunciado (c), a unidade significativa ‘ordenada’ equivale à unidade significativa ‘y’, a unidade significativa ‘abscissa’ equivale à unidade significativa ‘x’, e a unidade significativa ‘mesmo sinal’ equivale à unidade significativa ‘> 0’. Neste terceiro exemplo, além de não haver uma correspondência termo a termo, é preciso reorganizar o registro de partida para se obter correspondências no registro de chegada. A conversão inversa pode redundar em interpretação que não corresponde ao enunciado original em língua natural, uma vez que ‘xy > 0’ pode ser convertido por ‘o produto da abscissa pela ordenada é positivo’ e não ‘o produto dos pontos que têm abcissa e ordenada de mesmo sinal”. Dessa maneira, para Duval (2009), esta conversão também deve ser classificada como não congruente.

Ao pensarmos na Análise Combinatória, temos que, na investigação de Barreto e Borba (2011), há a influência de diferentes representações simbólicas na resolução de problemas

desse conteúdo, com o uso de formas de representações diferentes, tais como: listagem, tabelas, árvore de possibilidades e relações. Assim, a teoria de Duval (2009) pode nos orientar para a interpretação dessas diferentes representações, sem comprometer a aplicabilidade dos conceitos na investigação de problemas matemáticos, auxiliando-nos na aprendizagem do conteúdo da Análise Combinatória, compreendendo o significado que cada elemento representa. Para que essa compreensão ocorra, uma das possibilidades é o lúdico no ensino, por meio da utilização de jogos, como tratamos a seguir.

2.4 **Jogos e ensino de matemática**

O ensino por meio de jogos tem cada vez mais se tornado um aliado para a Educação Matemática de uma forma lúdica e simples, que motiva o aluno e favorece a aprendizagem do conteúdo diante dos problemas apresentados.

Segundo Kishimoto (2001), a definição de jogo não é tão simples, pois cada indivíduo pode entender a palavra jogo de uma forma distinta. Pode-se referir a diversos tipos, tais como jogos de adivinhação, políticos, amarelinha, xadrez, entre outros. Ao usar um jogo para o ensino de matemática, é necessário pensar na produção de uma experiência com significado para o aluno, tanto em termos de conteúdos matemáticos, quanto no desenvolvimento de habilidades e competências. É necessário pensar em trabalhar e pensar ao jogar, levando à descoberta, investigações e resoluções, não apenas a receber informações. Segundo Teixeira e Apresentação (2014, p. 305),

> O jogo pode colaborar com a educação matemática e com a educação científica em geral, pois ajuda a resolver situações problemas e desenvolve habilidades de raciocínio lógico e espacial, de concentração, de interpretação, de investigação, de previsão, de análise por comparação e de tomada de decisão lógica e embasada em fatos e argumentos.

Assim, ocorre uma aproximação do aluno com o conhecimento, e ele passa a viver situações de procura por soluções dos problemas próximos daqueles enfrentados no processo para a resolução.

O ensino de jogos como recurso é apontado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998, p. 47) que:

> Este seria um dos caminhos para se “fazer Matemática” na sala de aula, fornecendo contextos dos problemas e servindo como instrumento para a construção de estratégias de resolução de problemas. Além de ser um objeto sociocultural em que a Matemática está presente, o jogo é uma atividade natural no desenvolvimento dos processos psicológicos básicos; supõe um “fazer sem obrigação externa e imposta”, embora demande exigências, normas e controle.

Deste modo, os jogos se apresentam como uma alternativa para o trabalho de matemática e a elaboração didática, que buscam melhorar o processo de ensino e aprendizagem relacionados à apropriação de técnicas, criação de algoritmos e à utilização do raciocínio lógico-matemático na resolução e investigação matemática. Isto não só torna as aulas mais dinâmicas, mas também pode ser útil para o professor no processo de identificação das principais dificuldades dos alunos, sendo uma forma de diagnóstico da aprendizagem.

Em uma perspectiva de investigação e resolução de problemas, o jogo tem uma aplicação como gerador de situações que realmente desafiam o aluno a buscar soluções ou, até mesmo, como o início da aprendizagem de um conteúdo novo, ou na aplicação e fixação de um conceito já realizado no ambiente de sala de aula.

Podemos evidenciar vantagens no uso de jogos para o ensino, mas precisamos estar atentos ao processo de aplicação para não tornar o jogo um objeto sem sentido e significado, “o jogo apenas pelo jogo” (GRANDO, 2000, p. 35). No Quadro 6, apresentamos algumas vantagens e desvantagens do uso dos jogos no ensino de matemática:

Quadro 6 - Vantagens e desvantagens da utilização de jogos no ensino de Matemática

Vantagens	Desvantagens
- Fixação de conceitos já aprendidos de uma forma motivadora para o aluno; - Introdução e desenvolvimento de conceitos de difícil compreensão; - Desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas (desafio dos jogos); - Aprender a tomar decisões e saber avaliá-las; - Significação para conceitos aparentemente incompreensíveis; - Propicia o relacionamento das diferentes disciplinas (interdisciplinaridade); - O jogo requer a participação ativa do aluno na construção do seu próprio conhecimento; - O jogo favorece a socialização entre os alunos e a conscientização do trabalho em equipe; - A utilização dos jogos é um fator de motivação para os alunos; - Dentre outras coisas, o jogo favorece o desenvolvimento da criatividade, de senso crítico, da participação, da competição "sadia", da observação, das várias formas de uso da linguagem e do resgate do prazer em aprender; - As atividades com jogos podem ser utilizadas para reforçar ou recuperar habilidades de que os alunos necessitem. Útil no trabalho com alunos de diferentes níveis; - As atividades com jogos permitem ao professor identificar, diagnosticar alguns erros de aprendizagem, as atitudes e as dificuldades dos alunos.	- Quando os jogos são mal utilizados, existe o perigo de dar ao jogo um caráter puramente aleatório, tornando-se um "apêndice" em sala de aula. Os alunos jogam e se sentem motivados apenas pelo jogo, sem saber o porquê jogam; - O tempo gasto com as atividades de jogo em sala de aula é maior e, se o professor não estiver preparado, pode existir um sacrifício de outros conteúdos pela falta de tempo; - As falsas concepções de que se devem ensinar todos os conceitos através de jogos. Então, as aulas, em geral, transformam-se em verdadeiros cassinos, também sem sentido algum para o aluno; - A perda da "ludicidade" do jogo pela interferência constante do professor, destruindo a essência do jogo; - A coerção do professor, exigindo que o aluno jogue, mesmo que ele não queira, destruindo a voluntariedade pertencente à natureza do jogo; - A dificuldade de acesso e disponibilidade de material sobre o uso de jogos no ensino, que possam vir a subsidiar o trabalho docente.

Fonte: GRANDO, 2000, p. 35.

As vantagens estão relacionadas à aprendizagem do aluno, pois ele participa de forma mais ativa na construção do que aprendeu e na sua aplicação, trazendo um significado ao processo, sem contar a socialização e a criatividade. Enquanto as desvantagens estão relacionadas à dificuldade de acesso a materiais sobre jogos, utilização pedagógica equivocada pelo professor, dentre outros.

Evidenciamos que os jogos podem proporcionar condições favoráveis e agradáveis para a aprendizagem matemática. As limitações do jogo podem ser administradas pelo professor, que precisa pesquisar, analisar e se organizar para se antecipar à aplicação e, assim, trazer uma contribuição para o ambiente escolar.

Em consonância com essas ideias, e não o “jogo pelo jogo”, buscamos articular a teoria da investigação matemática ao jogo, de forma a tornar essa investigação prazerosa e eficaz para aprendizagem, ao inserir uma atividade investigativa baseada no jogo que desenvolvemos para os Princípios Multiplicativo e Aditivo.

2.5 **Investigação matemática**

Na Educação Matemática, as perspectivas em pauta se encontram quando os assuntos são relacionados ao ensino e aprendizagem da matemática e a formação de professores. Nessas perspectivas, temos uma teoria direcionada por Ponte (2003): a Investigação, um procedimento com associação ao “fazer” da Matemática.

Nos diferentes estudos de Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), eles não oferecem um caminho imediatamente para encontrar a solução de uma questão, o interesse é no percurso realizado na resolução da questão. Para Ponte (2003, p. 9),

> Em contextos de ensino e aprendizagem, investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão só, que formulamos questões que nos interessam, para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso.

Isto revela o estabelecimento de uma relação com o significado de aprendizado e a Investigação Matemática, pois, ao realizar a investigação, pode se iniciar um caminho de compreensão da matemática em construção em diferentes situações, podendo questionar procedimentos e até mesmo as próprias conclusões.

Segundo Ponte (2003), no desenvolvimento de atividades investigativas, na observação, na retomada de procedimentos, verificando resultados atingidos, dúvidas, explorações e até mesmo conclusões, ocorre uma avaliação da própria prática do professor e os objetivos traçados no planejamento, podendo ter uma reorientação, caso necessário. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), a atividade de Investigação Matemática possui uma diferença de outras metodologias por ter uma característica aberta voltada para a exploração, ou seja, uma investigação do conteúdo inserido na tarefa.

Quando ocorre o pensar matematicamente ou o construir o pensamento no desenvolvimento de investigações matemáticas, destacam-se os processos abordados na BNCC (Brasil, 2018, p. 72), tais como formular, testar, provar conjecturas, argumentação e uso de processos de natureza metacognitiva. Ponte (2003) indica que as investigações matemáticas dão ênfase aos processos matemáticos como pesquisar padrões, formulação, testagem, justificativa, prova, conjecturas, momentos de reflexão e generalização, tal qual consta nas recomendações na BNCC.

No processo de investigação, os alunos poderão ter contato com uma compreensão de matemática que aprendem e o seu papel social. Segundo Braumann (2002, p. 5),

> Somente pela investigação matemática é que se pode verdadeiramente perceber o que é "a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. Só assim se pode ser inundado pela paixão detetivesca indispensável à verdadeira função da Matemática." Logo, a aprendizagem da Matemática deve possibilitar oportunidades de os alunos se envolverem em momentos genuínos de atividade matemática.

Em sua pesquisa, Ponte (2003) aponta que, para o desenvolvimento de uma atividade produtiva e rica na matemática, é necessário ter uma base em tarefas de natureza diversificada, tais como exercícios, problemas, investigações e explorações. A diferença entre a tarefa e os outros tipos de atividade segundo o autor (*ibidem,* p. 7) é:

> Uma **tarefa** tem quatro dimensões básicas: o seu grau de dificuldade, a sua estrutura, o seu contexto referencial e o tempo requerido para a sua resolução. O autor coloca que os exercícios são tarefas sem grande dificuldade e estrutura fechada; os problemas são tarefas também fechadas, mas com elevada dificuldade; as investigações têm um grau de dificuldade elevado, mas uma estrutura aberta; e finalmente, as tarefas de exploração são fáceis e com estrutura aberta.

Para uma boa eficácia dos alunos nas tarefas, o professor precisa ter conhecimento dos diferentes tipos de tarefas e fazer uma seleção de acordo com o objetivo de cada aula planejada. Também precisa levar em consideração as dificuldades e o nível em que os alunos estão se desenvolvendo.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), nos benefícios que as atividades de investigação matemática oferecem para o ensino e aprendizagem dos alunos, para o sucesso em sala de aula, o professor tem um papel principal de condução da atividade. As aulas podem ser planejadas, mas no processo de construção nunca se sabe como vão ser finalizados os diferentes caminhos que os alunos seguem entre avanços e retrocessos. As diferentes opiniões que surgem e a reação do aluno diante da intervenção do professor são momentos aleatórios em uma aula de investigação.

Ao utilizar uma prática pautada na Investigação Matemática, podemos perceber que pode levar os alunos a conhecerem uma matemática em que se desenvolve e se estabelece uma relação de satisfação com uma nova forma de aprender.

Dessa forma, as tarefas de investigação podem partir do momento lúdico de um jogo, de forma a potencializar a aprendizagem de certo assunto. Ao planejar uma tarefa investigativa pautada no jogo, o aluno, ao ter o contato com a partida e com as regras do jogo, experimentará, segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2013, p. 25), as fases de investigação:

> Introdução da tarefa, momento no qual o professor faz a proposta à turma oralmente ou por escrito; Realização da investigação, que pode ser individualmente, em pares, em grupos com toda a turma e Discussão dos resultados: momento em que os alunos relatam aos colegas e ao professor o trabalho realizado.

Cada momento da aplicação do jogo e da tarefa investigativa possibilita a discussão de resultados e questionamentos, sem ocorrer apresentações de conteúdos sem vínculo à realidade do aluno, sendo possível aprender com eles nessa construção com os saberes produzidos e, assim, em uma unidade, estabelecer um processo de ensino e aprendizagem de acordo com a realidade.

D' Ambrósio (1996) afirma que uma verdadeira educação está relacionada à ação de enriquecer a todos que verdadeiramente estão ligados à educação em sua palavra e com o modo de relação entre a teoria e a prática do ensino ao aluno.

A construção e uso de um jogo no ambiente da turma traz o lúdico e os benefícios citados ao utilizar jogos, modificando o ambiente de aprendizagem, ao trazer algo que não seja comum no cotidiano do aluno.

Apresentada as perspectivas teóricas da pesquisa, descreveremos nosso percurso metodológico.

3 **PERCURSO METODOLÓGICO**

Esta pesquisa é qualitativa do tipo descritiva, buscando evidenciar o processo de desenvolvimento da sequência didática durante a aplicação do jogo e realizando orientações para a realização da tarefa investigativa. O objetivo é desenvolver o conteúdo do Princípio Multiplicativo e Aditivo, tendo como direcionamento turmas do ensino fundamental, principalmente de 8º ano, escolaridade que possui referência ao tópico na BNCC.

A escolha pela abordagem qualitativa se deve ao fato de que ela evidencia as vivências, crenças e conhecimentos da abordagem da pesquisa. Na pesquisa qualitativa, não temos a preocupação “[...] com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, de uma instituição, de uma trajetória etc." (GOLDENBERG, 1997, p. 14). Além disso, com a pesquisa qualitativa, pretendemos:

> [...] explicar o porquê das coisas, exprimindo o que convém ser feito, mas não quantificam os valores e as trocas simbólicas nem se submetem à prova de fatos, pois os dados analisados são não-métricos (suscitados e de interação) e se valem de diferentes abordagens (*ibidem*, p. 32).

Dessa forma, nosso aprofundamento se dá na construção da sequência didática. Logo, o produto educacional resultado desta pesquisa é uma sequência didática baseada em uma versão do jogo *“Master Mind*”, conhecido no Brasil como “Jogo Senha”. A adaptação do jogo foi realizada por nós, trazendo situações de matemática, a qual nomeamos: “Jogo da Senha Numérica”.

Não buscamos identificar a quantidade de rodadas necessárias para os alunos finalizarem o jogo, mas buscamos descrever e evidenciar quais as possíveis estratégias de resolução, analisando e observando a mobilização dos diferentes registros a partir da aplicação do jogo, como se dá o processo de investigação do conteúdo proposto e quais são os possíveis registros de representação e caminhos no desenvolvimento da partida. No caso, estamos observando e evidenciando os possíveis rumos na investigação dos alunos.

Segundo Alves (1991), o caminho planejado em uma pesquisa toma diferentes direções, embora mantenha características ou elementos do que foi selecionado inicialmente, mostrando que esse tipo de pesquisa se enquadra a uma proposta de sequência didática para o ensino de Análise Combinatória. Assim, o planejamento inicial escolhido para a pesquisa e os diferentes caminhos para se prosseguir a problemática são importantes para verificar as possíveis respostas.

Como nosso objetivo é descrever a sequência didática explorando possíveis cenários de desenvolvimento do jogo, a pesquisa é descritiva quanto aos seus objetivos, pois estamos centrados nos recursos do jogo e da tarefa de investigação.

3.1 **O jogo da senha**

O jogo é uma versão adaptada do jogo *Master Mind*, no Brasil conhecido como o Jogo da Senha. O jogo foi criado por Mordecai Meirowitz, por volta de 1970 (Figura 4).

Figura 4 - Versão original do Jogo da Senha

Fonte: https://shopee.com.br/Senha-jogo-de-racioc%C3%ADnio-l%C3%B3gico-i.378590502.10272060685

Esse jogo tem se mostrado um recurso que pode ajudar no desenvolvimento do raciocínio combinatório e é apontado como um jogo lúdico, que pode ser utilizado no processo de ensino e aprendizagem de tópicos de Análise Combinatória. O objetivo do jogo é descobrir uma senha que foi criada pelo adversário. A senha é composta por quatro círculos coloridos, pinos ou números. É necessário descobrir a posição e as cores propostas pelo adversário.

No jogo, são usadas cores disponíveis, de quatro a seis cores distintas, de modo geral, e, em cada tentativa, é dada informação relatando se determinadas cores fazem parte da senha e se estão na posição correta, mas sem informar qual a cor certa. O jogador tem apenas dez tentativas para acertar a senha. O jogo original também está disponível em forma de *software* e em tabuleiros. De modo geral, o formato de tabuleiro pode ser construído com diversos materiais simples e diferentes.

O jogo adaptado para esta pesquisa, denominado O Jogo da Senha Numérica, é uma versão construída a partir do “Jogo da Senha”. A construção de uma versão do jogo utilizando materiais de fácil acesso é uma estratégia para os alunos se familiarizarem com o jogo e criarem, num primeiro momento, um ambiente de interação. Assim, conhecem a forma do jogo e o processo de construção, têm acesso às regras e ao que será feito.

O jogo e a tarefa objeto da pesquisa foram planejados e organizados buscando promover uma harmonia entre a metodologia de jogos e investigação com os procedimentos dos diferentes registros para se obter a senha.

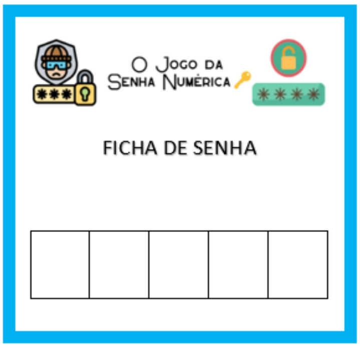
Uma apresentação do modelo de construção, materiais utilizados e regras do jogo seguem no apêndice A da pesquisa. Ele contém um tabuleiro, as cartelas das senhas e um dado de cores, que irá indicar uma quantidade de “dicas”. O tabuleiro e as dicas, além da senha numérica, são as principais adaptações realizadas.

Figura 5 - Modelo do tabuleiro

Fonte: O autor, 2024.

No processo de construção, cogitamos que o jogo fosse desenvolvido em dupla ou dois grupos de até quatro alunos, em que teríamos um denominado desafiador e o outro denominado desafiante. O desafiante irá criar uma senha numérica e o desafiado irá tentar descobrir a senha criada pelo desafiante. A senha criada pelo desafiante deverá conter cinco dígitos distintos, usando apenas os algarismos 0,1, 2, 3 e 4 conforme indica a Figura 6.

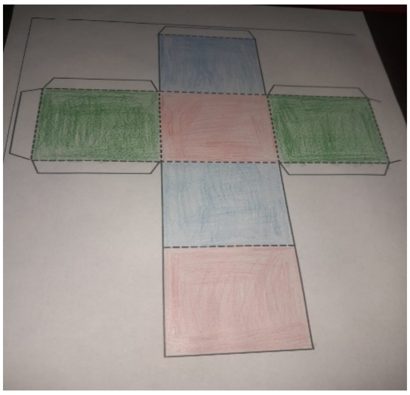
Figura 6 - Ficha da Senha



Fonte: O autor, 2024.

Logo em seguida, o desafiado lançará um dado de cores para verificar quantas dicas ele terá para tentar descobrir a senha. A quantidade de dicas terá correspondência com a cor que aparecerá após o lançamento do dado, e quantas casas do tabuleiro o jogador avançará em caso de acerto: a vermelha terá três dicas disponíveis e o avanço de três casas; a cor azul terá quatro dicas disponíveis e o avanço de duas casas e a cor verde terá cinco dicas e o avanço de uma casa, conforme Figura 7.

Figura 7 - Modelo do dado

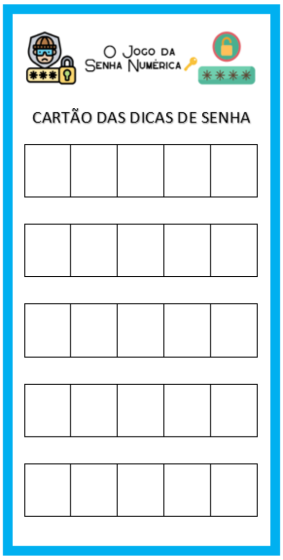


Fonte: O autor, 2024.

As dicas também possuem regras para serem reveladas: a dica 1 mostra a paridade do primeiro e do último dígito da senha; dica 2 mostra se o primeiro e o último dígito estão na posição correta ou não e se os números das extremidades estão na posição corretas ou não; as dicas de 3 a 5 precisam ser escolhidas uma de cada vez, para indicar se o dígito apontado pelo desafiado, dentre os três dígitos centrais, está na posição certa, indicar a paridade do dígito central, ou indicar que um dígito apontado dentre os dígitos centrais está na posição correta ou não.

O jogo ocorrerá em várias rodadas, até que um dos participantes da dupla ou um dos grupos chegue ao final da trilha do tabuleiro. Em cada rodada, será criada uma senha pelo desafiante, que anotará a senha no tabuleiro de senha e dará uma dica ao desafiado, de acordo com a quantidade de dicas que ele tirou no dado. Ao analisar a primeira dica, o desafiado anotará a senha no tabuleiro de dicas e mostrará ao desafiante.

Figura 8 - Cartão dica de senha



Fonte: O autor, 2024.

Após análise, em caso de acerto, será encerrada a rodada e o desafiado avançará a trilha do jogo em correspondência com a cor que saiu no dado (se sair vermelho, avançará 3 casas, por exemplo) e, em caso de erro, será liberada nova dica ao desafiado, obedecendo ao máximo de dicas de acordo com a cor que saiu no dado.

Caso todas as dicas dadas pelo desafiante terminem e o desafiado não acerte a senha, será encerrada a rodada e o desafiado não avançará na trilha. É importante apontar que cada nova dica somente é liberada mediante o erro do desafiado, com exceção do início da partida. Será iniciada uma nova rodada, quando o desafiante acertar a senha (e terá avanço de casas) ou errar a senha após todas as dicas (não avança na trilha).

Na nova rodada, os participantes irão inverter as suas funções no jogo (quem era desafiado, será o desafiante e vice e versa), e assim sucessivamente, até que um dos participantes chegue ao final da trilha, sendo o vencedor do jogo.

Assim, temos uma preocupação com a compreensão do jogo, os registros em cada rodada e como as informações de acertos e erros estão sendo administradas. Estamos englobando a ideia do que seria subjetivo, característica de uma pesquisa qualitativa, em que são expostas sensações, ideias e opiniões no processo de investigação da senha, as diferentes noções, percepções de diferenças e, até mesmo, semelhanças na experiência das jogadas, escolhendo a posição dos números e verificando as dicas.

O processo de descobrir a senha e a sua descrição é muito mais do que simplesmente concluir. Ao investigar e relacionar as diferentes formas de registros para encontrar a possível senha diante das dicas dadas, busca-se retratar como um determinado problema se manifesta na atividade e nas interações de cada jogada e anotação, assim, o significado que o aluno dá ao seu resultado são os focos que podemos utilizar para desenvolver os caminhos de ensino e aprendizagem.

Como a pesquisa não é aplicada, uma simulação da experiência é uma forma de mostrar o possível processo de ensino e aprendizagem, no qual temos um ambiente de jogo que tem uma fonte direta com os alunos e os dados registrados.

Assim, podemos evidenciar que os aspectos do jogo em uma pesquisa qualitativa possuem um caminho coerente para o contexto de processo de investigação de Ponte (2003) e as descrições dos diferentes registros de Duval (2009), de forma a caracterizar uma possível relação de ensino e aprendizagem do conteúdo de Análise Combinatória em sala de aula.

3.2 **A tarefa investigativa**

Realizada a finalização da partida e das possíveis discussões ocorridas durante a aplicação do jogo, produzimos um questionário para ser aplicado. O questionário é tido como uma tarefa investigativa e tem como sugestão ser realizado pela mesma dupla que realizou a partida, assim, os alunos precisam registrar seus possíveis resultados para que juntamente ao professor possam discutir o raciocínio e a resposta.

A tarefa investigativa em conjunto com a versão do jogo teve inspiração através da equipe Jogos e Matemática (2017) que oferece cursos, oficinas, seminários, palestras voltadas para a formação continuada de professores que ensinam matemática através de jogos e, em seu site, possuem uma versão do Jogo Mega Senha e um modelo de atividade que contribuíram para nossa pesquisa.

A nossa versão possui cinco questões construídas a partir do conceito de Ponte (2003) sobre investigação matemática, e temos que o envolvimento ativo do estudante é uma condição fundamental da aprendizagem. Diante da tarefa investigativa, o aluno mobiliza os seus recursos cognitivos, no caso, as partidas que ele teve anteriormente para descobrir a senha, e afetivos, os questionamentos com sua dupla diante das dicas para os erros e acertos para descobrir a senha, com vista a atingir um objetivo. Esse é, precisamente, um dos aspectos fortes das investigações (PONTE, 2003).

O professor precisa, ao aplicar o questionário, seguir e construir as fases de investigação apresentadas por Ponte, Brocado e Oliveira (2013): introdução, realização e discussão. No momento após a partida, o professor realiza a introdução à tarefa, apresentando o questionário. Como um momento inicial, o professor poderia realizar, em conjunto com os alunos, a questão um e, logo em seguida, encaminhar para que as diferentes duplas realizassem a discussão do questionário, fazendo todas as anotações para um possível resultado. Nessa fase de realização, o professor pode ser mediador dos possíveis questionamentos, sempre procurando contribuir com sugestões e apontamentos, não com respostas. Para um melhor controle, o professor pode estipular um tempo nessa etapa antes de partir para a fase da discussão em que os alunos apresentam os resultados e ocorrem considerações sobre o raciocínio combinatório presente.

A estratégia sugerida para a sequência didática construída é que o professor sempre seja um mediador durante a realização da partida do jogo e depois na aplicação do questionário investigativo.

4 **RESULTADOS E ANÁLISES**

Segundo Ponte (2003, p. 2), investigar “[...] não é mais do que procurar conhecer, procurar compreender, procurar encontrar soluções para os problemas com que nos deparamos”. Ao utilizar um jogo com direcionamento na investigação, o professor precisa assumir a posição de proporcionar alguns momentos fundamentais para o caminho da aprendizagem. São nesses momentos em que os alunos poderão ter uma possível compreensão da matemática presente no jogo e, assim, iniciar um estímulo para agir e resolver o desafio.

Uma atividade investigativa possui três etapas de desenvolvimento, conhecidas como apresentação, investigação e discussão (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009). Vamos iniciar o processo de descrição do material desenvolvido a partir da metodologia de investigação de Ponte (2003), apresentando alguns registros de representação interpretados à luz da teoria de Duval (2009). No apêndice da pesquisa, segue uma sugestão de atividade investigativa a ser aplicada de acordo com as interações dos alunos para verificar o processo de investigação. Entretanto, a própria aplicação do jogo inicia uma atividade de investigação.

Na primeira etapa, o professor realiza a apresentação da atividade, ou seja, a apresentação do “Jogo da Senha Numérica”, quais são as regras, o objetivo do jogo e como será jogado, o desenvolvimento da partida e se teremos duplas ou mais jogadores. No segundo momento, temos o início da investigação, com os alunos realizando as jogadas e procurando entender e desenvolver a dinâmica do jogo. De acordo com Ponte, Brocardo, Oliveira (2009), as tarefas investigativas são abertas e necessitam do envolvimento do aluno para a resolução; elas não possuem respostas únicas, ou seja, de acordo com a forma que o aluno vai percorrendo o caminho, pode gerar diferentes conclusões. A situação de jogo incentiva o aluno na investigação e, assim, ocorre uma construção de possibilidade e descoberta.

Nesse momento, o professor observa os alunos jogarem e identifica o que está acontecendo, se está havendo algum tipo de registro, pensamento, interação matemática sobre as situações para descobrir a senha do jogo. O professor pode fomentar a discussão com estabelecimento de conjecturas e hipóteses: de que maneira você chegou a esse resultado? Existe outra possibilidade? Pode haver alguma evidência matemática para encontrar a solução? Na última e terceira etapa, seria a discussão dos resultados dos alunos. Nesse momento, o professor pode realizar uma avaliação dos questionamentos, permitindo saber se os alunos estão progredindo ou se é necessário repensar na sua ação na tarefa.

Para compreender essas etapas, vamos trabalhar com possíveis situações e realizar a análise desses resultados, procurando aprofundar a tarefa em uma investigação baseada no jogo e construindo as três fases que Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) evidenciam para esse tipo de tarefa. Todos esses momentos são construídos a partir de investigação dos alunos e questionamentos do professor para auxiliar na construção do raciocínio de forma a favorecer a aprendizagem matemática.

4.1 **Possível cenário anterior ao desenvolvimento do jogo**

Após a definição dos jogadores, o desafiante escolhe a senha. Temos o primeiro momento conhecido como exploração e compreensão das informações. Antes de definir a rolagem dos dados de cores e ver a quantidade de dicas, o professor pode fazer o questionamento: você consegue escrever as maneiras de encontrar as diferentes senhas sem nenhuma dica? Uma possível resposta sob a forma de um registro está representada no Quadro 7.

Quadro 7 - Possível registro de Representação Semiótica: Língua Materna

"Temos os cincos números 0, 1, 2, 3 e 4 diferentes disponíveis para escolher uma senha com cinco dígitos diferentes. Quando vamos escolher o número que ocupará a primeira posição da senha, temos cinco opções. Determinado o número da primeira posição da senha, independentemente do número escolhido, temos quatro opções de números para colocar na segunda posição da senha, já que não é possível haver repetição. Independentemente do número escolhido para essa posição, restam apenas três opções de números para serem colocadas na terceira posição da senha. Quando escolhemos o número que irá ocupar a terceira posição da senha, sobrarão duas opções de números que podem ocupar a quarta posição da senha e depois apenas uma opção de número para ocupar a última posição da senha".

Fonte: O autor, 2024.

A situação acima poderia ser um registro do aluno diante do questionamento. Para que um sistema semiótico seja um registro de representação, precisa permitir as três atividades cognitivas ligada à semiose, como proposto por Duval (2009), para reconhecimento de uma representação. Assim, também poderíamos encontrar respostas em outras formas de registro, conforme a Tabela 1.

Tabela 1 – Possível registro Semiótica Tabular

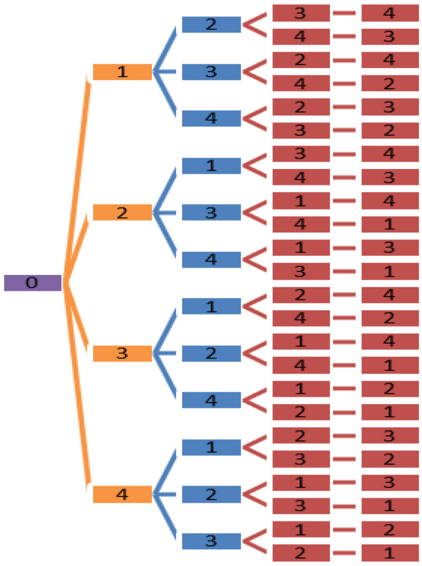
Número escolhido	Números não escolhidos
0	1,2,3,4
1	2,3,4
2	3,4
3	4
4	Nenhum

Fonte: O autor, 2024.

Em geral, quando estamos lidando com escolha e decisão, o aluno interpreta o problema e tenta codificá-lo usando o que conhecemos como “árvore de possibilidades”, sem ao menos conhecer o termo. O professor pode estimular o aluno a realizar outra representação da mesma situação para provocar a investigação.

Duval (2009) apresenta duas atividades cognitivas que são os tipos de transformações de uma representação: o tratamento e a conversão. Os tratamentos são transformações no mesmo sistema de registros, isto é, transformações internas de um registro. No caso, temos um registro tabular e o aluno realiza o mesmo registro na árvore de possibilidades. Nesse tipo de registro, o professor, como sugestão, pode fazer uma situação inicial para auxiliar no raciocínio do aluno, conforme Figura 9.

Figura 9 - Possível registro de Representação Semiótica: árvore de possibilidades



Fonte: O autor, 2024.

A partir dos registros realizados, o professor pode organizar os dados junto aos alunos e verificar se conseguem observar alguma conjectura, avançando para o segundo momento, ou seja, alguma hipótese. No caso, o aluno precisaria identificar uma possível senha, sendo *“01234”* ou *“04312”, por exemplo*. O importante e fundamental é manter a ideia de investigação, na qual Ponte (2003) evidencia que o professor não deve de imediato fazer a interrupção ou atrapalhar a construção do raciocínio do aluno; ele precisa ter paciência e esperar o tempo determinado, para só depois evidenciar os possíveis erros.

Avançando para mais um momento, após verificar os registros e coletar as informações dos alunos, o professor pode realizar a seguinte questão: quantas senhas são possíveis inicialmente sem revelar nenhuma dica?

Dependendo das anotações dos alunos, eles poderiam contar quantas senhas surgiram na árvore das possibilidades, construir possíveis soluções na tabela ou na escrita da linguagem iniciar as evidências. Seria interessante, nesse momento de teste de soluções, o professor apresentar o conceito de contagem, organização e até mesmo de agrupamento. Os alunos podem ter a ideia e irão falar que contagem é o simples fato de contar, deixando o sentido redundante. Mas Morgado e Carvalho (2019) indicam que a contagem é um processo e, para realização, utilizamos estimativa, pareamento e agrupamento. O agrupamento nada mais é que fazer a separação dos elementos de algo, é realizado de forma natural pelo aluno; já o pareamento é juntar e combinar os possíveis dados apresentados. Ao realizar pareamentos, o objetivo é associar e reproduzir um padrão. Assim, o professor pode aprofundar o processo de investigação, que Ponte (2003) define como um ambiente para troca de ideias.

Espera-se que o aluno consiga, a partir da contagem, apresentar um valor, podendo ser correto ou não. Nessa situação, o professor introduzir questões: será que precisaremos sempre construir algum tipo de registro para realizar a contagem? Neste momento, o professor pode introduzir o Princípio Multiplicativo, podendo seguir uma explicação do raciocínio, conforme Quadro 8.

Quadro 8 – Introdução do Princípio Multiplicativo

Observem que em cada uma das cinco etapas, quando escolhemos qualquer um dos números (0, 1, 2, 3 ou 4) para ser um dos dígitos da senha, o total de opções de números que teremos para serem esses dígitos sempre será o mesmo, independentemente do número escolhido. Ou seja, no primeiro dígito da senha, temos cinco opções de números a serem escolhidos; no segundo dígito, temos quatro opções de números a serem escolhidos; no terceiro dígito, temos três opções de números a serem escolhidos; no quarto dígito, temos duas opções de números a serem escolhidos e, no quinto e último digito, apenas uma opção de número a ser escolhido. *Portanto, temos 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120 opções de senhas possíveis sem apresentação de uma dica, considerando que todos os dígitos da senha serão distintos.*

Fonte: O autor, 2024.

Quando isso ocorre, podem surgir perguntas: por que multiplicar o total de opções de cada dígito de senha? Por que o número de opções nos dígitos da senha sempre será o mesmo independentemente do número que for escolhido para cada dígito? Essas perguntas são questões que podem ser introduzidas antes de apresentar o conceito de Análise Combinatória. A partir desse questionamento, o professor pode fazer outro questionamento, por exemplo: será que essa ideia dará certo para senhas utilizando o número 4 no primeiro dígito da senha e o número 0 no último dígito da senha? Essa situação está descrita no Quadro 9.

Quadro 9 – Questionamento sobre possível mudança de senha

No primeiro dígito da senha, temos apenas uma opção de número a ser utilizado, o número 4; no segundo dígito, temos três opções de números para serem utilizados, os números 3, ,2 e 1, já que o número 0 só pode ser usado no último dígito; no terceiro dígito, temos duas opções; no quarto dígito, temos uma opção e, no quinto e último digito, apenas uma opção, o número 0. Portanto, temos 1 x 3 x 2 x 1 x 1 = 6 opções de senhas possíveis, considerando que todos os dígitos da senha serão distintos.

Fonte: O autor, 2024.

Podemos escrever cada uma dessas seis senhas? Essa pergunta pode ser uma questão investigativa para que o aluno faça comparação com o resultado do Quadro 10.

Quadro 10 – Investigação de comparação

41230	*42130*	*43120*
41320	*42310*	*43210*

Fonte: O autor, 2024.

Outras situações podem ser inseridas caso o processo de investigação do conhecimento do aluno esteja comprometido e ele não tenha conseguido compreender a relação dos registros que esboçou com as intervenções do professor. Isso corrobora as ideias que Duval (2011) apresenta de que os objetos matemáticos não estão acessíveis, em um primeiro momento, à percepção. Eles são acessados por meio de suas diferentes representações e várias delas podem servir para ter acesso a um mesmo objeto. Os alunos precisam ser motivados no processo de investigação, construindo registros para tentar entender o que está acontecendo no processo das jogadas e nos questionamentos apontados pelo professor.

Seria interessante, nesse processo de construção, entrar no momento da investigação que Ponte (2003) aponta como "justificativa", mostrando que o que foi apresentado e registrado possui um sentido. No caso, o professor pode explicar o conceito matemático presente na situação do Princípio Fundamental da Contagem (PFC), também conhecido como Princípio Multiplicativo.

O propósito do Princípio Multiplicativo é realizar a contagem dos números de elementos de um determinado conjunto finito em um menor número de etapas sucessivas e independentes possíveis. Morgado e Carvalho (2019) apontam que, para realizar uma determinada escolha, formada por dois tipos de momentos sucessivos e que seja independente, se o primeiro momento pode ser feito de ***m maneiras*** e o segundo momento pode ser feito de ***n maneiras***, então, essa escolha pode ser feita de *m x n* maneiras e isso é válido para uma quantidade qualquer de momentos em que se possa dividir a escolha.

De forma a avaliar o conhecimento da investigação, o professor mediador pode inserir uma questão de verificação para discussão. Assim, seguindo as etapas de investigação de Ponte, Brocardo e Oliveira (2009): “Quantas senhas podemos montar de forma que o primeiro dígito seja o número 4?” Conforme Quadro 11, espera-se que o aluno desenvolva o que o professor apontou sobre o Princípio Multiplicativo.

Quadro 11 – Desenvolvimento da discussão

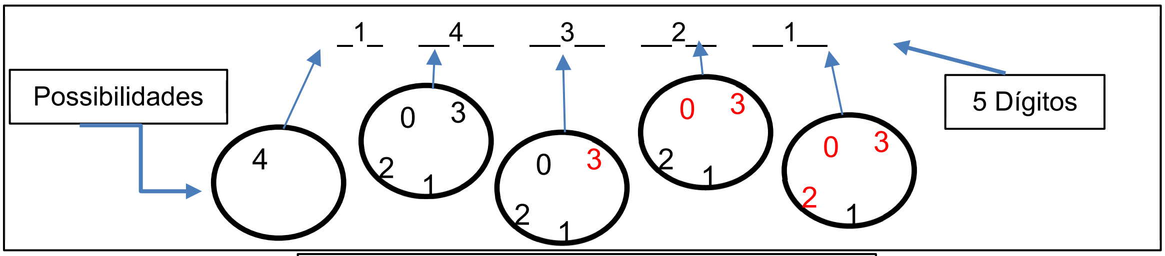
No primeiro dígito da senha temos apenas uma opção de número, que é o número 4; no segundo dígito da senha temos quatro opções de números, que são 0, 1, 2 e 3; no terceiro dígito temos três opções de números; no quarto dígito temos duas opções de números e no quinto e último digito, temos apenas uma opção. *Portanto, temos 1 x 4 x 3 x 2 x 1 = 24 opções de senhas possíveis sem apresentação de uma dica, considerando que todos os dígitos da senha serão distintos.*

Fonte: O autor, 2024.

A expectativa é que nesse momento o aluno consiga, a partir da aplicação do Princípio Multiplicativo, apresentar a quantidade de senhas, podendo ser correto ou não.

O professor deve deixar livres as formas que o aluno venha representar sua resposta, mas seria interessante trabalhar a conversão entre os registros que, segundo Duval (2011), são imprescindíveis para uma compreensão dos objetos matemáticos. Um exemplo para esse tipo de registro e conversão podemos ver no Quadro 12, utilizando a mesma questão proposta anteriormente, indicando que o professor pode realizar a variação de quantidade de dígitos da senha.

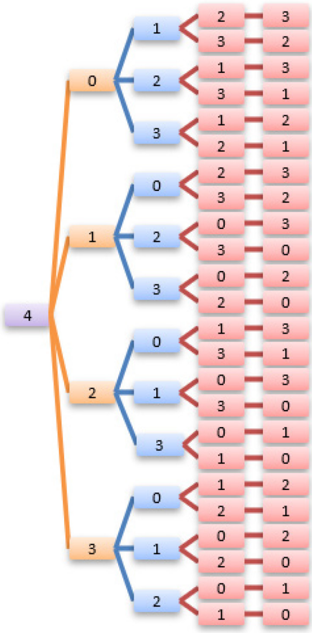
Quadro 12 – Registro e conversão da senha



Registro de Representação Figural

No primeiro dígito da senha, temos apenas uma opção, o número 4; no segundo dígito, temos quatro opções de números, 0, 2, 3, 4; no terceiro dígito, temos três opções; no quarto dígito, temos duas opções e, no quinto e último dígito, apenas uma opção de número a ser escolhido.

Registro de Representação Língua Materna



Registro de Representação Árvore de Possibilidades

Fonte: O autor, 2024.

A utilização de três registros diferentes: registro figural, registro língua materna e registro árvore de possibilidades estabelecem a solução para a questão proposta e, juntas, podem ser utilizadas pelo professor para fazer o registro simbólico do Princípio Multiplicativo *1 x 4 x 3 x 2 x 1 = 24*.

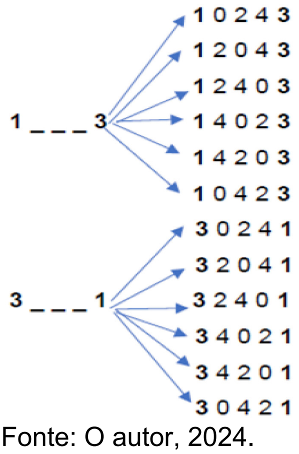
Essas situações descritas apresentam o caminho de uma possível atividade de investigação utilizando o jogo, já que envolve os elementos propostos por Ponte, Brocardo e Oliveira (2013). Além disso, os momentos propostos na investigação, alinhados às três etapas de desenvolvimento descritas por Ponte (2003), possibilitam para a aula um espaço de aprendizagem em que os alunos realizam diferentes registros e conversões e podemos alinhar a investigação ao uso da TRRS de Duval (2011).

4.2 **Possível cenário durante o desenvolvimento do jogo**

Compreendidas as formas de intervir fomentando a investigação e os registros, passamos a descrever o desenvolvimento Jogo da Senha Numérica, inserindo as situações em que apareçam pistas para o desafiante encontrar a senha, conforme o lançamento do dado de cores. Para isto, vamos explorar a ideia dos registros semióticos a partir da árvore de possibilidades.

Consideremos como exemplo a situação: foram escolhidos o desafiado e o desafiante. Então, o desafiado joga o dado e sai a cor verde na face de cima. Pelas regras do jogo, o desafiado tem direito a cinco dicas e, em caso de acerto da senha, avançará uma casa na trilha. Se a **primeira** dica do desafiante for *"os números das extremidades são ímpares",* o desafiado pode pensar nas possibilidades.

Figura 10 - Registro de Representação Semiótica árvore de possibilidades do problema



Fonte: O autor, 2024.

Então, o desafiado apresenta a senha ao desafiante, por exemplo, ***1*** 0 2 4 ***3***. O desafiante analisa a senha e verifica que está incorreta. Logo, ele fala a segunda dica: os números 1 e 3 das extremidades estão nas posições corretas. Assim, o desafiado pensa nas dicas e investiga suas possibilidades restantes.

Figura 11 - Registro de Representação Semiótica Representação Numérica do problema proposto parte 2

1 0 2 4 **3**
1 2 0 4 **3**
1 2 4 0 **3**
1 4 0 2 **3**
1 4 2 0 **3**
1 0 4 2 **3**

Fonte: O autor, 2024.

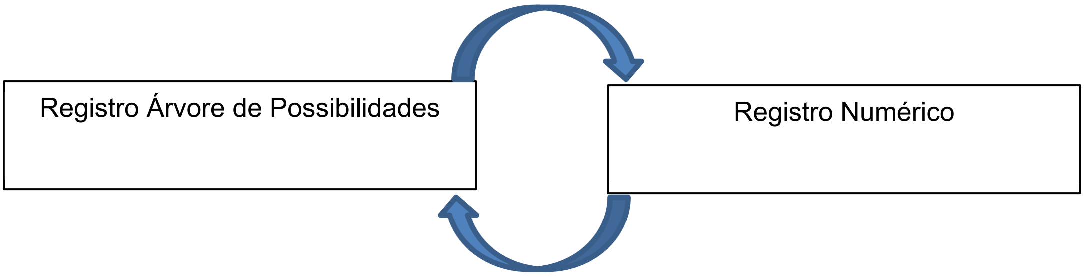
O desafiado apresenta uma senha ao desafiante, por exemplo: **1** 4 2 0 **3**. O desafiante analisa a senha e verifica que está incorreta, logo, ele fala a terceira dica: o número 4 está na posição correta. Então, o desafiado pensa nas dicas e investiga suas possibilidades restantes, que são: 1 4 0 2 3 ou 1 4 2 0 3.

Daí, como ele já sabe que a senha 1 4 2 0 3 não é a correta, pois já foi apresentada antes ao desafiante, então o desafiado apresenta a senha ao desafiante: 1 4 0 2 3. O desafiante analisa a senha e verifica que está correta. Portanto, agora, a rodada é encerrada e o desafiado avança uma casa na trilha.

Na próxima rodada, os participantes trocam de funções, o desafiado será o desafiante e vice e versa. E todo o processo do jogo se reinicia, ocorrendo sucessivas rodadas até um dos participantes chegar ao final da trilha. Este será o vencedor do jogo.

Na primeira rodada do exemplo acima, o desafiado pensou em todas as dicas e possibilidades, formando uma árvore de possibilidades para registrar seu pensamento e, quando não acertou a senha, organizou os dados em coluna, refletiu e deu uma possível resposta. Continuando incorreta, ele organizou seu registro a partir das dicas dadas e, assim, nas duas rodadas seguintes, conseguiu encontrar a senha formulada pelo desafiante, utilizando dois tipos de registros e a interação entre eles de forma a desenvolver a solução, conforme Figura 12.

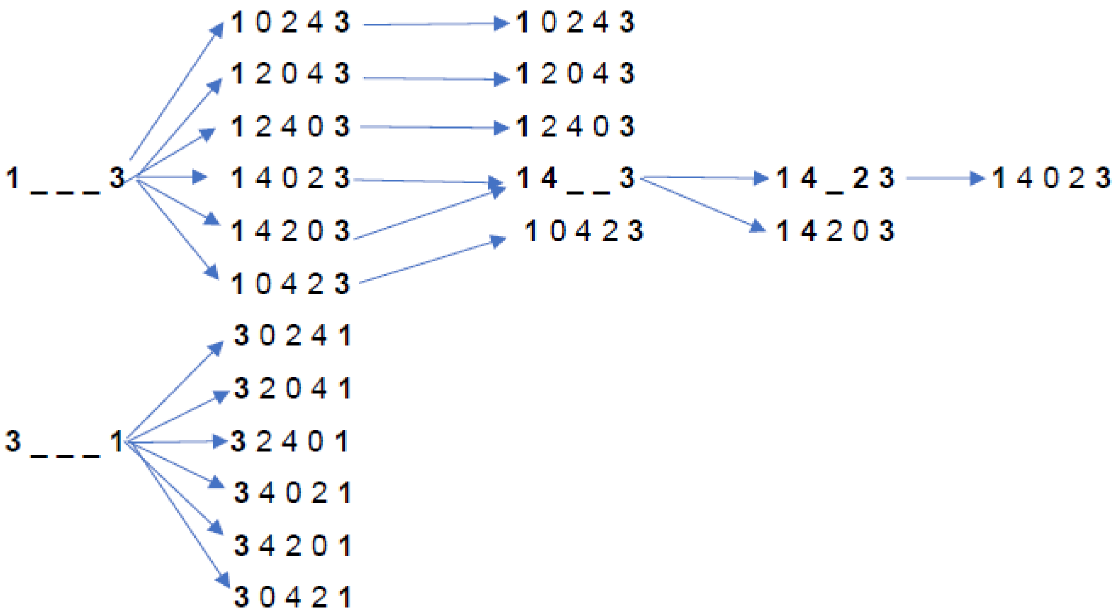
Figura 12 - Transformações de registro de Representação Semiótica



Fonte: O autor, 2024.

Duval (2003) declara que não há aprendizagem em matemática sem distinção entre o objeto matemático e sua representação. Essa distinção, por sua vez, se dá mediante o trânsito e a coordenação. No caso, ambas as representações são procedimentos para obter a senha. Nesse momento, iniciamos o tema Princípio Aditivo, no qual Morgado e Carvalho (2019) indicam os casos em que os eventos são interligados pelo conectivo "ou", característico de eventos mutuamente exclusivos. Observando toda a situação em um único registro, podemos ter a representação da Figura 13.

Figura 13 - Solução do problema com o registro de Representação Semiótica árvore de possibilidades



Fonte: O autor, 2024.

Segundo Duval (2012), em uma conversão, temos a passagem ou transformação de um registro de representação semiótica para outro, também semiótico, em um novo sistema ou registro. A aprendizagem em matemática ocorre quando o indivíduo consegue estabelecer a passagem de um registro de representação para outro em um novo sistema. Portanto, vamos descrever a mesma situação anterior, mas utilizando a conversão para o registro numérico.

O desafiado lança o dado e sai cor verde na face voltada para cima. Com isso, o desafiado possui cinco dicas conforme as regras. A primeira dica foi: *o primeiro e o último dígito são ímpares.* Então, o desafiado já saberá que nas extremidades serão:

1 _ _ _ **3** ou **3** _ _ _ **1**

O pensamento é que cada **"_"** será ocupado pelos números restantes 0, 2 e 4. Portanto, teremos 3 opções de números para ocupar a primeira casa vazia, 2 opções na segunda vazia e 1 opção na terceira casa vazia. Aplicando o Princípio Multiplicativo, 3 x 2 x 1 = 6 opções de senhas diferentes para:

1 _ _ _ **3** ou **3** _ _ _ **1**

Portanto, pelo Princípio Aditivo, para cada uma teríamos 6 + 6 = 12 opções de senhas diferentes para o desafiado escolher. O desafiado escolhe uma das doze senhas, por exemplo:

1 0 2 4 **3**

O desafiante analisa a senha e verifica que está incorreta. Então, o desafiante fala a segunda dica: *o primeiro e o último dígito estão na posição correta*. Logo, o desafiado já sabe que a senha é da forma:

1 _ _ _ **3**

Assim, teremos 3 opções de números para ocupar a primeira casa vazia (0, 2 e 4), duas opções na segunda casa vazia e uma opção na terceira casa vazia: 3 x 2 x 1 = 6 opções de senhas diferentes somente.

Agora, o desafiado escolhe uma das seis senhas, por exemplo:

1 4 2 0 **3**.

O desafiante analisa a senha e verifica que está incorreta. Então, o desafiante fala a terceira dica: *o número 4 está na posição correta.* Logo, o desafiado já sabe que a senha é da forma:

1 4 _ _ 3

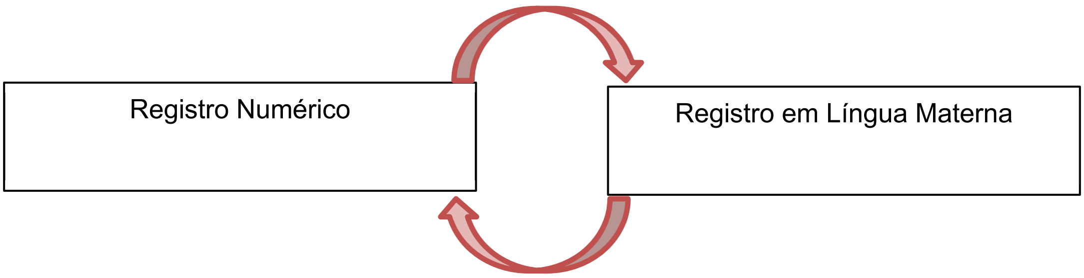
Portanto, ele terá duas opções de números para ocupar a primeira casa vazia (0 ou 2) e uma opção de número na segunda casa vazia: 2 x 1= 2 opções de senhas diferentes, somente. Mas como o desafiado já sabe que a senha 1 4 2 0 3 não é a correta, pois já foi apresentada antes ao desafiante, então o desafiado apresenta a senha ao desafiante:

1 4 0 2 **3.**

Daí, o desafiante analisa a senha e verifica que está correta.

Resumindo o que ocorreu na primeira rodada do exemplo acima, o desafiado pensou em todas as dicas e possibilidades, formando várias possibilidades de registros numéricos e de registros em língua materna de senhas até chegar na senha correta, conforme Figura 14.

Figura 14 - Transformações de registro de Representação Semiótica Representação



Fonte: O autor, 2024.

Na situação, temos dois tipos de registros em que pode ocorrer a conversão, para a construção da senha. Começando com o registro numérico em que, a partir das dicas, temos a apresentação em escrita da língua materna, investigando e conjecturando a resposta da senha à medida que ocorre erro e acerto. Dessa forma, temos o que Ponte (2003) explica como investigação, exploração e avaliação e, assim, a partir de um erro por não encontrar a senha, foi construído um novo registro de possibilidades, obedecendo as dicas dadas pelo desafiante:

1 _ _ _ 3, que gerarão 1 x 3 x 2 x 1 x 1 = 6 opções de senhas.
3 _ _ _ 1, que gerarão 1 x 3 x 2 x 1 x 1 = 6 opções de senhas.
Com isso, 6 + 6 = 12 opções de senhas.
1 _ _ _ 3, que gerarão 1 x 3 x 2 x 1 x 1 = 6 opções de senhas.
1 4 _ _ 3, que gerarão 1 x 1 x 2 x 1 x 1 = 2 opções de senha.
1 4 0 2 **3** única opção de senha restante, que é a correta.

Encontrada a senha, encerra-se a rodada e o desafiado avança uma casa na trilha. Na próxima rodada, os participantes trocam de funções, o desafiado será o desafiante e vice e versa. E todo o processo do jogo se reinicia, ocorrendo sucessivas rodadas até um dos participantes chegar ano final da trilha, o vencedor do jogo.

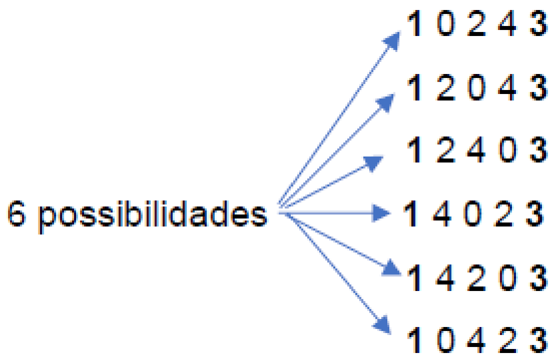
No exemplo proposto, podemos destacar três tipos de registros de representação possíveis ao se trabalhar a investigação no jogo da Senha Numérica: árvore de possibilidades, numérico e língua materna. Duval (2012) apresenta que as diferentes pluralidades de registros de representação semiótica podem aumentar a capacidade cognitiva dos alunos e, nestes termos, a aprendizagem em matemática tem uma formação quando há a proposição de atividades em que se contempla uma diversidade desses registros, fazendo uso da conversão. Devemos lembrar que o tratamento é uma transformação interna ao próprio registro e "[...] o cálculo é um tratamento interno ao registro de uma escrita simbólica de algarismos e letras" (DUVAL, 2009, p. 57). Nesse caso, o cálculo realizado em cada uma das diferentes conversões é uma forma do tratamento trabalhado.

Através do jogo, o professor pode trabalhar a investigação com os três tipos de registros mais recorrentes e, assim, construir o conceito matemático do Princípio Multiplicativo e Aditivo, à medida que não se tem dicas ou com uma quantidade de dicas.

No exemplo que apresentamos, nos registros descritos acima, o aluno poderá ser capaz de fazer a conversão do registro numérico para o registro da árvore de possibilidades, obedecendo as dicas do jogo:

Dica 1: *o primeiro e o último dígito são ímpares.* Temos **1 _ _ _ 3**, que gerarão 1 x 3 x 2 x 1 x 1 = 6 possibilidades de senha para o aluno pensar. Fazendo, então, a conversão entre os registros:

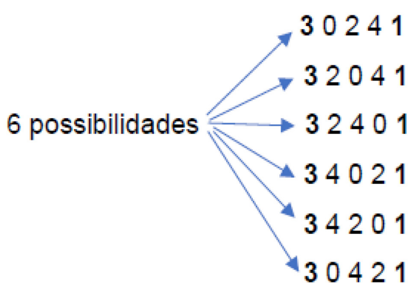
Figura 15 - Solução do problema com Conversão parte 1



Fonte: O autor, 2024.

Ou temos **3 _ _ _ 1,** que gerarão 1 x 3 x 2 x 1 x 1 = 6 possibilidades de senha para o aluno pensar. Fazendo, então, a conversão entre os registros.

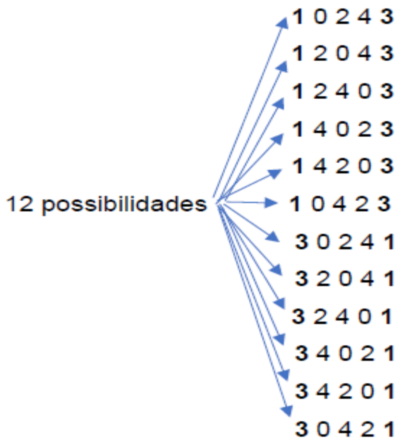
Figura 16 - Solução do problema com conversão parte 2



Fonte: O autor, 2024.

Nessa etapa, o aluno teria, no total, 6 + 6 = 12 possibilidades de senha para pensar, utilizando apenas a primeira dica. Fazendo a conversão total entre os registros, utilizando apenas a primeira dica.

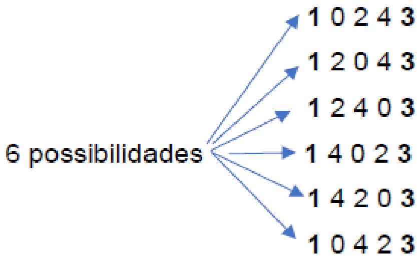
Figura 17 - Solução do problema com conversão parte 3



Fonte: O autor, 2024.

O desafiado, então, escolhe uma das doze senhas, por exemplo: **1** 0 2 4 **3.** O desafiante analisa a senha e verifica que está incorreta. O desafiante fala a segunda dica: *o primeiro e o último dígito estão na posição correta*. E o desafiado pensa nas possibilidades numéricas: **1 _ _ _ 3**, que gerarão 1 x 3 x 2 x 1 x 1 = 6 possibilidades de senha para o aluno pensar, fazendo a conversão entre os registros.

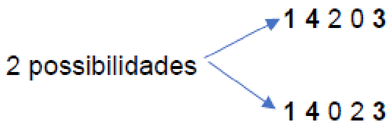
Figura 18 - Solução do problema com conversão parte 4



Fonte: O autor, 2024.

O desafiado escolhe uma das seis senhas, por exemplo: **1** 4 2 0 **3**. O desafiante analisa a senha e verifica que está incorreta. Então, o desafiante fala a terceira dica: *o número 4 está na posição correta. O* desafiado pensa nas possibilidades numéricas: **1 4 _ _ 3**, que gerarão 1 x 1 x 2 x 1 x 1 = 2 possibilidades de senha para o aluno pensar. Fazendo a conversão entre os registros.

Figura 19 - Solução do problema com conversão parte 5



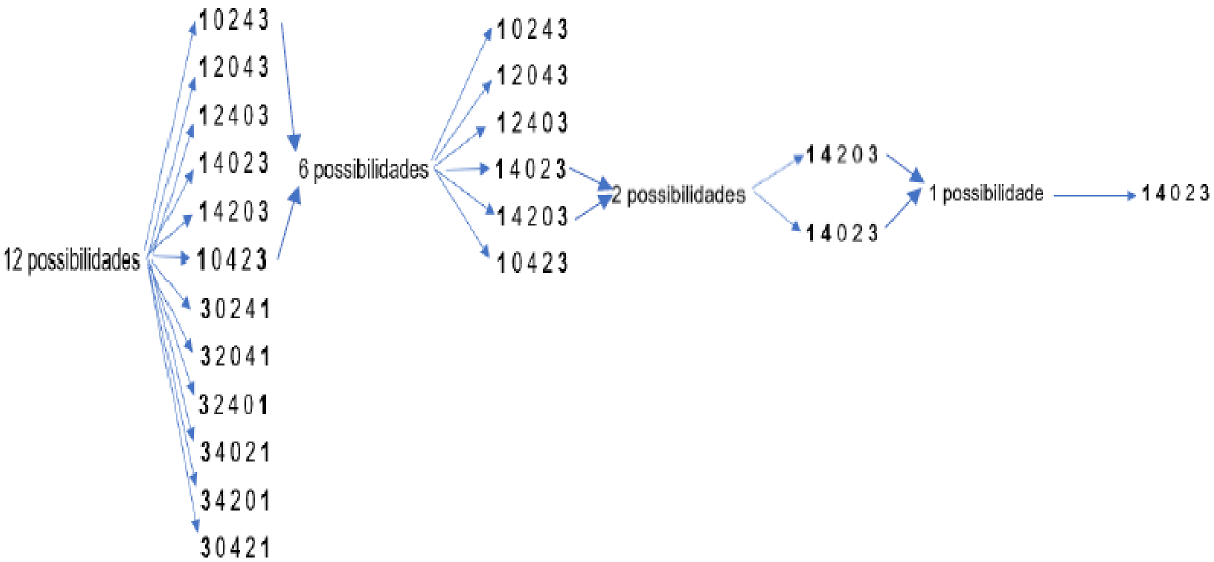
Fonte: O autor, 2024.

Como a senha 1 4 2 0 3 já foi apresentada anteriormente ao desafiante, então só resta uma possibilidade de senha para o aluno pensar. Fazendo a conversão entre os registros.

1 possibilidade → **1 4** 0 2 **3**, que é a senha correta.

Com isto, resumimos as conversões possíveis entre os registros desde o início da primeira rodada.

Figura 20 - Solução do problema com conversão parte final



Fonte: O autor, 2024.

A partir do exemplo apresentado com a situação de dicas, podemos evidenciar e descrever registros de representação semiótica de três formas. Uma mais simples, na língua materna, em que se constrói o raciocínio e duas em que se conduz um pensamento de construção de solução, realizando a conversão entre a árvore de possibilidades e o registro numérico. Sendo assim, é possível realizar tratamentos operatórios específicos, justamente porque cada um deles fornece um determinado ponto de vista, um sentido diferente do mesmo objeto matemático. Isto indica o que

Duval (2009) define como tratamento, que é a transformação da representação em outra equivalente, porém permanecendo no mesmo registro abordado inicialmente e a conversão é a transformação da representação em que se muda de registro, conservando o objeto matemático denotado.

Dessa maneira, implicará também um trabalho cognitivo diferente. Temos três registros de representação semióticas distintos do mesmo objeto matemático produzidos segundo um sistema semiótico, munido de regras, convenções e códigos próprios construídos a partir da Teoria de Duval (2012).

Na utilização do jogo, podemos descrever esses registros, pois são os que mais aparecem em uma atividade de investigação quando propostos exercícios de Análise Combinatória. As outras formas de registros podem aparecer, porém, segundo Duval (2003),

> [...] a funcionalidade da tríade semiótica, no que tange a aprendizagem da matemática, pode ser traduzida em termos de registros de representação semiótica (signo utilizado), objetos matemáticos (a referência) e o sentido (conteúdo do registro utilizado). Ou seja, o processo de conceitualização em matemática implica a coordenação de ao menos dois registros de representação que se referem ao mesmo objeto matemático, manifestada pela rapidez e pela aplicabilidade da atividade cognitiva de conversão (DUVAL, 2003, p. 195).

Quando estabelecemos a conversão entre até dois registros de um mesmo conteúdo, estamos no que a Teoria procura contribuir para o ensino de matemática. A utilização do jogo para introduzir, amadurecer e praticar o conteúdo matemático por meio da investigação pode preparar o aluno de forma diferenciada, trazendo um ambiente de familiarização, troca de ideias e despertar estudante para a matemática.

Segundo Grando (2010), o jogo deve possuir a função de resgatar as explorações, as investigações pertencentes ao processo de relação do aluno com a realidade na qual está inserido, a fim de que tais experiências possibilitem dar sentido à formulação dos conceitos matemáticos desencadeados pelo momento.

O uso do jogo com um propósito, não sendo o “jogo pelo jogo” ou apenas criar um momento de jogo, ou seja, a busca por um ensino que considere o aluno como sujeito do processo, que seja significativo para ele e lhe proporcione um ambiente favorável à imaginação, à criação, à reflexão, alinha-se à ideia de Grando (2010). Essa construção pode possibilitar ao aluno o prazer ao aprender, não pelo utilitarismo, mas pela investigação, ação e participação coletiva de um "todo" que constitui uma sociedade crítica e atuante.

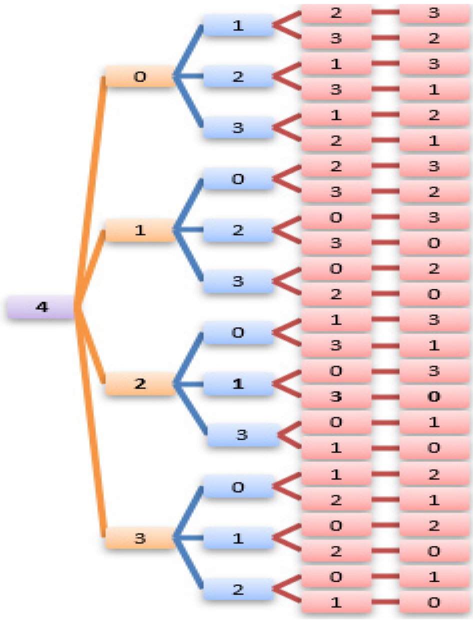
4.3 **Possível cenário durante o questionário**

Após a aplicação do jogo e dos diversos contatos dos alunos durante a partida, a última etapa é a tarefa investigativa. O professor apresentará o questionário aos alunos, indicando que eles devem fazer a exploração das questões e buscar detalhar o raciocínio construído. Segundo Ponte (2009), a inserção de tarefas investigativas em sala de aula envolve uma participação efetiva do professor na elaboração de atividades que despertem o interesse dos estudantes e, ao mesmo tempo, envolvam conceitos com os quais deseja trabalhar. Isto exige que o professor esteja preparado para compreender e respeitar as estratégias apresentadas pelos alunos, bem como a auxiliá-los na busca de estratégias e reflexão sobre os resultados encontrados.

Em relação à primeira questão do questionário *“Você consegue escrever as maneiras de encontrar as diferentes senhas sem nenhuma pista?”*, a primeira impressão que pode surgir como resposta o *‘não’*. O não estaria relacionado com o fato de que o aluno não tem inicialmente nenhum caminho, mas o professor pode sugerir um caminho inverso, dando uma possível senha para o aluno escrever os possíveis resultados ou, até mesmo, um pensamento do próprio aluno em relação à senha

Pensemos que a senha seja o número *42130*. Para chegar ao resultado, o aluno poderia pensar em escrever na forma da Figura 21, já que, no decorrer da partida, ele teve situações para descobrir a senha.

Figura 21 - Possível solução da questão 1



Fonte: O autor, 2024.

A questão de número um na tarefa é uma maneira de o professor visualizar uma possível contagem, apontada por Morgado e Carvalho (2019) como o primeiro momento de contato com situações de raciocínio combinatório, ou seja, realizar a separação dos números, agrupar e, assim, visualizar as possíveis senhas presentes.

O professor pode, a partir da situação um, identificar as possíveis construções de senhas e visualizar se o aluno irá conseguir responder à questão dois: *"Quantas senhas são possíveis inicialmente sem revelar nenhuma dica?"* Nessa etapa, o professor precisa ter atenção e ser o mediador, como Ponte (2003) indica, para que, a partir da questão um e da questão dois, os alunos consigam identificar o agrupamento, separação e contagem, encontrando a possível solução a partir de um esquema e da contagem de situações desse esquema (MORGADO, 1991).

Na questão 3: *"Escreva uma senha qualquer. Depois, procure refletir sobre quantas senhas poderiam ser criadas iniciando com o primeiro dígito da senha que escreveu. Explique de que forma você pensou (pode utilizar desenhos e esquemas)"*, o aluno é novamente levado ao processo de investigação. Ponte (2003) demonstra que, no desenvolvimento de tarefas investigativas, ocorre a observação na retomada de procedimentos. Os diferentes contatos e pensamentos do aluno podem levá-lo a fazer um esquema conforme a Figura 22.

Figura 22 - Possível solução da questão 3

Senha: 01234 – Total 24 Senhas

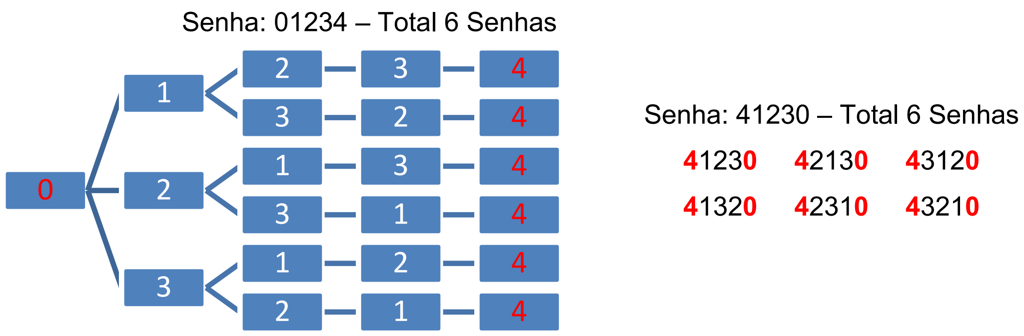
01234	**0**2134	**0**3124	**0**4123
01243	**0**2143	**0**3142	**0**4132
01324	**0**2314	**0**3214	**0**4213
01342	**0**2341	**0**3241	**0**4231
01432	**0**2413	**0**3412	**0**4321
01423	**0**2431	**0**3421	**0**4312

Fonte: O autor, 2024.

Esse é um registro numérico para ilustrar a situação, um dos diferentes registros para a resolução de um exercício no campo do Princípio Multiplicativo, o qual Duval (2009) explica que vai além da organização das informações, pois, ao realizar esse tipo de ação, o aluno pode ser conduzido ao pensamento da compreensão e da significação dos conceitos na questão proposta. Inclusive, na etapa da organização, podemos ter aplicado o que Morgado e Carvalho (2019) falam de pareamento das informações, realizando a associação entre os números organizados e a quantidade estabelecida.

Na questão 4, *“Utilizando o número 4 no primeiro dígito da senha e o número 0 no último dígito da senha, escreva quantas senhas são possíveis de formar. Se trocarmos e colocarmos o número 0 no primeiro digito e o número 4 no último digito, teremos quantas senhas? Essas quantidades são diferentes? Explique seu raciocínio”*, ocorre um avanço na investigação, já que o aluno é colocado em uma situação de comparação de informações. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) é a partir de situações assim que o aluno descobre relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos (Figura 23).

Figura 23 - Possível solução da questão 4

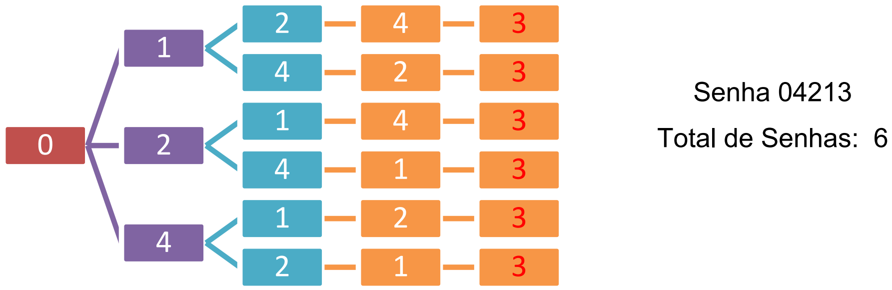


Fonte: O autor, 2024.

Uma possível sugestão de mediação do professor seria indicar ao aluno que utilize diferentes representações na construção da senha, assim, o estudante poderia ter um raciocínio de forma que, mesmo fazendo diferentemente e obtendo senhas diferentes, o total é o mesmo quando alteramos os números 4 e 0 de posição. Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) sinalizam a importância de os alunos fazerem diferentes registros escritos no trabalho de investigação, pois é nesse momento de registrar seu pensamento que os alunos conseguem registrar e explicar suas ideias. Essa mesma sugestão de diferentes representações segue o que propõe Duval (2009), que a efetiva aprendizagem das propriedades de um objeto ocorre justamente na passagem de um registro para outro, porque as diferentes representações apresentam conteúdos e atributos diferentes sobre um mesmo objeto.

Na última questão 5 temos que *"Escreva uma senha que comece com o dígito par e termine com um dígito ímpar. Construa uma árvore de possibilidades e explique em que parte você utilizou o princípio aditivo e multiplicativo"*. Segundo Morgado e Carvalho (2019), a árvore de possibilidades é uma forma de visualização do aluno que permite interpretar toda a essência envolvida em situações para desenvolver o raciocínio combinatório. Um possível cenário ocorre na Figura 24.

Figura 24 - Possível solução da questão 5



Fonte: O autor, 2024.

A construção da árvore de possibilidades permite ao aluno encontrar o total de senhas com o formato da questão. Ao explicar o Princípio Multiplicativo ou Aditivo nessa construção, espera-se que o aluno observe que no primeiro dígito da senha temos apenas uma opção, o número par escolhido (no caso 0), e, no último digito, temos apenas uma opção de ímpar a ser escolhido (no caso 3). Assim, teremos apenas três opções de números para o segundo, terceiro e quarto dígito. O aluno pode pensar que, no segundo dígito da senha, temos três opções de números, o 1, 2 e 4; no terceiro dígito, temos duas opções de números; no quarto dígito, temos uma opção de número. Portanto, temos $1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$ opções de senhas possíveis.

Desta forma, a aplicação do questionário investigativo é uma forma de desperta o interesse do aluno além do jogo, levando-o ao envolvimento e, ao mesmo tempo, formalizando e aprofundando os conceitos com os quais já trabalharam na partida. É importante destacar que o professor precisa estar preparado para compreender e respeitar as estratégias apresentadas pelos estudantes, bem como auxiliá-los na busca de estratégias e reflexão sobre os resultados encontrados, conforme recomendado na investigação matemática.

4.4 **Análise dos resultados**

A aplicação do jogo e a realização da atividade investigativa num momento em que a escola, cada vez mais, precisa pensar em seu papel pode provocar uma mudança positiva na rotina escolar e no processo de ensino e aprendizagem. Iniciar esse movimento é o que Grando (2010) aponta como o início de superação à apenas a aprendizagem tradicional da matemática e, assim, mostrar um caminho para identificar problemas pedagógicos como dificuldades da disciplina, apatia, exclusão e indisciplina.

A tarefa investigativa alinhando o jogo e o questionário procuram construir diferentes caminhos que segundo Ponte (2003) desafiam os alunos a assumirem um papel ativo no desenvolvimento e, de fato, fazerem e aprenderem matemática ao agirem como matemáticos, ao testar hipóteses e realizar conjecturas. Apesar de o desenvolvimento do jogo ter como objetivo o conteúdo dos Princípios Multiplicativo e Aditivo, buscamos levar em consideração o próprio conceito de atividade investigativa segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) em que não devemos utilizá-la apenas como forma para introduzir ou ensinar conteúdos de matemática, mas também como um modo para o aluno desenvolver ações semelhantes às de um matemático. Essa utilização traz a possiblidade de construção do conhecimento do aluno de maneira dinâmica e ativa, já que no processo, eles estão mais propícios à colaboração, construção de soluções, análise de erros e verificação dos acertos, possibilitando uma reflexão sobre os conceitos que estão sendo discutidos, ou seja, construir a senha, verificar a senha, organizar a senha etc.

Essas são características presentes nas atividades de natureza investigativa, em que ocorre uma capacidade de argumentação, prova e troca de ideias (PONTE, 2003) e ao mesmo tempo proporciona ao professor condições de analisar e de compreender o desenvolvimento do raciocínio do aluno e de dinamizar a relação ensino e aprendizagem, por meio de reflexões sobre as jogadas realizadas pelos jogadores, o que Grando (2010) destaca para o campo das vantagens de utilização de um jogo.

No desenvolvimento das partidas do jogo e na investigação, seja através das jogadas ou do questionário, os diferentes registros de soluções vão surgindo, podendo ser de forma natural ou através da mediação do professor. Eles vão sendo desenvolvidos nesse processo de construção da senha, seja com árvore de possibilidades, tabela, registro numérico, registro em língua materna ou registro figural. Assim, ocorrem as diferentes representações, e podemos encontrar na TRRS (DUVAL, 2012), que a essência da compreensão de um conceito matemático está em não confundir o objeto matemático com suas representações, e em reconhecê-lo em suas diferentes formas. Diante desses diferentes registros de representação semiótica para a construção da senha, o professor que se utiliza do jogo e do questionário investigativo pode explorá-los nas diferentes tarefas, proporcionando uma articulação entre esses. Em aulas de investigação, o papel do professor, como mediador, é fundamental, pois, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2005):

> Existe, por vezes, a ideia de que, para que o aluno possa, de fato, investigar, é necessário deixá-lo trabalhar de forma totalmente autônoma e, como tal, o professor deve ter somente um papel de regulador da atividade. No entanto, o professor continua a ser um elemento-chave mesmo nessas aulas, cabendo-lhe ajudar o aluno a compreender o que significa investigar e aprender a fazê-lo (PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA, 2009, p. 26).

Portanto, devemos ressaltar a importância do papel do professor como mediador nesses momentos.

Apesar de não ser usada uma avaliação direta para a aprendizagem, ao utilizar o jogo, o pensamento de Grando (2000) em relação a uma atividade didática que use um jogo é feita a partir dos objetivos iniciais, se estes estão sendo alcançados e se é necessário melhorar alguns aspectos da abordagem. No caso, esses objetivos são a análise do erro e do acerto pelo aluno na construção da senha, que pode se dar de maneira natural, proporcionando a reflexão e a recriação do conceito dos princípios multiplicativo e aditivo que estão sendo discutidos.

O professor tem condições de analisar e compreender o desenvolvimento do raciocínio do aluno e de dinamizar o processo de aprendizagem, por meio de questionamentos sobre as jogadas realizadas pelos jogadores, evitando assim, que ocorra uma aprendizagem puramente mecânica de conceitos abstratos e artificiais, como acontece, muitas vezes, com as tradicionais listas de exercícios. A atividade de conversão de Duval (2003) permite reconhecer o mesmo objeto em suas diferentes representações, e proporciona a coordenação entre diferentes registros de um mesmo objeto, pode ser uma forma do professor avaliar o desenvolvimento do aluno, pois passar de um registro de representação a outro não é somente mudar, é também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto, tudo isso alinhado ao processo investigativo de Ponte (2003) possibilitando uma avaliação da aprendizagem pelo professor de forma contínua.

A análise da atividade investigativa alinhada com aplicação do jogo e a verificação dos diferentes registros a partir da TRRS, podem evidenciar que quando o aluno constrói a senha a partir de um registro, o processo de aprendizagem que foi mobilizado pode esclarecer as estratégias construídas pelos alunos para a investigação de problemas, podendo evidenciar hipóteses levantadas e os conceitos utilizados, o que pode colaborar para o esclarecimento de alguns conteúdos e para a superação de concepções equivocadas que eles possuem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na maioria das escolas, encontramos uma realidade cotidiana do ensino tradicional, onde o professor apresenta de forma teórica o assunto por meio de uma exposição em aula e o aluno assume a função passiva com o objetivo de aprender os conhecimentos apresentados. Tudo isso voltado, principalmente, para o processo de memorização. Deixemos claro que o ensino tradicional tem sua importância, mas trabalhar apenas com esse tipo de metodologia, pode criar um ambiente de sala de aula com uma matemática cada vez mais longe da realidade, com poucos ou nenhum significado, cada vez menos atrativa. Com isso, trazem-se poucas reflexões e questionamentos aos alunos e não estimula-se o processo investigativo e criativo.

Os jogos no ensino de Matemática têm-se destacado ao longo dos anos, criando ambientes e possibilidades do aluno ter uma posição ativa nessa aprendizagem, fazendo ele ser responsável por suas decisões e ações, enquanto o professor, como mediador sempre atento, guia o caminho do aluno sem atrapalhar, questionando e ajudando quando necessário.

Nossa pesquisa procurou descrever e verificar de que formas o Jogo da Senha Numérica poderia contribuir para o ensino do Princípio Multiplicativo e Aditivo do conteúdo de Análise Combinatória, voltado principalmente para turmas do 8º ano do Ensino Fundamental, a partir da construção do jogo em sala de aula e das jogadas, em que o aluno é inserido em um ambiente de investigação baseado em Ponte (2003) para descobrir a senha criada pelo desafiante e o professor observa, analisa e conduz os diferentes tipos de registro de representação, que podem ser produzidos pelos alunos, seguindo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2009).

Desenvolvemos um jogo que pode ser construído de forma simples, utilizando poucos materiais e materiais de fácil acesso. O jogo pode ser aplicado em escolas que enfrentam desafios quanto a sua estrutura, já que não necessita de um ambiente especial e pode ser realizado na sala de aula.

A criação de uma versão do jogo, o desenvolvimento da atividade investigativa e o questionário pode abrir um caminho para os alunos explorarem os registros de representação, promovendo a construção do conceito e o desenvolvimento do raciocínio combinatório. O Jogo da Senha Numérica apresentou diferentes possibilidades para trabalhar o conteúdo e a proposta dessa atividade foi fazer essa contribuição diferencial, alinhando o jogo, o conceito de investigação em Educação Matemática e a TRRS. Essas estratégias se revelaram possíveis para tornar o tema mais compreensível aos estudantes.

Ao aplicar e descrever o desenvolvimento do jogo, podemos evidenciar que trabalhar investigação e os diferentes tipos de registros com os alunos podem desenvolver o raciocínio combinatório durante as partidas. A utilização da teoria de Duval (2009) e Ponte (2003) em conjunto é uma experiência para a prática do professor, que pode contribuir para a sua atividade profissional e favorecer a aprendizagem matemática.

Iniciar um ambiente de investigação e mobilizar os diferentes registros pode favorecer o ensino. Além disso, ao trabalhar com mais de um tipo de registro, pode-se contribuir para o desenvolvimento dos Princípio Multiplicativo e aditivo, indo além da definição, criando um ambiente de reflexão, análise através da mediação do professor.

Uma das limitações ou possíveis dificuldades que podemos destacar em nossa pesquisa é que, como o jogo não foi aplicado e toda atividade de investigação é aberta, no processo, podem aparecer outros tipos de registros de representação além dos considerados aqui, e, assim, o professor que utilizar o nosso trabalho, deve estar pronto para redirecionamentos de forma a não prejudicar o processo de aprendizagem.

Outro detalhe é que sabemos como se inicia investigação, como vimos em Ponte (2003), mas não sabemos como pode terminar esse processo, e acabar se perdendo com a ideia original do jogo. Portanto, a ficha de tarefa investigativa (apêndice) é uma sugestão de acompanhamento e direcionamento, mas o professor precisa observar os acontecimentos e realizar as devidas alterações. No futuro, temos a intenção de realizar a aplicação do jogo e verificar se as descrições realizadas e as limitações estão em concordância ou em conflito, assim, aprimorar as possíveis dificuldades e desafios.

Esperamos que esta pesquisa seja uma contribuição para o desenvolvimento de uma prática fora do habitual, trazendo novos caminhos de discussão e pensamento visando um ensino de Matemática mais eficaz.

REFERÊNCIAS

ALCANTARA, Cecilia Ferreira Borges de. *Jogo da lanchonete*: ensino dos princípios aditivo e multiplicativo. 2018. 30 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2018.

ALVES, Alda Judith. O planejamento de pesquisas qualitativas em educação. *Cadernos de Pesquisas*. Fundação Carlos Chagas. São Paulo: Cortez, n. 77, p. 53-61, 1991.

BALDINO, Roberto Ribeiro. Assimilação Solidária. Grupo de Pesquisa - Ação em Educação Matemática da UNESP, Rio Claro (GPA). UNESP, Campus de Rio Claro – SP, 2016. Disponível em: midiaindependente.org/media/2004/06/282677.doc. Acesso em: jun./2024.

BALL, Deborah Loewenberg; THAMES, Mark Hoover; PHELPS, Geoffrey. Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, New York, v. 59, n. 5, p. 389 - 407, nov./dez. 2008.

BARRETO, Fernanda; BORBA, Rute (2011). Intervenções de Combinatória na Educação de Jovens e Adultos. In: Anais do XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (XIII Ciaem), Recife, PE, 2011.

BEZERRA, Marco José da Silva. *O ensino de análise combinatória para as turmas da educação de jovens e adultos com foco no princípio multiplicativo*. Dissertação (Mestrado profissional em matemática em rede nacional – PROFMAT) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Belém, 2021.

BORBA, Rute. O raciocínio combinatório na educação básica. In: *Anais do 10° Encontro Nacional de Educação Matemática.* Salvador-BA, 2010.

BORBA, Rute.; ROCHA, Cristiane A.; AZEVEDO, Juliana. Estudos em Raciocínio Combinatório: investigações e práticas de ensino na Educação Básica. Bolema. *Boletim de Educação Matemática* (UNESP. Rio Claro. Impresso), v. 29, p. 1348-1368, 2015.

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCNs). Introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC/SEF, 2000.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*: Brasília: MEC/SEF, 2018.

BRAUMANN, Carlos. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. In: PONTE, João Pedro; COSTA, Conceição; ROSENDO, Ana Isabel; MAIA, Ema; FIGUEIREDO, Nisa; DIONÍSIO, Ana Filipa.

(Org.). Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores. Coimbra: 2002. p. 5-24.

CARVALHO, João B. Pitombeira. Avaliação e perspectivas da área de ensino de matemática no Brasil. *Em Aberto*, Brasília; v. 14, n. 62, p. 74-88, abr./jun. 1994.

D' AMBRÓSIO, Ubiratan. *Educação matemática*: Da teoria à prática. Papirus, 1996.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara. (org.). *Aprendizagem em Matemática*. 2. Ed. Campinas: Papirus, 2003. p.11-33.

DUVAL, Raymond. *Semiósis e pensamento humano*: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Trad. Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar*: os registros de representações semióticas. 1. ed. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, Raymond. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Revemat: *R. Eletr. de Edu. Matem*, v. 07(2), 266-297. doi: 10.5007/1981-1322.2012v7n2p266.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. MORETTI, Méricles Thadeu. *Revista Eletrônica de Educação Matemática* (REVEMAT), Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

KISHIMOTO, Tizuko Morchida. O jogo e a educação infantil. In: KISHIMOTO, Tizuko Morchida. (Org.). *Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação*. 5. ed. São Paulo: Cortez, 2001. p.13-43.

GINEZ, Patrícia Costa. *Fenômeno de congruência e não congruência sobre a função exponencial em materiais didáticos*. 2020. 107 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2020.

GIRALDO, Victor. Formação de Professores de Matemática: para uma Abordagem Problematizada. *Ciência e Cultura*, v. 70, p. 37-42, 2018.

GOLDENBERG, Mirian. A arte de pesquisar. Rio de Janeiro: Record, 1997.

GONÇALVES, Rita de Cássia Pacheco. *Processos pedagógicos para permanência e êxito.* Florianópolis: IFSC, 2014.

GONÇALVES FILHO, Humberto Silveira. *O jogo senha como recurso didático para o ensino dos métodos de contagem.* Campos dos Goytacazes: Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, 2016.

GRANDO, Regina Célia. *O Conhecimento Matemático e o Uso de Jogos na Sala de Aula*. 2000. 239f. Tese (Doutorado), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

JOGOS E MATEMÁTICA. Jogos e Matemática, 2017. Departamento de Matemática (DMat) da UNIRIO. Disponível em: https://www.jogosematematica.com.br/p%C3%A1gina-inicial. Acesso em: jan 2024

MORGADO, Augusto Cesar; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de; CARVALHO, Paulo César Pinto; FERNANDEZ, Pedro. Análise Combinatória e Probabilidade. 9ª. Ed. Rio de Janeiro: SBM (1991).

MORGADO, Augusto Cesar; CARVALHO, Paulo César Pinto. *Matemática Discreta*. Coleção PROFMAT. 2ª. Ed. Rio de janeiro: SBM (2019).

OCDE. *PISA 2022 Results* (Volume I): The State of Learning and Equity in Education, PISA, OECD Publishing, Paris, 2023. Disponível em: https://doi.org/10.1787/53f23881-en

OCDE. *PISA 2022 Results* (Volume II): Learning During - and From - Disruption, PISA, OECD Publishing, Paris, 2023. Disponível em: https://doi.org/10.1787/a97db61c-en

OSÓRIO, Gerciane das Neves Lima. *O uso de materiais manipuláveis no ensino de princípio multiplicativo e na construção de gráficos de barras e de setores no ensino fundamental.* Dissertação (Mestrado profissional em matemática em rede nacional – PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro, 2019.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. *Zetetiké*, Campinas. v. 17, jan./jun., 2009.

POLYA, George. *A Arte de Resolver Problemas*: Um Novo Aspecto do Método Matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. Tradução de: Heitor Lisboa de Araújo.

PONTE, João Pedro. *Investigar, ensinar e aprender*. Faculdade de Ciência, Universidade de Lisboa: Actas do ProfMat, 2003.

PONTE, João Pedro; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. *Investigação Matemática na Sala de Aula*. 2ª.Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.160p.

PONTE, João Pedro; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. *Investigações Matemática na sala de aula*. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

RODA, Thiago Miguel. *Análise Combinatoria*: Uma abordagem sem a utilização de fórmulas. 2018. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/scav 2/gettcc3.php?id =150590606. Acesso em: jun./2024.

ROCHA, Cristiane de Arimatéa. *Estudo de combinatória no ensino médio à luz do enfoque ontossemiótico:* o que e por que priorizar no livro didático e nas aulas? 2019.

Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019.

SANTOS, Daniela; BERNARDO, Fábio; GAMA, Eduardo; ANDRADE, Fabiana; MARINHO, Karla; UZÊDA, Diego; MATOS, Diego; MENDES, Daniela; RENÉ, Sandro; AMADEO, Marcelo. *Reflexões sobre o conhecimento científico*. 1. ed. Curitiba: APPRIS, 2019. 185p.

SATO, Rodrigo Yuji Hirata. *Contribuições ao desenvolvimento do pensamento combinatório com o jogo Senha: uma experiência a partir da semiótica*. Trabalho de Conclusão de Curso - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, p. 75. 2021.

SILVA, Daniela Mendes Vieira da. Comparação de sequências: uma proposta para conceituar logaritmos e descobrir suas propriedades. 2017. 121 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica - RJ, 2017.

SOUZA, Jose Claudimar de. *A importância do ensino do princípio multiplicativo na educação básica*. Dissertação (Mestrado profissional em matemática em rede nacional – PROFMAT) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Sobral, 2023.

TEIXEIRA, Ricardo Roberto Plaza; APRESENTAÇÃO, Katia Regina dos Santos da. Jogos em sala de aula e seus benefícios para a aprendizagem da matemática. Revista Linhas, Florianópolis, v. 15, n. 28, p. 302-323, jan./jun. 2014.

VIANA, Marcelo. O Pisa e o diagnóstico do ensino de matemática no Brasil. *Academia Brasileira de Ciência*, 2023. Disponível em: https://www.abc.org.br/2023/12/06/o-pisa-e-o-diagnostico-do-ensino-de-matematica-no-brasil/. Acesso em: dez./2023.

ZACARIAS, Sandra Maira Zen. *A Matemática e o fracasso escolar*: medo, mito ou dificuldade. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Oeste Paulista – UNOESTE: Presidente Prudente – SP, p. 111, 2008

APÊNDICE A – Questionário

QUESTIONÁRIO

Questão 1. Você consegue escrever as maneiras de encontrar as diferentes senhas sem nenhuma pista?

Questão 2. Quantas senhas são possíveis inicialmente sem revelar nenhuma dica?

Questão 3. Escreva uma senha qualquer. Depois, procure refletir sobre quantas senhas poderiam ser criadas iniciando com o primeiro dígito da senha que escreveu. Explique de que forma você pensou (pode utilizar desenhos e esquemas)?

Questão 4. Utilizando o número 4 no primeiro dígito da senha e o número 0 no último dígito da senha, escreva quantas senhas são possíveis de formar. Se trocarmos e colocarmos o número 0 no primeiro digito e o número 4 no último digito, teremos quantas senhas? Essas quantidades são diferentes? Explique seu raciocínio.

Questão 5. Escreva uma senha que comece com o dígito par e termine com um dígito ímpar. Construa uma árvore de possibilidades e explique em que parte você utilizou o princípio aditivo e multiplicativo.

APÊNDICE B – Regras do jogo

REGRAS DO JOGO

1ª regra do jogo:
Número de jogadores: Uma dupla ou dois grupos de até quatro alunos.

2ª regra do jogo:
A dupla ou os dois grupos tirarão par ou ímpar. O vencedor será o desafiante e irá criar uma senha. O desafiado irá tentar descobrir a senha criada pelo desafiante.

3ª regra do jogo:
A senha criada pelo desafiante deverá conter cinco dígitos distintos, usando apenas os algarismos 0,1, 2, 3 e 4. Logo em seguida, o desafiado lançará o dado de cores para verificar quantas dicas ele terá para tentar descobrir a senha. A quantidade de dicas terá correspondência com a cor que aparecerá após o lançamento do dado, e quantas casas o jogador avançará em caso de acerto:

Vermelho	3 dicas	Avanço de 3 casas
Azul	4 dicas	Avanço de 2 casas
Verde	5 dicas	Avanço de 1 casa

Regras das dicas:

Dica 1: indicar a paridade do primeiro e do último dígito da senha.

Dica 2: Indicar se o primeiro e o último dígito estão na posição correta ou não.

Indicar se o primeiro e/ou o último dígito estão corretos ou não.

Se os dígitos das extremidades estão na posição corretas ou não.

Dica 3 a 5 (escolher uma de cada vez): indicar se o dígito apontado (dentre os três dígitos centrais) pelo desafiado está na posição certa ou não; indicar a paridade do dígito central; indicar que um dígito apontado dentre os dígitos centrais está na posição correta ou não.

4ª regra do jogo:

O jogo será composto por várias rodadas, até um dos participantes dupla ou um dos grupos participantes chegar ao final das trilhas. Em cada rodada será criada uma senha pelo desafiante o qual anotará a senha no tabuleiro de senha e que dirá uma dica ao desafiado, de acordo com a quantidade de dicas que ele tirou no dado. Ao analisar a primeira dica, o desafiado anotará a senha no tabuleiro de dicas e mostrará ao desafiante, e após análise, em caso de acerto se encerra a rodada e o desafiado avançará a trilha do jogo em correspondência com a cor que saiu no dado (se sair vermelho, avançará 3 casas, por exemplo), e em caso de erro, será liberada nova dica ao desafiado, obedecendo o máximo de dicas de acordo com a cor que saiu no dado. Caso todas as dicas dadas pelo desafiante terminem e o desafiado não acertar a senha, encerra-se a rodada e o desafiado não avança na trilha. É importante apontar que cada nova dica somente é liberada mediante erro do desafiado, com exceção do início da partida.

5ª regra do jogo:

Será iniciada uma nova rodada, quando o desafiante acertar a senha ou errar a senha após todas as dicas. Na nova rodada, os participantes inverterão suas funções no jogo (quem era desafiado, será o desafiante e vice e versa) e assim sucessivamente, até um dos participantes chegar ao final da trilha, que será o vencedor do jogo.

EXEMPLO:

- O desafiante escolhe a senha.

- O desafiado joga o dado, e na face votada para cima, sai a cor vermelha, por exemplo. Com isso, o desafiado tem direito a 3 dicas e em caso de acerto da senha, avançará 3 casas na trilha.

- O desafiante fala a primeira dica e diz: os números das extremidades são ímpares.

- O desafiado diz uma senha: 3 0 2 4 1.

- O desafiante analisa a senha e verifica que está incorreta e fala a segunda dica: os números das extremidades estão corretos.

- O desafiado apresenta outra senha: 3 2 4 0 1.

- O desafiante analisa e verifica que está incorreta e fala a terceira e última dica: o número 4 está na posição correta.

- O desafiante pensa nas dicas dadas e apresenta a senha: 3 0 4 2 1.

- O desafiante analisa a senha e verifica que está correta.

- Assim, como saiu cor vermelha no dado, o desafiante avança 3 casas na trilha.

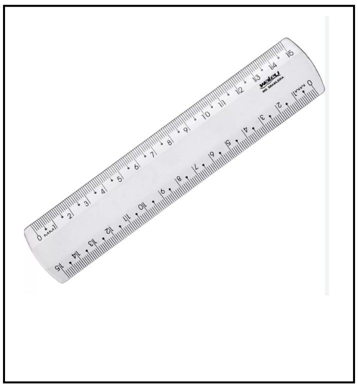
- Agora, terá início uma nova rodada, na qual os participantes trocam de funções, ou seja, o desafiado será o desafiante e vice e versa.

- E o jogo continuará avançando em várias rodadas, sempre seguindo a mesma dinâmica, até um dos participantes chegar ao final da trilha, que será o vencedor do jogo.

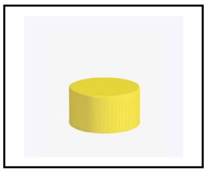
APÊNDICE C – Material para confecção do jogo

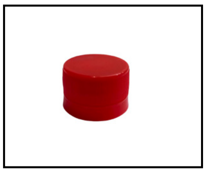
MATERIAL PARA CONFECÇÃO DO JOGO

Folhas de papel A4 brancas e uma régua de 15cm:



Duas tampinhas de garrafas pet com cores diferentes:





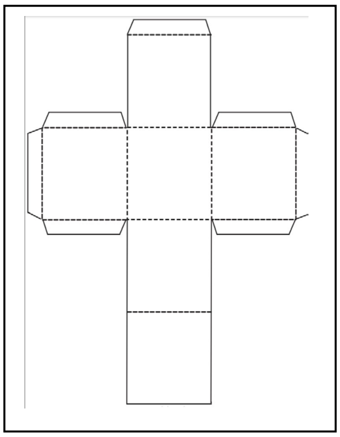
Uma cola branca escolar e uma tesoura escolar pequena sem ponta:

<u>Lápis de escrever, três lápis de cor nas cores vermelho, verde e azul e borracha branca:</u>

<u>Um tabuleiro das trilhas de avanço:</u>

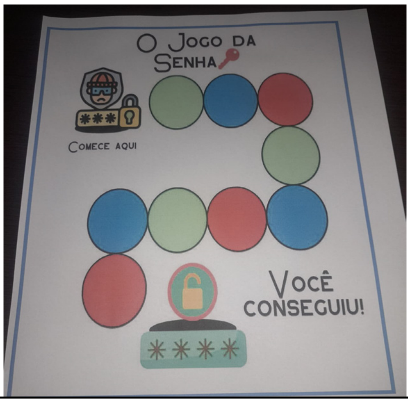
<u>Duas fichas de senha e dois cartões das dicas de senha:</u>

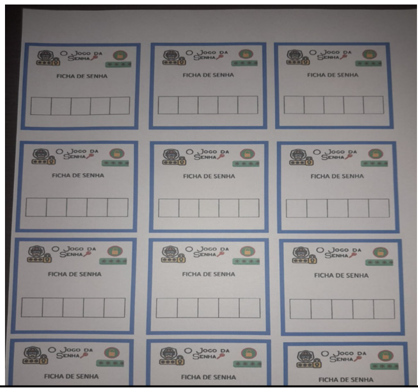
Uma folha A4 impressa com o molde da planificação de um dado de seis faces:

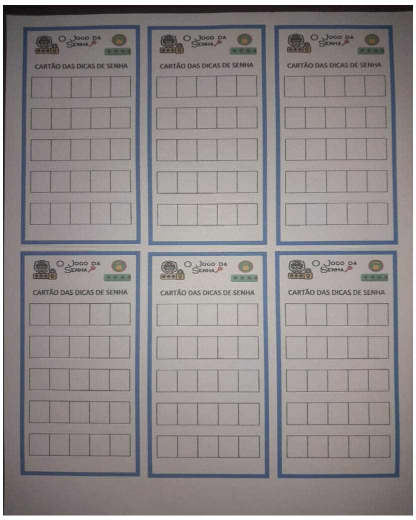


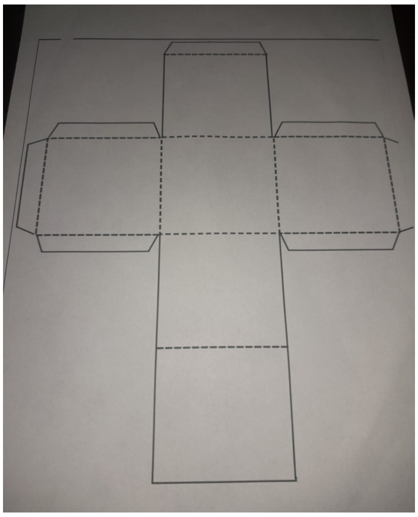
PASSO A PASSO PARA A CONFECÇÃO DO JOGO

Passo 1: imprimir as folhas com o tabuleiro das trilhas, as fichas de senha, os cartões das dicas de senha e o molde da planificação do dado de seis faces:

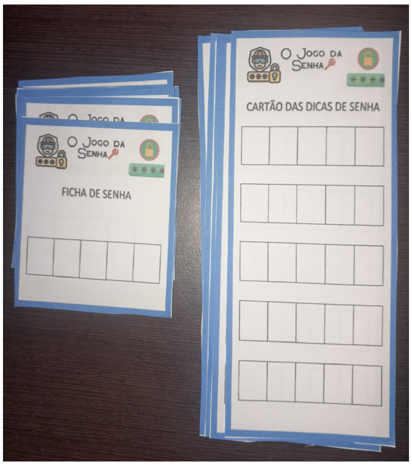






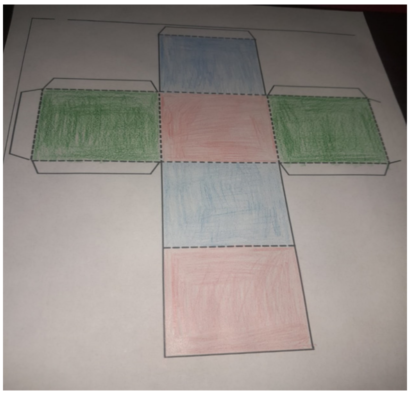


<u>Passo 2: recorte as folhas impressas com os moldes da ficha de senha e do cartão das dicas de senha e destaque-os, conforme exemplo abaixo:</u>



<u>Passo 3: montando o dado.</u>

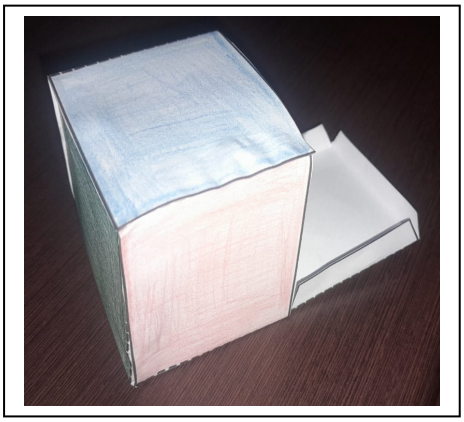
<u>3.1 Com o molde da planificação do dado impressa, pintar as faces com as cores vermelho, verde e azul, de forma que, ao montar o dado, as faces opostas apresentem as mesmas cores, como no exemplo abaixo:</u>

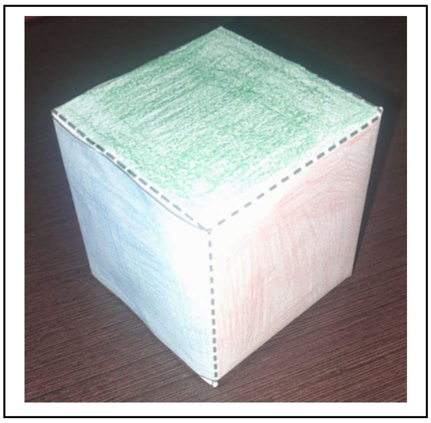


<u>3.2 Recorte a planificação do dado que foi pintada com lápis de cor, deixando as abas destacadas, de modo que fique na forma do exemplo abaixo:</u>

<u>3.3 Com o auxílio de uma régua, dobre as arestas de linhas descontínuas no verso do molde recortado:</u>

<u>3.4 Passe a cola na parte externa das abas do molde, colando-as na parte interna das faces do molde até formar o dado:</u>





<u>Passo 4: Com dois lápis, duas borrachas e duas tampinhas, junte todos os materiais que foram destacados e montados nos passos anteriores e pronto, já pode iniciar o jogo:</u>

Todo o material citado acima e o passo a passo para a confecção do jogo é proposto para cada duas duplas ou dois grupos que irão se desafiar. Observações:

* Uma folha impressa do tabuleiro de trilha servirá para cada duas duplas ou dois grupos que irão se desafiar.
* Cada folha impressa das fichas de senha contém 12 fichas, que servirá para 6 duplas ou 6 grupos.
* Cada folha impressa dos cartões das dicas de senha contém 6 cartões, que servirá para 3 duplas ou 3 grupos.
* Uma folha impressa do molde da planificação do dado, servirá para cada duas duplas ou dois grupos que irão se desafiar.
* O desafiante deverá anotar a senha proposta na ficha de senha e o desafiado deverá anotar as suas dicas de senha no cartão das dicas de senha, com lápis de escrever. A cada rodada, a senha e as dicas de senha deverão ser apagadas com borracha, utilizando sempre os mesmos cartões e fichas.
* Para uma turma de 40 alunos, por exemplo, se o jogo for proposto para ser jogado em grupos de 4 alunos, deverão ser impressas 5 folhas do tabuleiro de trilhas, 1 folha com as fichas de senha, 2 folhas com os cartões das dicas de senha e 5 folhas do molde da planificação do dado.
* Cada grupo deverá trazer um lápis, uma borracha, uma tampinha de garrafa pet e uma tesoura.
* As tampinhas de garrafa pet servirão como peças que irão avançar no tabuleiro de trilhas. Elas também podem ser substituídas por outros materiais como, por exemplo, um grão de feijão e outro de milho de pipoca.