



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**  
Centro de Tecnologia e Ciências  
Instituto de Física Armando Dias Tavares

Karoline Aparecida Margarida Ferreira França

**Simulações numéricas no formalismo BSSN em simetria  
esférica: colapso de um campo escalar e condições de calibre**

Rio de Janeiro

2024

Karoline Aparecida Margarida Ferreira França

**Simulações numéricas no formalismo BSSN em simetria esférica: colapso de um campo escalar e condições de calibre**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Henrique Pereira de Oliveira

Rio de Janeiro

2024

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

F814s França, Karoline Aparecida Margarida Ferreira.  
Simulações numéricas no formalismo BSSN em simetria esférica: colapso de um campo escalar e condições de calibre / Karoline Aparecida Margarida Ferreira França. – 2024.  
152 f. : il.

Orientador: Henrique Pereira de Oliveira.  
Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Relatividade geral (Física) - Teses. 2. Einstein, Equações de – Teses.  
3. Campos de calibre (Física) – Teses. 4. Teoria de campos escalares – Teses.  
5. Colapso gravitacional (Astronomia) – Teses. I. Oliveira, Henrique Pereira de (Orient.). II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Física Armando Dias Tavares. III. Título.

CDU 530.12

Bibliotecária: Teresa da Silva CRB7/5209

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Karoline Aparecida Margarida Ferreira França

**Simulações numéricas no formalismo BSSN em simetria esférica: colapso de um campo escalar e condições de calibre**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 17 de junho de 2024.

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Henrique Pereira de Oliveira (Orientador)  
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

---

Prof. Dr. Maximiliano Ujevic Tonino  
Universidade Federal do ABC

---

Prof. Dr. Eduardo Lima Rodrigues  
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

---

Prof. Dr. Rafael Fernandes Aranha  
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Rio de Janeiro

2024

## DEDICATÓRIA

Agradeço a memória e o legado de José Carlos de França, que partiu sem testemunhar a mulher incrível que me tornei. Este trabalho é dedicado a ele, *in memoriam*, em reconhecimento de sua contribuição para quem eu sou hoje.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço profundamente ao Único e Bondoso Deus. Que nos amou com amor incondicional e inimaginável. Que veio ao mundo, viveu como homem, viu a miséria humana, chorou nossas dores e morreu pelos seus.

Agradezco a los hermanos que aún me quedan: Neto de França por preocuparse por nosotros y ser tan amable persona, Airton de França por su apoyo incondicional y por siempre escucharme, María de França por enseñarme a aceptar la mujer que soy y por entender mi dolor, Eliana de França por cuidarnos con tanto cariño y dedicación y por ser la alegría de nuestras vidas.

Agradezco a mi sobrina Diana de França por traer tanto amor y tranquilidad a nuestra casa.

Agradeço ao meu namorado Ronnypetson Souza, a pessoa mais inteligente, gentil e bondosa que eu já conheci.

Agradeço ao professor Henrique por me introduzir no conhecimento das simulações numéricas e a sua esposa dona Carla pela boa prosa.

Às minhas amigas de república: Carolina por me mostrar a incrível cultura do Rio de Janeiro e Sthephany pelas palavras de incentivo e exemplo de dedicação.

Aos meus grandes amigos que deixei em Viçosa: Tulho Martins, Isabela e Iago, Kelly Molica, Rayane Maria, Yasmim e Felipe, Fernanda e Philipe, Roberta Araújo, Paulo Alves, Juliano Fernandes, Hugo Maia, Emílio e Thainá, Lâna Souza, Pedro Taveira, Sávio Andrade, Lara Braga, Wesley Fiorio e tantos outros que me fojem à memória agora.

Por último, e não menos importante, aos meus inestimáveis amigos do mestrado pra vida: João e Amanda pela amizade incondicional, Hellen de Oliveira pela sinceridade, Pedro Moura pelo apoio incondicional, Felipe Medeiros pelos bons conselhos, Rui e Flávia pela grande amizade, Higor Ferreira pela ajuda certa, Matheus Reis pelas boas conversas e Rodolfo Silva pelo apoio em tudo. A Ranna e Samir pela ajuda inestimável e a todos meus demais amigos da pós-graduação da UERJ.

A todos os brasileiros que financiam as instituições públicas deste país.

A todos, meus mais sinceros agradecimentos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Yo que crecí dentro de un árbol  
tendría mucho que decir,  
pero aprendí tanto silencio  
que tengo mucho que callar  
y eso se conoce creciendo  
sin otro goce que crecer,  
sin más pasión que la substancia,  
sin más acción que la inocencia,  
y por dentro el tiempo dorado  
hasta que la altura lo llama  
para convertirlo en naranja.

*Pablo Neruda*

## RESUMO

FRANÇA, K. A. M. F. *Simulações numéricas no formalismo BSSN em simetria esférica: colapso de um campo escalar e condições de calibre*. 2024. 152 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2024.

Neste trabalho, apresentamos uma breve introdução ao formalismo 3+1 da teoria da Relatividade Geral (RG), com foco na decomposição das equações de Einstein e nas condições de calibre. Em seguida, introduzimos o formalismo Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura (BSSN) para a solução de um problema da RG no regime de campo forte. Este problema envolve um campo escalar auto-gravitante. Para a sua resolução, discutimos as bases teóricas e as vantagens do formalismo BSSN, incluindo sua aplicação em coordenadas esféricas. Derivamos as equações básicas para o campo escalar e focamos na análise do seu comportamento. Também investigamos o colapso gravitacional e as condições iniciais que implicam na dispersão do campo escalar no infinito. Além disso, apresentamos os métodos espectrais para a resolução numérica das equações, com foco no método Galerkin-Colocação. Realizamos experimentos numéricos para validar os códigos construídos com base no formalismo BSSN em simetria esférica, incluindo testes de convergência para diferentes condições de calibre. Ao final do trabalho, apresentamos as principais conclusões do estudo, destacando os resultados satisfatórios e as perspectivas futuras para a simulação de outros sistemas astrofísicos mais complexos.

Palavras-chave: formalismo BSSN; métodos espectrais; colapso gravitacional.

## ABSTRACT

FRANÇA, K. A. M. F. *Numerical simulations in BSSN formalism in spherical symmetry: collapse of a scalar field and gauge conditions*. 2024. 152 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2024.

In this work, we provide a brief introduction to the 3+1 formalism of General Relativity (GR), focusing on the decomposition of Einstein's equations and gauge conditions. Next, we introduce the Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura (BSSN) formalism for solving a problem in GR under strong-field conditions. This problem involves a scalar field without self-gravitating mass. To address it, we discuss the theoretical foundations and advantages of the BSSN formalism, including its application in spherical coordinates. We derive the basic equations for the scalar field and concentrate on analyzing its behavior. We also investigate gravitational collapse and the initial conditions leading to the dispersion of the scalar field at infinity. Additionally, we present spectral methods for numerically solving the equations, focusing on the Galerkin-Collocation method. We conduct numerical experiments to validate the codes built based on the BSSN formalism in spherical symmetry, including convergence tests for different gauge conditions. At the end of the work, we present the main conclusions of the study, highlighting satisfactory results and future prospects for simulating other more complex astrophysical systems.

Keywords: BSSN formalism; spectral methods; gravitational collapse.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Descrição geométrica de uma hipersuperfície $\Sigma$ embutida em uma variedade $\mathcal{M}$ . . . . .	21
Figura 2	- Esfera $\Sigma$ como uma hipersuperfície de um espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ . . . . .	22
Figura 3	- Fatiamento $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ de uma variedade $\mathcal{M}$ por uma família de hipersuperfícies do tipo espaço . . . . .	24
Figura 4	- Construção geométrica da derivada de Lie de $\nu$ ao longo de $\mathbf{m}$ . . . . .	28
Figura 5	- Construção geométrica do vetor de evolução normal $\mathbf{m}$ . . . . .	30
Figura 6	- Construção geométrica do vetor tempo $\partial_t$ . . . . .	38
Figura 7	- Representação esquemática do colapso da função lapso $\alpha$ perto de uma singularidade . . . . .	49
Figura 8	- Evolução da componente $K_{zz}$ da curvatura extrínseca na origem (slicing harmônico) . . . . .	56
Figura 9	- Mapeamento algébrico dos pontos de colocação do domínio físico para o domínio computacional . . . . .	95
Figura 10	- Campo escalar inicial $\Phi_{\text{exato}}$ e erro associado à expansão espectral desse campo, $\Phi_N$ . . . . .	100
Figura 11	- Fator conforme inicial $\chi_0$ para $L_0 = 10$ , $N = 150$ . . . . .	101
Figura 12	- Dinâmica espacial do campo escalar $\Phi$ para $L_0 = 10$ , $N = 150$ . . . . .	102
Figura 13	- Evolução da função lapso $\alpha$ na origem (Slicing $1 + \log$ , $L_0 = 10$ , $N = 150$ )	103
Figura 14	- Evolução do campo escalar $\Phi$ na origem para $L_0 = 10$ e $N = 150$ . . .	104
Figura 15	- Evolução do escalar de curvatura $R$ na origem para $L_0 = 10$ e $N = 150$	104
Figura 16	- Testes numéricos dos erros máximos $L_2(HC)_{max}$ associados ao vínculo Hamiltoniano para diferentes calibres . . . . .	105
Figura 17	- Testes numéricos dos erros máximos $L_2(MC)_{max}$ associados ao vínculo de momento para diferentes calibres . . . . .	106
Figura 18	- Testes numéricos dos erros relativos $\delta M/M_0$ associados à massa ADM para diferentes calibres . . . . .	107
Figura 19	- Evolução dos erros associados aos vínculos Hamiltoniano e de momento e da massa ADM (Slicing $1 + \log$ , $L_0 = 10$ , $N = 150$ ) . . . . .	108
Figura 20	- Comparação entre os filtros ótimo $\sigma_O$ e exponencial $\sigma_E$ para valores crescentes de $p$ . . . . .	110
Figura 21	- Testes numéricos dos erros máximos $L_2(HC)_{max}$ associados ao vínculo Hamiltoniano para diferentes calibres . . . . .	111
Figura 22	- Testes numéricos dos erros máximos $L_2(MC)_{max}$ associados ao vínculo de momento para diferentes calibres . . . . .	112

Figura 23 - Testes numéricos dos erros relativos $\delta M/M_0$ associados à massa ADM para diferentes calibres . . . . .	113
Figura 24 - Testes numéricos dos erros máximos $L_2(HC)_{max}$ associados ao vínculo Hamiltoniano para diferentes calibres . . . . .	115
Figura 25 - Testes numéricos dos erros máximos $L_2(MC)_{max}$ associados ao vínculo de momento para diferentes calibres . . . . .	116
Figura 26 - Testes numéricos dos erros relativos $\delta M/M_0$ associados à massa ADM para diferentes calibres . . . . .	117
Figura 27 - Erro máximo $L_2(HC)_{max}$ associado ao vínculo Hamiltoniano no calibre maximal slicing . . . . .	118
Figura 28 - Erro máximo $L_2(MC)_{max}$ associado ao vínculo de momento no calibre maximal slicing . . . . .	119
Figura 29 - Erro relativo $\delta M/M_0$ associado à massa ADM no calibre maximal slicing	119
Figura 30 - Evolução da função lapso $\alpha$ na origem (Slicing $1 + \log$ , $L_0 = 10$ , $N = 450$ )	120
Figura 31 - Dinâmica espacial do campo escalar $\Phi$ para $L_0 = 10$ , $N = 450$ , $t = 15$	121
Figura 32 - Dinâmica espacial do campo escalar $\Phi$ usando o método das diferenças finitas . . . . .	122
Figura 33 - Evolução do erro RMS absoluto associado ao vínculo Hamiltoniano com o método das diferenças finitas (Slicing $1 + \log$ , 800 pontos na malha numérica) . . . . .	123
Figura 34 - Evolução do erro RMS absoluto associado ao vínculo Hamiltoniano com o método Galerkin-Colocação (Slicing $1 + \log$ , $L_0 = 10$ , $N = 450$ ) . . .	124
Figura 35 - Evolução do erro RMS absoluto associado ao vínculo de momento com o método Galerkin-Colocação (Slicing $1 + \log$ , $L_0 = 10$ , $N = 450$ ) . . .	124
Figura 36 - Evolução do erro relativo associado à massa ADM com o método Galerkin-Colocação (Slicing $1 + \log$ , $L_0 = 10$ , $N = 450$ ) . . . . .	125
Figura 37 - Testes numéricos dos erros máximos $L_2$ associados aos vínculos Hamiltoniano, de momento e do erro relativo da massa ADM (Slicing $1 + \log$ , $L_0 = 10$ , $t = 15$ ) . . . . .	126

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ADM - Arnowitt, Dessler, Misner  
BHI - Black Hole Initiative  
BMSS - Bona, Masò, Seidel, Stela  
BMONR - Binary Merger Observations and Numerical Relativity  
BNs - Buracos Negros  
BSSN - Baumgarte, Shapiro, Shibata, Nakamura  
GR - General Relativity  
EDOs - Equações Diferenciais Ordinárias  
EDPs - Equações Diferenciais Parciais  
ENs - Estrelas de Nêutrons  
ETK - The Einstein Toolkit  
KAGRA - Kamioka Gravitational Wave Detector  
LIGO - Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory  
NASA - National Aeronautics and Space Administration  
NRG - Numerical Relativity Group  
NRGUTA - Numerical Relativity Group at University of Texas at Austin  
NSF - National Science Foundation  
OGs - Ondas Gravitacionais  
RG - Relatividade Geral  
RN - Relatividade Numérica  
RR - Relatividade Restrita  
SpEC - Spectral Einstein Code  
SXS - Simulating Xtreme Spacetimes  
UERJ - Universidade do Estado do Rio de Janeiro  
UFABC - Universidade Federal do ABC  
UFRN - Universidade Federal do Rio Grande do Norte

## NOTAÇÕES E CONVENÇÕES

- Unidades geometrizadas:  $c = G = 1$ , sendo  $c$  a velocidade da luz no vácuo e  $G$  a constante gravitacional universal.
- Os índices latinos variam como:  $i, j, \dots = 1, 2, 3$  e os índices gregos:  $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$ .
- Convenção da soma de Einstein: se um índice repetido aparece em um termo da equação a soma deve ser realizada sobre os termos desse índice:

$$A_{\mu\nu}B^\nu \equiv \sum_{\nu=0}^3 A_{\mu\nu}B^\nu = A_{\mu 0}B^0 + A_{\mu 1}B^1 + A_{\mu 2}B^2 + A_{\mu 3}B^3,$$

sendo  $\mu$  o índice livre e  $\nu$  o índice mudo, ou seja, pode ser alterado sem mudar a equação:

$$A^{\mu\nu}B_\nu = A^{\mu\gamma}B_\gamma.$$

- Tensores: o símbolo  $A^\mu$  representa a componente contravariante de um tensor de primeira ordem. Por definição, um tensor contravariante de primeira ordem é um objeto que obedece a seguinte lei de transformação:

$$A^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} A'^\nu,$$

onde  $x^\mu$  e  $A^\mu$  representam as novas coordenadas e o tensor no novo sistema, respectivamente. E  $x'^\nu$  e  $A'^\nu$  são as coordenadas no sistema antigo.

A generalização de tensores de ordens superiores é direta, basta multiplicar por mais uma derivada das coordenadas novas em relação às antigas, para cada ordem aumentada:

$$A^{\nu\gamma} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\lambda} A'^{\mu\lambda},$$

esta define a componente contravariante de um tensor de segunda ordem.

- A métrica de Minkowski (métrica do espaço-tempo plano) adotada é:

$$\boldsymbol{\eta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$$

e o intervalo infinitesimal do espaço-tempo plano:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -(cdt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2.$$

- Derivadas: em relação ao tempo são representadas por:  $\dot{r} = dr/dt$ . Para ordens

superiores:  $\ddot{r} = d^2r/dt^2$  e  $\dddot{r} = d^3r/dt^3$ .

As derivadas parciais são representadas por:

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu} = \partial_\mu f.$$

A derivada covariante da componente contravariante  $A^\mu$  é definida como:

$$\nabla_\nu A^\mu = \partial_\nu A^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\lambda,$$

sendo  $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$  a conexão:

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}(\partial_\nu g_{\lambda\rho} + \partial_\lambda g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\nu\lambda}).$$

A derivada de Lie da componente contravariante  $A^\alpha$  é definida como:

$$\mathcal{L}_v A^\alpha = v^\beta \partial_\beta A^\alpha - A^\beta \partial_\beta v^\alpha.$$

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b>	15
1	<b>FORMALISMO <math>3 + 1</math></b>	20
1.1	<b>Geometria das hipersuperfícies</b>	20
1.1.1	<u>Definição de hipersuperfície</u>	20
1.1.2	<u>Quantidades geométricas na hipersuperfície</u>	22
1.1.3	<u>Hipersuperfícies do tipo espaço</u>	25
1.1.4	<u>Equações de Gauss-Codazzi</u>	25
1.2	<b>Geometria dos fatiamentos</b>	29
1.2.1	<u>Definição de fatiamento</u>	29
1.2.2	<u>Cinemática dos fatiamentos</u>	32
1.2.3	<u>Decomposição <math>3+1</math> do tensor de Riemann</u>	33
1.3	<b>Decomposição <math>3 + 1</math> das equações de Einstein</b>	34
1.3.1	<u>Projeções das equações de Einstein</u>	35
1.3.2	<u>Coordenadas adaptadas ao fatiamento</u>	37
1.3.3	<u>O problema de Cauchy</u>	42
1.4	<b>Condições de calibre</b>	46
1.4.1	<u>Condições de calibre sobre fatiamentos</u>	47
1.4.2	<u>Condições de calibre sobre as coordenadas espaciais</u>	53
2	<b>FORMALISMO BSSN</b>	56
2.1	<b>Noções de hiperbolicidade</b>	56
2.2	<b>Reformulação das equações de Maxwell</b>	58
2.2.1	<u>Calibre de Coulomb generalizado</u>	60
2.2.2	<u>Formulações hiperbólicas de primeira ordem</u>	61
2.2.3	<u>Reformulação por meio de variáveis auxiliares</u>	61
2.3	<b>Formalismo BSSN</b>	62
2.3.1	<u>Decomposição conforme da <math>3</math>-métrica</u>	63
2.3.2	<u>Decomposição conforme da curvatura extrínseca</u>	65
2.3.3	<u>Decomposição conforme das equações ADM padrão</u>	68
2.3.4	<u>Formalismo BSSN em coordenadas esféricas</u>	73
3	<b>CAMPO ESCALAR EM SIMETRIA ESFÉRICA</b>	83
3.1	<b>Equações básicas</b>	83
3.2	<b>Colapso gravitacional</b>	85
3.3	<b>Métodos espectrais</b>	87
3.3.1	<u>Método Galerkin</u>	89
3.3.2	<u>Método de Colocação</u>	90
3.3.3	<u>Método numérico: Galerkin-Colocação</u>	91

3.4	<b>Implementação do código numérico</b>	91
3.4.1	<u>Condições de contorno</u>	91
3.4.2	<u>Medidas de erro</u>	96
3.4.3	<u>Inicialização</u>	99
3.5	<b>Experimentos numéricos</b>	101
3.5.1	<u>Testes numéricos para o calibre <math>\beta = 0</math></u>	105
3.5.2	<u>Aplicação de filtros para o calibre <math>\beta = 0</math></u>	108
3.5.3	<u>Testes numéricos para o calibre <math>\beta \neq 0</math></u>	114
3.5.4	<u>Testes numéricos para o calibre maximal slicing</u>	118
3.5.5	<u>Aplicação: colapso de um campo escalar no calibre slicing <math>1 + \log, \beta = 0</math></u>	120
	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	127
	<b>REFERÊNCIAS</b>	129
	<b>APÊNDICE A</b> – Algoritmo espectral	134

## INTRODUÇÃO

A teoria da Relatividade Geral (RG) formulada por Albert Einstein (Einstein, 1915) é a descrição fundamental da gravitação e a generalização da teoria da gravitação de Isaac Newton (Newton, 1934). Na RG a gravidade é entendida como a manifestação da curvatura do espaço-tempo causada pela distribuição de matéria-energia. Em contraste, na teoria newtoniana a gravidade é uma força de atração entre objetos massivos. Um dos problemas fundamentais da teoria newtoniana é a suposição da ação instantânea da gravidade a grandes distâncias. Este princípio viola a teoria da Relatividade Restrita (RR) proposta por Albert Einstein (Einstein, 1905). Na RR entendem-se os limites impostos pela velocidade da luz, além disso, postula-se a equivalência entre massa inercial e massa gravitacional, que era uma questão um tanto obscura para Isaac Newton. Nesse sentido, Albert Einstein dedicou-se por 10 anos a encontrar uma explicação para a equivalência dessas massas e com a RG acabou ganhando também uma teoria da gravitação compatível com os princípios da RR.

Os princípios que guiaram Albert Einstein na resolução dessas questões foram os seguintes. O **Princípio da Equivalência** postula a equivalência entre massa inercial e massa gravitacional (Einstein, 1915), o **Princípio de Mach** relaciona as propriedades inerciais dos corpos à distribuição total de matéria no universo (Britannica, 2024), e o **Princípio da Covariância Geral** explicita que as leis da física sejam as mesmas para todos os observadores (Einstein, 1915). Esses princípios foram fundamentais para a reformulação da gravidade como uma manifestação da própria distorção do espaço-tempo causada por um objeto massivo, e de como essa distorção determina o movimento desse objeto. Nas palavras de Wheeler: a matéria diz ao espaço-tempo como se curvar e o espaço-tempo diz à matéria como se mover (Wheeler, 1990).

A RG é a teoria moderna da gravitação com um papel crucial na cosmologia e no estudo de objetos astrofísicos como: buracos negros (BNs), estrelas de nêutrons (ENs), ondas gravitacionais (OGs), entre outros. No entanto, a obtenção de soluções exatas das equações de campo da RG é limitada, especialmente em casos de campo gravitacional forte e velocidades relativísticas. São nesses casos onde a Relatividade Numérica (RN) surge como uma ferramenta poderosa para a exploração de espaços-tempos relativísticos (Baumgarte; Shapiro, 2010). A RN visa desenvolver códigos numéricos para resolver as equações de Einstein em situações astrofisicamente realistas. Essa abordagem computacional permite simular uma ampla variedade de fenômenos como colapso gravitacional na formação de BNs, binários de ENs e BNs, propagação de OGs e outros fenômenos que são inacessíveis pelos métodos analíticos e perturbativos convencionais.

A RN aspira obter resultados sólidos não alcançados com teorias pós-newtonianas e de perturbações relativísticas gerais. Por exemplo, permitindo estudar a evolução não

linear de sistemas astrofísicos complexos como a colisão de BNs. Além disso, a RN vai além e possibilita a investigação de propriedades fundamentais da RG, como fenômenos críticos e a hipótese da censura cósmica (Alcubierre, 2008). Nesse sentido, abre novas perspectivas para a compreensão de fenômenos desconhecidos até então, como o comportamento crítico durante o colapso gravitacional que foi visto pela primeira vez em experimentos numéricos (Choptuik, 1993). As equações que a RN se propõe a resolver são tipicamente equações diferenciais parciais (EDPs) multidimensionais, não lineares e acopladas no espaço e no tempo. Assim como na dinâmica dos fluidos, na aerodinâmica e na magneto-hidrodinâmica, a RN tem todos os problemas usuais associados à resolução de equações não triviais.

Resolver numericamente as equações de Einstein implica em construir um espaço-tempo no computador e apresenta algumas complicações adicionais exclusivas da RG. Uma dessas complicações envolve a escolha de coordenadas adequadas a fim de evitar singularidades que interrompam abruptamente a integração numérica. Outra sutileza inerente a uma simulação numérica envolve utilizar recursos computacionais apropriados, por exemplo, no mapeamento da resolução espacial. Existem casos em que as distâncias não são nada triviais ao simular dados de regiões de campo forte próximas à fonte astrofísica e a detecção desses sinais na Terra, que é uma região muito distante do campo gravitacional de origem. A primeira abordagem para lidar com essas limitações numéricas veio do formalismo  $3 + 1$  padrão desenvolvido por Arnowitt, Deser e Misner em 1959-1962 (Arnowitt; Deser; Misner, 2008). Nesse artigo foi apresentada a primeira abordagem bem sucedida de resolução numérica das equações de Einstein como um problema de valor inicial. Assim, o problema de valor inicial pôde ser melhor explorado no formalismo  $3 + 1$  padrão. De fato, este formalismo nasceu como uma tentativa de unificar a RG com a mecânica quântica mediante a construção do formalismo Hamiltoniano da RG e que posteriormente levou à teoria da geometrodinâmica quântica de Wheeler-DeWitt (DeWitt; DeWitt, 1964), (DeWitt, 1967), também conhecida como o formalismo canônico da gravitação quântica.

Nos anos seguintes, a primeira tentativa de evolução numérica das equações de Einstein compreendeu a colisão frontal de um binário de BNs e foi apresentada por Hahn e Lindquist (Hahn; Lindquist, 1964). Mesmo com as limitações computacionais da época, foram empregados os dados iniciais de Misner (Misner, 1960) e constatou-se que os erros numéricos explodiam. Isto impediu a evolução estável da simulação e a obtenção de quantidades físicas relevantes, pois os códigos numéricos sofriam uma quebra abrupta devido à estrutura intrínseca das equações do formalismo  $3 + 1$  padrão. Somente em 1976 Smarr *et al.* (Smarr *et al.*, 1976) e, posteriormente, Eppley (Eppley, 1977) produziram novas simulações usando simetria axial, cujo foco principal era a computação das formas de OGs emitidas durante o processo de colisão de dois BNs. Os resultados do artigo de Eppley foram pouco precisos, mas o estudo apresentou importantes intuições sobre

ondas de Brill e horizontes aparentes na construção dos dados iniciais (Eppley, 1977). Na conferência de Seattle em 1978, Smarr apresentou importantes contribuições sobre colisão de BNs, Wilson sobre colapso estelar e supernovas e Piran sobre OGs e colapso gravitacional. Nessa mesma conferência Weiss já abordava a questão dos detectores de OGs (Smarr; Epstein; Clark, 1978).

Apesar dos esforços na resolução numérica das equações de Einstein nenhum avanço substancial foi alcançado até então. Somente no início da década de 1990, quando houve um engajamento maior no projeto de construção do detector Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO), o problema numérico pôde ser melhor explorado analiticamente (Smarr, 1979). Porém, o principal obstáculo ainda era de natureza computacional (Anninos *et al.*, 1994), (Anninos *et al.*, 1995), de modo que foi necessário estreitar a colaboração entre físicos e cientistas da computação para melhorar a disponibilidade de memória computacional e a velocidade das máquinas nos cálculos numéricos, juntamente com o *hardware* e os algoritmos, para a RN tirar o melhor proveito da computação paralela e escalonável.

Nessa mesma época surgiram as primeiras técnicas numéricas 3-dimensionais da evolução de binários de BNs. Paralelamente, foram desenvolvidas novas decomposições das equações de Einstein. Dentre as quais o formalismo BSSN, devido a Baumgarte, Shapiro, Shibata e Nakamura, veio a ser o mais promissor, pois usufrui da alta hiperbolicidade das equações de Einstein (Shibata; Nakamura, 1995), (Baumgarte; Shapiro, 1998). Este formalismo superou os problemas de instabilidade associados à estrutura intrínseca das equações do formalismo  $3 + 1$  padrão. Outro formalismo bem sucedido desenvolvido nessa mesma época foi o formalismo BMSS, devido a Bona, Massò, Seidel e Stela. Este formalismo apresenta as equações de Einstein em uma forma hiperbólica explicitamente de primeira ordem (Bona *et al.*, 1995). Já no final dos anos 1990 apareceram os primeiros grandes avanços em simulações numéricas em projetos como o *Binary Black Hole Grand Challenge Alliance* de Choptuik (Bryan *et al.*, 1997). Nos anos seguintes, entre 1998-2005, o projeto Lazarus veio com uma abordagem inovadora que combinava simulações numéricas curtas com métodos perturbativos de BNs (Baker; Campanelli; Lousto, 2002).

Cabe destacar que a escolha do campo escalar como objeto de estudo deste trabalho, em parte, é motivada pelas palavras de Pretorius em seu artigo de 2005: “Usamos o colapso gravitacional de um campo escalar para preparar o dado inicial que evoluirá para um sistema binário de BNs” (Pretorius, 2005). Foi em meados desse ano que Pretorius surpreendeu a comunidade da RN ao utilizar coordenadas harmônicas generalizadas e a técnica de refinamento de malha adaptável para apresentar a primeira simulação completa e estável da fusão de dois BNs de massas iguais. A simulação mostrou a fusão dos BNs após completar aproximadamente uma órbita. Pretorius conseguiu obter da simulação numérica as formas das OGs nas fases espiral e de fusão. Após a fusão, o BN que se forma dos dois anteriores entra no regime de *ringdown*. Paralelamente, surgiu um novo

e mais robusto método baseado no formalismo BSSN: o método *moving punctures* (Sopuerta; Yunes; Laguna, 2006), (Sopuerta; Yunes; Laguna, 2007), (Sopuerta; Yunes; Laguna, 2008). Não podemos deixar de destacar também a contribuição das mulheres para os avanços da RN. Em 2005 Campanelli *et al.* trabalharam em simulações da evolução de binários de BNs sem excisão (Campanelli *et al.*, 2006). No mesmo ano, Centrella *et al.* fizeram simulações da fusão de BNs e conseguiram simular OGs produzidas na fase espiral (Baker *et al.*, 2006).

Para além das razões discutidas anteriormente, a motivação de realizar um trabalho em RN vem da possibilidade de explorar um número ilimitado de problemas que são regidos pela interação gravitacional. Outro aspecto interessante é a construção e a aplicação de tecnologias computacionais específicas para pesquisas físicas. Por exemplo, as tecnologias desenvolvidas no LIGO, o primeiro detector direto de OGs, representam um avanço revolucionário na capacidade humana para observar e entender fenômenos astrofísicos e cosmológicos nunca antes explorados diretamente. Desde o anúncio da primeira detecção direta de OGs (Abbott *et al.*, 2016) e que rendeu posteriormente um Nobel para B. C. Barish, R. Weiss e K. Thorne, o LIGO é considerado a maior e mais avançada tecnologia já construída a serviço da ciência. Além disso, é uma colaboração internacional de cientistas que foram liderados por importantes mulheres como F. Córdova e G. González na época do anúncio da observação. Importante ressaltar que simulações numéricas validaram a detecção direta das OGs provindas da fusão de dois BNs. Além do LIGO, observatórios como VIRGO, Kamioka Gravitational Wave Detector (KAGRA), GEO600 e outros projetos têm tido um papel crucial na realização de novas observações. Os esforços feitos atualmente nesses observatórios envolvem técnicas avançadas de cálculo e análise em RN.

Os atuais computadores de processamento de ponta também estão permitindo um desenvolvimento rápido e altamente tecnológico da astrofísica observacional e da cosmologia. Alguns dos grupos de pesquisa que têm realizado testes numéricos do formalismo BSSN, foco deste trabalho, são: Simulating Xtreme Spacetimes (SXS) da Sherman Fairchild Foundation, da National Science Foundation (NSF) e da National Aeronautics and Space Administration (NASA) (Scott, 2024), Black Hole Initiative (BHI) na Harvard University (Heydeman *et al.*, 2024), Numerical Relativity Group (NRG) no Rochester Institute of Technology (Barlow *et al.*, 2024), Binary Merger Observations and Numerical Relativity (BMONR) no Max Planck Institute for Gravitational Physics (Ohme *et al.*, 2024), The Einstein Toolkit (ETK) da NSF (Vretinaris *et al.*, 2024), Numerical Relativity Group na University of Texas at Austin (NRGUTA) (Matzner *et al.*, 2024). Dentre eles, vale destacar a colaboração Spectral Einstein Code (SpEC) que desenvolve soluções essenciais para as equações de Einstein usando métodos espectrais (Kidder *et al.*, 2024), principal técnica numérica aplicada neste trabalho. No Brasil, alguns grupos de destaque em RN e que trabalham com formalismo BSSN estão nas universidades públicas: UERJ, UFABC e

UFRN. Cabe uma menção importante aos pesquisadores de Oliveira, Barreto, Clemente e Rodriguez-Mueller que desenvolveram o código RIO (Barreto *et al.*, 2018). Este código combina formalismo  $3 + 1$  e o método Galerkin-Colocação para a resolução das equações de campo com dados iniciais arbitrários de BNs. Posteriormente, Aranha e Alcoforado estendem o código RIO para o caso de simetria esférica no vácuo, combinando o formalismo BSSN Generalizado com o método Galerkin-Colocação (Alcoforado *et al.*, 2021), (Aranha *et al.*, 2024).

O principal objetivo deste trabalho é realizar diferentes testes numéricos no estudo do campo escalar com o formalismo BSSN para diferentes calibres utilizando o método Galerkin-Colocação. Primeiramente procuramos avaliar a estabilidade do código numérico implementado em Python, as vantagens e desvantagens comparando com outros códigos formulados em Maple e Matlab. Usamos a capacidade computacional de uma máquina com processadores i7, 6 núcleos de 3.6 GHz e 64Gb RAM. Além disso, queremos analisar os calibres que oferecem soluções mais precisas e verificar que a evolução física do campo é independente do calibre escolhido. Nesse sentido, estamos interessados nas condições iniciais do campo que levam a uma evolução bem comportada e de colapso gravitacional, resultando na dispersão do campo no fim da simulação.

## 1 FORMALISMO 3 + 1

O presente capítulo nos introduz às hipersuperfícies que são cruciais na decomposição 3+1 das equações de Einstein. Apresentamos as equações de Gauss-Codazzi que relacionam as curvaturas intrínseca e extrínseca de uma hipersuperfície com a curvatura do espaço-tempo. Mostramos os conceitos de vetor normal e função lapso e a decomposição do tensor de Riemann. Também apresentamos a decomposição normal das equações de Einstein em um fatiamento 3+1 do espaço-tempo. Introduzimos o vetor de deslocamento que permite transformar as equações de Einstein em um sistema de EDPs. Mostramos que este sistema pode ser formulado como um problema de Cauchy com vínculos.

### 1.1 Geometria das hipersuperfícies

Nesta seção apresentamos a noção geral de hipersuperfície, focamos nas hipersuperfícies do tipo espaço que são o cerne do formalismo 3 + 1, damos as noções das curvaturas intrínseca e extrínseca e derivamos as equações de Gauss-Codazzi que as relacionam.

#### 1.1.1 Definição de hipersuperfície

Considere um espaço-tempo  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ , isto é, uma variedade 4-dimensional diferenciável  $\mathcal{M}$  dotada de uma métrica  $\mathbf{g}$ . Assumimos que é possível dividir continuamente cada cone de luz da métrica  $\mathbf{g}$  em duas partes: passado e futuro. Denotamos por  $\nabla$  a conexão de Levi-Civita,  ${}^{(4)}\mathbf{Riem}$  o tensor de Riemann,  ${}^{(4)}\mathbf{R}$  o tensor Ricci e  ${}^{(4)}R$  o escalar de Ricci da métrica  $\mathbf{g}$ .

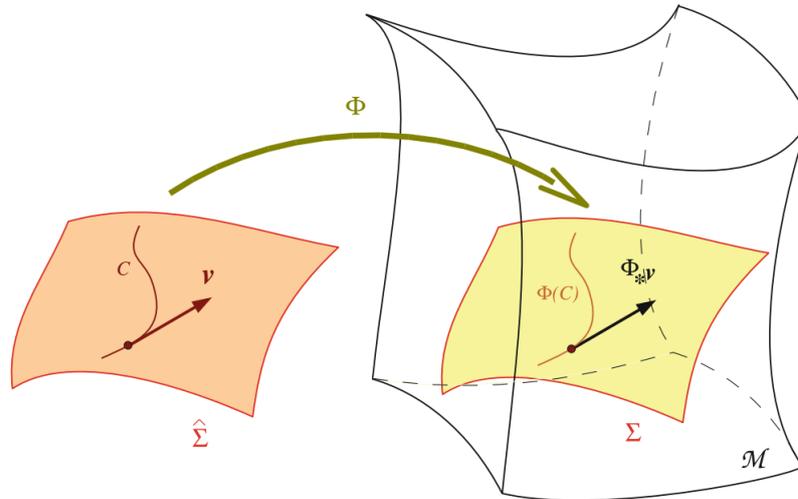
Uma **hipersuperfície** é a imagem  $\Sigma$  de uma variedade 3-dimensional  $\tilde{\Sigma}$  embutida em  $\mathcal{M}$  segundo o mapeamento  $\Phi : \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathcal{M} : \Sigma = \Phi(\tilde{\Sigma})$ , Fig. (1). Isto significa que  $\Phi : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$  é um homeomorfismo, ou seja, garante um mapeamento um-para-um, de modo que, se tanto  $\Phi$  quanto  $\Phi^{-1}$  são contínuos, então  $\Sigma$  não “se intersecciona” (Gourgoulhon, 2012). Uma hipersuperfície pode ser definida localmente como um conjunto de pontos para os quais um campo escalar  $t$  é constante em  $\mathcal{M}$ .

Definindo o campo escalar como  $t = 0$ , temos que:

$$\forall p \in \mathcal{M}, p \in \Sigma \Leftrightarrow t(p) = 0. \quad (1)$$

Suponha, por exemplo, que  $\Sigma$  é uma subvariedade conexa de  $\mathcal{M}$  com topologia  $\mathbb{R}^3$ , Fig. (2). Podemos introduzir localmente um sistema de coordenadas de  $\mathcal{M}$ ,  $(x^\alpha) = (t, x, y, z)$ ,

Figura 1 - Descrição geométrica de uma hipersuperfície  $\Sigma$  embutida em uma variedade  $\mathcal{M}$



Legenda: A hipersuperfície  $\Sigma = \Phi(\tilde{\Sigma})$  é definida pelo mapeamento  $\Phi$  da variedade 3-dimensional  $\tilde{\Sigma}$ . O transporte direto  $\Phi_*\nu$  de um vetor  $\nu$  tangente a alguma curva  $C$  em  $\tilde{\Sigma}$  é um vetor tangente a  $\Phi(C)$  em  $\mathcal{M}$ .

Fonte: Gourgoulhon, 2012, p. 31.

tal que  $t$  estende  $\mathbb{R}$  e  $(x, y, z)$  são coordenadas cartesianas abrangendo  $\mathbb{R}^3$ .  $\Sigma$  é então definida pela condição da coordenada  $t = 0$ , Eq. (1), e uma forma explícita do mapeamento  $\Phi$  pode ser obtida considerando  $(x^i) = (x, y, z)$  como coordenadas na variedade 3-dimensional  $\tilde{\Sigma}$ :

$$\Phi : \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathcal{M}(x, y, z) \mapsto (0, x, y, z). \quad (2)$$

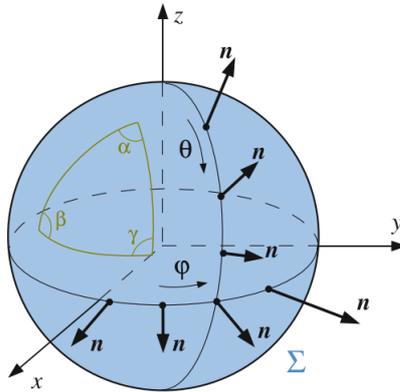
O mapeamento  $\Phi$  transporta as curvas de  $\tilde{\Sigma}$  ao longo das curvas de  $\mathcal{M}$  mantendo suas propriedades. Consequentemente, define um mapeamento entre vetores da estrutura  $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$  para vetores em  $\mathcal{T}_p(\tilde{\Sigma})$ . Este mapeamento é chamado de mapeamento *push-forward* (**transporte direto**, em tradução livre) e é denotado por  $\Phi_*$ . Como consequência, podemos identificar  $\tilde{\Sigma}$  e  $\Sigma$  por  $\Sigma = \Phi(\tilde{\Sigma})$ . Em particular, podemos identificar qualquer vetor em  $\tilde{\Sigma}$  pela sua imagem aplicada diretamente em  $\mathcal{M}$ . Neste caso, escrevemos simplesmente  $\nu$  ao invés de  $\Phi_*\nu$  (Gourgoulhon, 2012).

O transporte direto da métrica espaço-temporal  $\mathbf{g}$  define a **métrica induzida**  $\gamma$  sobre  $\Sigma$ :

$$\gamma := \Phi_*\mathbf{g}. \quad (3)$$

Em geometria diferencial  $\gamma$  é chamada de **primeira forma fundamental** de  $\Sigma$  e vamos chamá-la de **3-métrica** a partir de agora. Em termos do sistema de coordenadas  $(x^i) = (x, y, z)$  de  $\Sigma$ , as componentes de  $\gamma$  são:  $\gamma_{ij} = g_{ij}$  (Gourgoulhon, 2012).

Figura 2 - Esfera  $\Sigma$  como uma hipersuperfície de um espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^3$



Legenda: O vetor unitário normal  $\mathbf{n}$  muda de direção à medida que se desloca em  $\Sigma$ , logo, a curvatura extrínseca  $\mathbf{K}$  é não nula. Além disso, a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo em  $\Sigma$  é maior que  $\pi$ , então a curvatura intrínseca de  $(\Sigma, \gamma)$  também é não nula.

Fonte: Gourgoulhon, 2012, p. 39.

Por outro lado, a hipersuperfície  $\Sigma$  é dita ser:

- do **tipo espaço**, se  $\gamma$  é Riemanniana, isto é, tem assinatura  $(+, +, +)$ ;
- do **tipo tempo**, se  $\gamma$  é Lorentziana, isto é, tem assinatura  $(-, +, +)$ ;
- **nula**, se  $\gamma$  é degenerada, isto é, tem assinatura  $(0, +, +)$ .

### 1.1.2 Quantidades geométricas na hipersuperfície

Antes de prosseguir com algumas definições úteis é importante considerarmos os seguintes conceitos (Gourgoulhon, 2012):

- Se as componentes do vetor  $\boldsymbol{\mu}$  na base  $(\mathbf{e}_\alpha)$  são denotadas por  $u^\alpha$ , então  $\bar{\boldsymbol{\mu}}$  tem componentes na base dual  $(\mathbf{e}^\alpha)$  e suas componentes são denotadas por  $u_\alpha$ . Assim, para qualquer vetor  $\boldsymbol{\nu}$  em  $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ ,  $\bar{\boldsymbol{\mu}}$  representa uma forma linear única tal que:  $\forall \boldsymbol{\nu} \in \mathcal{T}_p(\mathcal{M}), \langle \bar{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{\nu} \rangle = \mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu})$ .
- Para qualquer forma linear  $\boldsymbol{\omega}$  em  $\mathcal{T}_p^*(\mathcal{M})$ ,  $\vec{\boldsymbol{\omega}}$  representa um vetor único de  $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$  tal que:  $\forall \boldsymbol{\nu} \in \mathcal{T}_p(\mathcal{M}), \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu} \rangle = \mathbf{g}(\vec{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\nu})$ . Nesse sentido, as componentes do vetor  $\vec{\boldsymbol{\omega}}$  estão relacionadas à forma linear  $\boldsymbol{\omega}$  por meio de  $\omega^\alpha = g^{\alpha\mu} \omega_\mu$ .
- Para qualquer forma bilinear  $\mathbf{T}$  em  $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$  (tensor do tipo (0,2)),  $\vec{\mathbf{T}}$  representa um tensor do tipo (1,1) tal que:  $\forall (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}) \in \mathcal{T}_p(\mathcal{M}) \times \mathcal{T}_p(\mathcal{M}), \mathbf{T}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}) = \vec{\mathbf{T}}(\bar{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{\nu}) = \boldsymbol{\mu} \cdot \vec{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\nu})$ .

- A **derivada covariante** de  $\mu$  ao longo de  $\nu$ ,  $\nabla_{\nu}\mu$ , mede a taxa de variação de  $\mu$  ao longo da direção de  $\nu$ . Esta derivada leva em consideração tanto a variação intrínseca do vetor  $\mu$  ao longo da direção de  $\nu$  quanto os efeitos da curvatura do espaço-tempo.
- A **derivada de Lie** de  $\mu$  (campo vetorial ou tensorial) ao longo de  $\nu$ ,  $\mathcal{L}_{\nu}\mu$ , mede a taxa de variação de  $\mu$  ao ser transportado pela direção do fluxo de  $\nu$ . Esta derivada é independente dos efeitos da curvatura do espaço-tempo, uma vez que depende apenas da estrutura algébrica do campo e da direção especificada do fluxo de  $\nu$ .

Considere agora um campo escalar  $t$  em  $\mathcal{M}$  tal que a hipersuperfície  $\Sigma$  é definida como uma superfície de nível de  $t$ , Eq. (1). O vetor dual  $\vec{\nabla}t$  é normal a  $\Sigma$  uma vez que, para todo vetor  $\nu$  tangente a  $\Sigma$ , temos  $\langle \vec{\nabla}t, \nu \rangle = 0$ . Além disso,  $\vec{\nabla}t$  é:

- do **tipo tempo**, se  $\Sigma$  é do tipo espaço;
- do **tipo espaço**, se  $\Sigma$  é do tipo tempo;
- **nulo**, se  $\Sigma$  é nula.

Note que  $\vec{\nabla}t$  define uma direção normal única a  $\Sigma$  pois, qualquer vetor  $\nu$  normal a  $\Sigma$  deve ser colinear a  $\vec{\nabla}t$ :  $\nu = \lambda \vec{\nabla}t$ , para qualquer  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ .

Se  $\Sigma$  é uma hipersuperfície não nula podemos renormalizar  $\vec{\nabla}t$  e torná-lo um vetor unitário definindo:

$$\mathbf{n} := \pm \frac{\vec{\nabla}t}{\sqrt{\vec{\nabla}t \cdot \vec{\nabla}t}}, \quad (4)$$

com sinal positivo para uma hipersuperfície do tipo tempo e negativo para uma hipersuperfície do tipo espaço. Por construção:

- $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = -1$ , se  $\Sigma$  é do tipo espaço;
- $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = +1$ , se  $\Sigma$  é do tipo tempo.

$\mathbf{n}$  é um dos 2 vetores unitários normais a  $\Sigma$ , sendo o outro  $\mathbf{n}' = -\mathbf{n}$  (Gourgoulhon, 2012).

\*

Se  $\Sigma$  é uma hipersuperfície não nula, então  $\gamma$  é não degenerada. Isso implica que há uma derivada covariante única  $\mathbf{D}$  na variedade  $\Sigma$  que é livre de torsão e satisfaz:

$$\mathbf{D}\gamma = 0, \quad (5)$$

---

\*Se  $\Sigma$  é uma hipersuperfície nula, a construção acima não é possível, já que  $\vec{\nabla}t \cdot \vec{\nabla}t = 0$ . De fato, dado um vetor normal  $\mathbf{n}$ , qualquer vetor  $\mathbf{n}' = \lambda \mathbf{n}$ , com  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , é uma alternativa válida para  $\mathbf{n}$ .

onde  $\mathbf{D}$  é a conexão de Levi-Civita associada à métrica  $\gamma$ .

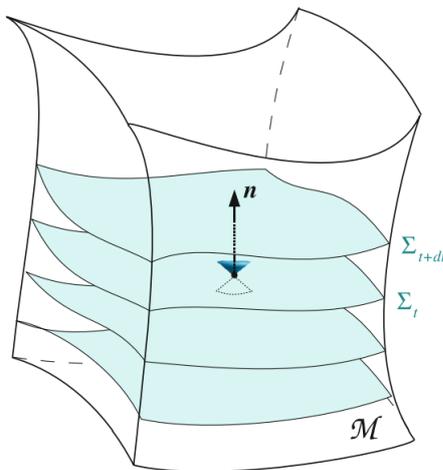
O tensor de Riemann associado a essa derivada covariante representa a chamada **curvatura intrínseca** de  $(\Sigma, \gamma)$ . Dito tensor será denotado por **Riem** e suas componentes por  $R^k{}_{lij}$ . **Riem** mede a não comutatividade de duas derivadas covariantes consecutivas  $\mathbf{D}$ :

$$\forall \nu \in \mathcal{T}(\Sigma), (D_i D_j - D_j D_i) \nu^k = R^k{}_{lij} \nu^l. \quad (6)$$

O tensor de Ricci será denotado por  $R_{ij} = R^k{}_{ikj}$  e o escalar de Ricci, também chamado de escalar de curvatura, por  $R = \gamma^{ij} R_{ij}$ . Em 3 dimensões o tensor de Riemann pode ser completamente deduzido do tensor de Ricci, nesse caso,  $R$  é chamado de curvatura gaussiana de  $(\Sigma, \gamma)$ . Esta é uma quantidade intrínseca, independente da maneira como a variedade  $(\Sigma, \gamma)$  está embutida em  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  (Gourgoulhon, 2012).

Há outro tipo de curvatura que está relacionada à taxa de deformação de  $\Sigma$  à medida em que esta é transportada para frente ao longo de  $\mathbf{n}$ , Fig. (3). À diferença da curvatura intrínseca, essa curvatura depende da maneira como a variedade  $(\Sigma, \gamma)$  está embutida em  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ , logo, é chamada de **curvatura extrínseca**.

Figura 3 - Fatiamento  $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$  de uma variedade  $\mathcal{M}$  por uma família de hipersuperfícies do tipo espaço



Legenda: A curvatura extrínseca  $\mathbf{K}$  mede a taxa de deformação de  $\Sigma$  em  $\mathcal{M}$  à medida em que  $\Sigma$  é transportada para frente ao longo do vetor normal  $\mathbf{n}$ .

Fonte: Gourgoulhon, 2012, p. 56.

Assim, a curvatura extrínseca é definida por:

$$\forall (\mathbf{u}, \nu) \in \mathcal{T}_p(\Sigma) \times \mathcal{T}_p(\Sigma), \mathbf{K}(\mathbf{u}, \nu) = -\mathbf{u} \cdot \nabla_\nu \mathbf{n}. \quad (7)$$

O sinal negativo é uma convenção comum usada na comunidade de RN (Gourgoulhon, 2012).  $K$  denota o traço da forma bilinear  $\mathbf{K}$  com relação à métrica  $\gamma$ .

### 1.1.3 Hipersuperfícies do tipo espaço

A partir de agora nos concentramos no vetor unitário normal  $\mathbf{n}$  que é do tipo tempo, ou seja, nos concentramos em hipersuperfícies do tipo espaço que, de fato, são as hipersuperfícies envolvidas no formalismo 3 + 1. O operador  $\vec{\gamma}$  é o **projedor ortogonal** sobre  $\Sigma$  e é definido por (Gourgoulhon, 2012):

$$\begin{aligned} \vec{\gamma} : \mathcal{T}_p(\mathcal{M}) &\rightarrow \mathcal{T}_p(\Sigma) \\ \boldsymbol{\nu} &\mapsto \boldsymbol{\nu} + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu})\mathbf{n}. \end{aligned} \quad (8)$$

Note que  $\vec{\gamma}(\mathbf{n}) = 0$  se  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = -1$ . Além disso,  $\vec{\gamma}$  reduz-se ao operador identidade para qualquer vetor  $\boldsymbol{\nu}$  tangente a  $\Sigma$ :

$$\forall \boldsymbol{\nu} \in \mathcal{T}_p(\Sigma), \vec{\gamma}(\boldsymbol{\nu}) = \boldsymbol{\nu}. \quad (9)$$

As componentes de  $\vec{\gamma}$  são:

$$\gamma^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta + n^\alpha n_\beta, \quad (10)$$

de acordo com a definição do projedor ortogonal, Eq. (8), em relação a qualquer base  $(\mathbf{e}_\alpha)$  de  $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ . Também expressamos a métrica  $\gamma$  em termos do tensor métrico  $\mathbf{g}$  e da forma linear dual  $\bar{\mathbf{n}}$  em relação ao vetor normal  $\mathbf{n}$  segundo (Gourgoulhon, 2012):

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{g} + \bar{\mathbf{n}} \otimes \bar{\mathbf{n}}. \quad (11)$$

Em termos de componentes:

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta. \quad (12)$$

Assim,  $\vec{\gamma}$  nada mais é do que a 3-métrica “estendida”  $\gamma$  com o primeiro índice elevado pela métrica  $\mathbf{g}$ , de acordo com as definições iniciais da Subseção 1.1.2 .

### 1.1.4 Equações de Gauss-Codazzi

Se  $\Sigma$  é uma superfície de nível de algum campo escalar  $t$ , o gradiente de  $t$  fornece uma extensão natural de  $\mathbf{n}$  em alguma vizinhança aberta de  $\Sigma$  segundo a Eq. (4). Então definimos o vetor:

$$\mathbf{a} := \nabla_{\mathbf{n}}\mathbf{n}. \quad (13)$$

Se  $\mathbf{n}$  é um vetor unitário do tipo tempo, então este vetor pode ser considerado como a 4-velocidade de algum observador e  $\mathbf{a}$  corresponde a uma 4-aceleração. Note que  $\mathbf{a}$  é ortogonal a  $\mathbf{n}$  e, portanto, tangente a  $\Sigma$  (Gourgoulhon, 2012):

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} &= \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{n} \\
&= \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{n}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \\
&= \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{n}} (-1) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Agora trabalhamos a definição estendida de  $\mathbf{K}$  a  $\mathcal{M}$ :

$$\begin{aligned}
\forall (\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}) \in \mathcal{T}_p(\mathcal{M})^2, \mathbf{K}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}) &= \mathbf{K}(\vec{\gamma}(\mathbf{u}), \vec{\gamma}(\boldsymbol{\nu})) \\
&= -\vec{\gamma}(\mathbf{u}) \cdot \nabla_{\vec{\gamma}(\boldsymbol{\nu})} \mathbf{n} \\
&= -\vec{\gamma}(\mathbf{u}) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\nu} + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu}) \mathbf{n}} \mathbf{n} \\
&= -[\mathbf{u} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n}] \cdot [\nabla_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu}) \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{n}] \\
&= -\mathbf{u} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu}) \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{n} \\
&\quad - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu}) \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{n} \\
&= -\mathbf{u} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{n} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu}) \\
&= -\nabla \bar{\mathbf{n}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}) - \langle \bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{u} \rangle \langle \bar{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle,
\end{aligned} \tag{15}$$

uma vez que  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = -1$  leva a  $\mathbf{n} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\mu}} \mathbf{n} = 0$ , para algum vetor  $\boldsymbol{\mu}$  (Gourgoulhon, 2012). Desse modo, dado que a relação anterior é válida para qualquer par de vetores  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu})$  em  $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ , então para os vetores duais  $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{n}}$  temos:

$$\nabla \bar{\mathbf{n}} = \mathbf{K} - \bar{\mathbf{a}} \otimes \bar{\mathbf{n}}. \tag{16}$$

Que em termos de componentes é:

$$\nabla_{\beta} n_{\alpha} = -K_{\alpha\beta} - a_{\alpha} n_{\beta}. \tag{17}$$

Portanto, da Eq. (16) observamos que o tensor de curvatura extrínseca (estendido em  $\mathcal{M}$ ) é o gradiente de  $\bar{\mathbf{n}}$  sobre o qual é aplicado o operador de projeção  $\vec{\gamma}^*$  em  $\mathcal{M}$ :

$$\mathbf{K} = -\vec{\gamma}^* \nabla \bar{\mathbf{n}}. \tag{18}$$

Tomando o traço da Eq. (16) em relação à métrica  $\mathbf{g}$  obtemos a relação entre o traço de  $\mathbf{K}$  e a divergência do vetor  $\mathbf{n}$ :

$$K = -\nabla \cdot \mathbf{n}. \tag{19}$$

Antes de deduzirmos as equações de Gauss-Codazzi vamos mostrar a relação entre as derivadas covariantes  $\nabla$  e  $\mathbf{D}$ . Note que  $\mathbf{D}$  está relacionada à métrica  $\gamma$  como mostra a Eq. (5). De fato, note que para um campo tensorial  $\mathbf{T}$  em  $\Sigma$ , sua derivada covariante  $\mathbf{DT}$  que pode ser expressa em termos da derivada covariante  $\nabla\mathbf{T}$  segundo (Gourgoulhon, 2012):

$$\mathbf{DT} = -\tilde{\gamma}^* \nabla\mathbf{T}. \quad (20)$$

Da equação anterior deduzimos uma relação interessante entre a derivada covariante de um campo vetorial  $\nu$  ao longo de outro campo vetorial  $\mathbf{u}$ , quando ambos vetores são tangentes a  $\Sigma$ . Assim, da Eq. (17) temos:

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_{\mathbf{u}}\nu)^\alpha &= u^\sigma D_\sigma \nu^\alpha \\ &= u^\sigma \gamma^\nu_\sigma \gamma^\alpha_\mu \nabla_\nu \nu^\mu \\ &= u^\nu (\gamma^\nu_\mu + n^\alpha n_\mu) \nabla_\nu \nu^\mu \\ &= u^\nu \nabla_\nu \nu^\alpha + n^\alpha u^\nu n_\mu \nabla_\nu \nu^\mu \\ &= u^\nu \nabla_\nu \nu^\alpha - n^\alpha u^\nu \nu^\mu \nabla_\nu \nu_\mu \\ &= u^\nu \nabla_\nu \nu^\alpha - n^\alpha u^\nu \nu^\mu \nabla_\nu n_\mu, \end{aligned} \quad (21)$$

onde usamos o fato de que se  $\nu$  é tangente a  $\Sigma$  então  $n_\mu \nu^\mu = 0$ . Além disso, da Eq. (7) e da simetria da curvatura extrínseca  $\mathbf{K}$ , temos:  $u^\nu \nu^\mu \nabla_\nu n_\mu = -\mathbf{K}(\nu, \mathbf{u}) = -\mathbf{K}(\mathbf{u}, \nu)$  (Gourgoulhon, 2012). Logo, a relação entre as derivadas covariantes  $\nabla$  e  $\mathbf{D}$  é:

$$\forall(\mathbf{u}, \nu) \in \mathcal{T}(\Sigma) \times \mathcal{T}(\Sigma), \quad \mathbf{D}_{\mathbf{u}}\nu = \nabla_{\mathbf{u}}\nu + \mathbf{K}(\mathbf{u}, \nu)\mathbf{n}. \quad (22)$$

Esta equação indica que, para quaisquer 2 vetores em  $\Sigma$ ,  $\mathbf{K}$  mede o desvio da derivada de um vetor  $\nu(t)$  ao longo de algum outro vetor  $\mathbf{u}$ , Fig. (4). Além disso, a equação mostra que esse desvio sempre é na direção do vetor normal  $\mathbf{n}$ .

Vamos considerar agora a **equação de Gauss** (Gourgoulhon, 2012):

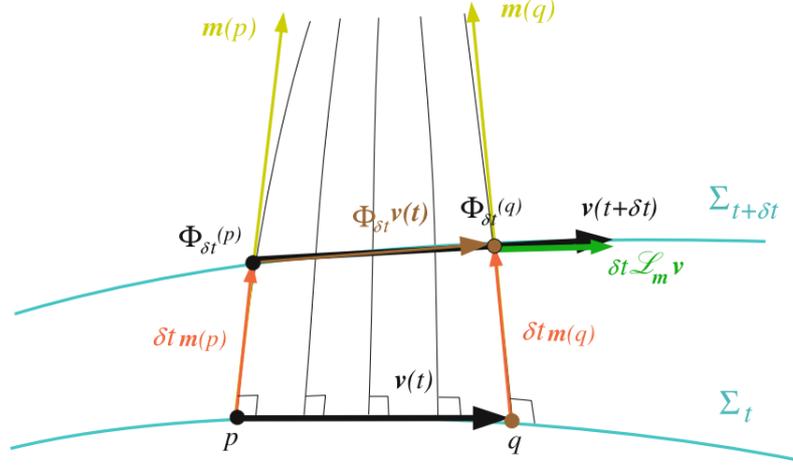
$$\gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \gamma^\gamma_\rho \gamma^\sigma_\delta {}^{(4)}R^\rho_{\sigma\mu\nu} = R^\gamma_{\sigma\alpha\beta} + K^\gamma_\alpha K_{\gamma\beta} - K^\gamma_\beta K_{\alpha\delta}. \quad (23)$$

Contraímos essa relação nos índices  $\alpha$  e  $\gamma$  usando:  $\gamma^\mu_\alpha \gamma^\alpha_\rho = \gamma^\mu_\rho = \delta^\mu_\rho + n^\mu n_\rho$ . De fato:

$$\gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta {}^{(4)}R_{\mu\nu} + \gamma_{\alpha\mu} n^\nu \gamma^\rho_\beta n^\sigma {}^{(4)}R^\mu_{\nu\rho\sigma} = R_{\alpha\beta} + K K_{\alpha\beta} - K_{\alpha\mu} K^\mu_\beta, \quad (24)$$

Essa equação relaciona os tensores de Ricci  ${}^{(4)}\mathbf{R}$  e  $\mathbf{R}$  com  $\mathbf{g}$  e  $\gamma$ , respectivamente. Tomando

Figura 4 - Construção geométrica da derivada de Lie de  $\nu$  ao longo de  $\mathbf{m}$



Legenda: A derivada de Lie de  $\nu$  ao longo de  $\mathbf{m}$  é definida como a diferença entre o valor do campo vetorial  $\nu$  no ponto  $\Phi_{\delta t}(p)$ , isto é,  $\nu(t + \delta t)$ , e o vetor transportado de  $\Sigma_t$  ao longo das linhas de campo de  $\mathbf{m}$ , isto é,  $\Phi_{\delta t}\nu(t)$ .

Fonte: Gourgoulhon, 2012, p. 59.

o traço de  $\mathbf{K}$  em relação a  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}
 K^\mu{}_\mu &= K^i{}_i = K, \\
 K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} &= K_{ij}K^{ij} \text{ e} \\
 \gamma^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\mu}n^\nu\gamma^\rho{}_\beta n^\sigma ({}^4R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}) &= \gamma^\rho{}_\mu n^\nu n^\sigma ({}^4R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}) \\
 &= ({}^4R^\mu{}_{\nu\mu\sigma}n^\nu n^\sigma + ({}^4R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}n^\rho n_\mu n^\nu n^\sigma) \\
 &= ({}^4R_{\mu\nu}n^\mu n^\nu).
 \end{aligned} \tag{25}$$

Então obtemos a **equação de Gauss contraída**:

$$({}^4R + 2({}^4R_{\mu\nu}n^\mu n^\nu) = R + K^2 - K_{ij}K^{ij}). \tag{26}$$

Esta equação relaciona a curvatura intrínseca  $R$  de  $\Sigma$  com sua curvatura extrínseca ( $K^2 - K_{ij}K^{ij}$ ). Quando a curvatura  $\mathbf{K}$  é nula em  $\Sigma$ , então o termo à esquerda da equação acima é identicamente nulo.

Considere agora a **equação de Codazzi** (Gourgoulhon, 2012):

$$\gamma^\gamma{}_\rho n^\sigma \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta ({}^4R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}) = D_\beta K^\gamma{}_\alpha - D_\alpha K^\gamma{}_\beta. \tag{27}$$

Tomando o traço em relação a  $\alpha$  e  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}
 \gamma^\mu{}_\rho n^\sigma \gamma^\nu{}_\beta ({}^4R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}) &= (\delta^\mu{}_\rho + n^\nu n_\rho) n^\sigma \gamma^\nu{}_\beta ({}^4R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}) \\
 &= n^\sigma + \gamma^\nu{}_\beta ({}^4R_{\sigma\nu} + \gamma^\nu{}_\beta ({}^4R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} n_\rho n^\sigma n^\mu).
 \end{aligned} \tag{28}$$

Daí:

$$\gamma^\mu{}_\rho n^\sigma \gamma^\nu{}_\beta {}^{(4)}R_{\sigma\mu\nu} = D_\beta K - D_\mu K^\mu{}_\beta. \quad (29)$$

O tensor de Riemann é antissimétrico, logo, o último termo da equação acima é nulo. Então,

$$\gamma^\mu{}_\alpha n^\nu {}^{(4)}R_{\mu\nu} = D_\alpha K - D_\mu K^\mu{}_\alpha \quad (30)$$

é a **equação de Codazzi contraída**. Esta equação estabelece a relação entre o tensor de Ricci  ${}^{(4)}R_{\mu\nu}$  e a derivada covariante  $\mathbf{D}$  de  $K$  da métrica  $\gamma$  em  $\Sigma$ . Para hipersuperfícies cuja curvatura extrínseca  $\mathbf{K}$  é nula em  $\Sigma$  temos  $\mathbf{DK} = 0$  e o lado esquerdo da equação anterior é identicamente nulo.

## 1.2 Geometria dos fatiamentos

Nesta seção consideramos um conjunto contínuo de hipersuperfícies que cobrem um espaço-tempo, introduzimos os conceitos de função lapso, vetor de evolução normal e vetor de deslocamento. Apresentamos a evolução da 3-métrica normal à hipersuperfície e complementamos as equações de Gauss-Codazzi com uma relação obtida da decomposição do tensor de Riemann.

### 1.2.1 Definição de fatiamento

Uma **superfície de Cauchy** é uma hipersuperfície do tipo espaço  $\Sigma$  em  $\mathcal{M}$  tal que cada curva do tipo tempo ou nula, sem ponto final, intersecta  $\Sigma$  apenas uma vez. Nem todos os espaços-tempos admitem uma superfície de Cauchy, como é o caso das curvas fechadas do tipo tempo, Fig. (2).

Um espaço-tempo  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  que admite uma superfície de Cauchy é dito ser **globalmente hiperbólico** e tem topologia  $\Sigma \times \mathbb{R}$  (Gourgoulhon, 2012). Qualquer espaço-tempo  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  globalmente hiperbólico pode ser fatiado por uma família de hipersuperfícies do tipo espaço  $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ . Se existe um campo escalar suave e regular  $\tilde{t}$  em  $\mathcal{M}$ , ou seja, se seu gradiente é não nulo, então cada hipersuperfície é uma superfície de nível desse campo escalar (Gourgoulhon, 2012). Logo, um **fatiamento** é definido como:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \Sigma_t := \{p \in \mathcal{M}, \tilde{t}(p) = t\}. \quad (31)$$

Se  $\tilde{t}$  é regular, então a hipersuperfícies  $(\Sigma_t)$  não se interseccionam. Chamamos cada

hipersuperfície  $\Sigma_t$  de fatia (ou folha) e o fatiamento  $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$  preenche todo o espaço-tempo  $\mathcal{M}$ .

Observe que se o vetor unitário  $\mathbf{n}$  é normal à fatia  $\Sigma_t$  e colinear a  $\vec{\nabla}_t$ , então:

$$\mathbf{n} := -\alpha \vec{\nabla}_t. \quad (32)$$

O observador cuja 4-velocidade é dada pela definição anterior é chamado de **observador normal** ou **observador Euleriano**. As linhas de mundo de observadores normais são ortogonais às hipersuperfícies  $\Sigma_t$ . Nesse sentido, a hipersuperfície  $\Sigma_t$  é localmente o conjunto de eventos que são simultâneos do ponto de vista do observador normal (Gourgoulhon, 2012). Também definimos:

$$\alpha := -\frac{1}{\sqrt{\vec{\nabla}_t \cdot \vec{\nabla}_t}} = -\frac{1}{\sqrt{\langle \nabla_t, \vec{\nabla}_t \rangle}} \quad (33)$$

como a **função lapso**. O sinal negativo é escolhido de tal forma que  $\mathbf{n}$  é orientado para o futuro se o campo escalar  $t$  estiver aumentando em direção ao futuro.

Por construção, em uma fatia regular,  $\alpha > 0$  sempre. A Eq. (32) também diz que  $-\alpha$  é a constante de proporcionalidade entre o vetor dual  $\bar{\mathbf{n}}$  e o gradiente  $\nabla_t$ :

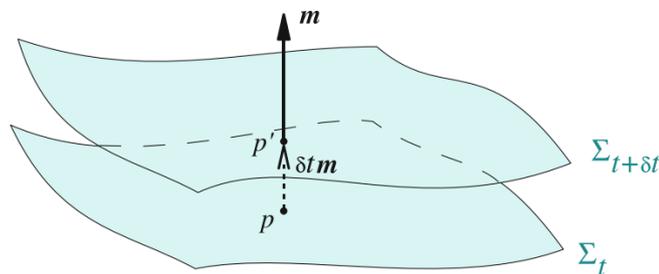
$$\bar{\mathbf{n}} = -\alpha \nabla_t. \quad (34)$$

Assim, definimos o **vetor de evolução normal**  $\mathbf{m}$ , Fig. (5):

$$\mathbf{m} := \alpha \mathbf{n}. \quad (35)$$

Note que  $\mathbf{m}$  é um vetor do tipo tempo e normal a  $\Sigma_t$ .

Figura 5 - Construção geométrica do vetor de evolução normal  $\mathbf{m}$



Legenda: O ponto  $p' \in \Sigma_{t+\delta t}$  é deduzido de  $p \in \Sigma_t$  por um deslocamento  $\delta t \mathbf{m}$  que pertence a  $\Sigma_{t+\delta t}$ .

Fonte: Gourgoulhon, 2012, p. 58.

Além disso:

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = -\alpha^2, \quad (36)$$

e se  $\langle \nabla t, \mathbf{m} \rangle = \nabla_{\mathbf{m}} t = m^\mu \nabla_\mu t = 1$ , então:

$$\langle \nabla t, \mathbf{m} \rangle = \alpha \langle \nabla t, \mathbf{n} \rangle = \alpha^2 (-\langle \nabla t, \vec{\nabla} t \rangle) = 1. \quad (37)$$

Uma consequência geométrica dessa propriedade é que a hipersuperfície  $\Sigma_{t+\delta t}$  pode ser obtida da hipersuperfície vizinha  $\Sigma_t$  por um pequeno deslocamento  $\delta \mathbf{m}$  de cada ponto de  $\Sigma_t$ , Fig. (5). De fato, seja um ponto  $p$  em  $\Sigma_t$  deslocado pelo vetor infinitesimal  $\delta \mathbf{m}$  até o ponto  $p' = p + \delta \mathbf{m}$  (Gourgoulhon, 2012). Da definição do gradiente  $\nabla t$ , o campo escalar  $t$  em  $p'$  vale:

$$t(p') = t(p + \delta \mathbf{m}) = t(p) + \delta t \langle \nabla t, \mathbf{m} \rangle = t(p) + \delta t, \quad (38)$$

portanto,  $p' \in \Sigma_{t+\delta t}$  e dizemos que o vetor  $\delta \mathbf{m}$  transporta a hipersuperfície  $\Sigma_t$  para a próxima hipersuperfície vizinha  $\Sigma_{t+\delta t}$ .

Nesse sentido, as hipersuperfícies ( $\Sigma_t$ ) são transportadas pelo vetor  $\mathbf{m}$ , de modo que  $\mathbf{m}$  é o **vetor de evolução normal**. A Fig. (5) mostra a definição geométrica da derivada de Lie. De fato, a derivada de Lie de qualquer vetor tangente a  $\Sigma_t$  ao longo de  $\mathbf{m}$  também é um vetor tangente a  $\Sigma_t$ :

$$\forall \boldsymbol{\nu} \in \mathcal{T}(\Sigma_t), \mathcal{L}_{\mathbf{m}} \boldsymbol{\nu} \in \mathcal{T}(\Sigma_t). \quad (39)$$

Ainda sobre  $\mathbf{m}$  e  $\alpha$ , sejam dois eventos próximos  $p$  e  $p'$  na linha de mundo de um observador normal. Seja  $t$  o tempo coordenado do evento  $p$  e  $t + \delta t$  do evento  $p'$  (com  $\delta t > 0$ ), considerando que  $p$  está em  $\Sigma_t$  e  $p'$  em  $\Sigma_{t+\delta t}$ . O tempo próprio  $\delta \tau$  entre os eventos  $p$  e  $p'$ , medido por um observador normal, é o comprimento métrico do vetor que relaciona  $p$  e  $p'$  (Gourgoulhon, 2012). De fato,

$$\delta \tau = \sqrt{-\mathbf{g}(\delta \mathbf{m}, \delta \mathbf{m})} = \sqrt{-\mathbf{g}(\mathbf{m}, \mathbf{m})} \delta t. \quad (40)$$

Se  $\mathbf{g}(\mathbf{m}, \mathbf{m}) = -\alpha^2$  e  $\alpha > 0$ , então:

$$\delta \tau = \alpha \delta t \quad (41)$$

mostra que  $\alpha$  relaciona o tempo coordenado  $t$  de cada hipersuperfície com o tempo próprio  $\tau$  medido pelo observador normal.

Por outro lado, a 4-aceleração de um observador normal é a derivada covariante da 4-velocidade  $\mathbf{n}$  em relação a si mesma:  $\mathbf{a} = \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{n}$ . Como o vetor  $\mathbf{a}$  é ortogonal a  $\mathbf{n}$  e, portanto, tangente a  $\Sigma_t$ , ele pode ser expresso em termos do gradiente espacial de  $\alpha$  (Gourgoulhon, 2012):

$$\mathbf{a} = \vec{\mathbf{D}} \ln \alpha. \quad (42)$$

Assim, a 4-aceleração de um observador normal é o gradiente espacial sobre  $(\Sigma_t, \gamma)$  do logaritmo de  $\alpha$ .

### 1.2.2 Cinemática dos fatiamentos

Antes de deduzir a equação da evolução de  $\gamma$ , vamos obter as relações entre os gradientes de  $\bar{\mathbf{n}}$  e  $\mathbf{m}$  que são necessárias para essa dedução. Substituindo a Eq. (42) na Eq. (17):

$$\nabla_\beta n_\alpha = -K_{\alpha\beta} - D_\alpha \ln(\alpha n_\beta). \quad (43)$$

Além disso, se

$$\nabla \bar{\mathbf{m}} = \nabla(\alpha \bar{\mathbf{n}}) = \alpha \nabla \bar{\mathbf{n}} + \bar{\mathbf{n}} \otimes \nabla \alpha, \quad (44)$$

então:

$$\nabla \mathbf{m} = -\alpha \vec{\mathbf{K}} - \vec{\mathbf{D}}\alpha \otimes \bar{\mathbf{n}} + \mathbf{n} \otimes \nabla \alpha. \quad (45)$$

Em termos de componentes:

$$\nabla_\nu m^\mu = -\alpha K^\mu_\nu - D^\mu \alpha n_\nu + n^\mu \nabla_\nu \alpha. \quad (46)$$

A derivada de Lie de  $\gamma$  em  $\Sigma_t$  ao longo de  $\mathbf{m}$  é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{m}} \gamma_{\alpha\beta} &= m^\mu \nabla_\mu \gamma_{\alpha\beta} + \gamma_{\mu\beta} \nabla_\alpha m^\mu + \gamma_{\alpha\mu} \nabla_\beta m^\mu \\ &= \alpha n^\mu \nabla_\mu (n_\alpha n_\beta) - \gamma_{\mu\beta} (\alpha K^\mu_\alpha + D^\mu \alpha n_\alpha - n^\mu \nabla_\alpha \alpha) \\ &\quad - \gamma_{\alpha\mu} (\alpha K^\mu_\beta + D^\mu \alpha n_\beta - n^\mu \nabla_\beta \alpha) \\ &= \alpha (n^\mu \nabla_\mu n_\alpha n_\beta + n_\alpha n^\mu \nabla_\mu n_\beta) - \alpha K_{\beta\alpha} - D_\beta \alpha n_\alpha - \alpha K_{\alpha\beta} - D_\alpha \alpha n_\beta \\ &= -2\alpha K_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (47)$$

Em termos de  $\gamma$ :

$$\mathcal{L}_{\mathbf{m}} \gamma = -2\alpha \mathbf{K}. \quad (48)$$

Assim, a derivada de Lie de  $\gamma$  ao longo de  $\mathbf{n}$  é:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathbf{m}} \gamma_{\alpha\beta} &= \mathcal{L}_{\alpha\mathbf{n}} \gamma_{\alpha\beta} \\
&= \alpha n^\mu \nabla_\mu \gamma_{\alpha\beta} + \gamma_{\mu\beta} \nabla_\alpha (\alpha n^\mu) + \gamma_{\alpha\mu} \nabla_\beta (\alpha n^\mu) \\
&= \alpha n^\mu \nabla_\mu \gamma_{\alpha\beta} + \gamma_{\mu\beta} n^\mu \nabla_\alpha \alpha + \alpha \gamma_{\mu\beta} \nabla_\alpha n^\mu + \gamma_{\alpha\mu} n^\mu \nabla_\beta \alpha + \alpha \gamma_{\alpha\mu} \nabla_\beta n^\mu \\
&= \alpha \mathcal{L}_{\mathbf{n}} \gamma_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{49}$$

Daí,  $\mathcal{L}_{\mathbf{n}} \gamma = \alpha^{-1} \mathcal{L}_{\mathbf{m}} \gamma$  implica em:

$$\mathbf{K} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_{\mathbf{n}} \gamma. \tag{50}$$

Das equações (18) e (22) temos:

$$\forall (\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}) \in \mathcal{T}(\Sigma) \times \mathcal{T}(\Sigma), \mathbf{K}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu})\mathbf{n} = \mathbf{D}_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\nu} - \nabla_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\nu}. \tag{51}$$

Esta equação mostra que  $\mathbf{K}$ , além de ser a projeção do gradiente de  $\mathbf{n}$  em  $\Sigma_t$  e ser menos a metade da derivada de Lie da métrica de  $\Sigma_t$  ao longo de  $\mathbf{n}$ , é também a medida das diferenças entre as derivadas  $\mathbf{D}$  e  $\nabla$  de  $\boldsymbol{\nu}$  ao longo de  $\mathbf{u}$ .

Por outro lado, para obtermos a evolução do projetor ortogonal vamos avaliar primeiro a derivada de Lie do projetor sobre  $\Sigma_t$ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathbf{m}} \gamma^\alpha_\beta &= m^\mu \nabla_\mu \gamma^\alpha_\beta - \gamma^\mu_\beta \nabla_\mu m^\alpha + \gamma^\alpha_\mu \nabla_\beta m^\mu \\
&= \alpha n^\mu \nabla_\mu (n^\alpha n_\beta) + \gamma^\mu_\beta (\alpha K^\alpha_\mu + D^\alpha \alpha n_\mu - n^\alpha \nabla_\mu \alpha) \\
&\quad - \gamma^\alpha_\mu (\alpha K^\mu_\beta + D^\mu \alpha n_\beta - n^\mu \nabla_\beta \alpha) \\
&= \alpha (n^\mu \nabla_\mu n^\alpha n_\beta + n^\alpha n^\mu \nabla_\mu n_\beta) + \alpha K^\alpha_\beta - n^\alpha D_\beta \alpha - \alpha K^\alpha_\beta - D^\alpha \alpha n_\beta \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{52}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}_{\mathbf{m}} \vec{\gamma} = 0 \tag{53}$$

mostra claramente que, para qualquer campo tensorial  $\mathbf{T}$  tangente a  $\Sigma_t$ , a derivada de Lie ao longo de  $\mathbf{m}$  é um campo tensorial tangente a  $\Sigma_t$ . Assim, para um campo tensorial tangente a  $\Sigma_t$ :  $\vec{\gamma}^* \mathbf{T} = \mathbf{T}$ . Nesse sentido, sendo  $\mathbf{K}$  tangente a  $\Sigma_t$ , então  $\mathcal{L}_{\mathbf{m}} \gamma$  também o é.

### 1.2.3 Decomposição 3+1 do tensor de Riemann

Nas subseções anteriores vimos que  $\vec{\gamma}^{*(4)} \mathbf{Riem}$  é a projeção total do tensor de Riemann no espaço-tempo e resultou na equação de Gauss. A parte projetada três vezes

em  $\Sigma_t$  e uma vez ao longo de  $\mathbf{n}$  forneceu a equação de Codazzi. Ambas decomposições envolvem apenas os campos  $\gamma$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{Riem}$  e  $\mathbf{DK}$  que são tangentes a  $\Sigma_t$ , e suas derivadas têm direções paralelas à hipersuperfície. Nesta subseção vamos projetar o tensor de Riemann duas vezes em  $\Sigma_t$  e uma vez ao longo de  $\mathbf{n}$ :

$$\gamma_{\alpha\mu}n^\sigma\gamma^\nu_\beta{}^4R^\mu_{\rho\nu\sigma}n^\rho = \gamma_{\alpha\mu}n^\sigma\gamma^\nu_\beta(\nabla_\nu\nabla_\sigma n^\mu - \nabla_\sigma\nabla_\nu n^\mu). \quad (54)$$

Os detalhes do cálculo estão explícitos em (Gourgoulhon, 2012) e resultam na **equação de Ricci**:

$$\gamma_{\alpha\mu}n^\rho\gamma^\nu_\beta n^\sigma{}^4R^\mu_{\rho\nu\sigma} = \frac{1}{\alpha}\mathcal{L}_{\mathbf{m}}K_{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha}D_\alpha D_\beta \alpha + K_{\alpha\mu}K^\mu_\beta. \quad (55)$$

Essa equação completa a decomposição 3 + 1 do tensor de Riemann. A parte projetada três vezes ao longo de  $\mathbf{n}$  desaparece identicamente, uma vez que  ${}^{(4)}\mathbf{Riem}(\cdot, \mathbf{n}, \mathbf{n}, \mathbf{n}) = 0$  pela antissimetria do tensor de Riemann. Logo, pode-se projetar  ${}^{(4)}\mathbf{Riem}$  no máximo duas vezes ao longo de  $\mathbf{n}$  para obter algum resultado não nulo. Combinando a equação de Gauss contraída, Eq. (26), e a equação de Ricci, Eq. (55), obtemos uma expressão que contém apenas o tensor de Ricci:

$$\gamma^\mu_\alpha\gamma^\nu_\beta{}^{(4)}R_{\mu\nu} = -\frac{1}{\alpha}\mathcal{L}_{\mathbf{m}}K_{\alpha\beta} - \frac{1}{\alpha}D_\alpha D_\beta \alpha + R_{\alpha\beta} + KK_{\alpha\beta} - 2K_{\alpha\mu}K^\mu_\beta. \quad (56)$$

Contraindo a equação acima com  $\gamma^{\alpha\beta}$  e depois de alguma álgebra:

$${}^{(4)}R = R + K^2 + K_{ij}K^{ij} - \frac{2}{\alpha}\mathcal{L}_{\mathbf{m}}K - \frac{2}{\alpha}D_i D^i \alpha. \quad (57)$$

Esta equação é notável porque sintetiza o comportamento geométrico do espaço-tempo em termos das curvaturas intrínseca e extrínseca e das grandezas  $\mathbf{m}$  e  $\alpha$ .

### 1.3 Decomposição 3 + 1 das equações de Einstein

Nas subseções anteriores nos dedicamos à geometria de hipersuperfícies e nos concentramos em espaços-tempos globalmente hiperbólicos, que são os que cobrem a maioria dos espaços-tempos de interesse da astrofísica e da cosmologia. Todos os resultados obtidos são independentes das equações de Einstein e da escolha de coordenadas ( $x^i$ ) em cada hipersuperfície. A partir de agora mostraremos os aspectos físicos do formalismo 3 + 1.

De fato, considere um espaço-tempo  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  que satisfaz as equações de Einstein:

$${}^{(4)}\mathbf{R} - \frac{1}{2}{}^{(4)}R\mathbf{g} = 8\pi\mathbf{T}, \quad (58)$$

sendo  ${}^{(4)}\mathbf{R}$  o tensor de Ricci associado a  $\mathbf{g}$ ,  ${}^{(4)}R$  o escalar de Ricci e  $\mathbf{T}$  o tensor de momento-energia. Além disso,  $T := g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$  é o traço de  $\mathbf{T}$  em relação a  $\mathbf{g}$ .<sup>†</sup>

### 1.3.1 Projeções das equações de Einstein

Assumindo que o espaço-tempo  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  é globalmente hiperbólico e que  $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$  é o fatiamento de  $\mathcal{M}$  por uma família de hipersuperfícies do tipo espaço, o formalismo 3 + 1 da RG consiste em projetar as equações de Einstein sobre  $\Sigma_t$  e perpendicularmente a ela. Para tal, considere primeiro a decomposição 3 + 1 do tensor de momento-energia. Por definição, a **densidade de energia** de matéria medida por um observador normal é:

$$\rho := \mathbf{T}(\mathbf{n}, \mathbf{n}), \quad (59)$$

uma vez que a 4-velocidade do observador é o vetor  $\mathbf{n}$  normal às hipersuperfícies  $\Sigma_t$ . Por outro lado, a **densidade de momento** de matéria medida por um observador normal é:

$$\forall \boldsymbol{\nu} \in T_j(\mathcal{M}), \langle \mathbf{j}, \boldsymbol{\nu} \rangle = -\mathbf{T}(\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\nu}), \mathbf{n}). \quad (60)$$

Em termos de componentes:

$$j_\alpha = -T_{\mu\nu} \gamma_\alpha^\mu n^\nu, \quad (61)$$

onde  $\mathbf{j}$  é a forma linear tangente a  $\Sigma_t$ . O **fluxo de energia** medido pelo observador normal é obtido permutando  $\vec{\boldsymbol{\gamma}}$  e  $\mathbf{n}$ :

$$\boldsymbol{\phi} := -\mathbf{T}(\mathbf{n}, \vec{\boldsymbol{\gamma}}(\cdot)). \quad (62)$$

Além disso, a energia  $dE$  que atravessa uma superfície elementar de área  $d\mathbf{S}$  em  $\Sigma_t$  durante o tempo próprio  $d\tau$  é:

$$\frac{dE}{d\tau} = \langle \boldsymbol{\phi}, d\mathbf{S} \rangle. \quad (63)$$

Como  $\mathbf{T}$  é simétrico, então:  $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{j}$ . Considere também o **tensor de estress** de matéria que é dado pela forma bilinear:

$$\mathbf{S} := \vec{\boldsymbol{\gamma}}^* \mathbf{T}. \quad (64)$$

---

<sup>†</sup>Não estamos considerando a constante cosmológica pois o foco deste trabalho é a solução numérica das equações de Einstein apenas para fenômenos locais.

Em termos de componentes:

$$S_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha}^{\mu}\gamma_{\beta}^{\nu}T_{\mu\nu}, \quad (65)$$

onde  $\mathbf{S}$  é um campo tensorial tangente a  $\Sigma_t$ . Tomando seu traço:

$$S := \gamma^{ij}S_{ij} = g^{\mu\nu}S_{\mu\nu}. \quad (66)$$

Fisicamente  $S$  é interpretado da seguinte maneira: considere dois vetores unitários do tipo espaço,  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{F}'$ , no referencial de repouso de um observador normal, ou seja, dois vetores unitários ortogonais a  $\mathbf{n}$ . Então  $\mathbf{S}(\mathbf{F}, \mathbf{F}')$  é a força na direção  $\mathbf{F}$  atuando em uma superfície unitária cuja normal é  $\mathbf{F}'$ .

Das definições de  $\rho$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{S}$  obtemos a decomposição de  $\mathbf{T}$  de forma análoga à Eq. (11):

$$\mathbf{T} = \mathbf{S} + \bar{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{j} + \mathbf{j} \otimes \bar{\mathbf{n}} + \rho \bar{\mathbf{n}} \otimes \bar{\mathbf{n}}, \quad (67)$$

onde usamos o fato de que  $\phi = \mathbf{j}$ . Tomando seu traço em relação à métrica  $\mathbf{g}$  obtemos:

$$T = S + 2\langle \mathbf{j}, \mathbf{n} \rangle + \rho \langle \bar{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \rangle \Rightarrow T = S - \rho. \quad (68)$$

De posse das projeções tanto da parte geométrica quanto da parte material das equações de Einstein, agora restam 3 possibilidades: projeções total, perpendicular e mista sobre a hipersuperfície  $\Sigma_t$ .

O primeiro caso consiste em aplicar o operador de projeção  $\vec{\gamma}^*$  às equações de Einstein, combinar a equação de Gauss contraída, Eq. (25), com a equação de Ricci, Eq. (55), e usar as definições anteriores. Os detalhes desse cálculo estão em (Gourgoulhon, 2012) e levam à equação de evolução da curvatura extrínseca:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{m}}K_{ij} = -D_i D_j \alpha + \alpha \{R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik}K_j^k + 4\pi[(S - \rho)\gamma_{ij} - 2S_{ij}]\}. \quad (69)$$

O segundo caso consiste em aplicar o par  $(\mathbf{n}, \mathbf{n})$  às equações de Einstein. Como  $\mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = -1$  e  $\mathbf{T}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = \rho$ , então de

$${}^{(4)}\mathbf{R}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) + \frac{1}{2} {}^{(4)}R = 8\pi \mathbf{T}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) \quad (70)$$

obtemos a **equação do vínculo Hamiltoniano**:

$$R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi\rho. \quad (71)$$

O terceiro caso corresponde à projeção mista sobre  $\Sigma_t$  e ao longo de  $\mathbf{n}$ :

$${}^{(4)}\mathbf{R}(\mathbf{n}, \vec{\gamma}(\cdot)) - \frac{1}{2} {}^{(4)}R\mathbf{g}(\mathbf{n}, \vec{\gamma}(\cdot)) = 8\pi\mathbf{T}(\mathbf{n}, \vec{\gamma}(\cdot)). \quad (72)$$

Utilizando a equação de Codazzi contraída, Eq. (30), e o fato de que  $\mathbf{T}(\mathbf{n}, \vec{\gamma}(\cdot)) = -\mathbf{j}$ , então:

$$\mathbf{D} \cdot \vec{\mathbf{K}} - \mathbf{D}\mathbf{K} = 8\pi\mathbf{j}. \quad (73)$$

Em termos de componentes:

$$D_j K^j_i - D_i K = 8\pi j_i, \quad (74)$$

obtemos a **equação do vínculo de momento**.

Com as deduções anteriores demonstramos que as equações de Einstein são equivalentes ao sistema composto pelas equações (69), (71) e (74). A primeira equação é uma equação tensorial de ordem 2 dentro de  $\Sigma_t$  e envolve apenas tensores simétricos, logo, tem 6 componentes independentes. A segunda é uma equação escalar e a terceira é uma equação tensorial de ordem 1 dentro de  $\Sigma_t$ , logo, possui 3 componentes independentes. Portanto, o número total de componentes independentes desse sistema é  $6 + 1 + 3 = 10$ , ou seja, o mesmo número que o das equações de Einstein na formulação apresentada inicialmente.

### 1.3.2 Coordenadas adaptadas ao fatiamento

Nesta subseção apresentamos a proposta mais notável do formalismo  $3 + 1$ : transformar as equações de Einstein de um sistema de equações tensoriais para um sistema de EDPs. A ideia principal consiste em introduzir coordenadas adaptadas ao fatiamento  $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ . De fato, em cada hipersuperfície  $\Sigma_t$  introduz-se algum sistema de coordenadas espaciais  $(x^i) = (x^1, x^2, x^3)$  que varia suavemente entre hipersuperfícies vizinhas. Logo,  $(x^\alpha) = (t, x^1, x^2, x^3)$  é um sistema de coordenadas bem comportado em algum espaço-tempo da variedade  $\mathcal{M}$ .

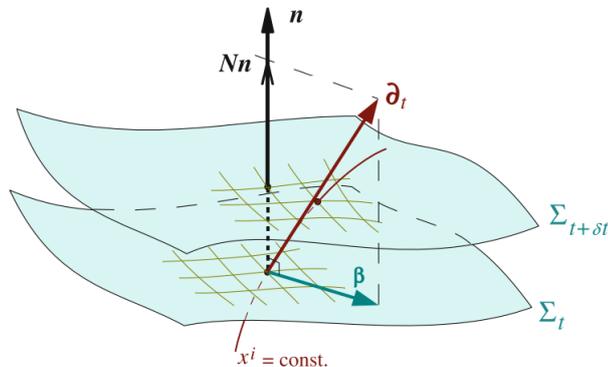
Considere  $(\partial_\alpha) = (\partial_t, \partial_i)$ , com  $i = 1, 2, 3$ , que denota a base natural de  $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$  associada às coordenadas  $(x^\alpha)$ :

$$\begin{aligned} \partial_t &:= \frac{\partial}{\partial t}; \\ \partial_i &:= \frac{\partial}{\partial x^i}. \end{aligned} \quad (75)$$

Chamamos  $\partial_t$  de **vetor tempo**, porém, mais adiante veremos que  $\partial_t$  não necessariamente

é um vetor do tipo tempo. Note que  $\partial_t$  é tangente às linhas das coordenadas espaciais constantes, ou seja, às curvas de  $\mathcal{M}$  definidas pelas constantes:  $x^1 = K^1, x^2 = K^2, x^3 = K^3$  como mostra a Fig. (6).

Figura 6 - Construção geométrica do vetor tempo  $\partial_t$



Legenda: Cada curva  $x^i = cte.$  corta o fatiamento  $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$  entre cada hipersuperfície e define os vetores  $\beta$  e  $\partial_t$  do espaço-tempo no sistema de coordenadas  $(x^\alpha) = (t, x^i)$ .

Fonte: Gourgoulhon, 2012, p. 79.

Por outro lado, o vetor  $\partial_i$  é tangente às linhas  $t = K^0 = cte., x^j = K^j = cte.,$  com  $j \neq i$ . Se  $t = cte.$ , então essas linhas pertencem às hipersuperfícies  $(\Sigma_t)$  e isso implica que  $\partial_i$  é tangente a  $\Sigma_t$ :  $\partial_i \in \mathcal{T}_p(\Sigma_t)$ . O vetor  $\partial_t$  obedece à mesma propriedade que o vetor  $\mathbf{m}$ , já que  $\langle \nabla_t, \partial_t \rangle = 1$ . Em particular,  $\partial_t$  transporta as hipersuperfícies  $\Sigma_t$  assim como  $\mathbf{m}$  o faz. Em geral, ambos vetores diferem, mas coincidem apenas se as coordenadas  $(x^i)$  forem tais que as linhas  $x^i = cte.$  são ortogonais às hipersuperfícies  $(\Sigma_t)$  (Gourgoulhon, 2012). De fato, chamamos de **vetor de deslocamento**  $\beta^\ddagger$  à diferença entre  $\partial_t$  e  $\mathbf{m}$ :

$$\beta := \partial_t - \mathbf{m}. \quad (76)$$

Observe que

$$\langle \nabla_t, \beta \rangle = \langle \nabla_t, \partial_t \rangle - \langle \nabla_t, \mathbf{m} \rangle = 1 - 1 = 0 \quad (77)$$

mostra que  $\beta$  é tangente às hipersuperfícies  $(\Sigma_t)$ . De fato, da Eq. (34) notamos que:

$$\langle \nabla_t, \beta \rangle = \mathbf{n} \cdot \beta = 0. \quad (78)$$

---

<sup>‡</sup>Tanto o termo “função lapso” quanto “vetor de deslocamento” foram adotados inicialmente por Wheeler em 1964 (Wheeler, 1964); porém, esses conceitos foram introduzidos pela primeira vez por Choquet-Brunat em 1956 (Foures-Bruhat, 1956).

Portanto, da Eq. (35) temos que:

$$\boldsymbol{\partial}_t = \alpha \mathbf{n} + \boldsymbol{\beta}, \quad (79)$$

e se  $\mathbf{n}$  é normal a  $\Sigma_t$  e  $\boldsymbol{\beta}$  é tangente a  $\Sigma_t$ , então a equação anterior é uma decomposição 3 + 1 do vetor  $\boldsymbol{\partial}_t$ . Além disso, de:

$$\boldsymbol{\partial}_t \cdot \boldsymbol{\partial}_t = -\alpha^2 + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}, \quad (80)$$

segue que:

- $\boldsymbol{\partial}_t$  é do tipo tempo  $\Leftrightarrow \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta} < \alpha^2$ ;
- $\boldsymbol{\partial}_t$  é do tipo espaço  $\Leftrightarrow \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta} > \alpha^2$ ;
- $\boldsymbol{\partial}_t$  é nulo  $\Leftrightarrow \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta} = \alpha^2$ .

Por outro lado, se  $\boldsymbol{\beta}$  é tangente a  $\Sigma_t$ , então suas componentes e da forma dual  $\bar{\boldsymbol{\beta}}$  em relação às coordenadas espaciais  $(x^i)$  são:

$$\boldsymbol{\beta} =: \beta^i \boldsymbol{\partial}_t \text{ e } \bar{\boldsymbol{\beta}} =: \beta_i \mathbf{d}x^i. \quad (81)$$

Da Eq. (79) temos que as componentes de  $\mathbf{n}$  em relação à base natural  $\boldsymbol{\partial}_\alpha$ , em termos de  $\alpha$  e  $\beta^i$ , são:

$$n^\alpha = \frac{1}{\alpha} (1, -\beta^i). \quad (82)$$

Da Eq. (34) obtemos as componentes covariantes:

$$n_\alpha = (-\alpha, 0, 0, 0). \quad (83)$$

Além disso, também apresentamos as componentes de  $\boldsymbol{\gamma}$  em relação às coordenadas  $(x^i)$ :

$$\boldsymbol{\gamma} =: \gamma_{ij} \mathbf{d}x^i \otimes \mathbf{d}x^j \quad (84)$$

e as componentes de  $\bar{\boldsymbol{\beta}}$ :

$$\beta_i = \gamma_{ij} \beta^j. \quad (85)$$

Para o caso das componentes de  $\mathbf{g}$  em relação às coordenadas  $(x^\alpha)$ , temos:

$$\mathbf{g} =: g_{\alpha\beta} \mathbf{d}x^\alpha \otimes \mathbf{d}x^\beta. \quad (86)$$

Estas componentes são calculadas a partir da Eq. (80):

$$g_{00} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\partial}_t, \boldsymbol{\partial}_t) = \boldsymbol{\partial}_t \cdot \boldsymbol{\partial}_t = -\alpha^2 + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta} = -\alpha^2 + \beta_i \beta^i \quad (87)$$

e da Eq. (79):

$$g_{0i} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\partial}_t, \boldsymbol{\partial}_i) = (\mathbf{m} + \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\partial}_i. \quad (88)$$

Se  $\boldsymbol{\partial}_i$  é tangente a  $\Sigma_t$ , então  $\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\partial}_i = 0$  leva a:

$$g_{0i} = \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\partial}_i = \langle \bar{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\partial}_i \rangle = \langle \beta_j \mathbf{d}x^j, \boldsymbol{\partial}_i \rangle = \beta_j \langle \mathbf{d}x^j, \boldsymbol{\partial}_i \rangle = \beta_i. \quad (89)$$

Também temos que, como  $\boldsymbol{\partial}_i$  e  $\boldsymbol{\partial}_j$  são ambos tangentes a  $\Sigma_t$ , então:

$$g_{ij} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\partial}_i, \boldsymbol{\partial}_j) = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\partial}_i, \boldsymbol{\partial}_j) = \gamma_{ij}. \quad (90)$$

Por tanto, a expressão das componentes da métrica  $\mathbf{g}$  em termos de quantidades 3 + 1 são:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{0j} \\ g_{i0} & g_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_k \beta^k & \beta_j \\ \beta_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix}, \quad (91)$$

que em termos do elemento de linha geral, Eq. (86), se torna:

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij} (dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt). \quad (92)$$

Já as componentes contravariantes de  $\mathbf{g}$  são:

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g^{00} & g^{0j} \\ g^{i0} & g^{ij} \end{pmatrix} = \alpha^{-2} \begin{pmatrix} -1 & \beta^j \\ \beta^i \gamma^{ij} & -\beta^i \beta^j \end{pmatrix}. \quad (93)$$

Além disso, da equação anterior podemos estabelecer a relação entre os determinantes de  $\mathbf{g}$  e  $\boldsymbol{\gamma}$ ,  $g$  e  $\gamma$ , respectivamente. Estas não são quantidades escalares, mas sim densidades escalares. De fato, usando a regra de Cramer, onde  $g^{00} = C_{00}/g$  é o elemento 00 da métrica e  $C_{00}$  o elemento 00 da matriz de cofatores associada à matriz  $g_{\alpha\beta}$ . Suprimindo a primeira linha e a primeira coluna deduzida de  $g_{\alpha\beta}$  obtemos:  $g^{00} = \gamma/g$ . Assim,  $g^{00}$  em termos de componentes contravariantes da métrica  $\mathbf{g}$ , Eq. (93), é:

$$g = -\alpha^2 \gamma \rightarrow \sqrt{-g} = \alpha \sqrt{\gamma}. \quad (94)$$

Nesta última parte da subseção vamos usar as derivadas de Lie ao longo de  $\mathbf{m}$  para obter o sistema de EDPs de Einstein. De fato, seja  $\mathbf{T}$  um campo vetorial qualquer

tangente a  $\Sigma_t$ , da Eq. (79) temos que:  $\mathcal{L}_{\mathbf{m}}\mathbf{T} = \mathcal{L}_{\partial_t}\mathbf{T} - \mathcal{L}_{\beta}\mathbf{T}$ . Se ambas derivadas  $\mathcal{L}_{\mathbf{m}}\mathbf{T}$  e  $\mathcal{L}_{\beta}\mathbf{T}$  são tangentes a  $\Sigma_t$ , então  $\mathcal{L}_{\partial_t}\mathbf{T}$  também o é. Portanto, da mesma forma aplicada na Eq. (69), obtemos:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{m}}K_{ij} = (\partial_t - \mathcal{L}_{\beta})K_{ij}. \quad (95)$$

Calculando a derivada de Lie de  $K_{ij}$  ao longo de  $\beta$ :

$$\mathcal{L}_{\beta}K_{ij} = \beta^k \partial_{x^k} K_{ij} + K_{kj} \partial_{x^i} \beta^k + K_{ik} \partial_{x^j} \beta^k \quad (96)$$

e reescrevendo a Eq. (48):

$$(\partial_t - \mathcal{L}_{\beta})\gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij}. \quad (97)$$

Assim, da definição de derivada de Lie:  $\mathcal{L}_{\beta}\gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i\beta + D_j\beta_i$  (Gourgoulhon, 2012) e da Eq. (81) obtemos as **equações do formalismo 3 + 1 padrão**:

$$\partial_t\gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i\beta + D_j\beta_i; \quad (98)$$

$$\partial_t K_{ij} = -D_i D_j \alpha + \alpha \{R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k + 4\pi [(S - \rho)\gamma_{ij} - 2S_{ij}]\}; \quad (99)$$

$$R + K^2 - K_{ij} K^{ij} = 16\pi\rho; \quad (100)$$

$$D_j K_i^j - D_i K = 8\pi j_i. \quad (101)$$

As derivadas covariantes  $D_i$  acima podem ser expressas em termos de derivadas parciais em relação às coordenadas espaciais ( $x^i$ ) por meio das conexões  $\Gamma_{ik}^j$  de  $\mathbf{D}$  associadas a ( $x^i$ ). Por sua vez, essas conexões podem ser escritas em termos das derivadas parciais de  $\gamma_{ij}$ .

Além disso, os termos fonte de matéria-energia  $\rho$ ,  $j_i$  e  $S_{ij}$  são projeções do tensor de stress-energia  $\mathbf{T}$  ao longo de  $\mathbf{n}$  e sobre  $\Sigma_0$ , e são dados, respectivamente, por:

$$\rho \equiv n_{\alpha} n_{\beta} T^{\alpha\beta}, \quad j_i \equiv \gamma_{i\alpha} n_{\beta} T^{\alpha\beta} \quad \text{e} \quad S_{ij} \equiv \gamma_{i\alpha} \gamma_{j\beta} T^{\alpha\beta}. \quad (102)$$

A quantidade  $\rho$  é a **densidade total de matéria-energia**,  $j_i$  a **densidade de momento** e  $S_{ij}$  o **tensor de stress**. Note que todas essas quantidades são medidas em relação a

um observador normal e o traço de  $S_{ij}$  é:

$$S = \gamma^{ij} S_{ij}. \quad (103)$$

Esses termos fonte podem incluir fluidos hidrodinâmicos, radiação de gases, plasmas magneto-hidrodinâmicos, campos escalares, etc.

Finalizamos assim a obtenção das **equações de Einstein no formalismo 3 + 1 padrão**. Estas equações também são chamadas de **equações do formalismo ADM padrão** em homenagem ao trabalho pioneiro de Arnowitt, Deser e Misner (Arnowitt; Deser; Misner, 2008).

### 1.3.3 O problema de Cauchy

Observe que as equações (98), (99), (100) e (101) não contém nenhuma derivada temporal de  $\alpha$  ou  $\beta$ . Se  $\alpha$  e  $\beta$  estão associados à escolha de coordenadas  $(t, x^i)$  significa que são variáveis livremente determinadas. De fato, a liberdade de calibre da RG implica que podemos escolher arbitrariamente  $\alpha$  e  $\beta$  sem alterar a solução das equações de Einstein. A única ressalva é uma escolha apropriada a fim de evitar singularidades coordenadas. Vamos utilizar essa liberdade de calibre para ter uma visão mais clara da natureza das equações ADM padrão.

Introduzimos a condição de calibre mais simples, o **calibre slicing geodésico**, com  $\alpha = 1$  e  $\beta = 0$ , em alguma vizinhança de uma dada hipersuperfície  $\Sigma_0$ . Note que se  $\alpha = 1$ , então da Eq. (42) temos que a 4-aceleração do observador é nula (queda livre). De fato, as linhas de mundo de observadores normais são geodésicas, uma vez que o parâmetro  $t$  é um parâmetro afim ao longo delas. As coordenadas  $(x^i)$  são especificadas arbitrariamente, o que implica que as linhas das coordenadas espaciais constantes são ortogonais a  $\Sigma_t$ . Além disso, se  $\alpha = 1$ , então a coordenada temporal  $t$  coincide com o tempo próprio medido por observadores normais entre hipersuperfícies vizinhas  $\Sigma_t$  (Gourgoulhon, 2012). Tal sistema corresponde às **coordenadas gaussianas normais**:

$$g_{\mu\nu} = dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (104)$$

Portanto, o sistema de equações ADM padrão reduz-se a:

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij}; \quad (105)$$

$$\partial_t K_{ij} = -D_i D_j \alpha + \alpha \{R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K^k_j + 4\pi[(S - \rho)\gamma_{ij} - 2S_{ij}]\}; \quad (106)$$

$$R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi\rho; \quad (107)$$

$$D_j K^j_i - D_i K = 8\pi j_i. \quad (108)$$

Usando as derivadas temporais  $\dot{\gamma}_{ij} := \partial_t \gamma_{ij}$ ,  $\ddot{\gamma}_{ij} := \partial_t^2 \gamma_{ij}$  e substituindo a Eq. (106) nas equações (105), (107) e (108), temos:

$$-\ddot{\gamma}_{ij} = 2R_{ij} + \frac{1}{2}\gamma^{kl}\dot{\gamma}_{kl}\dot{\gamma}_{ij} - \gamma^{kl}\dot{\gamma}_{ik}\dot{\gamma}_{lj} + 8\pi[(S - \rho)\dot{\gamma}_{ij} - 2S_{ij}]; \quad (109)$$

$$R + \frac{1}{4}(\dot{\gamma}^{ij}\dot{\gamma}_{ij})^2 - \frac{1}{4}\dot{\gamma}^{ik}\dot{\gamma}^{jl}\dot{\gamma}_{ij}\dot{\gamma}_{kl} = 16\pi\rho; \quad (110)$$

$$D_j (\gamma^{jk}\dot{\gamma}_{ki}) - \partial_{x^i} (\gamma^{kl}\dot{\gamma}_{kl}) = -16\pi j_i. \quad (111)$$

Em relação ao campo gravitacional, vamos explicitar alguns termos das equações acima. O tensor de Ricci é (Gourgoulhon, 2012):

$$R_{ij} = -\frac{1}{2}\gamma^{kl} \left[ \frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 \gamma_{kl}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 \gamma_{lj}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 \gamma_{il}}{\partial x^j \partial x^k} + \mathcal{Q}_{ij} \left( \gamma_{kl}, \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial x^m} \right) \right]; \quad (112)$$

tomando seu traço:

$$R = \gamma^{ik}\gamma^{jl} \frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} - \gamma^{ij}\gamma^{kl} \frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} + \mathcal{Q} \left( \gamma_{kl}, \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial x^m} \right). \quad (113)$$

Além disso:

$$\begin{aligned} D_j (\gamma^{jk}\dot{\gamma}_{ki}) &= \gamma^{jk} D_j \dot{\gamma}_{ki} \\ &= \gamma^{ik} \left( \frac{\partial \dot{\gamma}_{ki}}{\partial x^j} - \Gamma_{jk}^l \dot{\gamma}_{li} - \Gamma_{ji}^l \dot{\gamma}_{kl} \right) \\ &= \gamma^{jk} \frac{\partial^2 \gamma_{ki}}{\partial x^j \partial t} + \mathcal{Q}_i \left( \gamma_{kl}, \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial x^m}, \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (114)$$

Substituindo as equações (112), (113) e (114) nas equações (109), (110) e (111):

$$\begin{aligned}
& -\ddot{\gamma}_{ij} + \gamma^{kl} \left( \frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 \gamma_{kl}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 \gamma_{lj}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 \gamma_{il}}{\partial x^j \partial x^k} \right) = \\
& 8\pi[(S - \rho)\gamma_{ij} - 2S_{ij}] + \mathcal{Q}_{ij} \left( \gamma_{kl}, \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial x^m}, \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial t} \right); \tag{115}
\end{aligned}$$

$$\gamma^{ik} \gamma^{jl} \frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} - \gamma^{ij} \gamma^{kl} \frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} = 16\pi\rho + \mathcal{Q} \left( \gamma_{kl}, \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial x^m}, \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial t} \right); \tag{116}$$

$$\gamma^{ik} \gamma^{jl} \frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} - \gamma^{ij} \gamma^{kl} \frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} = -16\pi j_i + \mathcal{Q}_i \left( \gamma_{kl}, \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial x^m}, \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial t} \right). \tag{117}$$

Assim, obtemos um sistema de EDPs cujas incógnitas são as componentes  $\gamma_{ij}$ . As componentes contravariantes  $\gamma^{ij}$  são funções de  $\gamma_{ij}$  via regra de Cramer. Esse conjunto de EDPs é um sistema de segunda ordem não linear, mas quase linear. Ou seja, linear em relação a todas as derivadas de segunda ordem e estas se encontram apenas na primeira equação (Gourgoulhon, 2012). Além disso, esse sistema contém  $6 + 1 + 3 = 10$  equações para 6 incógnitas, portanto, é um sistema superdeterminado. Outro aspecto importante de se notar é que a Eq. (115) contém o mesmo número de equações e de incógnitas, 6, e pode ser tratado como um **problema de Cauchy**:

$$\ddot{\gamma}_{ij} = F_{ij} \left( \gamma_{kl}, \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial x^m}, \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \gamma_{kl}}{\partial x^m \partial x^n} \right). \tag{118}$$

Nesse sentido, se  $F_{ij}$  é uma função analítica, o problema de Cauchy consiste em encontrar uma solução  $\gamma_{ij}$  para  $t > 0$ , dadas as condições iniciais de  $\gamma_{ij}$  e  $\partial_t \gamma_{ij}$  em  $t = 0$ , ou seja, os valores das funções e de suas derivadas devem estar bem definidos na hipersuperfície  $\Sigma_0$ . De fato, pelo teorema de Cauchy-Kovalevskaya garantimos a existência e a unicidade de uma solução  $\gamma_{ij}$  em uma vizinhança de  $\Sigma_0$ , a partir dos dados iniciais  $(\gamma_{ij}, \partial_t \gamma_{ij})$  em  $\Sigma_0$  e que são funções analíticas das coordenadas  $(x^i)$  (Ringström, 2015).

Porém, uma vez preparados os dados iniciais  $(\gamma_{ij}, \partial_t \gamma_{ij})$ , como garantir que essas condições satisfazem as equações (107) e (108), dado que são condições que não podem ser postas em uma forma aplicável do teorema de Cauchy-Kovalevskaya? De fato, como garantir que as componentes  $\gamma_{ij}$  reconstruam a métrica  $\mathbf{g}$  pela Eq. (104), de modo que  $\mathbf{g}$  seja uma solução das equações de Einstein? A resposta surge das identidades de Bianchi, uma vez que elas permitem que as restrições impostas pelas demais equações do sistema sejam satisfeitas em  $t > 0$  e o problema de Cauchy é resolvido para a primeira equação a partir da especificação dos dados iniciais (Kovacs, 2021).

Por outro lado, no caso geral em que  $\boldsymbol{\gamma}$  e  $\boldsymbol{\beta}$  são arbitrários, a derivada temporal

$\gamma_{ij}$  deve ser substituída pelas componentes de  $K_{ij}$ , de modo que os dados iniciais de uma dada hipersuperfície  $\Sigma_0$  são  $(\gamma, \mathbf{K})$ . Se  $(\gamma, \mathbf{K})$  satisfazem as equações de vínculos em  $\Sigma_0$  então surge a pergunta: dado o conjunto  $(\Sigma_0, \gamma, \mathbf{K}, \rho, \mathbf{j})$ , com  $\Sigma_0$  sendo uma variedade 3-dimensional onde estão definidas a métrica riemanniana  $\gamma$ , a forma bilinear simétrica  $\mathbf{K}$ , um campo escalar  $\rho$  e um campo vetorial  $\mathbf{j}$  que satisfazem as equações de vínculo, existe um espaço-tempo  $(\mathcal{M}, \mathbf{g}, \mathbf{T})$  t.q  $(\mathbf{g}, \mathbf{T})$  satisfaz as equações de Einstein e  $\Sigma_0$  pode ser embutida como uma hipersuperfície de  $\mathcal{M}$ , com 3-métrica  $\gamma$  e curvatura extrínseca  $\mathbf{K}$ ?

Com base no teorema de Cauchy-Kovalevskaya, Darmois (Darmois, 1927) e Lichnerowicz (Lichnerowicz, 1939) chegaram à resposta dessa pergunta para o caso do vácuo ( $\rho = 0, j_i = 0$ ), quando os dados iniciais  $(\gamma, \mathbf{K})$  são funções analíticas da base  $\Sigma_0$ . No entanto, em termos físicos, o caso analítico é muito restrito. Nesse sentido, existem duas razões estratégicas para lidar com dados iniciais diferenciáveis:

- Uma variedade  $\mathcal{M}$  suave impõe que apenas a mudança de coordenadas seja diferenciável, não necessariamente analítica. Se  $(\gamma, \mathbf{K})$  são funções analíticas das coordenadas, então elas não podem ser funções analíticas de outro sistema de coordenadas  $x'^i$ .
- O valor de uma função analítica e de suas derivadas é completamente determinado em um único ponto. Portanto, uma pequena mudança nos dados iniciais não deveria mudar a solução inteira em todos os pontos de  $\mathcal{M}$ , sendo  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  globalmente hiperbólico.

Além disso, do teorema de existência global e unicidade de Choquet-Bruhat e Geroch (Choquet-Bruhat; Geroch, 1969) estabelece-se que, entre todos os espaços-tempos  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  que são solução das equações de Einstein, tal que  $(\Sigma_0, \gamma, \mathbf{K})$  é uma superfície de Cauchy embutida em  $\mathcal{M}$ , existe um espaço-tempo máximo e único. Máximo no sentido de que, qualquer solução do espaço-tempo  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  do problema de Cauchy é isométrica a uma subparte de  $(\mathcal{M}^*, \mathbf{g}^*)$  (Kovacs, 2021). Ou seja, sempre é possível encontrar uma transformação linear  $\Psi$  que leva  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  em  $(\mathcal{M}^*, \mathbf{g}^*)$  e uma transformação inversa  $\Psi^{-1}$  que faz o caminho reverso.

A discussão anterior é conhecida como **Desenvolvimento Maximal de Cauchy** e pode ser sintetizada nos seguintes princípios: se as condições a seguir são simultaneamente satisfeitas:

- $\mathbf{g}$  é solução das equações de Einstein.
- $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  é globalmente hiperbólico.
- Os dados iniciais  $(\gamma, \mathbf{K})$  são bem definidos sobre uma hipersuperfície de Cauchy  $\Sigma_0$  do tipo espaço e satisfazem as equações de vínculo.

- Existe um mapeamento  $\Psi$  que leva  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  em  $(\mathcal{M}^*, \mathbf{g}^*)$  e existe o mapeamento inverso  $\Psi^{-1}$ .

Note que a forma com que as equações de evolução do formalismo ADM padrão foram construídas e pela discussão acima podemos concluir que a resolução das equações de Einstein equivale a resolver um problema de Cauchy com vínculos. Ou seja, dada alguma hipersuperfície  $\Sigma_0$ , a ideia é determinar uma métrica Riemanniana  $\gamma$ , uma forma bilinear simétrica  $\mathbf{K}$  e alguma distribuição de matéria-energia  $(\rho, \mathbf{j})$  em  $\Sigma_0$  tal que as equações de vínculo, (100) e (101), são satisfeitas e avaliar como  $\gamma$ ,  $\mathbf{K}$  e  $(\rho, \mathbf{j})$  evoluem no tempo (Gourgoulhon, 2012).

Esta discussão também é válida para as equações ADM (102), (103), (104) e (105). As equações (102) e (103) são equações de evolução e podem ser tratadas como um problema de Cauchy cujos vínculos são as equações (104) e (105). Por tal razão historicamente as equações do formalismo ADM são conhecidas como **equações do formalismo de Cauchy**.

#### 1.4 Condições de calibre

O próximo passo para implementar a solução numérica das equações de Einstein é discutir como os dados iniciais  $(\Sigma_0, \gamma, \mathbf{K})$  evoluem para  $(\Sigma_t, \gamma)$ , ou seja, como proceder à integração do problema de Cauchy. Um aspecto chave deste problema é a liberdade de escolha do fatiamento  $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$  e das coordenadas espaciais  $(x^i)$  em cada hipersuperfície  $\Sigma_t$ .

Nesse sentido, naturalmente separamos em dois escopos a escolha das coordenadas: a escolha da forma como as **linhas do tempo** se propagam de uma hipersuperfície para a seguinte e a escolha de um **fatiamento** específico do espaço-tempo em hipersuperfícies espaciais. Isso se traduz na liberdade de escolha das variáveis de calibre  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente, e dependendo dessa escolha o problema pode se tornar mais hiperbólico ou mais elíptico, do ponto de vista das equações a serem resolvidas numericamente. Discussões extensas sobre possíveis fatiamentos e coordenadas espaciais podem ser encontradas nos livros de Alcubierre (Alcubierre, 2005), Baumgarte e Shapiro (Baumgarte; Shapiro, 2003) e Choquet-Bruhat (Choquet-Bruhat, 2008).

A liberdade de escolha das variáveis de calibre nos permite encontrar coordenadas que simplificam as equações de evolução e/ou levam a uma integração numérica bem comportada a longo prazo. Uma boa escolha para as variáveis de calibre deve considerar o seguinte:

- Devem ser adaptadas às simetrias subjacentes ao problema.
- Devem evitar a formação de singularidades coordenadas e/ou alcançar singularida-

des físicas.

- Devem ser fáceis de serem implementadas numericamente.
- Devem ser expressas em variedades 3-dimensionais covariantes, de modo que o sistema não dependa de coordenadas específicas.

A ideia de encontrar condições de calibre com essas características envolve relacionar a escolha de calibre com a evolução de certas combinações de quantidades geométricas. Assim, o calibre “congela” completamente a evolução dessas quantidades. A seguir, descrevemos algumas condições de calibre que são utilizadas na maioria dos experimentos numéricos da RN.

#### 1.4.1 Condições de calibre sobre fatiamentos

Considere um observador normal que não necessariamente está em queda livre. Em geral, ele tem uma aceleração própria necessária para mantê-lo em uma trajetória diferente da queda livre. Essa aceleração é definida como:

$$a^\mu = n^\nu \nabla_\nu n^\mu . \quad (119)$$

Se  $a^\mu$  é ortogonal a  $n^\mu$ , então  $n^\mu a_\mu = n^\mu n^\nu \nabla_\nu n_\mu = 0$ , uma vez que  $n^\mu$  é unitário. Logo, a aceleração própria é um vetor puramente espacial. Da Eq. (84) e das conexões calculadas em (Gourgoulhon, 2012), obtemos:

$$a_0 = \beta^m \partial_m \ln \alpha \quad (120)$$

e

$$a_i = \partial_i \ln \alpha . \quad (121)$$

Portanto, as componentes espaciais da aceleração própria são dadas pelo gradiente de  $\alpha$ . Por outro lado, se considerarmos elementos de volume associados aos observadores normais, notamos que a mudança no tempo nesses elementos de volume é dada pela divergência das 4-velocidades  $\nabla_\mu n^\mu$  desses elementos. Assim, da definição de  $\mathbf{K}$ , temos:

$$\nabla_\mu n^\mu = -K , \quad (122)$$

ou seja, a taxa de variação no tempo de um elemento de volume associado a um observador normal a  $\Sigma_t$  é menos o traço da curvatura extrínseca  $\mathbf{K}$ .

Exigindo que esses elementos de volume permaneçam constantes:

$$\partial_t K = K = 0, \quad (123)$$

mostramos que  $K$  é nula inicialmente e durante a evolução do sistema. Das equações de evolução de  $\gamma$  (98),  $\mathbf{K}$  (99) e pela condição sobre  $K$ , a equação:

$$\partial_t K = \beta^i \partial_i K - D^2 \alpha + \alpha [K_{ij} K^{ij} + 4\pi(\rho + S)] \quad (124)$$

se torna:

$$D^2 \alpha = \alpha [K_{ij} K^{ij} + 4\pi(\rho + S)]. \quad (125)$$

Essa condição é conhecida como **calibre maximal slicing** e vem do fato de que, quando  $K = 0$ , o volume do hiperplano espacial é máximo em relação a pequenas variações no próprio hiperplano. Uma das limitações deste calibre é que só pode ser usado no caso de espaços-tempos assintoticamente planos.

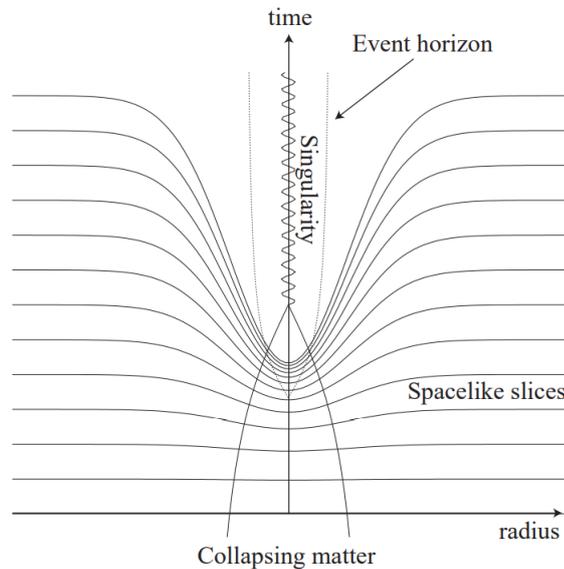
O calibre maximal slicing foi sugerido originalmente por Lichnerowicz (Lichnerowicz, 1944) e discutido amplamente por Smarr e York (Smarr; York, 1978), (York, 1978). Tem sido popularmente usado em simulações de BNs principalmente, e tem a vantagem de ser dado por uma equação elíptica simples Eq. (125). A solução dessa equação é suave e garante que diferentes observadores normais em queda livre, em um campo gravitacional não uniforme, não irão colidir uns com os outros eventualmente. Portanto, uma propriedade muito importante do calibre maximal slicing é evitar singularidades. Isso significa que ele não permite que as hipersuperfícies espaciais se aproximem arbitrariamente de uma singularidade física.

Observe na Fig. (7) que, à medida que o tempo avança do lado de “fora” do horizonte de eventos e congela por “dentro”, as fatias espaciais tornam-se mais distorcidas. Isso resulta em uma torção da malha métrica composta pelas fatias espaciais e evita o desenvolvimento de grandes gradientes, os quais poderiam causar a falha do código numérico. Essa capacidade do maximal slicing o torna uma boa escolha de calibre para a construção de espaços-tempos numéricos contendo BNs, por exemplo.

Por outro lado, a principal desvantagem do calibre maximal slicing é ter que resolver numericamente equações elípticas em 2 ou 3 dimensões. Como estamos interessados no caso de simetria esférica este processo é simples. Nesse sentido, quando as condições de contorno do sistema são simples do ponto de vista da resolução de equações diferenciais e as limitações do tempo de processamento computacional não são um problema, teoricamente o calibre maximal slicing é a melhor condição de calibre disponível.

Dada a desvantagem de usar maximal slicing para resolver equações elípticas a cada passo de tempo durante a implementação numérica, algumas outras condições de

Figura 7 - Representação esquemática do colapso da função lapso  $\alpha$  perto de uma singularidade



Legenda: As fatias espaciais tornam-se mais distorcidas perto da singularidade. Além disso, o tempo desacelera na região próxima à singularidade, mas continua avançando para longe dela.

Fonte: Alcubierre, 2008, p. 125.

calibre foram propostas. Elas compartilham algumas propriedades do maximal slicing e são muito simples de serem implementadas. De fato, existem as chamadas **coordenadas harmônicas**:

$$\nabla_{\mu} \nabla^{\mu} x^{\alpha} = 0, \quad (126)$$

onde  $\nabla_{\mu} \nabla^{\mu}$  é o d'Alembertiano associado à métrica  $\mathbf{g}$ . Essas coordenadas são consideradas como um campo escalar na variedade  $\mathcal{M}$  para as coordenadas  $(x^{\alpha})$  do espaço-tempo. Neste caso, exigimos que a condição harmônica seja satisfeita para a coordenada  $x^0 = t$ , mas não necessariamente para qualquer coordenada  $x^i$  em cada hipersuperfície  $\Sigma_t$ . Este calibre é conhecido como **slicing harmônico** e tem a importante propriedade de permitir que as equações de Einstein sejam escritas como uma série de equações de onda (com termos fonte não lineares) para as componentes métricas  $g_{\mu\nu}$ .

Se  $\nabla_{\mu} \nabla^{\mu} x^{\alpha}$  é a divergência de um campo vetorial  $\nabla t$ , então:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left( \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial t}{\partial x^{\nu}} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left( \sqrt{-g} g^{\nu 0} \right) = 0. \quad (127)$$

Da Eq. (94):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha \sqrt{\gamma} g^{00}) + \frac{\partial}{\partial x^i} (\alpha \sqrt{\gamma} g^{i0}) = 0 \quad (128)$$

e da Eq. (93):

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\sqrt{\gamma}}{\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\sqrt{\gamma} \beta^i}{\alpha} \right) = 0, \quad (129)$$

temos:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} - \beta^i \frac{\partial \alpha}{\partial x^i} - \alpha \left[ \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \sqrt{\gamma}}{\partial t} - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{\gamma} \beta^i) \right] = 0. \quad (130)$$

Utilizando a definição de derivada de Lie ao longo de  $\beta$  e multiplicando pelas componentes métricas contravariantes  $\gamma^{ij}$  à direita da Eq. (97), temos:

$$\gamma^{ij} (\partial_t \gamma_{ij} - D_i \beta_j - D_j \beta_i) = -2\alpha \gamma^{ij} K_{ij}, \quad (131)$$

daí:

$$(\partial_t - \mathcal{L}_\beta) \alpha = -K \alpha^2 \quad (132)$$

é a equação de evolução para a função lapso  $\alpha$  na condição de calibre harmônico. Este calibre foi introduzido em 1983 por Choquet-Bruhat e Ruggeri (Choquet-Bruhat; Ruggeri, 1983) como um maneira de colocar as equações de Einstein em uma forma explicitamente hiperbólica. Porém, a equação do slicing harmônico, Eq. (132), já tinha sido apresentada por Smarr e York em 1978 (Smarr; York, 1978) como parte de uma condição de coordenada no formalismo 3 + 1. Este calibre tem sido bastante considerado no contexto da RN desde sua apresentação por Bona e Massó em 1988 (Bona; Massó, 1988). Ele possui a propriedade de evitar singularidades, embora mais fracamente do que o maximal slicing (Alcubierre, 2008).

Em 1995, Bona, Massó, Seidel e Stela (Bona *et al.*, 1995) propuseram uma generalização do calibre slicing harmônico introduzindo uma função arbitrária  $f(\alpha)$ :

$$(\partial_t - \mathcal{L}_\beta) \alpha = -K \alpha^2 f(\alpha). \quad (133)$$

Nesta condição,  $f(\alpha)$  deve ser positiva para  $\alpha$  evoluir como uma equação hiperbólica, caso contrário, não teríamos um sistema fortemente hiperbólico. Esta generalização resultou na chamada **família de condições de slicing Bona-Massó** que discutiremos mais adiante.

O calibre slicing harmônico corresponde a  $f(\alpha) = 1$ , enquanto que a escolha  $f(\alpha) = 2/\alpha$  leva a:

$$(\partial_t - \mathcal{L}_\beta) \alpha = -2K \alpha, \quad (134)$$

e inserindo  $-K\alpha$  na Eq. (131):

$$(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\alpha = \partial_t \ln \gamma - 2D_i \beta^i. \quad (135)$$

Se  $\beta^i = 0$ , então a equação acima reduz-se a:

$$\partial_t \alpha = \partial_t \ln \gamma, \quad (136)$$

que tem como uma de suas soluções:  $\alpha = 1 + \ln \gamma$ . Portanto, a condição de calibre da Eq. (134) é chamada de **slicing 1 + log**. A condição original foi introduzida em 1993 por Bernstein (Bernstein, 1993) e em 1995 por Anninos *et al.* (Anninos *et al.*, 1995). Neste calibre a determinação de  $\alpha$  não requer resolver algebricamente nenhuma equação, portanto é um calibre mais fácil de ser implementado.

O slicing 1 + log evita singularidades mais fortemente que o slicing harmônico. Nesse sentido, imita as propriedades do maximal slicing e é mais robusto na prática (Alcubierre, 2003). Note que há uma diferença básica entre o maximal slicing e os outros tipos de fatiamentos apresentados até aqui. Em maximal slicing a propriedade de ter fatiamento máximo ( $K = 0$ ) é aplicável a uma única hipersuperfície inicial  $\Sigma_0$ , enquanto que a propriedade de ser slicing harmônico ou slicing 1 + log é significativa para todo o fatiamento  $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ . Isso é visto na definição básica desses fatiamentos: o maximal slicing é definido somente pelo tensor de curvatura extrínseca, que caracteriza uma única hipersuperfície, enquanto as definições de slicing harmônico e slicing 1 + log envolvem  $\alpha$ , que faz sentido para o fatiamento como um todo.

Uma propriedade muito importante das condições de calibre sobre fatiamentos e que foi mencionada anteriormente é a propriedade de “evitar a singularidade”. Isto refere-se à propriedade de certas condições de fatiamento desacelerar o tempo coordenado, fazendo com que  $\alpha$  seja nulo quando os elementos de volume espaciais associados a um observador normal tendem a zero. Vale lembrar que evitar singularidades não é importante apenas quando se está interessado em estudar espaços-tempos com singularidades físicas reais, mas também é necessário para evitar a formação de singularidades coordenadas em regiões com campos gravitacionais fortes.

Na Eq. (133) vimos quais escolhas da função  $f(\alpha)$  podem evitar singularidades. Em (Alcubierre, 2003) Alcubierre amplia essa análise e mostra que tipo de comportamento  $f(\alpha)$  deve ter para evitar essas singularidades quando  $\alpha$  tende a zero. O comportamento de  $f(\alpha)$  é tal que:

$$f(\alpha) = A\alpha^n, \quad (137)$$

com  $A, n$  constantes e  $A > 0$ . À medida que os elementos de volume de um observador normal tendem há zero os possíveis comportamentos de  $\alpha$  são:

- $\alpha$  permanece finita quando o elemento de volume desaparece. Isso implica que o tempo coordenado permanece finito na singularidade, logo, a singularidade não pode ser evitada. Porém, para qualquer  $f(\alpha) > 0$  a condição de Bona-Massó sempre causa o colapso de  $\alpha$  quando o elemento de volume desaparece. Portanto, este caso nunca pode acontecer.
- $\alpha$  desaparece ao mesmo tempo que o elemento de volume. Neste caso, o fato da singularidade ser alcançada, após um tempo coordenado finito ou infinito, depende da velocidade com que  $\alpha$  se aproxima de zero na singularidade. Para  $n < 0$  a singularidade é fortemente evitada, para  $n = 0$  a singularidade é marginalmente evitada e para  $n > 0$  não há como evitar a singularidade.

Tem-se que  $-2 < n < 0$  é um intervalo que garante que a singularidade seja fortemente evitada (Alcubierre, 2003). Observe que o slicing  $1 + \log$  corresponde a  $n = -1$  e está precisamente no meio desse intervalo, o que provavelmente explica o fato dele ter sido empiricamente considerado como uma escolha muito boa. Por outro lado,  $n = 0$  recai no caso de slicing harmônico, quando a singularidade é evitada marginalmente.

Outras singularidades a serem evitadas são os chamados “*gauge shocks*” e referem-se a descontinuidades na curvatura do espaço-tempo presentes nos dados iniciais e que se propagam na velocidade da luz. No artigo de Alcubierre (Alcubierre, 2003) é mostrada a condição particular de  $f(\alpha)$  para a qual **não** se formam esses *gauge shocks*:

$$1 - f - \frac{\alpha}{2}f' = 0. \quad (138)$$

A solução dessa equação é:

$$f(\alpha) = 1 + \frac{\kappa}{\alpha^2}, \quad (139)$$

sendo  $\kappa > 0$  uma constante arbitrária. Por outro lado, para singularidades de ordens superiores Alcubierre propõe um certo calibre no caso de simulações de sistemas gravitacionais fortes. Este calibre tem o potencial de ser ainda mais robusto que o slicing  $1 + \log$  e corresponde à condição:

$$f(\alpha) = \frac{\kappa^2}{2\alpha + (\kappa - 2)\alpha^2}, \quad (140)$$

e que também evita a formação dos “*gauge shocks*”. Para  $\kappa = 2$  a equação acima reduz-se a  $f(\alpha) = 2/\alpha$  e recuperamos a condição de calibre slicing  $1 + \log$ .

### 1.4.2 Condições de calibre sobre as coordenadas espaciais

Tendo discutido a escolha do fatiamento  $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ , agora vamos considerar a escolha de coordenadas  $(x^i)$  em cada hipersuperfície  $\Sigma_t$ . De fato, ao definir as coordenadas  $(x^i)$  na hipersuperfície inicial  $\Sigma_0$ ,  $\beta$  é quem governa a propagação dessas coordenadas para todas as fatias  $\Sigma_t$ . Porém, as condições de calibre para coordenadas são menos estudadas do que as condições para fatiamentos porque simplesmente fazer  $\beta = 0$  funciona muito bem em muitos casos. Já para espaços-tempos com BNs, fazer  $\beta \neq 0$  e apontando para “fora” do sistema impede que as linhas de tempo caiam no BN e faz com que a simulação computacional seja estável. Vamos discutir ambas situações a seguir.

Fazendo  $\alpha = 1$  a escolha mais simples para o vetor de deslocamento é  $\beta = 0$ . Sendo assim, as linhas  $x^i = cte.$  são normais à hipersuperfície  $\Sigma_t$ . Esta condição de calibre é chamada de **coordenadas normais** ou **calibre Euleriano**. Uma vantagem deste calibre é a de ser tão regular quanto o próprio fatiamento. Por outro lado, a maior desvantagem é que pode levar a um grande cisalhamento de coordenadas, o que resulta em valores grandes para as componentes métricas  $\gamma_{ij}$ .

Para o caso  $\beta \neq 0$ , Alcubierre e Brügmann (Alcubierre; Brügmann, 2001) propuseram a relação:

$$\frac{\partial \beta^i}{\partial t} = c_1 \frac{\partial \tilde{\Gamma}^i}{\partial t}, \quad (141)$$

sendo  $c_1$  uma função positiva e  $\tilde{\Gamma}^i$  a conexão definida para um métrica de fundo generalizada. Esta relação foi aplicada para definir a equação de evolução de  $\beta$  no caso das equações do formalismo BSSN. No seguinte capítulo vamos obter essas equações, mas adiantamos que, da equação de evolução de  $\tilde{\gamma}$  na decomposição conforme Eq. (211), em termos da derivada covariante  $\mathring{\mathbf{D}}$ , obtemos:

$$\partial_t \gamma^{ij} = 2\alpha \tilde{A}^{ij} + \beta^k \mathring{D}_k \tilde{\gamma}^{ij} - \tilde{\gamma}^{ik} \mathring{D}_k \beta^i - \tilde{\gamma}^{jk} \mathring{D}_k \beta^j + \frac{2}{3} \mathring{D}_k \beta^k \tilde{\gamma}^{ij}. \quad (142)$$

Além disso, da relação:  $\mathring{D}_j \tilde{\gamma}^{ij} = -\tilde{\Gamma}^i$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\Gamma}^i &= -2\alpha \mathring{D}_j \tilde{A}^{ij} - 2\tilde{A}^{ij} \mathring{D}_j \alpha + \beta^k \mathring{D}_k \tilde{\Gamma}^i - \tilde{\Gamma}^k \mathring{D}_k \beta^i + \frac{2}{3} \tilde{\Gamma}^i \mathring{D}_k \beta^k \\ &+ \tilde{\gamma}^{jk} \mathring{D}_j \mathring{D}_k \beta^i + \frac{1}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \mathring{D}_j \mathring{D}_k \beta^k. \end{aligned} \quad (143)$$

Usando a equação do vínculo de momento na decomposição conforme Eq. (216):

$$\tilde{D}_j \tilde{A}^{ij} = -6\tilde{A}^{ij} \tilde{D}_j \ln \chi + \frac{2}{3} \tilde{D}^i K + 8\pi \chi^4 j^i, \quad (144)$$

chegamos a:

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\Gamma}^i &= \tilde{\gamma}^{jk} \dot{D}_j \dot{D}_k \beta^i + \frac{1}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \dot{D}_j \dot{D}_k \beta^k + \frac{2}{3} \tilde{\Gamma}^i \dot{D}_k \beta^k - \tilde{\Gamma}^k \dot{D}_k \beta^i + \beta^k \dot{D}_k \tilde{\Gamma}^i \\ &- 2\alpha \left[ 8\pi\chi^4 j^i - \tilde{A}^{jk} \left( \tilde{\Gamma}_{jk}^i - \dot{\Gamma}_{jk}^i \right) - 6\tilde{A}^{ij} \dot{D}_j \ln \chi + \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \dot{D}_j K \right] - 2\tilde{A}^{ij} \dot{D}_j \alpha. \end{aligned} \quad (145)$$

Substituindo a Eq. (141) na equação acima obtemos uma equação parabólica para  $\beta$ :

$$\frac{\partial \beta^i}{\partial t} = c_1 \left( \tilde{\gamma}^{jk} \dot{D}_j \dot{D}_k \beta^i + \frac{1}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \dot{D}_j \dot{D}_k \beta^k + \dots \right). \quad (146)$$

Que é a equação de evolução de  $\beta$  no calibre  $\beta \neq 0$

Outra alternativa deste mesmo calibre foi apresentada por Alcubierre em 2003 (Alcubierre, 2003), o chamado calibre **Gamma Driver hiperbólico**:

$$\frac{\partial^2 \beta^i}{\partial t^2} = c_1 \frac{\partial \tilde{\Gamma}^i}{\partial t} - \left( \eta - \frac{\partial \ln c_1}{\partial t} \right) \frac{\partial \beta^i}{\partial t}, \quad (147)$$

sendo  $c_1$  e  $\eta$  funções positivas. Daí, a Eq. (145) é equivalente a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \beta^i}{\partial t^2} + \left( \eta - \frac{\partial}{\partial t} \ln c_1 \right) \frac{\partial \beta^i}{\partial t} &= c_1 \left\{ \tilde{\gamma}^{jk} \dot{D}_j \dot{D}_k \beta^i + \frac{1}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \dot{D}_j \dot{D}_k \beta^k + \frac{2}{3} \tilde{\Gamma}^i \dot{D}_k \beta^k - \tilde{\Gamma}^k \dot{D}_k \beta^i \right. \\ &+ \beta^k \dot{D}_k \tilde{\Gamma}^i - 2\alpha \left[ 8\pi\chi^4 j^i - \tilde{A}^{jk} \left( \tilde{\Gamma}_{jk}^i - \dot{\Gamma}_{jk}^i \right) - 6\tilde{A}^{ij} \dot{D}_j \ln \chi + \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \dot{D}_j K \right] \\ &\left. - 2\tilde{A}^{ij} \dot{D}_j \alpha \right\}, \end{aligned} \quad (148)$$

que é uma equação hiperbólica. Note que  $\eta$  é adicionado para evitar fortes oscilações de  $\beta^i$ . Em (Alcubierre, 2008) é definido como sendo 2 dividido pela massa total do sistema no limite assintótico do espaço-tempo.

Após algumas manipulações algébricas da Eq. (148), a condição de calibre Gamma Driver hiperbólico torna-se um sistema de equações de primeira ordem:

$$\begin{cases} \frac{\partial \beta^i}{\partial t} = c_1 B^i \\ \frac{\partial B^i}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{\Gamma}^i}{\partial t} - \eta B^i. \end{cases} \quad (149)$$

Reescrevemos este sistema em uma única equação:

$$(\partial_t - \beta^r \partial_r) \beta^r = c_2 \hat{\Delta}^r - \eta \beta^r, \quad (150)$$

com  $c_2 = 3/4$  e  $\hat{\Delta}^r$  sendo uma função de campo que será melhor detalhada no próximo capítulo.

Quadro 1 - Principais conceitos e resultados sobre o formalismo ADM padrão obtidos neste capítulo

---

Equações do formalismo 3 + 1 padrão

---

Elemento de linha

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt) \quad (151)$$

Equações de evolução

**Evolução da métrica espacial:**

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i$$

**Evolução da curvatura extrínseca:**

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} = & -D_i D_j \alpha + \alpha \{R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K^k_j + 4\pi[(S - \rho)\gamma_{ij} - 2S_{ij}]\} \\ & + \beta^k D_k K_{ij} + K_{ik} D_j \beta^k + K_{kj} D_i \beta^k \end{aligned} \quad (152)$$

Equações de vínculo

**Vínculo Hamiltoniano:**

$$R + K^2 - K_{ij} K^{ij} = 16\pi\rho \quad (153)$$

**Vínculo de momento:**

$$D_j K^j_i - D_i K = 8\pi j_i$$

Termos de energia-matéria

**Densidade de energia total:**

$$\rho = n_\alpha n_\beta T^{\alpha\beta} \quad (154)$$

**Tensor de stress:**

$$S_{ij} = \gamma_{i\alpha} \gamma_{j\beta} T^{\alpha\beta}, \quad j_i = \gamma_{i\alpha} n_\beta T^{\alpha\beta}, \quad S = \gamma^{ij} S_{ij}$$

---

Fonte: A autora, 2024.

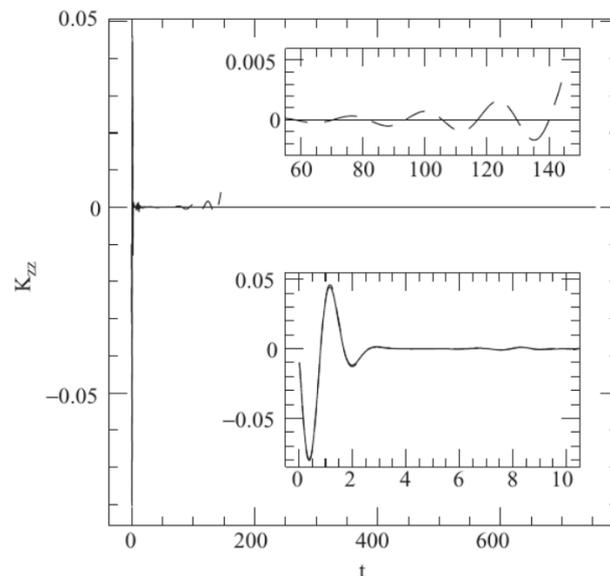
## 2 FORMALISMO BSSN

Iniciamos este capítulo apresentando noções de hiperbolicidade de EDPs e como estas geram instabilidades em experimentos numéricos. Observamos as equações do eletromagnetismo a fim de entender melhor como abordar a hiperbolicidade das equações ADM padrão. Mostramos uma modificação dessas equações, o formalismo BSSN, como uma alternativa que fornece simulações numéricas robustas e bem sucedidas.

### 2.1 Noções de hiperbolicidade

As equações de evolução ADM padrão, por serem equações de segunda ordem, ainda não estão na forma adequada para realizarmos uma integração numérica estável. A Fig. (8), assim como a maioria das simulações irrestritas que implementam o formalismo ADM padrão, mostram instabilidade rapidamente pelo menos em 3 dimensões espaciais. A seguir, discutiremos as características das equações ADM padrão que as tornam instáveis ao serem resolvidas numericamente.

Figura 8 - Evolução da componente  $K_{zz}$  da curvatura extrínseca na origem (slicing harmônico)



Legenda: A curva pontilhada representa a evolução de  $K_{zz}$  na origem para o sistema ADM e a curva sólida representa a evolução de  $K_{zz}$  na origem para o sistema de equações com decomposição conforme.

Fonte: Baumgarte, 1998, p. 5.

Considere a equação de onda de primeira ordem:

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{A}^i \cdot \partial_i \mathbf{u} = \mathbf{S}, \quad (155)$$

onde  $\mathbf{u}$  é o **vetor solução** com  $n$  componentes,  $\mathbf{A}^i$  a **matriz velocidade**  $n \times n$  e  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{u})$  o **vetor fonte**, que podemos definir como  $\mathbf{S} = 0$  para simplificar. Essa é uma EDP hiperbólica cuja solução depende de  $x^i$  e  $t$ . Dizemos que este problema é bem posto se, para alguma norma  $\|\cdot\|$ , a norma do vetor solução satisfaz:

$$\forall t \geq 0, \|\mathbf{u}(t, x^i)\| \leq k e^{\alpha t} \|\mathbf{u}(0, x^i)\|, \quad (156)$$

onde  $k$  e  $\alpha$  são constantes independentes dos dados iniciais  $\mathbf{u}(0, x^i)$ . Ou seja, as soluções de um problema bem posto não podem aumentar mais rápido do que exponencialmente. Porém, esta propriedade não é garantida para todos os sistemas hiperbólicos. De fato, dos diferentes tipos de hiperbolicidade que existem, apenas para equações fortemente hiperbólicas o problema é bem posto.

A análise acima aplica-se a equações de primeira ordem, assim, para analisar a hiperbolicidade das equações ADM padrão é necessário fazer uma redução de ordem. Esta abordagem é feita em (Baumgarte; Shapiro, 1998) e mostra que, de fato, as equações ADM padrão, quando reduzidas a equações de primeira ordem, são fracamente hiperbólicas. Portanto, o problema da evolução das equações ADM padrão de primeira ordem não é bem posto; logo, não temos razão para esperar que as implementações numéricas das soluções sejam bem comportadas.

Nesse sentido, a ideia é tentar reformular essas equações de primeira ordem numa forma que sejam fortemente hiperbólicas. O tipo de hiperbolicidade das equações ADM padrão de primeira ordem nos fornece uma ideia de como reformular essas equações. Os vínculos são iguais a zero pelo menos analiticamente, Eq. (153), assim, uma estratégia é adicionar múltiplos das equações de vínculo às equações de evolução. Além disso, as Eq. (152) possuem derivadas de segunda ordem dos campos gravitacionais, de modo que adicionar os vínculos às equações de evolução afeta a aparência das derivadas de ordem mais alta e, conseqüentemente, a hiperbolicidade do sistema.

Muitas reformulações das equações de evolução ADM padrão também envolvem a introdução de novas variáveis que absorvem algumas primeiras derivadas dos campos gravitacionais. Essa será a abordagem seguida no formalismo BSSN. Além disso, devemos considerar que a noção de problema bem posto exclui modos que crescem mais rápido do que exponencialmente no tempo. No entanto, do ponto de vista numérico, os modos de crescimento exponencial ainda são muito ruins e, se implementados, a simulação falha rapidamente. Várias reformulações introduzidas ao longo dos anos levam a tais modos de crescimento exponencial. Portanto, do ponto de vista numérico, um problema ser bem posto é uma condição necessária, mas não suficiente.

## 2.2 Reformulação das equações de Maxwell

Várias características das equações de Einstein podem ser ilustradas de forma mais clara fazendo uma analogia com o eletromagnetismo. A partir de agora utilizaremos a intuição matemática e exploraremos essa analogia com um exemplo simples e familiar, as equações de Maxwell, para chegar à reformulação das equações ADM padrão.

Considere as equações de Maxwell, no espaço-tempo de Minkowski, escritas em notação covariante:

$$\partial_t E_i = \epsilon_{ijk} D^j B^k - 4\pi j_i, \quad (157)$$

$$\partial_t B_i = -\epsilon_{ijk} D^j E^k, \quad (158)$$

$$D_i E^i - 4\pi \rho = 0, \quad (159)$$

$$D_i B^i = 0, \quad (160)$$

sendo  $E_i$  e  $B_i$  os campos elétrico e magnético,  $\rho$  e  $j_i$  as densidades de carga e de corrente, respectivamente, e  $D_i$  a derivada covariante espacial em relação à coordenada  $x^i$ . As equações (157) e (158) que descrevem a evolução temporal dos campos eletromagnéticos são chamadas de **equações de evolução**. Já as equações (159) e (160) correspondem às **equações de vínculo**, portanto, restringem quaisquer configurações possíveis dos campos.

Podemos reescrever as equações anteriores de uma forma que sejam mais parecidas com as equações ADM padrão. Introduzimos o potencial vetor  $A^\mu = (\Phi, A^i)$  e utilizamos  $B_i = \epsilon_{ijk} D^j A^k$ . As duas equações de evolução tornam-se:

$$\partial_t A_i = -E_i - D_i \Phi, \quad (161)$$

$$\partial_t E_i = D_i D^j A_j - D^j D_j A_i - 4\pi j_i. \quad (162)$$

Ao introduzir  $A^\mu$  obtivemos a liberdade de calibre na eletrodinâmica, expressa na **variável de calibre** livremente especificável,  $\Phi$ . Além disso, o campo elétrico  $E_i$  satisfaz a equação

de vínculo Eq. (159):

$$D_i E^i = 4\pi\rho_e. \quad (163)$$

O problema de Cauchy da eletrodinâmica agora pode ser resolvido em duas etapas. Primeiro especificamos os dados iniciais  $(A_i, E_i)$  juntamente com os termos fonte  $(\rho, j_i)$  que satisfazem o vínculo Eq. (159). Em segundo lugar escolhemos uma condição de calibre adequada para que as equações de evolução possam ser resolvidas. Observe que o esquema de resolução das equações da eletrodinâmica é similar ao esquema de resolução das equações ADM padrão. A liberdade de calibre associada a  $A^\mu$  é análoga à liberdade de coordenadas inerente às equações de Einstein. De fato, considere as equações de evolução ADM padrão:

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i \quad (164)$$

e

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} = & -D_i D_j \alpha + \alpha \{R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K^k_j + 4\pi[(S - \rho)\gamma_{ij} - 2S_{ij}]\} \\ & + \beta^k D_k K_{ij} + K_{ik} D_j \beta^k + K_{kj} D_i \beta^k. \end{aligned} \quad (165)$$

Se identificarmos o potencial vetor  $A_i$  com a componente da métrica espacial,  $\gamma_{ij}$ , e o campo elétrico  $E_i$  com as componentes da curvatura extrínseca  $K_{ij}$ , vemos que os lados direitos das equações (161) e (164) contêm uma variável de campo ( $E_i \rightarrow K_{ij}$ ) e uma derivada espacial de uma variável de calibre ( $D_i \Phi \rightarrow D_i \beta_j$ ). Enquanto que os lados direitos das equações (162) e (165) envolvem fontes de matéria ( $j_i \rightarrow \rho$ ), assim como **derivadas espaciais de segunda ordem** de uma variável de campo ( $D_i D^j A_j \rightarrow \partial_l \partial_k \gamma_{ij}$ ). No caso de  $\gamma_{ij}$ , suas derivadas espaciais de segunda ordem aparecem se explicitarmos o tensor de Ricci:

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \gamma^{kl} (\partial_l \partial_i \gamma_{kj} + \partial_j \partial_k \gamma_{il} - \partial_j \partial_i \gamma_{kl} - \partial_l \partial_k \gamma_{ij}) + \gamma^{kl} (\Gamma_{il}^m \Gamma_{mkj} - \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mkl}). \quad (166)$$

Ao reescrevermos as equações de evolução ADM padrão identificamos alguns problemas numéricos decorrentes disso. No caso da eletrodinâmica, tomando a derivada temporal da Eq. (161) e inserindo na Eq. (162):

$$-\partial_t^2 A_i + D^j D_j A_i - D_i D^j A_j = D_i \partial_t \Phi - 4\pi j_i, \quad (167)$$

Este é um sistema simetricamente hiperbólico que, se não fosse pelo termo de derivadas mistas de segunda ordem,  $D_i D^j A_j$ , as equações (161) e (162) constituiriam uma equação de onda para as componentes  $A_i$ .

A discussão anterior também é válida em RG. O tensor de Ricci no lado direito

da Eq. (165) contém termos de derivadas mistas de segunda ordem. Sem esses termos, as equações ADM padrão reescritas poderiam ser um conjunto de equações de onda para  $\gamma_{ij}$ . Esta possibilidade permitiria termos um sistema de equações hiperbólicas simétricas, mas a presença de termos mistos prejudica o desenvolvimento de um sistema bem posto. Portanto, é desejável eliminarmos as derivadas mistas de segunda ordem. Para termos um ideia mais clara desta estratégia, vamos mostrar 3 abordagens diferentes adotadas em eletrodinâmica.

### 2.2.1 Calibre de Coulomb generalizado

Na eletrodinâmica, definimos a quantidade:

$$\Gamma \equiv D^i A_i \quad (168)$$

e escolhemos  $\Gamma = 0$  como um tipo de calibre que desaparece diretamente com o termo indesejável. Esta escolha é conhecida como **calibre de Coulomb** e possui algumas desvantagens. Por exemplo,  $\Phi$  deve satisfazer a equação de vínculo  $D^i D_i \Phi = -4\pi\rho_e$  e dependendo das condições esta equação pode ser complicada de resolver.

Em RG existe uma estratégia análoga, onde definimos a quantidade:

$${}^{(4)}\Gamma^\alpha \equiv g^{\beta\gamma} {}^{(4)}\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha, \quad (169)$$

daí estabelecemos o **calibre harmônico**,  ${}^{(4)}\Gamma^\alpha = 0$ , que impõe uma escolha de coordenadas para  $\alpha$  e  $\beta$ . Possivelmente essas coordenadas não são adequadas para o problema, uma vez que podem levar a singularidades coordenadas. Uma maneira de evadir essa questão é não definir  ${}^{(4)}\Gamma^\alpha = 0$ , mas escolher alguma **função fonte de calibre**  ${}^{(4)}\Gamma^\alpha = H^\alpha(t, x^i)$ .

No caso eletrodinâmico, a ideia é descobrir como uma escolha particular de  $\Gamma$  afeta o potencial de calibre  $\Phi$ . Da mesma forma em RG, onde recuperamos a liberdade de coordenadas relaxando a condição de calibre harmônico com a ajuda de uma função fonte de calibre 4-dimensional,  $\Gamma^\alpha = H^\alpha(t, x^i)$ , conhecida como **coordenadas harmônicas generalizadas**. Como mencionado na introdução, foi com esta abordagem que Pretorius obteve a primeira simulação bem sucedida da colisão de dois BNs (Pretorius, 2005). Por analogia, a condição de calibre imposta na eletrodinâmica é chamada de **calibre de Coulomb generalizado**.

### 2.2.2 Formulações hiperbólicas de primeira ordem

Outra alternativa para eliminar o termo indesejável da Eq. (167) é obter a derivada temporal da Eq. (162) em vez de fazê-lo com a Eq. (161):

$$\partial_t^2 E_i = D_i D^j (-E_j - D_j \Phi) - D_j D^j (E_i - D_i \Phi) - 4\pi \partial_t j_i. \quad (170)$$

Usando a equação de vínculo, Eq. (163), encontramos uma equação de onda para  $E_i$ :

$$-\partial_t^2 E_i + D_j D^j E_i = 4\pi (\partial_t j_i + D_i \rho_e). \quad (171)$$

Esta é uma equação com simetria hiperbólica e os calibres dos campos  $A_i$  e  $\Phi$  desaparecem completamente. Além disso, essa equação pode ser escrita como um sistema de equações de primeira ordem acopladas se introduzirmos um novo conjunto de variáveis de primeira ordem. Em RG é feita uma abordagem similar, as chamadas **formulações hiperbólicas simétricas de primeira ordem** (Baumgarte; Shapiro, 2010). Revisar todas essas formulações está além do escopo deste trabalho.

Na literatura encontramos que algumas dessas formulações têm características que não são muito desejáveis numericamente, pois restringem a liberdade de calibre, introduzem derivadas extras das variáveis de matéria ou introduzem um grande número de variáveis auxiliares. Apenas algumas dessas formulações foram implementadas numericamente, e muitas delas adotaram condições de simetria simplificadas (por exemplo, simetria esférica). Dentre todas, algumas apresentam vantagens sobre o formalismo ADM padrão e outras têm seus próprios problemas adicionais. Daí o cerne deste trabalho ser o formalismo BSSN pois, além de ser bastante popular na comunidade de RN, tem superado as desvantagens descritas anteriormente.

### 2.2.3 Reformulação por meio de variáveis auxiliares

Usando a definição da Eq. (168) e tratando  $\Gamma$  como um novo campo que evolui independentemente, derivamos sua equação de evolução a partir das equações (161) e (163):

$$\partial_t \Gamma = \partial_t D^i A_i = D^i \partial_t A_i = -D^i E_i - D_i D^i \Phi = -D_i D^i \Phi - 4\pi \rho_e. \quad (172)$$

Portanto, em termos de  $\Gamma$ , a equação de evolução de  $E_i$  é:

$$\partial_t E_i = -D_j D^j A_i + D_i \Gamma - 4\pi j_i. \quad (173)$$

Assim, o novo sistema de equações de Maxwell é constituído pelas equações de evolução:

$$\partial_t A_i = -E_i - D_i \Phi, \quad (174)$$

$$\partial_t E_i = -D_j D^j A_i + D_i \Gamma - 4\pi j_i, \quad (175)$$

$$\partial_t \Gamma = -D_i D^i \Phi - 4\pi \rho_e \quad (176)$$

e pelas equações de vínculo:

$$D_i E^i = 4\pi \rho_e, \quad (177)$$

$$\Gamma = D^i A_i. \quad (178)$$

O termo de derivada mista foi eliminado sem usar nenhuma liberdade de calibre, que ainda é imposta pela escolha de  $\Phi$ . Seguindo essa mesma abordagem, na próxima seção apresentamos a reformulação das equações ADM padrão implementada neste trabalho.

### 2.3 Formalismo BSSN

O formalismo BSSN é um esquema de evolução livre para o sistema de equações ADM padrão que foi concebido por Shibata e Nakamura em 1995 (Shibata; Nakamura, 1995). Em 1998 foi revisitado por Baumgarte e Shapiro, os quais introduziram nele uma ligeira modificação (Baumgarte; Shapiro, 1998). Vimos na subseção anterior que podemos definir novas funções independentes para desaparecer com termos de derivadas mistas de segundo grau. No formalismo BSSN, vamos reformular o tensor espacial de Ricci. A ideia é utilizar as funções de conexão, o traço da curvatura extrínseca e a estratégia de decomposição conforme (Alcubierre, 2008).

### 2.3.1 Decomposição conforme da 3-métrica

Nesta subseção realizamos a decomposição conforme da métrica induzida  $\gamma$  em cada hipersuperfície  $\Sigma_t$ . Considere a transformação conforme:

$$\gamma = \psi^4 \tilde{\gamma}, \quad (179)$$

onde  $\psi$  é um campo escalar estritamente positivo e  $\tilde{\gamma}$  é uma métrica auxiliar em  $\Sigma_t$ . Sendo  $\gamma$  uma métrica riemanniana, então  $\tilde{\gamma}$  é necessariamente do mesmo tipo e será chamada de **métrica conforme**.

Uma **classe de equivalência conforme** é o conjunto de todas as métricas que podem ser relacionadas a uma dada métrica  $\gamma$  por uma transformação conforme, como na Eq. (179). Assim, uma classe de equivalência conforme é:

$$\tilde{\gamma} = \gamma^{-1/3} \gamma, \quad (180)$$

com  $\tilde{\gamma} := \det(\tilde{\gamma}_{ij})$ . Essa escolha é tal que  $\tilde{\gamma} = 1$  e corresponde à escolha do **fator conforme**:  $\psi = \gamma^{1/12}$ . Porém,  $\gamma$  depende da escolha de coordenadas para expressar as componentes de  $\gamma_{ij}$ , logo,  $\psi$  não seria um campo escalar. Na verdade,  $\tilde{\gamma}$  não é um campo tensorial, ele é uma densidade tensorial de peso  $-2/3$ . Lembrando que, uma **densidade tensorial de peso**  $n \in \mathbb{Q}$  é uma quantidade  $\tau$  tal que:

$$\tau = \gamma^{n/2} \mathbf{T}, \quad (181)$$

sendo  $\mathbf{T}$  um campo tensorial.

Em 1971-1972 York demonstrou que os graus de liberdade do campo gravitacional são carregados por classes de equivalência conforme de 3-métricas (York, 1971), (York, 1972). A estas classes é associada a derivada covariante  $\tilde{D}$  tal que  $\tilde{D}\tilde{\gamma} = 0$ . No entanto, dado que  $\tilde{\gamma}$  é uma densidade tensorial, não há uma única derivada covariante associada a ela. Em particular, sendo  $\mathbf{D}\tilde{\gamma} = 0$ , de modo que se  $\mathbf{D}$  associada à métrica  $\gamma$  está associada com  $\tilde{\gamma}$ , então  $\mathbf{D}$  é associada a  $\tilde{\mathbf{D}}$  também.

Para evitar trabalhar com densidades tensoriais e permitir o uso de coordenadas curvilíneas, introduzimos a **métrica de fundo**  $\mathbf{f}$  como uma estrutura extra na hipersuperfície  $\Sigma_t$ . Fixamos  $\mathbf{f}$  às coordenadas  $(x^i)$  em  $\Sigma_t$  e exigimos que as componentes  $f_{ij}$  em relação a  $(x^i)$  satisfaçam:

$$\partial_t f_{ij} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}_{\partial_t} \mathbf{f} = 0, \quad (182)$$

isto é, a métrica  $\mathbf{f}$  é transportada ao longo do vetor de evolução temporal das coordenadas

$\partial_t$ . A relação com as componentes da métrica inversa é:

$$f^{ik} f_{kj} = \delta^i_j. \quad (183)$$

Por outro lado, se  $\tilde{D}_k f_{ij} = 0$ , então:

$$\tilde{D}^i = f^{ij} \tilde{D}_j \quad (184)$$

e as conexões são:

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \frac{1}{2} f^{kl} \left( \frac{\partial f_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial f_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial f_{ij}}{\partial x^l} \right), \quad (185)$$

Exigindo que a métrica de fundo seja plana, a métrica conforme é:

$$\tilde{\gamma} := \psi^{-4} \gamma, \quad (186)$$

com:

$$\psi := \left( \frac{\gamma}{f} \right)^{1/12}, \quad \gamma := \det(\gamma_{ij}) \text{ e } f := \det(f_{ij}), \quad (187)$$

onde  $\psi$  é um campo tensorial em  $\Sigma_t$  que depende da escolha de  $\mathbf{f}$ . Sendo  $\psi$  assim definido, então  $\tilde{\gamma}$  como definida na Eq. (186) é um campo tensorial e uma métrica riemanniana em  $\Sigma_t$ . Por construção, o determinante da métrica conforme satisfaz:

$$\det(\tilde{\gamma}_{ij}) = f, \quad (188)$$

que é independente da escolha da métrica de fundo  $\mathbf{f}$ . Em particular, se utilizarmos coordenadas cartesianas:  $\det(f_{ij}) = \det(\tilde{\gamma}_{ij}) = 1$ .

Também definimos as componentes da **métrica conforme inversa** partindo da relação:

$$\tilde{\gamma}_{ik} \tilde{\gamma}^{kj} = \delta_i^j \Leftrightarrow \tilde{\gamma}^{ij} = \psi^4 \gamma^{ij}. \quad (189)$$

Utilizando as equações anteriores e a Eq. (186), temos:

$$\gamma_{ij} = \psi^4 \tilde{\gamma}_{ij} \text{ e } \gamma^{ij} = \psi^{-4} \tilde{\gamma}^{ij}. \quad (190)$$

Além disso, se  $\tilde{\gamma}$  é uma métrica bem definida em  $\Sigma_t$ , então  $\tilde{\mathbf{D}}$  é a conexão associada a ela,  $\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\gamma} = 0$ , e as conexões de  $\tilde{\mathbf{D}}$  em relação às coordenadas  $(x^i)$  são:

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^{kl} \left( \frac{\partial \tilde{\gamma}_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial \tilde{\gamma}_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial \tilde{\gamma}_{ij}}{\partial x^l} \right). \quad (191)$$

Agora vamos mostrar a expressão do tensor de Ricci  $\mathbf{R}$  das equações ADM padrão em termos do tensor de Ricci  $\tilde{\mathbf{R}}$  associado a  $\tilde{\gamma}$  e  $\psi$ . Os detalhes dos cálculos estão em (Gourgoulhon, 2012) e envolvem o tensor de Cotton, com componentes  $C^k_{ki} = 6\tilde{D}_i \ln \psi$ . Assim, o tensor de Ricci é:

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} - 2\tilde{D}_i \tilde{D}_j \ln \psi - 2\tilde{D}_k \tilde{D}^k \ln \psi \tilde{\gamma}_{ij} + 4\tilde{D}_i \ln \psi \tilde{D}_j \ln \psi - 4 \ln \psi \tilde{D}^k \ln \psi \tilde{\gamma}_{ij}. \quad (192)$$

Tomando seu traço em relação a  $\tilde{\gamma}$ , obtemos a relação entre os escalares de curvatura:

$$\begin{aligned} R &= \gamma^{ij} R_{ij} = \psi^{-4} \tilde{\gamma}^{ij} R_{ij} \\ &= \psi^{-4} \left( \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{R}_{ij} - 2\tilde{D}_i \tilde{D}^i \ln \psi - 2\tilde{D}_k \tilde{D}^k \ln \psi \times 3 + 4\tilde{D}_i \ln \psi \tilde{D}^i \ln \psi - 4\tilde{D}_k \ln \psi \tilde{D}^k \ln \psi \times 3 \right) \\ &= \psi^{-4} \left[ \tilde{R} - 8 \left( \tilde{D}_i \tilde{D}^i \ln \psi + \tilde{D}_i \ln \psi \tilde{D}^i \ln \psi \right) \right], \end{aligned} \quad (193)$$

onde:

$$\tilde{R} := \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{R}_{ij} \quad (194)$$

é o escalar de curvatura associado à métrica conforme. Note que:

$$\tilde{D}_i \tilde{D}^i \ln \psi = \psi^{-1} \tilde{D}_i \tilde{D}^i \psi - \tilde{D}_i \ln \psi \tilde{D}^i \ln \psi \quad (195)$$

leva a:

$$R = \psi^{-4} \tilde{R} - 8\psi^{-5} \tilde{D}_i \tilde{D}^i \psi. \quad (196)$$

### 2.3.2 Decomposição conforme da curvatura extrínseca

Além da implementação do fator conforme, o próximo passo para a obtenção das equações do formalismo BSSN é separar o traço da curvatura extrínseca e fazer um reescalamento conforme da parte sem traço. Para tal definimos:

$$\mathbf{A} := \mathbf{K} - \frac{1}{3} K \boldsymbol{\gamma}, \quad (197)$$

onde  $K := K^i_i = \gamma^{ij} K_{ij}$  é o traço da curvatura extrínseca  $\mathbf{K}$  calculado em relação a  $\boldsymbol{\gamma}$ , isto é, menos 3 vezes a curvatura média de  $\Sigma_t$  embutida em  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ . Por construção, a forma bilinear  $\mathbf{A}$  é de traço nulo:  $\gamma^{ij} A_{ij} = 0$ . As componentes contravariantes de  $\mathbf{K}$  são:  $K^{ij} = \gamma^{ik} \gamma^{jl} K_{kl}$  e de sua parte sem traço são:  $A^{ij} = \gamma^{ik} \gamma^{jl} A_{kl}$ . Portanto, a decomposição

da curvatura extrínseca é:

$$K_{ij} = A_{ij} + \frac{1}{3}K\gamma_{ij} \text{ e } K^{ij} = A^{ij} + \frac{1}{3}K\gamma^{ij}. \quad (198)$$

Para realizar a decomposição conforme da parte sem traço de  $\mathbf{K}$  escrevemos:

$$A^{ij} = \psi^\alpha \tilde{A}^{ij}, \quad (199)$$

onde  $\alpha$  é um expoente qualquer a ser determinado. Substituindo as equações (190) e (198) na Eq. (48):

$$\mathcal{L}_{\mathbf{m}}(\psi^4 \tilde{\gamma}_{ij}) = -2\alpha A_{ij} - \frac{2}{3}\alpha K \gamma_{ij}, \quad (200)$$

assim,

$$\mathcal{L}_{\mathbf{m}} \tilde{\gamma}_{ij} = -2\alpha \psi^{-4} A_{ij} - \frac{2}{3}(\alpha K + 6\mathcal{L}_{\mathbf{m}} \ln \psi) \tilde{\gamma}_{ij}. \quad (201)$$

Tomando o traço em relação a  $\tilde{\gamma}$  (Gourgoulhon, 2012):

$$\tilde{\gamma}^{ij} \mathcal{L}_{\mathbf{m}} \tilde{\gamma}_{ij} = -2(\alpha K + 6\mathcal{L}_{\mathbf{m}} \ln \psi) \Leftrightarrow \tilde{\gamma}^{ij} \mathcal{L}_{\mathbf{m}} \tilde{\gamma}_{ij} = \mathcal{L}_{\mathbf{m}} \ln [\det(\tilde{\gamma}_{ij})]. \quad (202)$$

Utilizando a decomposição conforme (Gourgoulhon, 2012):

$$\tilde{\gamma}^{ij} \mathcal{L}_{\mathbf{m}} \tilde{\gamma}_{ij} = -2\tilde{D}_i \beta^i \quad (203)$$

e substituindo na Eq. (202):

$$\alpha K + 6\mathcal{L}_{\mathbf{m}} \ln \psi = \tilde{D}_i \beta^i. \quad (204)$$

Fazendo  $\mathbf{m} = \partial_t - \beta$  e substituindo na equação acima, obtemos a **equação de evolução do fator conforme**:

$$(\partial_t - \mathcal{L}_{\beta}) \ln \psi = \frac{1}{6}(\tilde{D}_i \beta^i - \alpha K). \quad (205)$$

Além disso, substituindo a Eq. (204) na Eq. (201), obtemos a equação:

$$(\partial_t - \mathcal{L}_{\beta}) \tilde{\gamma}_{ij} = -2\alpha \psi^{-4} A_{ij} - \frac{2}{3}\tilde{D}_k \beta^k \tilde{\gamma}_{ij}. \quad (206)$$

Na equação anterior definimos o fator:

$$\tilde{A}_{ij} := \psi^{-4} A_{ij} \quad (207)$$

e como consequência direta da definição de  $\mathbf{A}$ :

$$\tilde{\gamma}^{ij} \tilde{A}_{ij} = 0. \quad (208)$$

Além disso, utilizamos a métrica conforme para subir os índices de  $\tilde{A}_{ij}$ :  $\tilde{A}^{ij} := \tilde{\gamma}^{ik} \tilde{\gamma}^{jl} \tilde{A}_{kl} = 0$ . Portanto, da relação  $\tilde{\gamma}^{ij} = \psi^4 \gamma^{ij}$  obtemos:

$$\tilde{A}^{ij} = \psi^4 A^{ij}. \quad (209)$$

Esta equação corresponde a um reescalonamento de  $A_{ij}$  pelo fator  $\alpha = -4$  na Eq. (199) e é chamado de Escala “*Time-Evolution*”. Esta escolha de reescalonamento foi considerada pela primeira vez por Nakamura em 1994 (Nakamura, 1994). Agora, reescrevendo a **equação de evolução da métrica conforme** em termos de  $\tilde{A}_{ij}$ , Eq. (206):

$$(\partial_t - \mathcal{L}_\beta) \tilde{\gamma}_{ij} = -2\alpha \tilde{A}_{ij} - \frac{2}{3} \tilde{D}_k \beta^k \tilde{\gamma}_{ij}. \quad (210)$$

Esta equação é equivalente à Eq. (97) do sistema de equações ADM padrão.

Outro reescalonamento surge ao considerar a equação do vínculo de momento (101). Escrevendo a divergência de  $K^{ij}$  em termos de sua decomposição:

$$D_j K^{ij} = D_j A^{ij} + \frac{1}{3} D^i K \quad (211)$$

e após algumas manipulações algébricas obtemos:

$$D_j A^{ij} = \psi^{-10} \tilde{D}_j (\psi^{10} A^{ij}). \quad (212)$$

Esta identidade é válida somente porque  $A^{ij}$  é simétrico e sem traço. Além disso, a equação acima sugere a introdução da quantidade:

$$\mathring{A}^{ij} := \psi^{10} A^{ij}, \quad (213)$$

que corresponde a um reescalonamento com fator  $\alpha = -10$  na Eq. (199) e é chamado de Escala “*Momentum-Constraint*”. Este reescalonamento foi introduzido pela primeira vez por Lichnerowicz em 1944 (Lichnerowicz, 1944). Assim como para  $\tilde{A}_{ij}$ , também definimos o campo tensorial  $\mathring{A}_{ij}$  deduzido a partir de  $\mathring{A}^{ij}$  e utilizando a métrica conforme para abaixar os índices:  $\mathring{A}_{ij} := \tilde{\gamma}_{ik} \tilde{\gamma}_{jl} \mathring{A}^{kl}$ . Considerando as equações (207) e (213), obtemos:

$$\mathring{A}_{ij} = \psi^2 A_{ij}, \quad (214)$$

Reescrevendo a equação do vínculo de momento em termos de  $\mathring{A}^{ij}$ :

$$\tilde{D}_j \mathring{A}^{ij} - \frac{2}{3} \psi^6 \tilde{D}^i K = 8\pi \psi^{10} j^i. \quad (215)$$

### 2.3.3 Decomposição conforme das equações ADM padrão

Tendo em mãos a decomposição conforme de  $\gamma$  e da parte sem traço de  $\mathbf{K}$ , reescrevemos as equações ADM padrão em termos de quantidades conformes. Os detalhes dos cálculos encontram-se em (Gourgoulhon, 2012). De fato, a **equação de evolução do traço da curvatura extrínseca** é:

$$(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)K = -\psi^{-4} \left( \tilde{D}_i \tilde{D}^i \alpha + 2\tilde{D}_i \ln \psi \tilde{D}^i \alpha \right) + \alpha \left[ 4\pi(\rho + S) + \tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} + \frac{1}{3} K^2 \right] \quad (216)$$

e a **equação de evolução da parte sem traço da curvatura extrínseca** é:

$$\begin{aligned} (\partial_t - \mathcal{L}_\beta) \tilde{A}_{ij} = & -\frac{2}{3} \tilde{D}_k \beta^k \tilde{A}_{ij} + \alpha \left[ K \tilde{A}_{ij} - 2\tilde{\gamma}^{kl} \tilde{A}_{ik} \tilde{A}_{jl} - 8\pi \left( \psi^{-4} S_{ij} - \frac{1}{3} S \tilde{\gamma}_{ij} \right) \right] \\ & + \psi^{-4} \left\{ -\tilde{D}_i \tilde{D}_j \alpha + 2\tilde{D}_i \ln \psi \tilde{D}_j \alpha + 2\tilde{D}_j \ln \psi \tilde{D}_i \alpha \right. \\ & + \frac{1}{3} \left( \tilde{D}_k \tilde{D}^k \alpha - 4\tilde{D}_k \ln \psi \tilde{D}^k \alpha \right) \tilde{\gamma}_{ij} \\ & + \alpha \left[ \tilde{R}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{R} \tilde{\gamma}_{ij} - 2\tilde{D}_i \tilde{D}_j \ln \psi + 4\tilde{D}_i \ln \psi \tilde{D}_j \ln \psi \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{3} \left( \tilde{D}_k \tilde{D}^k \ln \psi - 2\tilde{D}_k \ln \psi \tilde{D}^k \ln \psi \right) \tilde{\gamma}_{ij} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (217)$$

Para a **equação do vínculo Hamiltoniano** substituímos  $R$  na Eq. (196):

$$\tilde{D}_i \tilde{D}^i \psi - \frac{1}{8} \tilde{R} \left( \frac{1}{8} \tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} - \frac{1}{12} K^2 + 2\pi\rho \right) \psi^5 = 0. \quad (218)$$

Para a **equação do vínculo de momento** usamos o reescalonamento com  $\alpha = -10$  para reescrever o termo  $\tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij}$ . Assim, combinando as equações (207), (209), (213) e (214), obtemos:

$$\mathring{A}^{ij} := \psi^6 \tilde{A}^{ij} \text{ e } \mathring{A}_{ij} := \psi^6 \tilde{A}_{ij}. \quad (219)$$

Além disso, reescrevemos  $\mathring{A}^{ij}$  na Eq. (215):

$$\tilde{D}_j \mathring{A}^{ij} + 6\tilde{A}^{ij} \tilde{D}_j \ln \psi - \frac{2}{3} \tilde{D}^i K = 8\pi \psi^4 j^i. \quad (220)$$

Agora vamos introduzir outra variável auxiliar do formalismo BSSN partindo das

expressões de  $\tilde{\mathbf{R}}$  e  $\gamma$ . Em termos das conexões  $\Gamma^k_{ij}$  em relação às coordenadas  $x^i$ :

$$\tilde{R}_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^k} \tilde{\Gamma}^k_{ij} - \frac{\partial}{\partial x^j} \tilde{\Gamma}^k_{ik} + \tilde{\Gamma}^k_{ij} \tilde{\Gamma}^l_{kl} - \tilde{\Gamma}^k_{il} \tilde{\Gamma}^l_{kj}. \quad (221)$$

Definindo também o campo tensorial  $\Delta$ :

$$\Delta^k_{ij} := \tilde{\Gamma}^k_{ij} - \overset{\circ}{\Gamma}^k_{ij}, \quad (222)$$

onde  $\overset{\circ}{\Gamma}^k_{ij}$  são as conexões da métrica plana  $\mathbf{f}$  em relação às coordenadas  $x^i$ . De fato, a diferença entre as conexões define um campo tensorial, como mostra a expressão:

$$\Delta^k_{ij} := \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^{kl} \left( \overset{\circ}{D}_i \tilde{\gamma}_{lj} + \overset{\circ}{D}_j \tilde{\gamma}_{il} - \overset{\circ}{D}_l \tilde{\gamma}_{ij} \right), \quad (223)$$

sendo  $\overset{\circ}{D}_i$  a derivada covariante associada a  $\mathbf{f}$ . Verificando a equivalência entre as equações (222) e (223):

$$\begin{aligned} \Delta^k_{ij} &= \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^{kl} \left( \frac{\partial \tilde{\gamma}_{lj}}{\partial x^i} - \overset{\circ}{\Gamma}^m_{il} \tilde{\gamma}_{mj} - \overset{\circ}{\Gamma}^m_{ij} \tilde{\gamma}_{lm} + \frac{\partial \tilde{\gamma}_{il}}{\partial x^j} - \overset{\circ}{\Gamma}^m_{ji} \tilde{\gamma}_{ml} - \overset{\circ}{\Gamma}^m_{jl} \tilde{\gamma}_{im} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \tilde{\gamma}_{ij}}{\partial x^l} + \overset{\circ}{\Gamma}^m_{li} \tilde{\gamma}_{mj} + \overset{\circ}{\Gamma}^m_{lj} \tilde{\gamma}_{im} \right) \\ &= \tilde{\Gamma}^k_{ij} + \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^{kl} \left( -2 \overset{\circ}{\Gamma}^m_{ij} \tilde{\gamma}_{lm} \right) \\ &= \tilde{\Gamma}^k_{ij} - \tilde{\gamma}^{kl} \tilde{\gamma}_{lm} \overset{\circ}{\Gamma}^m_{ij} = \tilde{\Gamma}^k_{ij} - \overset{\circ}{\Gamma}^k_{ij}. \end{aligned} \quad (224)$$

Observe que para  $\Delta$  ser um campo tensorial bem definido ele depende da métrica de fundo plana  $\mathbf{f}$  e esta não é única em  $\Sigma_t$ . De fato, se as coordenadas  $x^i$  são cartesianas, então  $\overset{\circ}{\Gamma}^k_{ij} = 0 \Rightarrow \Delta^k_{ij} = \tilde{\Gamma}^k_{ij}$  e  $\overset{\circ}{D}_i = \partial/\partial x^i$  (Gourgoulhon, 2012). Substituindo  $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$  por  $\Delta^k_{ij} + \overset{\circ}{\Gamma}^k_{ij}$  na Eq. (221) e considerando a métrica plana  $\mathbf{f}$ , obtemos:

$$\tilde{R}^k_{ij} = \overset{\circ}{D}_k \Delta^k_{ij} - \Delta^k_{il} \Delta^l_{kj}. \quad (225)$$

Note que essa equação relaciona dois tensores de Ricci associados a duas métricas diferentes. Além disso, se substituirmos (223) em (225) e sendo  $\mathbf{f}$  plana, então  $\overset{\circ}{D}_k \overset{\circ}{D}_i = \overset{\circ}{D}_i \overset{\circ}{D}_k$  implica na equação, (Gourgoulhon, 2012):

$$\tilde{R}_{ij} = -\frac{1}{2} \left( \tilde{\gamma}^{kl} \overset{\circ}{D}_k \overset{\circ}{D}_l \tilde{\gamma}_{ij} + \tilde{\gamma}_{ik} \overset{\circ}{D}_j \overset{\circ}{D}_l \tilde{\gamma}^{kl} + \tilde{\gamma}_{jk} \overset{\circ}{D}_i \overset{\circ}{D}_l \tilde{\gamma}^{kl} \right) + \mathcal{Q}_{ij}(\tilde{\gamma}, \overset{\circ}{\mathbf{D}}\tilde{\gamma}), \quad (226)$$

com:

$$\mathcal{Q}_{ij}(\tilde{\gamma}, \overset{\circ}{\mathbf{D}}\tilde{\gamma}) := -\frac{1}{2} \left( \overset{\circ}{D}_k \tilde{\gamma}_{lj} \overset{\circ}{D}_i \tilde{\gamma}^{kl} + \overset{\circ}{D}_k \tilde{\gamma}_{il} \overset{\circ}{D}_j \tilde{\gamma}^{kl} + \overset{\circ}{D}_k \tilde{\gamma}_{kl} \overset{\circ}{D}_l \tilde{\gamma}_{ij} \right) - \Delta^k_{il} \Delta^l_{kj}. \quad (227)$$

O termo acima não contém nenhuma derivada de segunda ordem de  $\tilde{\gamma}$ , mas possui termos

quadráticos com derivadas de primeira ordem.

Na Eq. (226) reconhecemos o primeiro termo  $\tilde{\gamma}^{kl}\mathring{D}_k\mathring{D}_l\tilde{\gamma}_{ij}$  como um operador laplaciano atuando sobre  $\tilde{\gamma}_{ij}$  em  $\tilde{R}_{ij}$ . Porém, os outros dois termos da equação que envolvem derivadas segundas,  $\tilde{\gamma}_{ik}\mathring{D}_j\mathring{D}_l\tilde{\gamma}^{kl}$  e  $\tilde{\gamma}_{jk}\mathring{D}_i\mathring{D}_l\tilde{\gamma}^{kl}$ , prejudicam o caráter elíptico do operador atuando sobre  $\tilde{\gamma}_{ij}$ . Baumgarte e Shapiro (Baumgarte; Shapiro, 1998) consideraram o termo  $\mathring{D}_l\tilde{\gamma}^{kl}$  como uma variável independente de  $\tilde{\gamma}_{ij}$ . No entanto, Shibata e Nakamura foram os primeiros a introduzir uma quantidade equivalente,  $F_i := \mathring{D}^j\tilde{\gamma}_{ij}$ . Definimos então:

$$D_j\tilde{\gamma}^{ij} := \tilde{\gamma}^{jk}\left(\mathring{\Gamma}_{jk}^i - \tilde{\Gamma}_{jk}^i\right), \quad (228)$$

que implica em:

$$\tilde{\Gamma}^i = -\mathring{D}_j\tilde{\gamma}^{ij}. \quad (229)$$

Substituindo a Eq. (229) na Eq. (226):

$$\tilde{R}_{ij} = \frac{1}{2}\left(-\tilde{\gamma}^{kl}\mathring{D}_k\mathring{D}_l\tilde{\gamma}_{ij} + \tilde{\gamma}_{ik}\mathring{D}_j\tilde{\Gamma}^k + \tilde{\gamma}_{jk}\mathring{D}_i\tilde{\Gamma}^k\right) + \mathcal{Q}_{ij}(\tilde{\gamma}, \mathring{D}\tilde{\gamma}) \quad (230)$$

e tomando o traço, calculamos o escalar de Ricci conforme:

$$\tilde{R} = \mathring{D}_k\tilde{\Gamma}^k + \mathcal{Q}(\tilde{\gamma}, \mathring{D}\tilde{\gamma}), \quad (231)$$

onde:

$$\mathcal{Q}(\tilde{\gamma}, \mathring{D}\tilde{\gamma}) := \frac{1}{2}\tilde{\gamma}^{kl}\mathring{D}_k\tilde{\gamma}^{ij} + \mathring{D}_l\tilde{\gamma}_{ij} + \tilde{\gamma}^{ij}\mathcal{Q}_{ij}(\tilde{\gamma}, \mathring{D}\tilde{\gamma}). \quad (232)$$

Note que este é um termo que não contém nenhuma derivada de segunda ordem de  $\tilde{\gamma}$ , apenas termos quadráticos de derivadas de primeira ordem.

A ideia de introduzir variáveis auxiliares independentes para reduzir o tensor de Ricci a um operador semelhante ao laplaciano remonta a Nakamura *et. al* (Nakamura; Oohara; Kojima, 1987). Nesse trabalho, a abordagem foi feita sobre  $\mathbf{R}$  de  $\gamma$ , enquanto que no trabalho de Shibata e Nakamura foi feito para  $\tilde{\mathbf{R}}$  de  $\tilde{\gamma}$ . Um análogo mais próximo do formalismo BSSN é a decomposição harmônica generalizada introduzida por Friedrich (Friedrich, 1985) e Garfinkle (Garfinkle, 2002) e implementada por Pretorius para o caso de um sistema binário de BNs já mencionado anteriormente.

Nesse sentido, se  $\tilde{\Gamma}^i$  é uma nova variável independente do sistema de coordenadas, então podemos deduzir sua equação de evolução. De fato, a **equação de evolução da**

função auxiliar  $\tilde{\Gamma}$  é:

$$\begin{aligned}
 (\partial_t - \mathcal{L}_\beta) \tilde{\Gamma}^i &= \frac{2}{3} \mathring{D}_k \beta^k \tilde{\Gamma}^i + \tilde{\gamma}^{jk} \mathring{D}_j \mathring{D}_k \beta^i + \frac{1}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \mathring{D}_j \mathring{D}_k \beta^k - 2 \tilde{A}^{ij} \mathring{D}_j \alpha \\
 &\quad - 2\alpha \left[ 8\pi \psi^4 j^i - \tilde{A}^{jk} \Delta_{jk}^i - 6 \tilde{A}^{ij} \mathring{D}_j \ln \psi + \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \mathring{D}_j K \right].
 \end{aligned} \tag{233}$$

Finalizamos assim a dedução das **equações do formalismo BSSN padrão** que comporta as variáveis:  $\psi$ ,  $\tilde{\gamma}_{ij}$ ,  $K$ ,  $\tilde{A}_{ij}$  e  $\tilde{\Gamma}^i$ , equações (205), (210), (216), (217), (233), respectivamente. Elas envolvem  $1 + 6 + 1 + 6 + 3 = 17$  componentes que são evoluídas no tempo e devem satisfazer as equações dos vínculos Hamiltoniano e de momento, equações (218) e (219), respectivamente, do determinante unitário de  $\tilde{\gamma}_{ij}$ , da parte sem traço de  $\mathbf{K}$  e a definição de  $\tilde{\Gamma}^i$ . Estas grandezas envolvem  $1 + 3 + 1 + 1 + 3 = 9$  componentes, logo, o número de graus de liberdade é reduzido para  $17 - 9 = 8$  componentes. Mais adiante vamos abordar a escolha de coordenadas para  $\alpha$  e  $\beta$ , isso reduz o número de graus de liberdade para  $8 - 4 = 4 = 2 \times 2$ . O que corresponde aos 2 graus de liberdade do campo gravitacional expressos no par conforme  $(\tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{A}_{ij})$ .

Para termos uma noção do impressionante desempenho computacional do formalismo BSSN vamos retornar à Fig. (8). O exemplo é de uma OGs de amplitude pequena e simétrica no tempo. Ambos sistemas implementados, os formalismos ADM e BSSN, fornecem resultados muito semelhantes inicialmente. Porém, a evolução das equações ADM reduzidas à primeira ordem falha muito rápido, enquanto que a evolução das equações BSSN permanece estável ao longo de toda a integração numérica.

Os critérios de hiperbolicidade discutidos nas subseções anteriores demonstram como as propriedades de estabilidade numérica foram aprimoradas com o formalismo BSSN. Pode-se mostrar que o sistema BSSN é fortemente hiperbólico e, portanto, bem posto, enquanto que a formulação ADM padrão reduzida à primeira ordem é apenas fracamente hiperbólica e, portanto, mal posta (Choquet-Bruhat; Geroch, 1969).

Quadro 2 - Principais conceitos e resultados sobre o formalismo BSSN padrão obtidos nesta subsecção

---

Equações do formalismo BSSN padrão

---

Componentes da métrica conforme

$$\tilde{\gamma}_{ij} = \psi^{-4} \gamma_{ij} \quad (234)$$

Fator conforme

$$\psi = \frac{1}{12} \ln \left( \frac{\gamma}{f} \right) \quad (235)$$

$f$  é o determinante da métrica de fundo plana e vale 1

Decomposição conforme da curvatura extrínseca:

$$\tilde{K}_{ij} = A_{ij} + \frac{1}{3} K \gamma_{ij} \quad (236)$$

Equações de evolução

**Evolução do fator conforme:**

$$(\partial_t - \mathcal{L}_\beta) \ln \psi = \frac{1}{6} (\tilde{D}_i \beta^i - \alpha K)$$

**Evolução da métrica conforme:**

$$(\partial_t - \mathcal{L}_\beta) \tilde{\gamma}_{ij} = -2\alpha \tilde{A}_{ij} - \frac{2}{3} \tilde{D}_k \beta^k \tilde{\gamma}_{ij}$$

**Evolução do traço da curvatura extrínseca:**

$$(\partial_t - \mathcal{L}_\beta) K = -\psi^{-4} (\tilde{D}_i \tilde{D}^i \alpha + 2\tilde{D}_i \ln \psi \tilde{D}^i \alpha) + \alpha \left[ 4\pi(\rho + S) + \tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} + \frac{1}{3} K^2 \right]$$

**Evolução da curvatura extrínseca sem traço:**

$$\begin{aligned} (\partial_t - \mathcal{L}_\beta) \tilde{A}_{ij} = & -\frac{2}{3} \tilde{D}_k \beta^k \tilde{A}_{ij} + \alpha \left[ K \tilde{A}_{ij} - 2\tilde{\gamma}^{kl} \tilde{A}_{ik} \tilde{A}_{jl} - 8\pi \left( \psi^{-4} S_{ij} - \frac{1}{3} S \tilde{\gamma}_{ij} \right) \right] \\ & + \psi^{-4} \left\{ -\tilde{D}_i \tilde{D}_j \alpha + 2\tilde{D}_i \ln \psi \tilde{D}_j \alpha + 2\tilde{D}_j \ln \psi \tilde{D}_i \alpha \right. \\ & + \frac{1}{3} (\tilde{D}_k \tilde{D}^k \alpha - 4\tilde{D}_k \ln \psi \tilde{D}^k \alpha) \tilde{\gamma}_{ij} \\ & + \alpha \left[ \frac{1}{2} (-\tilde{\gamma}^{kl} \dot{D}_k \dot{D}_l \tilde{\gamma}_{ij} + \tilde{\gamma}_{ik} \dot{D}_j \tilde{\Gamma}^k + \tilde{\gamma}_{jk} \dot{D}_i \tilde{\Gamma}^k) + \mathcal{Q}_{ij}(\tilde{\gamma}, \dot{\mathbf{D}}\tilde{\gamma}) \right. \\ & - \frac{1}{3} (\dot{D}_k \tilde{\Gamma}^k + \mathcal{Q}(\tilde{\gamma}, \dot{\mathbf{D}}\tilde{\gamma})) \tilde{\gamma}_{ij} - 2\tilde{D}_i \tilde{D}_j \ln \psi + 4\tilde{D}_i \ln \psi \tilde{D}_j \ln \psi \\ & \left. \left. + \frac{2}{3} (\tilde{D}_k \tilde{D}^k \ln \psi - 2\tilde{D}_k \ln \psi \tilde{D}^k \ln \psi) \tilde{\gamma}_{ij} \right\} \right] \end{aligned} \quad (237)$$

**Evolução da função auxiliar  $\tilde{\Gamma}^i$ :**

$$\begin{aligned} (\partial_t - \mathcal{L}_\beta) \tilde{\Gamma}^i = & \frac{2}{3} \dot{D}_k \beta^k \tilde{\Gamma}^i + \tilde{\gamma}^{jk} \dot{D}_j \dot{D}_k \beta^i + \frac{1}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \dot{D}_j \dot{D}_k \beta^k - 2\tilde{A}^{ij} \dot{D}_j \alpha \\ & - 2\alpha \left[ 8\pi \psi^4 j^i - \tilde{A}^{jk} \Delta_{jk}^i - 6\tilde{A}^{ij} \dot{D}_j \ln \psi + \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \dot{D}_j K \right] \end{aligned}$$

(continua)

Quadro 2 - Principais conceitos e resultados sobre o formalismo BSSN padrão obtidos nesta subseção (conclusão)

Equações de vínculo

**Vínculo Hamiltoniano:**

$$\tilde{D}_i \tilde{D}^i \psi - \frac{1}{8} \tilde{R} \left( \frac{1}{8} \tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} - \frac{1}{12} K^2 + 2\pi\rho \right) \psi^5 = 0 \quad (238)$$

**Vínculo de momento:**

$$\tilde{D}_j \tilde{A}^{ij} + 6 \tilde{A}^{ij} \tilde{D}_j \ln \psi - \frac{2}{3} \tilde{D}^i K = 8\pi\psi^4 j^i$$

---

Fonte: A autora, 2024.

O sistema acima é resolvido em termos das variáveis:  $\psi$ ,  $\tilde{\gamma}_{ij}$ ,  $K$ ,  $\tilde{A}_{ij}$  e  $\tilde{\Gamma}^i$ . A métrica física  $\gamma$  e a curvatura extrínseca  $\mathbf{K}$  são recuperadas aplicando as relações:

$$\gamma_{ij} = \psi^4 \tilde{\gamma}_{ij} \quad (239)$$

e

$$K_{ij} = \psi^4 \left( \tilde{A}_{ij} + \frac{1}{3} K \tilde{\gamma}_{ij} \right). \quad (240)$$

Outra alternativa equivalente a esse sistema são as equações que envolvem os termos  $\dot{A}_{ij}$ .

### 2.3.4 Formalismo BSSN em coordenadas esféricas

O formalismo BSSN, embora muito bem sucedido na prática, tem a desvantagem de envolver quantidades dinâmicas que não são tensores verdadeiros, como densidades tensoriais,  $\tilde{\Gamma}^i$ , por exemplo. Além disso, o determinante da métrica plana em coordenadas curvilíneas geralmente é diferente de 1, à diferença do que vimos na discussão anterior. Estas são questões importantes quando consideramos sistemas de coordenadas curvilíneas que são úteis para a maioria dos problemas em RG.

Em 2009, Brown introduziu o **formalismo BSSN generalizado** em que todas as grandezas dinâmicas são tensores verdadeiros (Brown, 2009). Em particular, essa generalização permite a construção das equações de evolução BSSN em simetria esférica, foco deste trabalho. Nesta subseção vamos apresentar as principais ideias desenvolvidas no artigo de Brown.

Para diferenciar a métrica conforme do formalismo BSSN padrão da métrica con-

forme em simetria esférica a denotamos por:

$$\hat{\gamma}_{ij} = e^{-4\chi} \gamma_{ij}. \quad (241)$$

A princípio, o fator conforme pode ser escolhido de várias formas. Aqui foi escolhido como sugestão de Campanelli *et al.* (Campanelli *et al.*, 2006) para ser  $X = 1/\psi^4 = e^{-4\chi}$ . Esta é uma alternativa mais adequada quando consideramos espaços-tempos para os quais  $\psi$  tipicamente tem uma singularidade  $1/r$  (de modo que  $\chi$  tem uma singularidade logarítmica), enquanto  $X$  é uma função  $C^4$  em  $r = 0$ . Para espaços-tempos regulares não deveria fazer diferença evoluirmos  $\chi$ ,  $\psi$  ou  $X$ .

Além disso, exigimos que o **elemento de linha da métrica de fundo plana** em simetria esférica seja:

$$d\hat{l}^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (242)$$

onde  $d\Omega^2$  é o elemento de ângulo sólido:  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ . Assim, o determinante de  $\hat{\gamma}$  em  $t = 0$  é:

$$\hat{\gamma}(t = 0) = \hat{\gamma} = r^4 \sin^2 \theta. \quad (243)$$

Essa primeira mudança no formalismo BSSN padrão implica que  $\hat{\gamma}$  não é mais constante no espaço, logo, não podemos ignorar suas derivadas espaciais. Nesse sentido, é necessário definir cómo  $\hat{\gamma}$  evolui no tempo. No trabalho de Brown surgem duas escolhas naturais:

- Condição Lagrangiana:  $\partial_t \hat{\gamma} = 0 \rightarrow$  o determinante de  $\hat{\gamma}$  é constante ao longo das **linhas de tempo**.
- Condição Euleriana:  $\partial_t \hat{\gamma} - \mathcal{L}_\beta \hat{\gamma} = 0 \rightarrow$  o determinante de  $\hat{\gamma}$  é constante ao longo das **linhas normais**, logo, podem evoluir ao longo das linhas de tempo.

A forma geral do **elemento de linha espacial conforme** é:

$$d\hat{l}^2 = e^{4\chi} [a(t, r) dr^2 + r^2 b(t, r) d\Omega^2], \quad (244)$$

sendo  $a(t, r)$  e  $b(t, r)$  funções métricas positivas. Além disso, da Eq. (92) obtemos o **elemento de linha geral em simetria esférica**:

$$dl^2 = -(\alpha^2 - \beta_r \beta^r) dt^2 + 2\beta_r dr dt + e^{4\chi} [a(t, r) dr^2 + r^2 b(t, r) d\Omega^2]. \quad (245)$$

Assim, considerando que o **vetor de deslocamento** em simetria esférica tem apenas

uma componente radial:  $\beta^i = (\beta, 0, 0)$ , com  $\beta = \beta^r$ :

$$\beta_r = \gamma_{ri}\beta^i = \gamma_{rr}\beta = ae^{4x}\beta. \quad (246)$$

Usando as equações (245) e (246), explicitamos as **componentes covariantes da métrica física**:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(\alpha^2 - a\beta^2 e^{4x}) & a\beta^2 e^{4x} & 0 & 0 \\ a\beta^2 e^{4x} & ae^{4x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & br^2 e^{4x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & br^2 \sin^2 \theta e^{4x} \end{pmatrix} \quad (247)$$

e as **componentes contravariantes da métrica física**:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^{-2} & \alpha^{-2}\beta & 0 & 0 \\ \alpha^{-2}\beta & -\alpha^{-2}a^{-1}(\alpha^2 - a\beta^2 e^{4x})e^{-4x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (br^2)^{-1}e^{-4x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (br^2 \sin^2 \theta)^{-1}e^{-4x} \end{pmatrix}. \quad (248)$$

Portanto, em simetria esférica, o traço de  $\gamma$  e de  $\hat{\gamma}$  são, respectivamente:

$$\gamma = ab^2 (r^4 \sin^2 \theta) e^{-12x} \quad \text{e} \quad \hat{\gamma} = ab^2 (r^4 \sin^2 \theta). \quad (249)$$

Fazendo  $a = b = 1$  e substituindo na expressão de  $\hat{\gamma}$  recuperamos o determinante de  $\hat{\gamma}$  em coordenadas esféricas. Porém, para que a Eq. (249) seja satisfeita devemos ter  $ab^2 = 1$ .

Prosseguindo com a dedução das equações do formalismo BSSN em simetria esférica, calculamos a derivada de Lie de  $\hat{\gamma}$  ao longo de  $\beta$ :

$$\mathcal{L}_\beta \hat{\gamma} = \beta^m \partial_m \hat{\gamma} + 2\hat{\gamma} \partial_m \beta^m = 2\hat{\gamma} \hat{\nabla}_m \beta^m. \quad (250)$$

Em geral, a evolução de  $\hat{\gamma}$  é:

$$\partial_t \hat{\gamma} = s (2\hat{\gamma} \hat{\nabla}_m \beta^m), \quad (251)$$

com as possibilidades:

- Condição Lagrangiana:  $s = 0$ ,
- Condição Euleriana:  $s = 1$ .

Por sua vez, o tensor de Ricci tem duas contribuições:

$$R_{ij} = \hat{R}_{ij} + R_{ij}^X, \quad (252)$$

onde  $\hat{R}_{ij}$  é o tensor de Ricci associado a  $\hat{\gamma}_{ij}$ :

$$\hat{R}_{ij} = -\frac{1}{2}\hat{\gamma}^{lm}\partial_l\partial_m\hat{\gamma}_{ij} + \hat{\gamma}_{k(i}\partial_j)\hat{\Gamma}^k + \hat{\Gamma}^k\hat{\Gamma}_{(ij)k} + \hat{\gamma}^{lm}\left(2\hat{\Gamma}_{l(i}\hat{\Gamma}_{j)km} + \hat{\Gamma}_{im}^k\hat{\Gamma}_{klj}\right) \quad (253)$$

e  $R_{ij}^\chi$  denota termos adicionais que dependem de  $\chi$ :

$$R_{ij}^\chi = -2\hat{\nabla}_i\hat{\nabla}_j\chi - 2\gamma_{ij}\hat{\nabla}^k\hat{\nabla}_k\chi + 4\hat{\nabla}_i\chi\hat{\nabla}_j\chi - 4\gamma_{ij}\hat{\nabla}^k\chi\hat{\nabla}_k\chi, \quad (254)$$

sendo  $\hat{\nabla}_i$  a derivada covariante associada a  $\hat{\gamma}_{ij}$ . Escrevemos uma expressão covariante para  $R_{ij}^\chi$  introduzindo as quantidades:

$$\hat{\Delta}_{\nu\sigma}^\mu := \hat{\Gamma}_{\nu\sigma}^\mu - \hat{\Gamma}_{\nu\sigma}^\mu \quad (255)$$

e

$$\hat{\Delta}^i := \hat{\gamma}^{mn}\hat{\Delta}_{mn} = \hat{\Gamma}^i - \hat{\gamma}^{mn}\hat{\Gamma}_{mn}^i. \quad (256)$$

Daí (Alcubierre, 2008),

$$\hat{R}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\hat{\gamma}^{mn}\hat{\nabla}_m\hat{\nabla}_n\hat{\gamma}_{\mu\nu} + \hat{\gamma}_{m(\mu}\hat{\nabla}_{\nu)}\hat{\Delta}^m + \hat{\Delta}^m\hat{\Delta}_{(\mu\nu)m} + 2\hat{\Delta}^{mn}_{(\mu}\hat{\Delta}_{\nu)mn} + \hat{\Delta}_\mu\hat{\Delta}^{mn}_\mu\hat{\Delta}_{mn\nu} \quad (257)$$

é a expressão do **tensor de Ricci conforme em simetria esférica**. Agora devemos promover  $\hat{\Delta}^i$  à condição de variável independente como realizado na subseção anterior. De fato, se  $\hat{\gamma} \neq 1$ , então:

$$\hat{\Gamma}^i = \hat{\gamma}^{mn}\hat{\Gamma}_{mn}^i = -\partial_m\hat{\gamma}^{im} - \frac{1}{2}\hat{\gamma}^{im}\partial_m\ln\hat{\gamma}. \quad (258)$$

Calculando a derivada de Lie ao longo de  $\beta$ :

$$\mathcal{L}_\beta\hat{\Gamma}^i = \beta^m\partial_m\hat{\gamma}^i - \hat{\gamma}^m\partial_m\beta^i. \quad (259)$$

As equações que contém derivadas parciais de  $\beta$ , assim como os termos  $\hat{\Gamma}_{mn}^i$ , não são expressões explicitamente covariantes. Porém, isso pode ser mudado usando a métrica de fundo plana através da relação:

$$\hat{\gamma}^{mn}\hat{\nabla}_m\hat{\nabla}_n\hat{\beta}^i = \hat{\gamma}^{mn}\partial_m\partial_n\hat{\beta}^i + \hat{\gamma}^{mn}\mathcal{L}_\beta\hat{\Gamma}_{mn}^i. \quad (260)$$

De posse dos conceitos abordados anteriormente, podemos deduzir as equações de evolução do formalismo BSSN em simetria esférica (Alcubierre, 2008). Derivamos  $\chi$  em

relação ao tempo:

$$\partial_t \chi = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial_t \gamma}{\gamma} - \frac{\partial_t \hat{\gamma}}{\hat{\gamma}} \right) = \frac{1}{12} \left( -2\alpha K + \frac{\mathcal{L}_\beta \gamma}{\gamma} - \frac{\mathcal{L}_\beta \hat{\gamma}}{\hat{\gamma}} \right) \quad (261)$$

e introduzimos a simplificação  $\sigma = 1 - s$  que considera os seguintes casos:

- Evolução Lagrangiana:  $\sigma = 1$ .
- Evolução Euleriana:  $\sigma = 0$ .

Além disso, há uma questão importante a ser mencionada sobre o caráter tensorial de  $\chi$ . Devido a sua definição, a derivada de Lie de  $\chi$  ao longo de  $\beta$  é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\beta \chi &= \frac{1}{12} \left( \frac{\mathcal{L}_\beta \gamma}{\beta} - \frac{\mathcal{L}_\beta \hat{\gamma}}{\hat{\gamma}} \right) \\ &= \frac{1}{6} \left( \nabla_m \beta^m - \hat{\nabla}_m \hat{\beta}^m \right) \\ &= \frac{1}{12} \beta^m \partial_m \ln \left( \frac{\gamma}{\hat{\gamma}} \right), \end{aligned} \quad (262)$$

então:

$$\mathcal{L}_\beta \chi = \beta^m \partial_m \chi. \quad (263)$$

Ou seja, a derivada de Lie de  $\chi$  ao longo de  $\beta$  é a derivada de uma função escalar, não de uma densidade tensorial. O mesmo acontece com todas as grandezas dinâmicas das equações de evolução que mostraremos a seguir. De fato, a definição de  $\chi$  envolve a razão entre dois elementos de volume, logo,  $\chi$  é um tensor verdadeiro. Além disso, tanto  $\hat{\gamma}_{ij}$  quanto  $\hat{A}_{ij}$ , pela própria construção de  $\chi$ , são componentes de tensores verdadeiros. Daí:

$$\partial_t \chi - \mathcal{L}_\beta \chi = -\frac{1}{6} \alpha K + \frac{1}{6} (1 - s) \hat{\nabla}_m \beta^m = \frac{1}{6} \alpha K + \frac{1}{6} \sigma \hat{\nabla}_m \beta^m \quad (264)$$

leva à **equação de evolução do fator conforme** em simetria esférica:

$$\partial_t \chi = \beta \partial_r \chi + \frac{1}{6} \sigma \hat{\nabla}_m \beta^m - \frac{1}{6} \alpha K, \quad (265)$$

com

$$\hat{\nabla}_m \beta^m = \beta \partial_r \beta + \left( \frac{\partial_r a}{2a} + \frac{\partial_r b}{b} + \frac{2}{r} \right). \quad (266)$$

Para simplificar as demais equações de evolução, vamos usar as componentes mistas da curvatura extrínseca sem traço no lugar das componentes totalmente covariantes. Para

tal, definimos as quantidades:  $A_a := \hat{A}^r_r$  e  $A_b := \hat{A}^\theta_\theta$ . O fato de  $\hat{A}_{ij}$  ser sem traço implica em  $A_a + 2A_b = 0$ . Note que:  $\hat{A}^r_r = \hat{\gamma}^{rr}\hat{A}_{rr} = \gamma^{rr}A_{rr} = A^r_r$  e o mesmo se aplica à componente angular. Logo, as componentes mistas de  $\gamma$  e  $\hat{\gamma}$  são idênticas. Além disso, vamos simplificar a notação usando  $\hat{\Delta}^r = \hat{\Delta}$ .

Por outro lado, as **equações de evolução das funções métricas** em simetria esférica são, (Alcubierre, 2008):

$$\partial_t a = \beta \partial_r a + 2a \partial_r \beta - \frac{2}{3} \sigma a \hat{\nabla}_m \beta^m - 2\alpha a A_a \quad (267)$$

e

$$\partial_t b = \beta \partial_r b + 2\frac{b}{r} \beta - \frac{2}{3} \sigma b \hat{\nabla}^m \beta_m + \alpha b A_a. \quad (268)$$

Considerando as componentes mistas do tensor de stress, definimos as quantidades:  $S_a := S^r_r$  e  $S_b := S^\theta_\theta$ . Logo, a **equação de evolução do traço da curvatura extrínseca** em simetria esférica é, (Alcubierre, 2008):

$$\partial_t K = \beta \partial_r K - \nabla^2 \alpha + \frac{1}{3} \alpha K^2 + \frac{3}{2} \alpha A_a^2 + \frac{1}{2} \alpha (\rho + S), \quad (269)$$

com:

$$\nabla^2 \alpha = \frac{1}{ae^{4\chi}} \left[ \partial_r^2 \alpha - \partial_r \alpha \left( \frac{\partial_r a}{2a} - \frac{\partial_r b}{b} - 2\partial_r \chi - \frac{2}{r} \right) \right]. \quad (270)$$

Além disso, a **equação de evolução da curvatura extrínseca sem traço** em simetria esférica é, (Alcubierre, 2008):

$$\partial_t A_a = \beta \partial_r A_a - \left( \nabla^r \nabla_r \alpha - \frac{1}{3} \nabla^2 \alpha \right) + \alpha \left( R^r_r - \frac{1}{3} R \right) + \alpha K A_a - \frac{2}{3} \alpha (S_a - S_b), \quad (271)$$

com:

$$\nabla^r \nabla_r \alpha - \frac{1}{3} \nabla^2 \alpha = \frac{1}{3ae^{4\chi}} \left[ 2\partial_r^2 \alpha - \partial_r \alpha \left( \frac{\partial_r a}{a} + \frac{\partial_r b}{b} + 8\partial_r \chi + \frac{2}{r} \right) \right] \quad (272)$$

e

$$\begin{aligned} R^r_r - \frac{1}{3} R = & -\frac{1}{3ae^{4\chi}} \left[ 2a \partial_r \hat{\Delta} - \frac{\partial_r^2 a}{a} + \frac{5}{4} \left( \frac{\partial_r a}{a} \right)^2 - \left( \frac{\partial_r b}{b} \right)^2 \right. \\ & + \frac{3}{2} \hat{\Delta} \partial_r a - \frac{3}{br} \partial_r a + \frac{\partial_r^2 b}{b} + \frac{2}{br} \partial_r b \left( 3 - \frac{a}{b} \right) \\ & \left. - \frac{2}{r^2} \left( 1 - \frac{a}{b} \right) \left( 1 + \frac{3r}{b} \partial_r b \right) - 4\partial_r^2 \chi + 8(\partial_r \chi)^2 + 2\partial_r \chi \left( \frac{\partial_r a}{a} + \frac{\partial_r b}{b} + \frac{2}{r} \right) \right]. \end{aligned} \quad (273)$$

Note que precisamos apenas da equação de evolução de  $A_a$ , pois vimos que a condição sem traço implica em  $A_b = -A_a/2$ . Além disso, repare que na equação acima não há o termo  $\hat{\nabla}^m \beta_m$ , logo,  $\sigma$  não desempenha nenhum papel tal como nas equações de evolução de  $\chi$ ,  $a$  e  $b$ . Isso acontece porque, embora tais termos apareçam na equação de evolução de  $A_{rr}$ , eles se cancelam quando subimos o índice para encontrar a equação de evolução de  $A_a = A^r_r$ . De fato, a contribuição de  $\beta$  se reduz ao **termo advectivo puro**  $\beta \partial_r A_a$ . Esta é uma das razões pelas quais trabalhar com termos mistos é mais útil.

Por outro lado, partindo da relação:

$$\partial_t \hat{\Delta}^i = \partial_t \hat{\Gamma}^i - \hat{\Gamma}^i_{mn} \partial_t \hat{\gamma}^{mn} \quad (274)$$

e assumindo que  $\hat{\gamma}$  não evolui, obtemos:

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\Delta}^i &= \mathcal{L}_\beta \hat{\Delta}^i + \hat{\gamma}^{mn} \partial_m \partial_n \beta^i + \hat{\gamma}^{mn} \mathcal{L}_\beta \hat{\Gamma}^i_{mn} - 2 \hat{\nabla}_m (\alpha \hat{A}^{im}) + 2 \alpha \hat{A}^{mn} \hat{\Delta}^i_{mn} \\ &+ \frac{\sigma}{3} [\hat{\nabla}^i (\hat{\nabla}_n \beta^n) + 2 \hat{\Delta}^i \hat{\nabla}_n \beta^n], \end{aligned} \quad (275)$$

onde a derivada de Lie de  $\hat{\Delta}^i$  é a derivada de um tensor verdadeiro, não de uma densidade tensorial. Porém, observe que essas equações envolvem termos de derivadas parciais de  $\beta$  e de  $\hat{\Gamma}^i_{mn}$ , então não são expressões explicitamente covariantes. Substituindo a Eq. (274) na equação acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\Delta}^i - \mathcal{L}_\beta \hat{\Delta}^i &= \hat{\gamma}^{mn} \hat{\nabla}_m \hat{\nabla}_n \beta^i - 2 \hat{\nabla}_m (\alpha \hat{A}^{im}) + 2 \alpha \hat{A}^{mn} \hat{\Delta}^i_{mn} \\ &+ \frac{\sigma}{3} [\hat{\nabla}^i (\hat{\nabla}_n \beta^n) + 2 \hat{\Delta}^i \hat{\nabla}_n \beta^n] \end{aligned} \quad (276)$$

que é uma expressão covariante. Adicionando um múltiplo do vínculo de momento à equação anterior chegamos à relação:

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\Delta}^i - \mathcal{L}_\beta \hat{\Delta}^i &= \hat{\gamma}^{mn} \hat{\nabla}_m \hat{\nabla}_n \beta^i - 2 \hat{A}^{im} \partial_m \alpha - \alpha (2 - \xi) \hat{\nabla}_m \tilde{A}^{im} + 2 \alpha \hat{A}^{mn} \hat{\Delta}^i_{mn} \\ &+ \alpha \xi \left( 6 \tilde{A}^{ij} \partial_j \chi - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j K - 8 \pi \tilde{j}^i \right) + \frac{\sigma}{3} [\hat{\nabla}^i (\hat{\nabla}_n \beta^n) + 2 \hat{\Delta}^i \hat{\nabla}_n \beta^n], \end{aligned} \quad (277)$$

onde  $\xi$  é uma constante arbitrária tal que  $\xi > 1/2$  implica em um sistema de equações fortemente hiperbólico (Alcubierre, 2008). Para implementar os códigos numéricos deste trabalho escolhimos utilizar  $\xi = 2$  *ad hoc*. Portanto, a **equação de evolução da componente radial da conexão** em simetria é:

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\Delta} &= \beta \partial_r \hat{\Delta} - \hat{\Delta} \partial_r \beta + \frac{1}{a} \partial_r^2 \beta + \frac{2}{br} \partial_r \left( \partial_r \beta - \frac{1}{r} \beta \right) + \frac{2}{3} \hat{\Delta} \hat{\nabla}_m \beta^m \\ &+ \frac{1}{3a} \partial_r (\hat{\nabla}_m \beta^m) - \frac{2}{a} (A_a \partial_r \alpha + \alpha \partial_r A_a) + 2 \alpha A_a \left( \hat{\Delta} - \frac{3}{br} \right) \\ &\frac{\alpha \xi}{a} \left[ \partial_r A_a - \frac{2}{3} \partial_r A_a K + 6 A_a \partial_r \chi + \frac{3}{2} A_a \left( \frac{\partial_r b}{b} + \frac{2}{r} \right) - 8 \pi j_r \right], \end{aligned} \quad (278)$$

com:

$$\begin{aligned} \partial_r (\hat{\nabla}_m \beta^m) &= \partial_r^2 \beta + \partial_r \beta \left( \frac{\partial_r^2 a}{2a} + \frac{\partial_r b}{b} + \frac{2}{r} \right) \\ &+ \beta \left[ \frac{\partial_r^2 a}{2a} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial_r a}{2a} \right)^2 + \frac{\partial_r^2 b}{b} - \left( \frac{\partial_r b}{b} \right)^2 - \frac{2}{r^2} \right]. \end{aligned} \quad (279)$$

Tendo definido as **equações de evolução do formalismo BSSN em simetria esférica**, vamos reescrever as equações de vínculo. De fato, a **equação do vínculo Hamiltoniano** é:

$$H = R - \frac{3}{2} A_a^2 + \frac{2}{3} K - 16\pi\rho = 0, \quad (280)$$

sendo a expressão do escalar de Ricci físico  $R$ :

$$\begin{aligned} R &= -\frac{1}{ae^{4\chi}} \left\{ \frac{\partial^2 a}{2a} + \frac{\partial^2 b}{b} - a\partial_r \hat{\Delta} - \left( \frac{\partial_r a}{a} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial_r b}{b} \right)^2 + \frac{2}{br} \partial_r b \left( 3 - \frac{a}{b} \right) \right. \\ &\left. + \frac{4}{r^2} \left( 1 - \frac{a}{b} \right) + 8 \left[ \partial_r \chi + (\partial_r \chi)^2 \right] - 8\partial_r \chi \left( \frac{\partial_r a}{2a} - \frac{\partial_r b}{b} - \frac{2}{r} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (281)$$

Além disso, a **equação do vínculo de momento** é:

$$M = \partial_r A_a - \frac{2}{3} \partial_r K + 6A_a \partial_r \chi + \frac{3}{2} A_a \left( \frac{\partial_r b}{b} + \frac{2}{r} \right) - 8\pi j_r = 0. \quad (282)$$

Vimos até aqui como a decomposição 3 + 1 das equações de Einstein pode ser dividida em dois conjuntos distintos: equações de vínculo, (280), (282), e equações de evolução, (265), (267), (268), (269), (271), (278). As equações de vínculo não contêm derivadas temporais e relacionam as quantidades de campo em uma dada hipersuperfície espacial com  $t = cte$ . Já as equações de evolução contêm derivadas temporais de segunda ordem e nos dizem como as quantidades de campo mudam de uma hipersuperfície para a seguinte.

Quadro 3 - Principais conceitos e resultados sobre o formalismo BSSN em coordenadas esféricas obtidos nesta subseção

---

Equações do formalismo BSSN em coordenadas esféricas

---

Componentes da métrica conforme

$$\hat{\gamma}_{ij} = e^{-4\chi} \gamma_{ij} \quad (283)$$

Fator conforme

$$\chi = \frac{1}{12} \ln \left( \frac{\hat{\gamma}}{\gamma} \right) \quad (284)$$

$\hat{\gamma}$  é o determinante da métrica de fundo plana e vale  $r^4 \sin^2 \theta$

Elemento de linha geral

$$dl^2 = -(\alpha^2 - \beta_r \beta^r) dt^2 + 2\beta_r dr dt + e^{4\chi} [a(t, r) dr^2 + r^2 b(t, r) d\Omega^2] \quad (285)$$

Componente radial da conexão

$$\hat{\Delta}^i = \hat{\gamma}^{mn} \hat{\Delta}_{mn} = \hat{\Gamma}^i - \hat{\gamma}^{mn} \hat{\Gamma}_{mn}^i \quad (286)$$

Equações de evolução

**Evolução do fator conforme:**

$$\partial_t \chi = \beta \partial_r \chi + \frac{1}{6} \sigma \hat{\nabla}_m \beta^m - \frac{1}{6} \alpha K$$

**Evolução das funções métricas:**

$$\partial_t a = \beta \partial_r a + 2a \partial_r \beta - \frac{2}{3} \sigma a \hat{\nabla}_m \beta^m - 2\alpha a A_a$$

$$\partial_t b = \beta \partial_r b + 2\frac{b}{r} \beta - \frac{2}{3} \sigma b \hat{\nabla}^m \beta_m + \alpha b A_a$$

**Evolução do traço da curvatura extrínseca:**

$$\partial_t K = \beta \partial_r K - \nabla^2 \alpha + \frac{1}{3} \alpha K^2 + \frac{3}{2} \alpha A_a^2 + \frac{1}{2} \alpha (\rho + S) \quad (287)$$

**Evolução da curvatura extrínseca sem traço:**

$$\begin{aligned} \partial_t A_a &= \beta \partial_r A_a - \left( \nabla^r \nabla_r \alpha - \frac{1}{3} \nabla^2 \alpha \right) + \alpha \left( R^r_r - \frac{1}{3} R \right) \\ &+ \alpha K A_a - \frac{2}{3} \alpha (S_a - S_b) \end{aligned}$$

**Evolução da componente radial da conexão:**

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\Delta} &= \beta \partial_r \hat{\Delta} - \hat{\Delta} \partial_r \beta + \frac{1}{a} \partial_r^2 \beta + \frac{2}{br} \partial_r \left( \partial_r \beta - \frac{1}{r} \beta \right) + \frac{2}{3} \hat{\Delta} \hat{\nabla}_m \beta^m \\ &+ \frac{1}{3a} \partial_r \left( \hat{\nabla}_m \beta^m \right) - \frac{2}{a} (A_a \partial_r \alpha + \alpha \partial_r A_a) + 2\alpha A_a \left( \hat{\Delta} - \frac{3}{br} \right) \\ &\frac{\alpha \xi}{a} \left[ \partial_r A_a - \frac{2}{3} \partial_r A_a K + 6A_a \partial_r \chi + \frac{3}{2} A_a \left( \frac{\partial_r b}{b} + \frac{2}{r} \right) - 8\pi j_r \right] \end{aligned}$$

(continua)

Quadro 3 - Principais conceitos e resultados sobre o formalismo BSSN em coordenadas esféricas obtidos nesta subseção (conclusão)

### Equações de vínculo

**Vínculo Hamiltoniano:**

$$H = R - \frac{3}{2}A_a^2 + \frac{2}{3}K - 16\pi\rho = 0 \tag{288}$$

**Vínculo de momento:**

$$M = \partial_r A_a - \frac{2}{3}\partial_r K + 6A_a\partial_r\chi + \frac{3}{2}A_a\left(\frac{\partial_r b}{b} + \frac{2}{r}\right) - 8\pi j_r = 0$$

---

Fonte: A autora, 2024.

Observe que agora temos um sistema de 6 equações, Eq. (287), cujas variáveis são tensores verdadeiros que, ao longo de toda sua evolução, estão restritas aos vínculos Hamiltoniano e de momento, Eq. (288). As equações de evolução para  $\alpha$  e  $\beta$  são determinadas segundo as condições de calibre discutidas nas Subseções (1.4.1) e (1.4.2).

### 3 CAMPO ESCALAR EM SIMETRIA ESFÉRICA

Neste capítulo exibimos as equações básicas da evolução de um campo escalar em simetria esférica. Resolvemos numericamente o sistema de equações BSSN em simetria esférica que descrevem a evolução do campo escalar. No final do capítulo apresentamos os principais resultados e medidas de erros.

#### 3.1 Equações básicas

Espaços-tempos esfericamente simétricos são interessantes por várias razões. Além de serem relativamente simples de integrar numericamente, são importantes laboratórios computacionais com aplicações astrofísicas interessantes. Em particular, estrelas e BNs, com uma boa aproximação, são esfericamente simétricos. Além disso, a simetria esférica nos permite investigar colapso gravitacional, estabilidade de estrelas, dinâmica dos horizontes e outros problemas da RG. Nesse sentido, os campos escalares são extremamente úteis na implementação de testes em RN, por exemplo, no regime de campos gravitacionais fortes. A facilidade de implementação de técnicas numéricas avançadas com campos escalares levou, por exemplo, à descoberta de fenômenos críticos no colapso gravitacional (Choptuik, 1993).

Do ponto de vista da RG qualquer coisa que não seja o próprio campo gravitacional é visto como “matéria”. Os campos escalares são matéria não gravitacional. Vamos considerar um campo escalar em um espaço-tempo esfericamente simétrico. Para os experimentos numéricos implementados neste capítulo calculamos os termos fonte de matéria  $\rho$ ,  $j_i$ ,  $S_{ij}$  e  $S$  que aparecem nas equações BSSN em coordenadas esféricas (287), (288).

Para deduzir as equações de evolução do campo escalar vamos mostrar que este evolui segundo a equação de Klein-Gordon. A ideia é transformar esta equação em um conjunto de equações hiperbólicas simétricas e simples de serem resolvidas numericamente. De fato, o tensor de momento-energia para o campo escalar com um potencial de auto-interação arbitrário  $V(\Phi)$  é:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2} (\partial\Phi)^2 + V(\Phi) \right], \quad (289)$$

sendo

$$\begin{aligned}
(\partial\Phi)^2 &= g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi \\
&= g^{00} (\partial_t \Phi)^2 + 2g^{01} \partial_t \Phi \partial_r \Phi + g^{11} (\partial_r \Phi)^2 \\
&= -\frac{1}{\alpha^2} (\partial_t \Phi)^2 + 2\frac{\beta}{\alpha^2} \partial_t \Phi \partial_r \Phi + \frac{\alpha^2 - a(\beta)^2 e^{4\chi}}{a\alpha^2 (\beta)^2 e^{4\chi}} (\partial_r \Phi)^2.
\end{aligned} \tag{290}$$

Se definirmos  $\Pi \equiv (\partial_t \Phi - \beta \partial_r \Phi) / \alpha$  obtemos a **equação de evolução do campo escalar**  $\Phi$ :

$$\partial_t \Phi = \alpha \Pi + \beta \partial_r \Phi. \tag{291}$$

Após algumas manipulações algébricas:

$$(\partial\Phi)^2 = \frac{1}{ae^{4\chi}} (\partial_r \Phi)^2 - \Pi^2. \tag{292}$$

Como introduzimos uma nova variável independente,  $\Pi$ , vamos deduzir sua equação de evolução. Partindo da lei de conservação  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , mostramos que o campo escalar deve evoluir segundo a equação de Klein-Gordon:

$$\square\phi = \partial_\Phi V \Rightarrow \partial_\mu \left[ (-g)^{1/2} \partial^\mu \Phi \right] = (-g)^{1/2} \partial_\Phi V(\Phi), \tag{293}$$

sendo  $V(\Phi)$  o potencial de auto-interação arbitrário e  $g = \det(g_{\mu\nu})$  dado pela Eq. (94). Portanto, das equações (292) e (293) deduzimos a **equação de evolução da função auxiliar**  $\Pi$ :

$$\begin{aligned}
\partial_t \Pi &= \beta \partial_r \Pi + \alpha K \Pi + \frac{1}{ae^{4\chi}} \left( \alpha \partial_r^2 \Phi + \partial_r \alpha \partial_r \Phi \right) - \alpha \frac{dV(\Phi)}{d\Phi} \Pi^2 \\
&+ \frac{\alpha}{ae^{4\chi}} \partial_r \Phi \left( \frac{\partial_r b}{b} - \frac{\partial_r a}{2a} + 2\partial\chi \frac{2}{r} \right).
\end{aligned} \tag{294}$$

As equações (291) e (294) juntamente com as equações (287) oferecem uma maneira de explorar o comportamento da matéria com um esforço computacional modesto, dado que obtivemos equações de movimento que dependem apenas das coordenadas radial e temporal. Por outro lado, das componentes do tensor de momento-energia obtemos a **densidade de energia**  $\rho$ , Eq. (102):

$$\rho = \frac{1}{2} \Pi^2 + \frac{1}{2ae^{4\chi}} (\partial_r \Phi)^2 + V(\Phi). \tag{295}$$

Como se trata do caso esférico, para a **densidade de momento**  $j_i$ , Eq. (102), temos

que:

$$j_r = -\Pi \partial_r \Phi \quad (296)$$

e  $j_\theta = j_\phi = 0$ .

Das componentes do tensor de stress, Eq. (102), obtemos:

$$S_a - S_b = \frac{1}{ae^{4\chi}} (\partial_r \Phi)^2 \quad (297)$$

e

$$\rho + S = 2\Pi^2 - 2V(\Phi). \quad (298)$$

Completamos assim o sistema de equações BSSN em coordenadas esféricas que descreve a evolução de um campo escalar auto-gravitante, equações (287), (291) e (294). As funções de campo desenvolvidas nesse formalismo são:  $K$ ,  $\chi$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $A_a$ ,  $\hat{\Delta}$ , as funções dinâmicas do campo escalar são:  $\Phi$ ,  $\Pi$  e as funções de evolução livre são:  $\alpha$  e  $\beta$ . O conjunto de equações destas 10 funções devem satisfazer os vínculos Hamiltoniano e de momento, Eq. (288), em cada hipersuperfície  $\Sigma_t$ .

### 3.2 Colapso gravitacional

O colapso gravitacional é a “contração” da matéria-energia devido a sua própria gravidade que tende a atrair a matéria-energia para o centro de colapso do sistema (Choptuik, 1993). Entender este mecanismo é fundamental para descrever a formação de estruturas no universo. Por exemplo, uma dada distribuição inicial de matéria-energia pode evoluir para o colapso e formar estrelas ou BNs (Misner; Thorne; Wheeler, 1973). Outra importante contribuição do estudo de colapso gravitacional envolve a investigação da singularidade formada em um BN. É conhecido que após o objeto astrofísico atingir a densidade máxima possível para um determinado volume no espaço-tempo, sabe-se que nesse estágio o colapso gravitacional cessa e, portanto, não há formação de singularidade (Alcubierre, 2008). Por outro lado, outra iniciativa no estudo da estrutura do espaço-tempo e singularidades veio da conjectura do “*loop quantum gravity*”. Esta é uma abordagem candidata à teoria da gravitação quântica que sugere que o espaço-tempo, em escalas extremamente pequenas, é constituído por estruturas finitas e quantizadas, o que impede a ocorrência de singularidades (Rovelli, 2008).

Em 1993, Choptuik descobriu que no limiar da formação de um BN as soluções de colapso gravitacional exibem um **comportamento crítico** (Choptuik, 1993). Certos conjuntos de dados iniciais de um campo escalar auto-gravitante levam à formação de

um BN ou à dispersão do campo. Análogo ao comportamento crítico das transições de fase em mecânica estatística, o colapso gravitacional descreve **fenômenos críticos** que, no limiar dessas soluções, exibem parâmetros de universalidade, escalabilidade e auto-similaridade. A existência de fenômenos críticos fornece intuições importantes sobre as hipóteses de censura cósmica, ou seja, sobre a própria estrutura de singularidades gravitacionais (Alcubierre, 2008).

A análise original de Choptuik abrangeu a implosão de um campo escalar sem massa em simetria esférica. O comportamento crítico desse sistema se dá pela competição entre a energia cinética do campo, que tende a dispersá-lo até o infinito, e a energia potencial gravitacional que, se suficientemente forte, pode aprisionar parte da matéria-energia em um BN. Para qualquer família de dados iniciais, a competição dinâmica poderia ser controlada ajustando algum parâmetro  $p$  nas condições iniciais, por exemplo, a intensidade inicial do campo escalar. Se  $p$  é menor que algum valor crítico (limiar)  $p^*$ , o campo escalar se dispersa completamente; se  $p > p^*$ , então há formação de BN.

Uma possível aplicação deste trabalho, dentro do que são fenômenos críticos em astrofísica, é extrair informações físicas da formação de um BN. Nesse sentido, existem dois tipos de horizontes associados a BNs. Um **horizonte de eventos** é definido globalmente como uma **fronteira** entre geodésicas nulas. Nessa fronteira, certas geodésicas **escapam** para o infinito e outras **caem** de volta ao BN e atingem a singularidade. Um horizonte de eventos é globalmente definido para o espaço-tempo como um todo e não depende da escolha de uma hipersuperfície espacial específica. Por outro lado, um **horizonte aparente** é definido localmente em uma hipersuperfície espacial como uma superfície marginalmente aprisionada e mais externa que separa as regiões de espaço. Na região dessa superfície os feixes de luz emitidos perpendicularmente a ela são dirigidos para dentro. Em outras palavras, é uma superfície 2-dimensional fechada  $S$  tal que as geodésicas nulas que saem ortogonalmente de  $S$  têm **expansão nula** em toda parte. Isso significa que qualquer raio de luz que emana de  $S$  não se expande ou contrai, indicando assim que está em um estado crítico.

Um horizonte aparente é uma noção local e pode mudar conforme a escolha da hipersuperfície espacial. Ele é definido em termos da expansão dos feixes de luz e depende apenas da geometria da hipersuperfície espacial em um dado instante. Uma propriedade interessante dos horizontes aparentes é que, se a conjectura da censura cósmica é mantida e a condição de energia nula é satisfeita, então um horizonte aparente implica na existência de um horizonte de eventos (Alcubierre, 2008). No caso estacionário, o horizonte aparente coincide com o horizonte de eventos. Durante a evolução de cada hipersuperfície espacial é possível localizar horizontes aparentes. Assim, estes são fortes indicadores da presença de um BN. Os horizontes aparentes são cruciais na RN e na simulação de colapsos gravitacionais pois ajudam a identificar não só a formação de BNs, mas também a estrutura do espaço-tempo em regiões altamente curvadas.

### 3.3 Métodos espectrais

Como vimos em capítulos anteriores, as equações de Einstein no formalismo BSSN em simetria esférica são um conjunto acoplado de EDPs não lineares. As equações dinâmicas do campo escalar são do mesmo tipo. A obtenção das soluções dessas equações que representam o colapso gravitacional é impraticável analiticamente. Nesse aspecto, vamos apresentar um método numérico com o qual resolvemos essas equações com relativa simplicidade.

Os dois tipos de métodos numéricos mais usados em RN são: o **método das diferenças finitas** e os **métodos espectrais**. Quase todos os problemas em RN foram resolvidos inicialmente utilizando o método das diferenças finitas (Porsching, 1980). Este método ainda é bastante popular, no entanto, nas últimas décadas surgiram vários trabalhos aplicando métodos espectrais.

A escolha entre o método das diferenças finitas e os métodos espectrais depende do problema em específico, das características da solução esperada e dos recursos computacionais disponíveis. Ambos métodos podem ser aplicados com sucesso em diferentes contextos. Entretanto, os métodos espectrais apresentam interessantes características para o problema abordado neste trabalho:

- São métodos globais, definidos em toda a malha de integração numérica. Já o método das diferenças finitas é um método local e para uma melhor resolução exige um grande número de pontos na malha numérica.
- Alcançam alta precisão na expansão das funções de campo, especialmente em domínios onde as soluções são suaves.
- Convergem rapidamente para a solução atingindo a precisão desejada com um número relativamente baixo de pontos na malha numérica.
- Têm uma gama de funções especiais que expandem de maneira eficiente as funções não lineares de problemas complexos, sem a necessidade de reformulação das equações e introdução de novas variáveis.
- Uma escolha conveniente de funções de base espectrais leva a um tratamento natural das condições de contorno sem a necessidade de implementar condições de regularização nas funções de campo.
- Certos métodos espectrais permitem uma malha numérica eficiente e adaptada às características do problema. Dado que o espaçamento dos pontos na malha numérica é não uniforme, é possível capturar melhor importantes características das soluções na região de interesse.

Em linhas gerais, vamos apresentar a seguir ideias cruciais no que tange aos métodos espectrais.

Dada uma função qualquer ou uma solução  $u(t, x)$  que satisfaz uma dada equação diferencial, os chamados métodos espectrais servem para aproximar  $u(t, x)$  por uma série truncada do tipo:

$$u(t, x) \cong u_N(t, x) = \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k(t) \phi_k(x). \quad (299)$$

onde  $N$  é a ordem de truncagem,  $\tilde{u}_k(t)$  são os modos espectrais e  $\phi_k(x)$  são as funções de base. Uma das características dos métodos espectrais é a escolha de funções de base que são diferentes de zero em todo o domínio do problema. No método das diferenças finitas as funções de base são polinômios locais, diferentes de zero apenas em uma pequena região do domínio. Nos métodos espectrais as funções de base constituem um conjunto completo de bases no espaço de Hilbert, podendo ser polinômios de Legendre, polinômios de Chebyshev, funções de Fourier, entre outras (Boyd, 2001).

Considere uma equação diferencial e/ou integral definida no intervalo  $a \leq x \leq b$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L} \left( u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots \right), \quad (300)$$

onde  $\mathcal{L}$  é um operador não-linear formado pelas derivadas espaciais e/ou integrais da função  $u(t, x)$ . Uma solução aproximada  $u_N(t, x)$  dessa equação é dada pela Eq. (299), onde as funções  $\phi_k(x)$  são as funções de base já estabelecidas, enquanto que os modos espectrais  $\tilde{u}_k(t)$  são as variáveis a serem determinadas. A seguir descrevemos como obter a aproximação  $u_N(t, x)$  determinando os modos espectrais  $\tilde{u}_k(t)$ .

Substituindo a Eq. (299) na equação diferencial (300) obtemos a equação residual:

$$\text{Res}_N(\tilde{u}_k(t), x) = \sum_{k=0}^N \frac{d\tilde{u}_k(t)}{dt} \phi_k(x) - \mathcal{L} \left( u_N, \frac{\partial u_N}{\partial x}, \dots \right). \quad (301)$$

O resíduo  $\text{Res}_N(\tilde{u}_k(t), x)$  é não nulo devido à aproximação  $u_N(t, x)$ . De fato, queremos encontrar um conjunto de modos espectrais  $\tilde{u}_k(t)$  associados à expansão aproximada de  $u(t, x)$  tal que o resíduo seja o suficientemente pequeno. O **método dos resíduos ponderados** estabelece um critério para a determinação desses modos espectrais (Boyd, 2001), (Canuto *et al.*, 2007). Tal critério é dado por:

$$\langle \text{Res}_N(\tilde{u}_k(t), x), \chi_j(x) \rangle = \int_{\Omega} \text{Res}_N(\tilde{u}_k(t), x) \chi_j(x) \omega(x) dx = 0, \forall j = 0, 1, \dots, N, \quad (302)$$

onde  $\chi_j(x)$  são as **funções de teste** e  $\omega(x)$  é a **função peso** associada a estas. Portanto,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_N}{\partial t} \chi_j(x) \omega(x) dx = \int_{\Omega} \sum_{k=0}^N \frac{d\tilde{u}_k(t)}{dt} \phi_k(x) \chi_j(x) \omega(x) dx \quad (303)$$

indica a maneira em que podemos determinar os modos espectrais estabelecendo condições sobre as funções de base e de teste.

Os métodos espectrais são um caso especial dentro da multivariabilidade dos métodos dos resíduos ponderados e são classificados segundo a escolha das funções de teste e das funções de base. À continuação, apresentamos os métodos espectrais implementados neste trabalho: Galerkin e Colocação (pseudo-espectral).

### 3.3.1 Método Galerkin

A forma como o resíduo da Eq. (302) é avaliado define diferentes métodos espectrais. Por exemplo, o **método Galerkin** consiste em projetar o resíduo nas funções de base  $\phi_k(x)$  efetuando uma integral de sobreposição dessa equação. Além disso, cada uma das funções de base são escolhidas para **satisfazer as condições de contorno**. De modo que este método espectral é sensível às condições de contorno do problema.

No método Galerkin as funções de teste  $\chi_k(x)$  são idênticas às funções de base  $\phi_k(x)$ :  $\chi_k(x) = \phi_k(x)$ , com  $k = 0, 1, \dots, N$ . Por tanto, o critério de determinação dos resíduos é:

$$\langle \text{Res}_N(\tilde{u}_k(t), x), \phi_k(x) \rangle = \int_{\Omega} \text{Res}_N(\tilde{u}_k(t), x) \phi_k(x) \omega(x) dx = 0, \forall k = 0, 1, \dots, N. \quad (304)$$

Por outro lado, se as funções de base são ortogonais, então pela Eq.(303):

$$\int_{\Omega} \sum_{k=0}^N \frac{d\tilde{u}_k(t)}{dt} \phi_k(x) \phi_j(x) \omega(x) dx = \sum_{k=0}^N \frac{d\tilde{u}_k(t)}{dt} \langle \phi_k(x), \phi_j(x) \rangle = \sum_{k=0}^N \frac{d\tilde{u}_k(t)}{dt} \delta_{kj} = \frac{d\tilde{u}_k(t)}{dt}. \quad (305)$$

Da Eq. (301) temos:

$$\frac{d\tilde{u}_k(t)}{dt} = \left\langle \mathcal{L} \left( u_N, \frac{\partial u_N}{\partial x}, \dots \right), \phi_k(x) \right\rangle = \int_{\Omega} \mathcal{L} \left( u_N, \frac{\partial u_N}{\partial x}, \dots \right) \phi_k(x) \omega(x) dx, \quad (306)$$

com  $k = 0, 1, \dots, N$ . Após a integração o lado esquerdo é expresso em função dos modos espectrais  $\tilde{u}_k(t)$ . Portanto, no método Galekin, para resolver uma dada EPD utilizamos um sistema de  $N + 1$  EDOs para os  $N + 1$  modos espectrais  $\tilde{u}_k(t)$  associados a estas equações.

Note que se  $N \rightarrow \infty$ , então  $\text{Res}_N(\tilde{u}_k(t), x)$  é ortogonal às funções de base  $\phi_k(x)$

e na média converge para zero. Na resolução numérica das equações é esperado que quanto maior a truncagem menor o resíduo, ou seja, menor o erro associado à solução aproximada  $u_N(t, x)$ . Nesse sentido, se na média  $\text{Res}_N(\tilde{u}_k(t), x)$  converge para zero e se  $u_N(t, x)$  satisfaz as condições de contorno, então a solução aproximada converge para a solução exata  $u(t, x)$  (Boyd, 2001). É bastante conhecido na literatura que o método Galerkin tem se mostrado muito eficiente e preciso pois apresenta convergência rápida mesmo para truncagens baixas (Boyd, 2001).

### 3.3.2 Método de Colocação

O **método de Colocação** é um método pseudo-espectral onde as funções de teste  $\chi_j(x)$  são deltas de Dirac:

$$\chi_j(x) = \delta(x - x_j) \quad (307)$$

sendo  $x_j$  os chamados **pontos de colocação**, para  $j = 0, 1, \dots, N$ , e a função peso  $\omega(x) = 1$ . Se as funções de teste são definidas pelas deltas de Dirac em cada ponto de colocação, então a determinação de cada ponto de colocação está relacionado à escolha das funções de base  $\phi_j(x)$ . Daí, o critério para determinação dos resíduos é:

$$\langle \text{Res}_N(\tilde{u}_j(t), x_j), \chi_j(x) \rangle = \int_{\Omega} \text{Res}_N(\tilde{u}_j(t), x_j) \delta(x - x_j) dx = 0, \forall j = 0, 1, \dots, N. \quad (308)$$

Por tanto,  $\text{Res}_N(\tilde{u}_j(t), x_j) = 0$  exatamente nos pontos de colocação. Se o resíduo é aplicado nos pontos de colocação, então:

$$u(t, x_j) = u_N(t, x_j) = \sum_{j=0}^N \tilde{u}_j(t) \phi_j(x_j). \quad (309)$$

De modo que a solução aproximada  $u_N(t, x_j)$  é igual à solução exata  $u(t, x_j)$  nos pontos de colocação  $x_j$ .

Além disso, a Eq. (309) representa a relação entre os modos espectrais  $\tilde{u}_j(t)$  e os valores da solução exata  $u(t, x_j)$  nos pontos de colocação. Nesse sentido, os modos espectrais da Eq. (308) devolvem uma equação dinâmica. Daí, podemos expressar uma função desconhecida usando os modos espectrais ou os valores dessa função nos pontos de colocação. Portanto, a Eq. (300) pode ser reduzida a um conjunto de EDOs segundo:

$$\frac{\partial u_N(t, x_j)}{\partial t} - \mathcal{L} \left( u_N(t, x_j), \frac{\partial u_N(t, x_j)}{\partial x}, \dots \right) = 0. \quad (310)$$

### 3.3.3 Método numérico: Galerkin-Colocação

Neste trabalho implementamos o método Galerkin-Colocação inspirado nos artigos (Heinrichs, 1989), (Heinrichs, 1991) e que tem sido bastante eficiente na implementação de códigos numéricos para resolução das equações BSSN (Alcoforado *et al.*, 2021). Este método consiste em escolher um conjunto adequado de funções de base para expandir as funções de campo de modo a satisfazer automaticamente as condições de contorno do problema, principal característica do método Galerkin. Por outro lado, escolhemos como funções de teste as deltas de Dirac que são calculadas nos pontos de colocação, de modo que o resíduo é anulado nestes pontos (método de Colocação). Optamos por implementar o método Galerkin-Colocação escolhendo como funções de base combinações lineares de polinômios derivados dos **polinômios de Chebyshev** (Boyd, 2001). Os polinômios de Chebyshev são um dos conjuntos de funções de base mais adequados para a maioria dos problemas em RN e estão definidos no intervalo  $[-1, 1]$ .

## 3.4 Implementação do código numérico

Todos os códigos numéricos implementados neste trabalho foram baseados no método Galerkin-Colocação. A seguir apresentamos uma descrição das etapas de implementação, das medidas de erro e dos experimentos numéricos realizados.

### 3.4.1 Condições de contorno

Como estamos explorando um problema em simetria esférica as funções de campo devem ter uma paridade definida em relação à expansão em  $r$  perto da origem. Uma rápida inspeção nas equações de campo nos mostra que  $\alpha$ ,  $K$ ,  $\chi$ ,  $\Phi$ ,  $\Pi$ ,  $a$ ,  $b$  e  $A_a$  têm paridade par e  $\hat{\Delta}$  e  $\beta$  paridade ímpar. Assim, para garantir a regularidade das funções de campo perto da origem, a paridade destas funções deve ser tal que:

$$\alpha(t, r) = 1 + \mathcal{O}(r^2), \quad (311)$$

$$K(t, r) = K_0(t) + \mathcal{O}(r^2), \quad (312)$$

$$\chi(t, r) = \chi_0(t) + \mathcal{O}(r^2), \quad (313)$$

$$\Phi(t, r) = \Phi_0(t) + \mathcal{O}(r^2), \quad (314)$$

$$\Pi(t, r) = \Pi_0(t) + \mathcal{O}(r^2), \quad (315)$$

$$\hat{\Delta}(t, r) = \mathcal{O}(r), \quad (316)$$

$$\beta(t, r) = \mathcal{O}(r), \quad (317)$$

$$a(t, r) = 1 + \mathcal{O}(r^2), \quad (318)$$

$$b(t, r) = 1 + \mathcal{O}(r^2) \quad (319)$$

e

$$A_a(t, r) = \mathcal{O}(r^2). \quad (320)$$

Além disso, as funções de campo devem satisfazer as seguintes condições de contorno no infinito:

$$\alpha(t, \infty) = a(t, \infty) = b(t, \infty) = 1 \quad (321)$$

e

$$K(t, \infty) = \chi(t, \infty) = \Phi(t, \infty) = \Pi(t, \infty) = A_a(t, \infty) = \hat{\Delta}(t, \infty) = \beta(t, \infty) = 0, \quad (322)$$

de modo que no limite assintótico o espaço-tempo reduz-se ao espaço-tempo de Minkowski.

Segundo (Boyd, 2013) existe apenas uma classe de funções de base derivadas dos polinômios de Chebyshev que tem paridade explícita na expansão em  $r$  perto da origem e que converge para os limites assintóticos descritos anteriormente. Essas funções de base são os senos pares e ímpares,  $SB_{2k}(r)$  e  $SB_{2k+1}(r)$ , respectivamente (Boyd, 2001). Assim,

as funções de base que usamos para expandir as funções de campo são os polinômios:

$$SB_k(r) = \sin \left[ (k+1) \operatorname{arccot} \left( \frac{r}{L_0} \right) \right], \quad (323)$$

sendo  $k$  a ordem do polinômio e  $L_0$  o parâmetro de mapa do domínio físico para o domínio computacional. Portanto, as expansões espectrais para cada uma das funções de campo são:

$$\alpha_N(t, r) = 1 + \sum_{k=0}^N \tilde{\alpha}_k(t) SB_{2k}(r), \quad (324)$$

$$K_N(t, r) = \sum_{k=0}^N \tilde{K}_k(t) SB_{2k}(r), \quad (325)$$

$$\chi_N(t, r) = \sum_{k=0}^N \tilde{\chi}_k(t) SB_{2k}(r), \quad (326)$$

$$\Phi_N(t, r) = \sum_{k=0}^N \tilde{\Phi}_k(t) SB_{2k}(r), \quad (327)$$

$$\Pi_N(t, r) = \sum_{k=0}^N \tilde{\Pi}_k(t) SB_{2k}(r), \quad (328)$$

$$\hat{\Delta}_N(t, r) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\Delta}_k(t) SB_{2k+1}(r), \quad (329)$$

$$\beta_N(t, r) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\beta}_k(t) SB_{2k+1}(r), \quad (330)$$

$$a_N(t, r) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{a}_k(t) [SB_{2k+2}(r) - SB_{2k}(r)], \quad (331)$$

$$b_N(t, r) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{b}_k(t) [SB_{2k+2}(r) - SB_{2k}(r)] \quad (332)$$

e

$$A_{aN}(t, r) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{A}_{ak}(t) [SB_{2k+2}(r) - SB_{2k}(r)] . \quad (333)$$

A expansão espectral  $\alpha_N(t, r)$ , Eq. (324), está de acordo com a paridade de  $\alpha(t, r)$  perto da origem, Eq. (311), e no infinito  $\alpha_N \rightarrow 1$ . Por outro lado, as equações (325 - 328) são expansões de polinômios pares e tendem a zero no infinito, de acordo com as equações (312 - 315). As equações (329 - 330) são expansões de polinômios ímpares e tendem a zero no infinito, como imposto pelas equações (316 - 317). Das equações (318 - 320), note que as funções de base para expandir  $a(t, r)$ ,  $b(t, r)$  e  $A_a(t, r)$ , equações (331 - 333), são uma combinação linear de polinômios que se comportam com  $\mathcal{O}(r^2)$  perto da origem. Esta combinação linear é uma escolha conveniente pois conseguimos regularizar os termos das equações de campo que estão divididos por  $r^2$ . Além disso, no infinito a expansão espectral  $a_N(t, r) \rightarrow 1$ ,  $b_N(t, r) \rightarrow 1$  e  $A_{aN}(t, r) \rightarrow 0$ , o que está de acordo com as condições (321) e (322).

Observe que os polinômios  $SB_k(r)$  estão definidos no intervalo  $r \in (-\infty, \infty)$ , pois são derivados dos polinômios de Chebyshev padrão  $TB_k(x)$  que estão definidos no domínio computacional  $x \in [-1, 1]$  (Boyd, 2001). Mas note que ao utilizarmos uma transformação que mapeia o domínio infinito para o domínio finito devemos considerar apenas o domínio do problema,  $r \in (0, \infty)$ . Como a expansão das funções de campo é calculada nos pontos de colocação, o mapeamento do domínio físico para o domínio computacional deve ser, Fig. (9):

$$r_j = \frac{L_0 x_j}{\sqrt{1 - x_j^2}} . \quad (334)$$

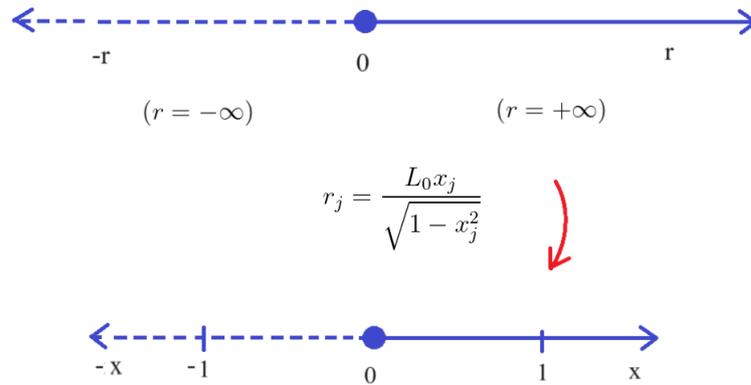
Portanto,

$$x_j = \cos \left( \frac{\pi j}{2N + 2} \right) , \quad (335)$$

são os pontos de Chebyshev-Gauss-Lobatto escolhidos, com  $j = 0, 1, \dots, 2N + 2$  (Fornberg, 1996), de onde apenas utilizamos  $N + 1$  pontos de colocação. Além disso, o parâmetro de mapa  $L_0$  deve ser escolhido adequadamente para termos uma disposição conveniente dos pontos de colocação no domínio computacional. Isto é necessário porque neste caso os pontos de colocação não estão uniformemente espaçados na malha numérica.

Os modos espectrais das equações (324 - 333) são as variáveis a serem determinadas

Figura 9 - Mapeamento algébrico dos pontos de colocação do domínio físico para o domínio computacional



Legenda: Os pontos de colocação do domínio físico compreendem o intervalo  $r \in (0, \infty)$  e são mapeados algebricamente para o domínio computacional,  $x \in (0, 1)$ .

Fonte: A autora, 2024.

e as funções de campo são determinadas nos  $N + 1$  pontos de colocação  $r_j$ . Daí, as funções de campo podem ser representadas tanto por seus valores  $f_j(t, r_j)$  no espaço físico quanto pelos modos espectrais  $\tilde{f}_j(t)$  associados a estas. No código espectral, cada valor  $f_j(t, r_j)$  está conectado ao modo  $\tilde{f}_j(t)$  por meio de uma equação matricial. Para exemplificar, considere a expansão espectral de  $\alpha$ , Eq. (324), a qual escrevemos na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{A}\mathbb{L} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_0 \\ \tilde{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_N \end{pmatrix}, \quad (336)$$

sendo  $\mathbb{A}\mathbb{L}$  uma matriz  $(N+1) \times (N+1)$  cujas entradas são os polinômios  $\mathbb{A}\mathbb{L}_{jk} = SB_{2k}(r_j)$ , com  $j = 1, 2, \dots, N + 1$  e  $k = 0, 1, \dots, N$ . Logo,  $\alpha$  pode ser representada tanto por seus valores no espaço físico,  $\alpha_j(t, r_j)$ , quanto pelos modos espectrais  $\tilde{\alpha}_k(t)$ .

Considere agora a equação residual associada à equação de evolução de  $\alpha$  no calibre harmônico, Eq. (132):

$$\text{Res}_\alpha = \partial_t \alpha_N + \alpha_N^2 K_N. \quad (337)$$

Note que existem erros numéricos associados às aproximações de  $\alpha$  e  $K$ , logo, esta equação é nula apenas nos pontos de colocação. Portanto, se nos pontos de colocação  $\text{Res}_\alpha(t, r_j) =$

0, a Eq. (337) é expressa como:

$$\partial_t \alpha_N(t, r_j) = -\alpha_N^2(t, r_j) K_N(t, r_j), \quad (338)$$

com  $j = 1, 2, \dots, N + 1$ , sendo  $K_N(t, r_j)$  os valores da curvatura extrínseca nos pontos de colocação. A equação matricial que conecta os valores da função  $K(t, r_j)$  com os modos espectrais  $\tilde{K}_j(t)$  é similar à Eq. (336). Portanto, temos um conjunto de  $N + 1$  EDOs de primeira ordem para evoluir os modos espectrais da função de campo  $\alpha(t, r_j)$ . Esta mesma estratégia é adotada para todas as demais funções de campo do sistema de equações.

Também podemos calcular as derivadas das funções de campo em relação a  $r$  nos pontos de colocação. Por exemplo, a equação matricial que relaciona as derivadas de  $\alpha(t, r_j)$  com os modos espectrais  $\tilde{\alpha}_k(t)$  desta função é:

$$\begin{pmatrix} (\partial_r \alpha)_1 \\ (\partial_r \alpha)_2 \\ \vdots \\ (\partial_r \alpha)_{N+1} \end{pmatrix} = \mathbb{DAL} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_0 \\ \tilde{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_N \end{pmatrix}, \quad (339)$$

onde  $\mathbb{DAL}_{jk} = \partial_r SB_{2k}(r_j)$  são as derivadas dos polinômios  $SB_{2k}(r_j)$  que são as entradas da matriz  $\mathbb{DAL}$  de tamanho  $(N + 1) \times (N + 1)$ , com  $j = 1, 2, \dots, N + 1$  e  $k = 0, 1, \dots, N$ . Realizamos o mesmo procedimento para cada derivada da função de campo do sistema de equações. Para resolver o problema optamos por evoluir os modos espectrais realizando a expansão espectral das funções de campo e determinando tanto os polinômios quanto suas derivadas nos pontos de colocação para cada equação de evolução.

Vimos até aqui que uma escolha adequada de funções de base derivadas dos polinômios de Chebyshev e de pontos de colocação satisfaz naturalmente as condições de contorno e a paridade das funções de campo perto da origem. Esta abordagem possibilita a obtenção de códigos numéricos robustos que dispensam a implementação de condições de regularização. Outra estratégia que também dispensa condições de regularização foi adotada por Montero e Cordero-Carrión em (Montero; Cordero-Carrión, 2012). O método consistiu em escrever as equações de campo na forma de fluxo conservativo e integrá-las usando o método PIRK (Montero; Cordero-Carrión, 2012).

### 3.4.2 Medidas de erro

A integração das equações dos vínculos Hamiltoniano e de momento para realização de medidas de erros foi realizada numericamente usando o **método da quadratura de Gauss** (Fornberg, 1996). Este método é umas das abordagens mais eficientes e precisas

para calcular integrais definidas e aproximadas, especialmente quando o integrando é uma função bem comportada no intervalo de integração. A ideia deste método consiste em aproximar uma integral definida pela soma ponderada dos valores da função do integrando em pontos específicos do domínio de integração, os chamados **pontos de quadratura**. Neste trabalho, utilizamos polinômios de Legendre para calcular  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{M}$ , Eq. (340), e realizar a aproximação espectral de cada função de campo que aparece na equação do vínculo Hamiltoniano ou de momento, Eq. (288). Determinando os valores dos polinômios de Legendre nos pontos de colocação transformamos as equações do vínculo Hamiltoniano e de momento em EDOs simples de serem resolvidas numericamente.

Tendo determinado  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{M}$ , as duas medidas de erro implementadas neste trabalho consistiram no cálculo dos **erros máximos**  $L_2$  associados aos vínculos Hamiltoniano e de momento, respectivamente:

$$L_2HC(t) = \sqrt{\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mathcal{H}^2(x_j) dx} \quad \text{e} \quad L_2MC(t) = \sqrt{\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mathcal{M}^2(x_j) dx}. \quad (340)$$

Após a integração numérica das equações de evolução, para cada instante de tempo, as integrais acima são calculadas nos pontos de quadratura  $x_j$  utilizando a seguinte fórmula da quadratura de Gauss:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \cong \sum_{j=0}^N \omega_j f(x_j), \quad (341)$$

com nós do tipo Legendre-Gauss-Lobatto, ou seja, os valores dos polinômios  $f(\pm 1)$  estão inclusos e os pontos de quadratura são  $x_j = \cos(\pi j/N)$ . Os pesos são  $\omega_0 = \omega_N = \pi/2N$  e  $\omega_j = \pi/N$  para  $1 \leq j \leq N-1$ , com  $j = 0, 1, \dots, N$ , de modo que as soluções são exatas para polinômios de Legendre de grau maior que  $2N-1$ .

Outra medida de erro implementada é a conservação da massa ADM. De fato, em RG sabemos que não é possível definir **localmente** a função de massa  $m(t, r)$  de um sistema gravitacional. Por outro lado, uma medida útil de matéria-energia é a massa ADM,  $M_{ADM}$ . Sabe-se que no limite assintótico a função de massa  $m(t, r)$  converge para a massa ADM. Portanto, é esperado que a massa ADM seja constante ao considerar a massa total de um sistema gravitacional isolado, em qualquer instante de tempo. Nesse caso, a massa ADM é medida dentro de uma superfície espacial que envolve o sistema gravitacional no infinito (Alcubierre, 2008).

Neste trabalho realizamos um cálculo relativamente simples da massa ADM. De fato, considere o elemento de linha de Schwarzschild em coordenadas isotrópicas:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 (dr^2 + r^2 d\Omega^2). \quad (342)$$

Usando a Eq. (244) e considerando que no limite assintótico  $a \simeq 1$ ,  $b \simeq 1$  e  $e^x \simeq$

$1 + m/2r + \mathcal{O}(r^{-2})$ , então:

$$e^{\chi} \simeq 1 + \frac{\chi_1}{r} + \frac{\chi_2}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}). \quad (343)$$

Se no limite assintótico  $m = M_{ADM}$ , temos que:

$$1 + \frac{\chi_1}{r} \simeq 1 + \frac{M_{ADM}}{2r} \Rightarrow M_{ADM} = 2\chi_1. \quad (344)$$

Portanto, expressando  $\chi_1$  em termos de seus modos espectrais obtemos uma maneira de verificar a conservação da massa ADM durante a integração das equações de evolução. A estratégia consiste em monitorar os valores dos modos  $\tilde{\chi}_k(t)$  associados a  $\chi_1$  a cada passo temporal. Daí, a medida de erro consiste no cálculo do **erro relativo** associado à massa ADM:

$$\delta M/M_0 = \frac{|\tilde{\chi}_k(t) - \tilde{\chi}_k(t=0)|}{\tilde{\chi}_k(t=0)}. \quad (345)$$

A seguir fazemos um resumo do código numérico implementado seguindo os conceitos abordados até aqui §:

- Definimos os valores iniciais de  $\alpha$ ,  $K$ ,  $\Phi$ ,  $\Pi$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $A_a$ ,  $\hat{\Delta}$  e  $\beta$ . Com esses valores iniciais determinamos as condições iniciais de  $\chi$  resolvendo a equação do vínculo Hamiltoniano pelo método Newton-Raphson.
- Tendo definido todos os valores iniciais das funções de campo e de posse das funções de base realizamos as respectivas aproximações espectrais das funções de campo.
- Determinamos uma equação matricial para cada expansão espectral das funções de campo. Esta equação matricial relaciona os valores das funções de campo nos pontos de colocação com os modos espectrais. De modo que o resíduo associado a cada equação de evolução é nulo nesses pontos e as variáveis a serem determinadas são os modos espectrais.
- Tendo transformado as EDPs acopladas em um sistema de EDOs realizando expansões espectrais das funções de campo, escolhemos evoluir os modos espectrais  $\tilde{\alpha}_k$ ,  $\tilde{K}_k$ ,  $\tilde{\Phi}_k$ ,  $\tilde{\Pi}_k$ ,  $\tilde{\chi}_k$ , com  $k = 1, 2, \dots, N + 1$ , e  $\tilde{a}_k$ ,  $\tilde{b}_k$ ,  $\tilde{A}_{ak}$ ,  $\tilde{\Delta}_k$ ,  $\tilde{\beta}_k$ , com  $k = 1, 2, \dots, N$ , utilizando o método Runge-Kutta de quarta ordem (com passo fixo).
- Simultaneamente, validamos o código numérico, para cada instante de tempo, utilizando os valores dos modos espectrais e calculando os erros associados aos vínculos Hamiltoniano e de momento graças ao método da quadratura de Gauss. Também

---

§No Apêndice A fazemos uma breve descrição do algoritmo espectral.

verificamos a conservação da massa ADM e repetimos todo o processo para cada estágio de evolução até o tempo final  $t_f$ .

Todos os códigos numéricos implementados foram construídos na linguagem de programação Python e nos softwares de computação algébrica Maple e Matlab. Em Python, utilizamos a biblioteca Numpy para construir as funções de base derivadas dos polinômios de Chebyshev e Legendre. Também geramos as mesmas bases em Maple (que tem integrado em seu sistema esses polinômios especiais) e exportamos para o Matlab as funções de base como matrizes.

Inicialmente formulamos o problema usando o Maple como uma plataforma de testes. Evoluímos o sistema para truncagens baixas e verificamos eventuais erros que poderiam ser cometidos. Evoluímos o sistema para truncagens mais altas no Matlab e aplicamos as 3 medidas de erro descritas acima. Além disso, note que os pontos de quadratura são soluções de uma equação diferencial, então foram mais simples de serem obtidos diretamente em Python, assim como as matrizes das funções de base e suas derivadas. Em Matlab essa configuração foi 7 vezes mais custosa em termos de tempo de execução, uma vez que a leitura e salvamento de arquivos externos ao programa têm custo computacional alto.

A execução do código em Python foi mais rápida, mas a integração numérica em Matlab também gerou grande economia de tempo, uma vez que o Matlab otimiza o armazenamento e a multiplicação de matrizes. Também tivemos o cuidado de não ler nem gravar nenhum dado durante o *loop* de integração (Apêndice A), o que reduziu em 7 vezes o tempo de execução do código em Matlab. As soluções do problema foram gravadas fora do *loop* de integração e lidas no estágio final da simulação. Uma das vantagens de usar Python é a implementação de bibliotecas como Matplotlib na construção eficiente e rápida de gráficos e simulações.

### 3.4.3 Inicialização

O espaço-tempo é inicializado como sendo o de Minkowski, onde definimos  $\alpha(0, r) = a(0, r) = b(0, r) = 1$  e  $K(0, r) = \Pi(0, r) = A_a(0, r) = \hat{\Delta}(0, r) = \beta(0, r) = 0$ . Para evoluir numericamente o campo escalar partimos de uma condição inicial do tipo gaussiana:

$$\Phi(0, r) = A_0 r^2 \left[ e^{-(r-r_0)^2/\sigma^2} + e^{-(r+r_0)^2/\sigma^2} \right], \quad (346)$$

sendo  $A_0 = 0.05$ ,  $r_0 = 2$  o centro da gaussiana e  $\sigma = 1$  a largura da mesma. Com esses parâmetros escolhidos convenientemente o sistema tem uma evolução não linear, numericamente estável e converge para a dispersão do campo no infinito.

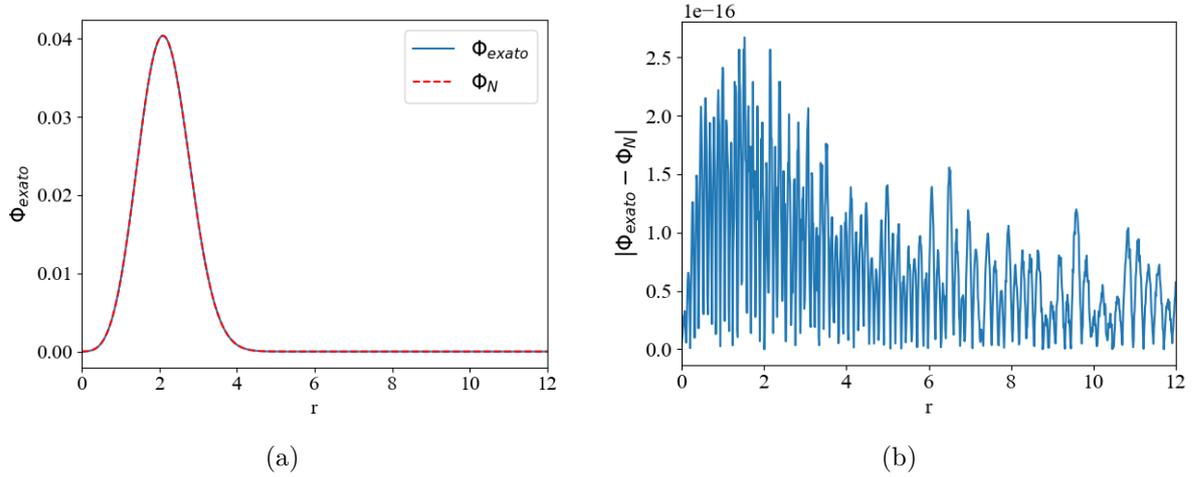
Realizamos a aproximação espectral do campo escalar inicial e verificamos que o

resíduo associado a  $\Phi(0, r)$  nos pontos de colocação  $r_j$  é:

$$\text{Res}_{\Phi}(0, r_j) = \Phi(0, r_j) - \sum_{k=0}^N \tilde{\Phi}_k(0) SB_{2k}(r_j) = 0. \quad (347)$$

Como o resíduo associado a  $\Phi$  é nulo nos pontos de colocação e a função aproximada  $\Phi_N(0, r)$  é igual à função exata  $\Phi_{\text{exato}}(0, r)$ , usamos os modos espectrais associados a  $\Phi$  para reconstruir a função exata, Fig. (10(a)). A Fig. (10(b)) destaca a notável precisão do método Galerkin-Colocação. Observe que o valor absoluto da diferença entre a função  $\Phi_{\text{exato}}(0, r)$  e sua aproximação espectral  $\Phi_N(0, r)$  é da ordem de  $10^{-16}$  para uma truncagem relativamente pequena de  $N = 150$ .

Figura 10 - Campo escalar inicial  $\Phi_{\text{exato}}$  e erro associado à expansão espectral desse campo,  $\Phi_N$



Legenda: A aproximação espectral  $\Phi_N$  do campo escalar inicial  $\Phi_{\text{exato}}$ , com truncagem  $N = 150$ , tem um erro da ordem de  $10^{-16}$ .

Fonte: A autora, 2024.

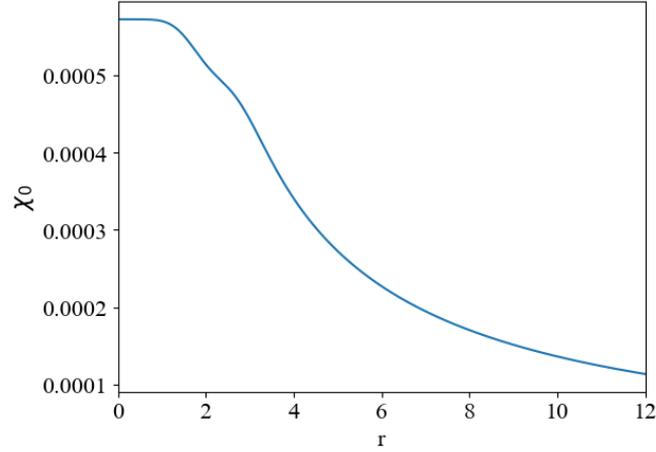
Tendo definido todos os valores iniciais de  $\alpha, K, \Phi, \hat{\Delta}, a, b$  e  $A_a$  obtemos os dados iniciais de  $\chi$ . De fato, substituímos os valores iniciais das funções de campo na equação do vínculo Hamiltoniano, Eq. (288) e obtemos uma EDP cujas variáveis são  $\chi$  e  $\Phi$ . Para resolver esta equação realizamos a expansão espectral de  $\chi$  e calculamos o resíduo associado nos pontos de colocação:

$$\text{Res}_{\mathcal{H}}(0, r_j) = 4 \left( \frac{\partial \chi}{\partial r} \right)_{r_j}^2 + 4 \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \right)_{r_j} + \frac{8}{r} \left( \frac{\partial \chi}{\partial r} \right)_{r_j} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{r_j}^2 = 0. \quad (348)$$

Como o resíduo associado é nulo nos pontos de colocação, as variáveis a serem determinadas são os modos espectrais associados a  $\chi(0, r_j)$ . Portanto, substituindo as expansões espectrais de  $\Phi$  e  $\chi$  na Eq. (348) obtemos  $N + 1$  equações algébricas não lineares para

os modos espectrais, as quais resolvemos utilizando o método Newton-Raphson. Após a integração numérica, utilizamos os modos espectrais para reconstruir  $\chi(0, r_j)$ , Fig. (11).

Figura 11 - Fator conforme inicial  $\chi_0$  para  $L_0 = 10$ ,  $N = 150$



Legenda: A condição inicial do fator conforme  $\chi_0$  é obtida resolvendo a equação do vínculo Hamiltoniano com os dados iniciais das funções de campo.

Fonte: A autora, 2024.

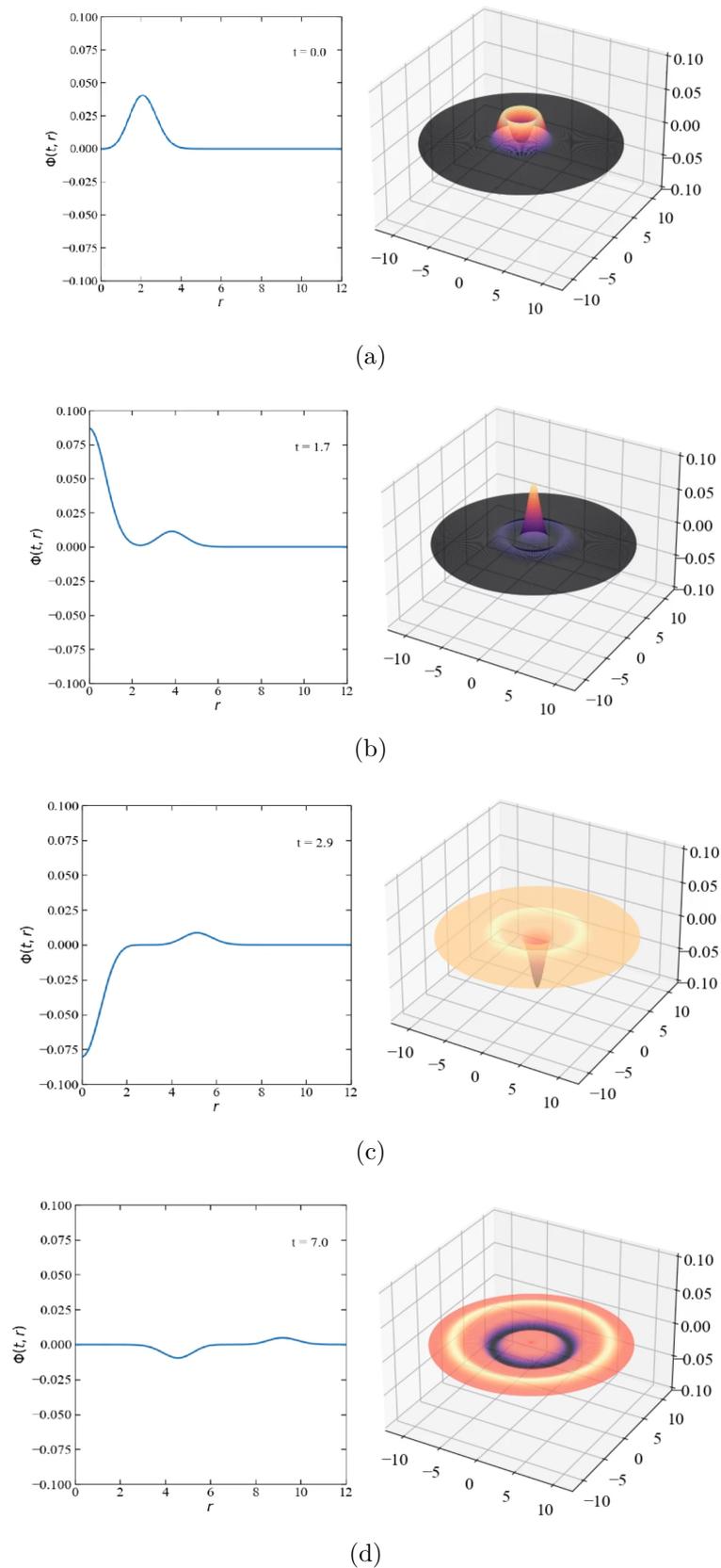
### 3.5 Experimentos numéricos

Tendo estabelecido todas as condições iniciais, procedemos à realização de alguns experimentos numéricos. A simulação de colapso gravitacional obtida do código espectral, Fig. (12), é muito interessante pois envolve uma dinâmica real. Escolhemos um campo inicial bastante intenso, mas não intenso o suficiente para colapsar em um BN. Inicialmente escolhemos uma malha numérica com 50 pontos de colocação e realizamos a integração das equações de evolução. Depois realizamos novas integrações aumentando a truncagem de 50 em 50 até 250 pontos de colocação. Com esta metodologia espera-se verificar o aumento da precisão numérica com o aumento da truncagem.

A dinâmica do campo compreende um pulso inicial que se divide em duas partes: a de amplitude menor afasta-se da origem enquanto que a de amplitude maior implode na origem. Realizamos todas as simulações envolvendo essa dinâmica para um intervalo de tempo  $t = 7$ . O pulso maior atinge uma amplitude máxima em torno de  $t = 2$  e diminui até atingir uma amplitude mínima em torno de  $t = 3$ . A evolução do campo continua com um dos pulsos invertido e se deslocando no mesmo sentido que o pulso de saída, de modo que o campo se dispersa no infinito.

Observe agora a evolução da função lapso  $\alpha$  na origem, Fig. (13). O gráfico mostra que  $\alpha(t, 0) \rightarrow 1$  à medida que  $r \rightarrow \infty$ , o que corresponde ao caso de dispersão do campo

Figura 12 - Dinâmica espacial do campo escalar  $\Phi$  para  $L_0 = 10$ ,  $N = 150$

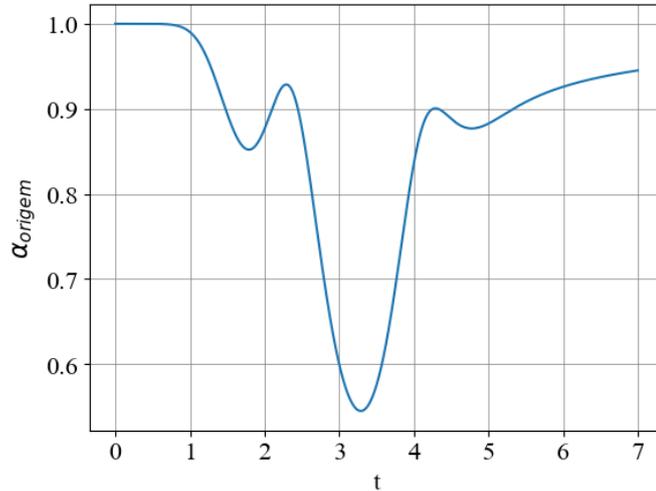


Legenda: O pulso inicial do campo escalar  $\Phi(t, r)$ , (a), divide-se em uma parte de entrada e outra de saída, (b). À medida que o tempo transcorre o campo implode na origem, (c), e se dispersa no infinito, (d).

Fonte: A autora, 2024.

no infinito, como discutido na Seção (3.2). Além disso, a função lapso apresenta variação maior entre  $t = 1$  e  $t = 5$ , o que está de acordo com a simulação, Fig. (12).

Figura 13 - Evolução da função lapso  $\alpha$  na origem (Slicing  $1 + \log$ ,  $L_0 = 10$ ,  $N = 150$ )



Legenda: A função lapso  $\alpha$  na origem apresenta uma variação maior entre  $t = 1$  e  $t = 5$  e tende a um no infinito.

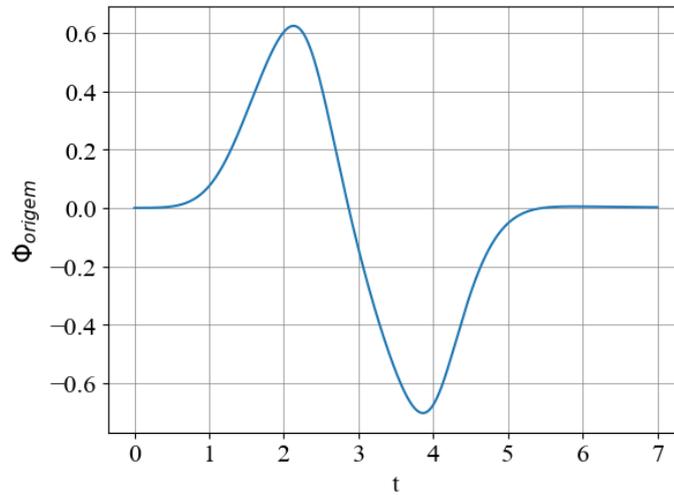
Fonte: A autora, 2024.

A evolução do campo escalar na origem, Fig. (14), mostra que assim como na Fig. (12), os tempos  $t \approx 2$  e  $t \approx 3$  correspondem, em ambas figuras, aos instantes em que as amplitudes do campo são máxima e mínima, respectivamente.

A evolução do escalar de curvatura na origem,  $R(t, 0)$ , mostra na Fig. (15) que seu valor mais acentuado ocorre no instante em que o pulso implode na origem, em  $t \approx 3$ . Nesse mesmo gráfico observamos que o intervalo em que  $R(t, 0)$  varia expressivamente corresponde ao intervalo em que a amplitude do campo varia mais, entre  $t = 1$  e  $t = 5$ .

A seguir, mostramos os resultados de precisão numérica da aplicação do mesmo código para 4 tipos de calibres sobre fatiamentos: slicing harmônico, slicing  $1 + \log$  e os dois slicings propostos por Alcubierre: *shock avoiding 1* e *shock avoiding 2* (Alcubierre, 2003). Todos esses calibres foram implementados nos casos  $\beta = 0$  e  $\beta \neq 0$ , para este caso também implementamos o calibre maximal slicing.

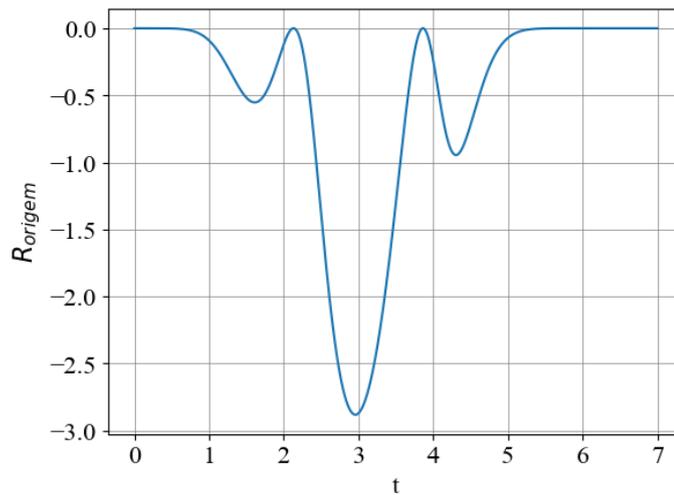
Figura 14 - Evolução do campo escalar  $\Phi$  na origem para  $L_0 = 10$  e  $N = 150$



Legenda: As amplitudes máxima e mínima do campo escalar  $\Phi$  na origem ocorrem em  $t \approx 2$  e  $t \approx 4$ , respectivamente. Além disso, o campo escalar na origem tende a se dispersar no infinito.

Fonte: A autora, 2024.

Figura 15 - Evolução do escalar de curvatura  $R$  na origem para  $L_0 = 10$  e  $N = 150$



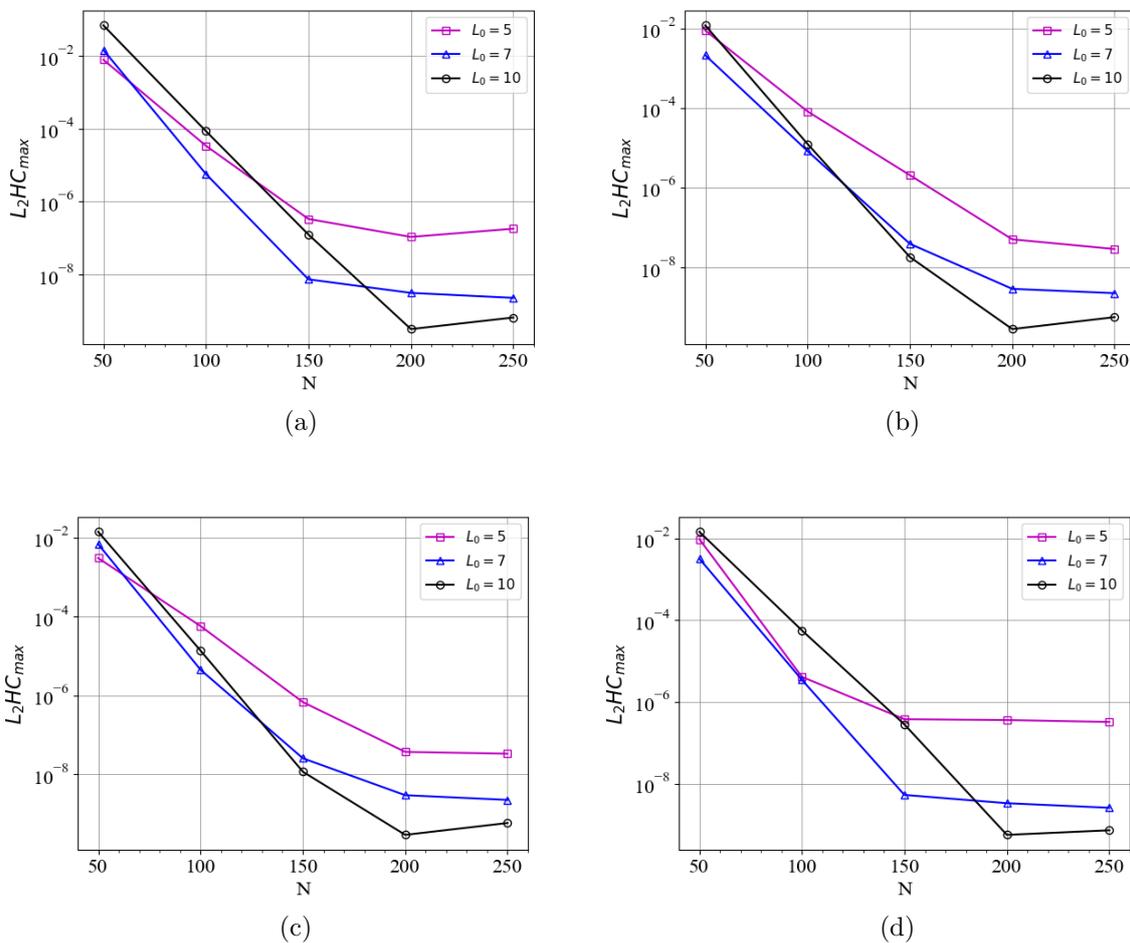
Legenda: A maior variação do escalar de curvatura  $R$  ocorre entre  $t = 1$  e  $t = 5$ , que corresponde aos instantes em que há maior variação do campo escalar.

Fonte: A autora, 2024.

### 3.5.1 Testes numéricos para o calibre $\beta = 0$

Nos gráficos da Fig. (16) observamos o decaimento exponencial do erro máximo associado ao vínculo Hamiltoniano em função do aumento da truncagem. Note uma melhora na precisão numérica com o aumento da resolução da malha numérica. A curva correspondente ao parâmetro de mapa  $L_0 = 10$  mostrou um decaimento melhor nos 4 calibres. O maior decaimento, da ordem de  $10^{-9}$ , é observado em todos os calibres.

Figura 16 - Testes numéricos dos erros máximos  $L_2(HC)_{max}$  associados ao vínculo Hamiltoniano para diferentes calibres



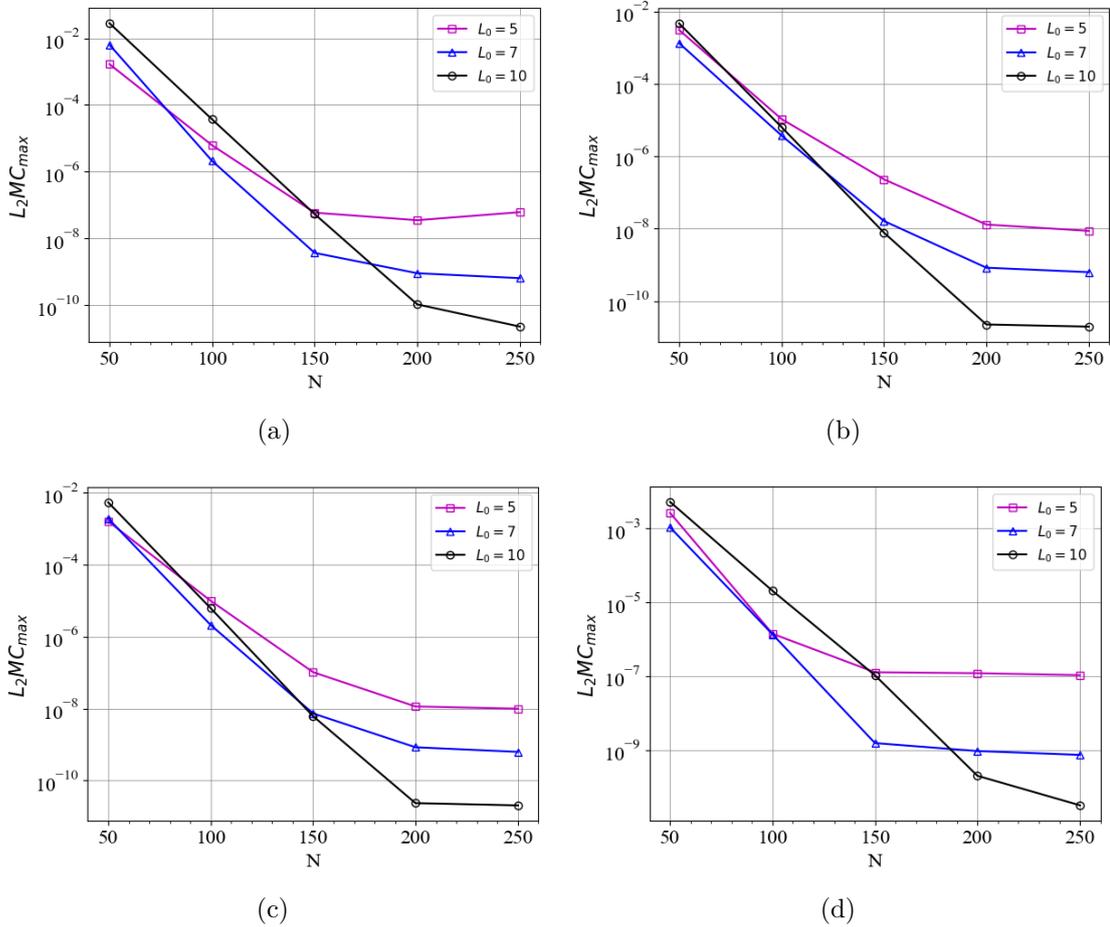
Legenda: Slicing harmônico (a). Slicing  $1 + \log$  (b). Slicing shock avoiding 1 (c). Slicing shock avoiding 2 (d).

Fonte: A autora, 2024.

No caso do erro máximo associado ao vínculo de momento, os gráficos da Fig. (17) também mostram um decaimento exponencial. Similar ao erro máximo associado ao vínculo Hamiltoniano, a curva do parâmetro  $L_0 = 10$  apresentou uma tendência decrescente e uma precisão maior com o aumento da truncagem. No calibre *shock avoiding 2* o

decaimento máximo é da ordem de  $10^{-10}$ , sendo que nos demais calibres o decaimento foi melhor, da ordem de  $10^{-11}$ .

Figura 17 - Testes numéricos dos erros máximos  $L_2(MC)_{max}$  associados ao vínculo de momento para diferentes calibres

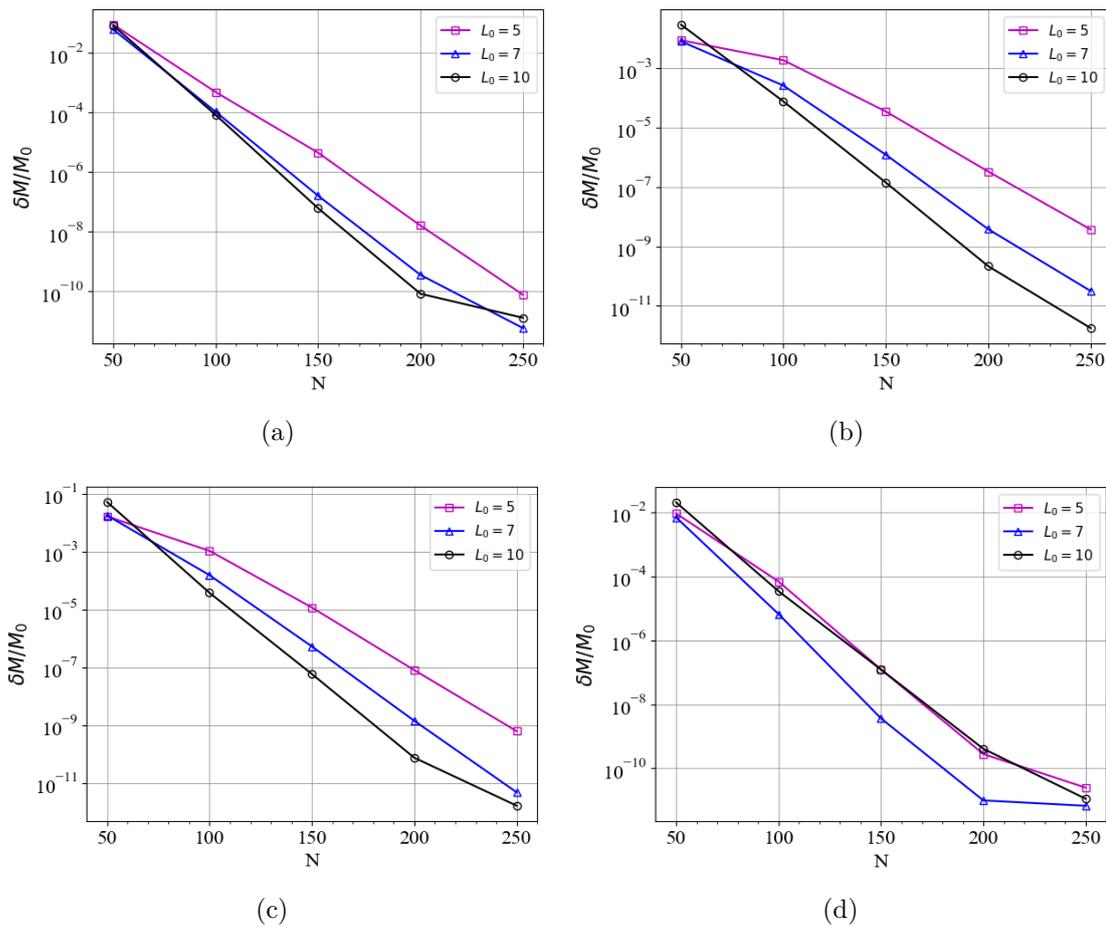


Legenda: Slicing harmônico (a). Slicing  $1 + \log$  (b). Slicing shock avoiding 1 (c). Slicing shock avoiding 2 (d).

Fonte: A autora, 2024.

Os gráficos da Fig. (18) mostram o decaimento do erro relativo associado à massa ADM. Comparadas às curvas dos parâmetros  $L_0 = 5, 10$ , nos calibres harmônico e *shock avoiding 2* as curvas de  $L_0 = 7$  apresentaram o maior decaimento, da ordem de  $10^{-11}$ . Nos calibres  $1 + \log$  e *shock avoiding 1* houve um decaimento melhor com o parâmetro  $L_0 = 10$ , da ordem de  $10^{-12}$ .

Figura 18 - Testes numéricos dos erros relativos  $\delta M/M_0$  associados à massa ADM para diferentes calibres



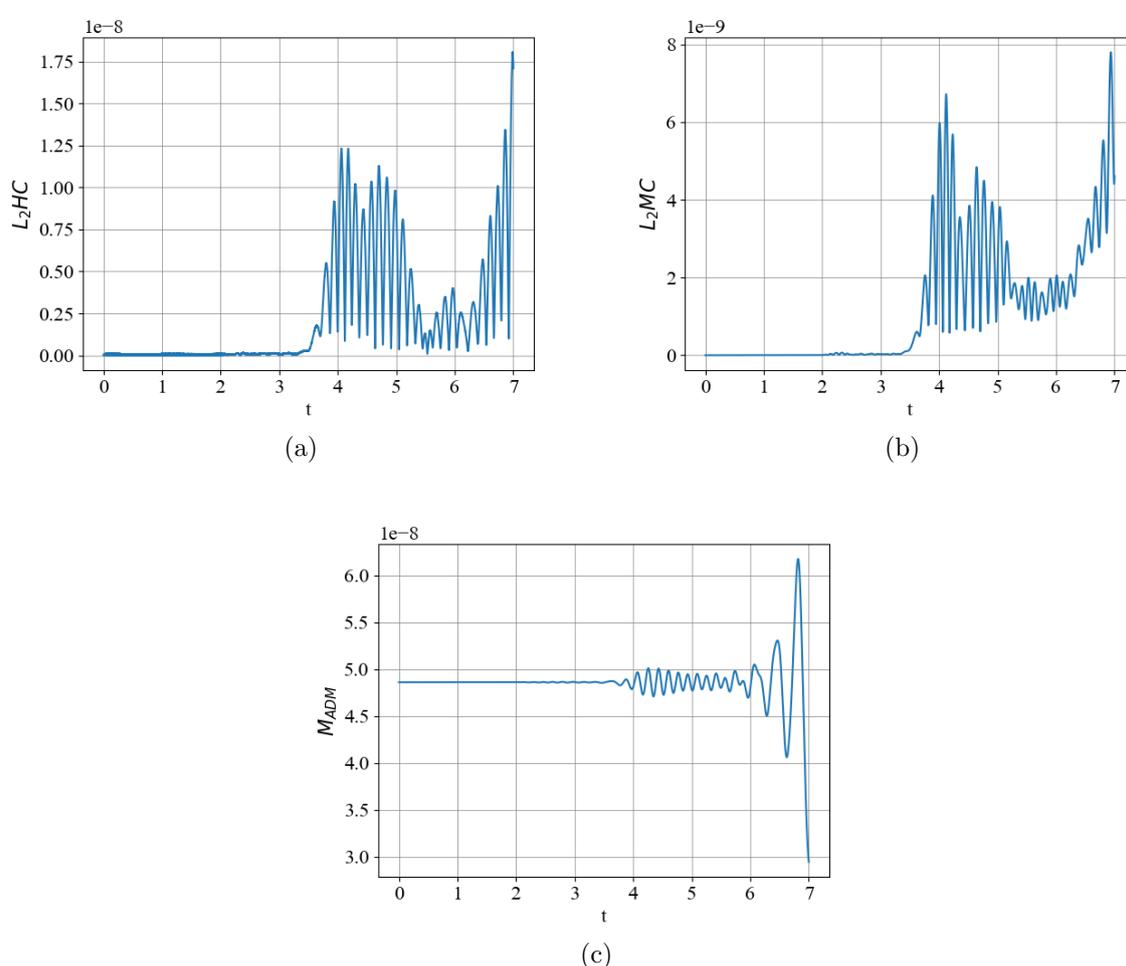
Legenda: Slicing harmônico (a). Slicing 1 + log (b). Slicing shock avoiding 1 (c). Slicing shock avoiding 2 (d).

Fonte: A autora, 2024.

### 3.5.2 Aplicação de filtros para o calibre $\beta = 0$

Nas figuras (16), (17) e (18) é esperada uma oscilação amortecida nos valores dos erros com o aumento da truncagem. Isto se deve ao fato de que, para os pontos de colocação mais afastados da origem, os intervalos entre os pontos da malha numérica ficam maiores. Assim, perde-se resolução numérica e os erros numéricos tendem a se acumular nos estágios finais da simulação, como mostram os gráficos da Fig. (19).

Figura 19 - Evolução dos erros associados aos vínculos Hamiltoniano e de momento e da massa ADM (Slicing  $1 + \log$ ,  $L_0 = 10$ ,  $N = 150$ )



Legenda: Erro associado ao vínculo Hamiltoniano (a). Erro associado ao vínculo de momento (b). Erro associado à massa ADM (c).

Fonte: A autora, 2024.

Existem diversas maneiras de dissipar artificialmente estes erros numéricos, uma delas é usar filtros. No início deste capítulo mencionamos que é desvantajoso aplicar métodos espectrais a problemas com soluções não suaves. Isso acontece porque usar polinômios para aproximar soluções não suaves muitas vezes prejudica a estabilidade

computacional (Alcubierre, 2008). Uma maneira de recuperar essa estabilidade e aumentar a precisão da solução é aplicar filtros espectrais. Os filtros espectrais são caracterizados por modificar artificialmente os modos espectrais, logo, modificam a precisão da solução global.

A vantagem de aplicar filtros é a simplicidade de implementação com obtenção de boa precisão e baixo custo computacional. A forma como  $u(t, r) - u_N(t, r_j)$  decai quando a truncagem  $N$  aumenta indica que o decaimento dos modos espectrais é a principal fonte de precisão dos métodos espectrais (Fornberg, 1996). Visando melhorar a precisão da expansão truncada, aplicamos a filtragem espectral multiplicando os modos espectrais por uma função filtro no final de cada estágio do *loop* de integração numérica (Apêndice A).

A ideia de modificar os modos espectrais é melhorar a precisão em regiões próximas de pontos de singularidade ou descontinuidade. No nosso caso, a irregularidade na origem pois o sistema de equações tem termos divididos por  $r$  e  $r^2$ . Porém, deseja-se que o impacto do filtro seja mínimo na origem e que não destrua a taxa de convergência do método. Um filtro que oferece tais características é o filtro exponencial de ordem  $p$ :

$$\sigma_E(\eta) = e^{-\alpha\eta^p}, \quad (349)$$

onde  $\alpha = -\log(\epsilon_M)$  é a medida da modificação do modo máximo,  $\sigma_E(1) = e^{-\alpha}$ , e  $\epsilon_M$  é a precisão da máquina. Nesse sentido, diminuir  $\alpha$  significa diminuir a modificação dos modos espectrais mais altos. Este tipo de filtro é tal que grande parte dos modos altos não são atenuados e uma pequena parcela dos modos baixos permanece praticamente inalterada.

Em particular, considere o chamado **filtro ótimo**:

$$\sigma_O(\eta) = 1 - \frac{\Gamma(2p)}{\Gamma(p)^2} \int_0^\eta [t(1-t)]^{p-1} dt. \quad (350)$$

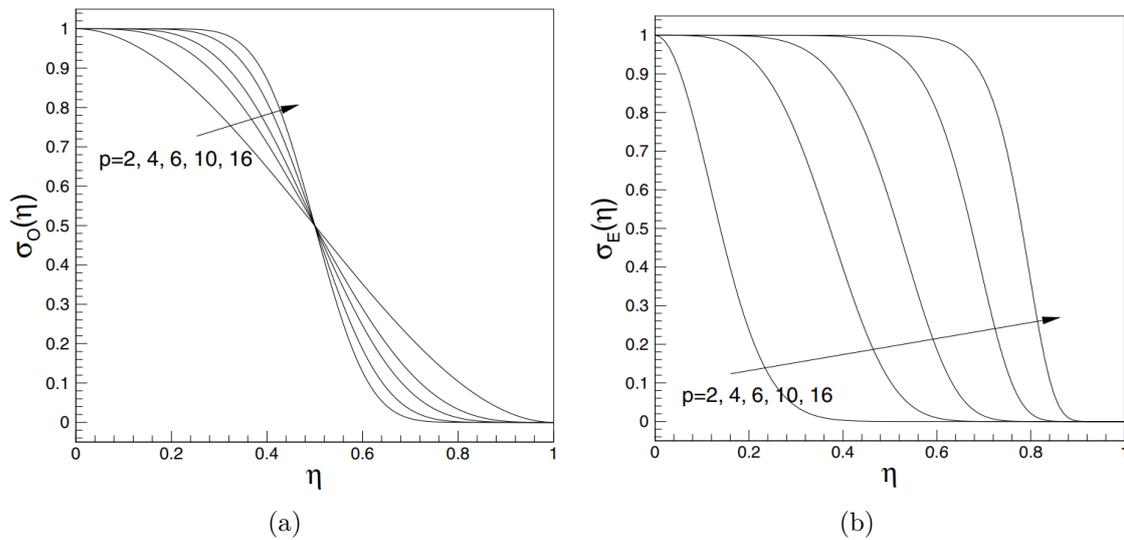
Este filtro é um polinômio interpolador de Birkhoff-Hermite de ordem  $2p - 1$ , sendo  $\Gamma(x)$  a função Gama (Hesthaven; Kirby, 2008). Neste tipo de filtro a grande maioria dos modos espectrais permanece praticamente inalterada com o aumento de  $p$ . Na Fig. (20) comparamos o comportamento dos filtros ótimo (a) e exponencial (b). Observe a semelhança entre eles à medida que  $p$  aumenta.

Em particular, neste trabalho aplicamos o filtro:

$$|\sigma_E^{(k)}(1)| \approx (\alpha p)^k e^{-\alpha}, \quad (351)$$

com  $k = 1, 2, \dots, p - 1$ . A norma na Eq. (351) pode ser muito grande dependendo dos valores de  $p$ . Assim, o uso de filtros deve ser o mínimo possível e não há uma regra geral sobre a melhor maneira de usá-los. Qualitativamente, o filtro exponencial é muito

Figura 20 - Comparação entre os filtros ótimo  $\sigma_O$  e exponencial  $\sigma_E$  para valores crescentes de  $p$



Legenda: Filtro ótimo  $\sigma_O$  (a). Filtro exponencial  $\sigma_E$  (b).

Fonte: Hesthaven, 2008, p. 1431.

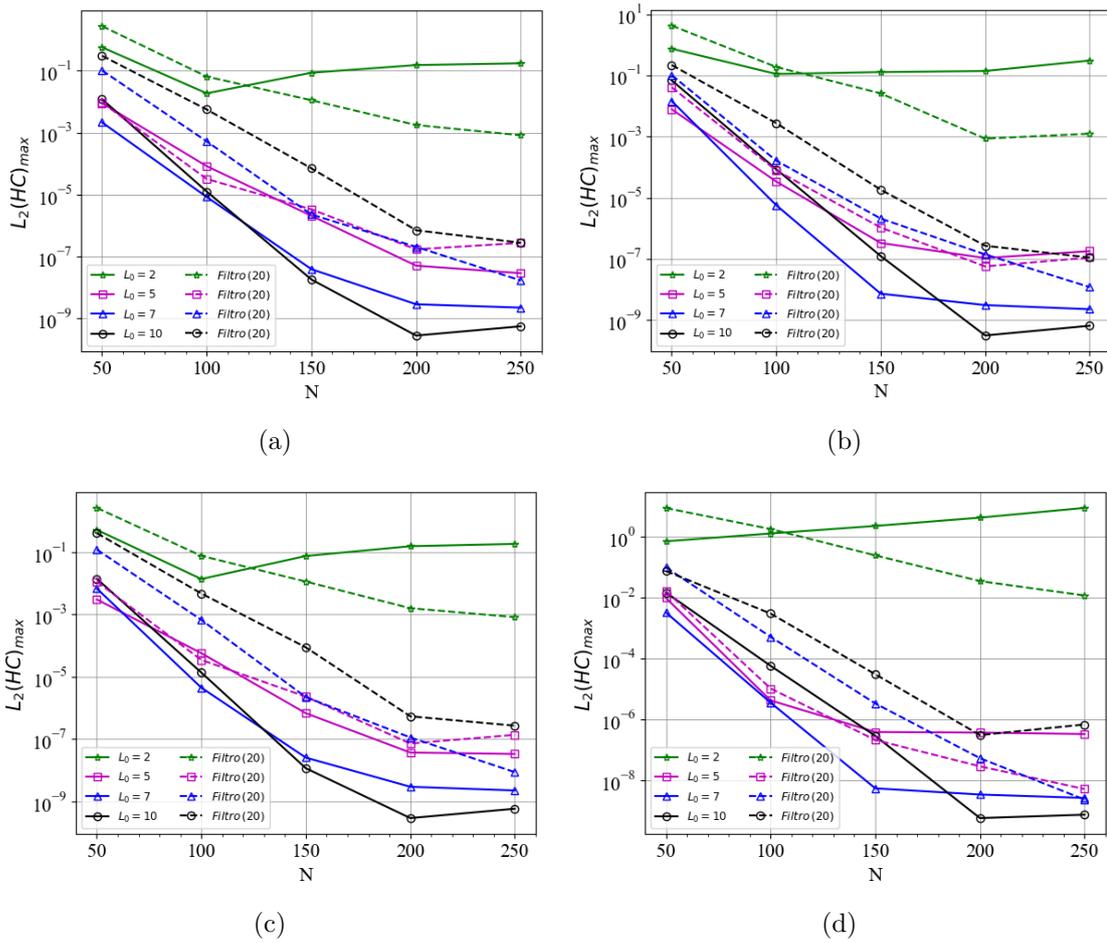
eficiente para métodos pseudo-espectrais pois não altera substancialmente os modos altos. Mais adiante veremos que as melhorias são notáveis nos pontos onde há irregularidade nas funções.

Para termos uma ideia do ganho em precisão numérica com a aplicação de filtros, observe as figuras a seguir. Para o caso do erro associado ao vínculo Hamiltoniano, Fig. (21), notamos que a aplicação de um filtro relativamente forte, de fator 20, resultou na melhora considerável da precisão das curvas de  $L_0 = 2$  em todos os calibres implementados. Porém, para os casos  $L_0 = 5, 7, 10$  a piora na precisão numérica foi expressiva. Outra observação interessante é que nos 4 calibres a aplicação de filtro no caso  $L_0 = 7$  teve melhor precisão em relação à curva de  $L_0 = 5$  sem filtro. No caso do calibre *shock avoiding* 2 a melhora foi de até duas ordens de grandeza.

Nos gráficos do erro associado ao vínculo de momento, Fig. (22), o impacto da aplicação de filtro foi similar. Destacamos os gráficos dos calibres harmônico e *shock avoiding* 2 onde o filtro aplicado ao caso  $L_0 = 7$  teve melhor precisão numérica que no caso  $L_0 = 5$  sem filtro.

Os gráficos do erro relativo associado à massa ADM, Fig. (23), mostram que, no caso do calibre  $1 + \log$ , para  $L_0 = 2$  a aplicação de filtro não teve impacto. Já nos calibres harmônico e *shock avoiding* 2 houve uma piora na precisão numérica e no calibre *shock avoiding* 1 a precisão melhorou. Nas demais curvas de  $L_0 = 5, 7, 10$  a piora na precisão foi considerável.

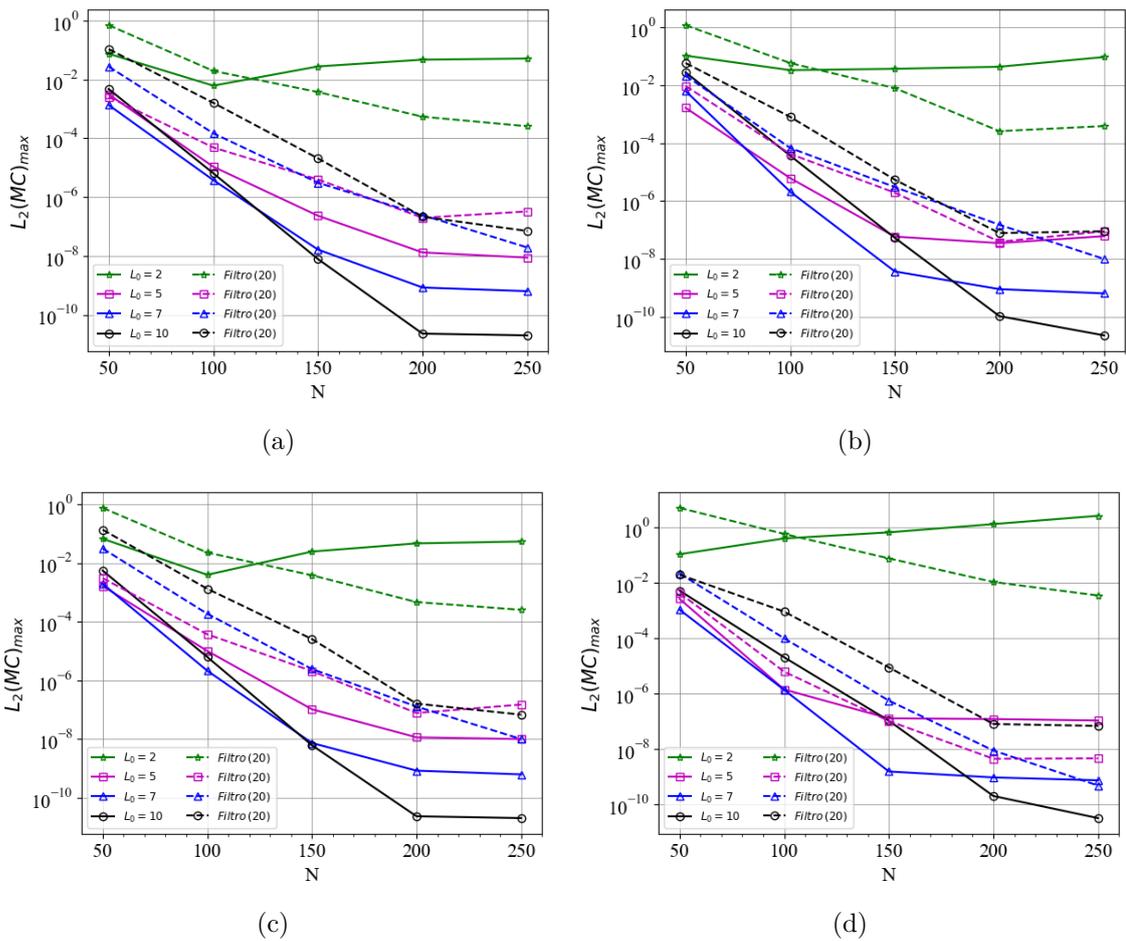
Figura 21 - Testes numéricos dos erros máximos  $L_2(HC)_{max}$  associados ao vínculo Hamiltoniano para diferentes calibres



Legenda: Slicing harmônico (a). Slicing  $1 + \log$  (b). Slicing shock avoiding 1 (c). Slicing shock avoiding 2 (d).

Fonte: A autora, 2024.

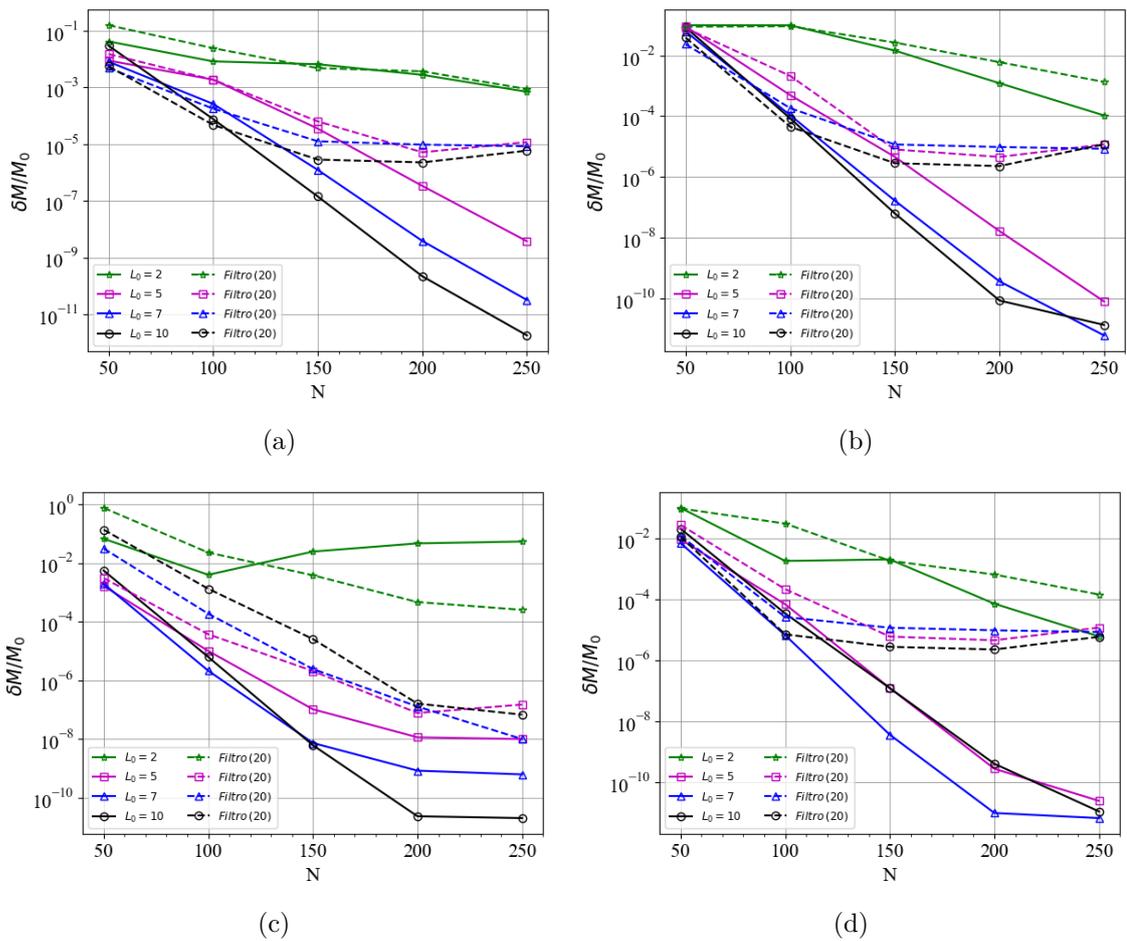
Figura 22 - Testes numéricos dos erros máximos  $L_2(MC)_{max}$  associados ao vínculo de momento para diferentes calibres



Legenda: Slicing harmônico (a). Slicing 1 + log (b). Slicing shock avoiding 1 (c). Slicing shock avoiding 2 (d).

Fonte: A autora, 2024.

Figura 23 - Testes numéricos dos erros relativos  $\delta M/M_0$  associados à massa ADM para diferentes calibres



Legenda: Slicing harmônico (a). Slicing 1 + log (b). Slicing shock avoiding 1 (c). Slicing shock avoiding 2 (d).

Fonte: A autora, 2024.

As figuras anteriores essencialmente mostram que aplicar filtros melhora a precisão numérica e mantém a estabilidade do método Galerkin-Colocação **apenas** em alguns casos em que o parâmetro de mapa não é o ideal, por exemplo, para  $L_0 = 2$ . O filtro age como um operador dissipativo artificial que atua na equação diferencial e para ser implementado não requer nenhuma condição de contorno adicional, o que simplifica sua implementação. Nesse sentido, usar filtro envolve encontrar um equilíbrio entre estabilidade e precisão, uma vez que valores baixos de  $p$  podem manter a estabilidade numérica, mas destruir a precisão da solução (Hesthaven; Kirby, 2008).

Também realizamos outros experimentos numéricos onde encontramos filtros relativamente fracos (fator 36 ou 64, por exemplo) que destroem tanto a precisão numérica quanto a estabilidade computacional. Portanto, aplicar filtros exponenciais fortes (fator 20, por exemplo), ao resolver o sistema BSSN em simetria esférica, melhora os erros numéricos e não altera a estabilidade do código para certos valores de  $L_0$ . Além disso, constatamos que aumentar a truncagem  $N$  estreita a região onde a irregularidade de certos termos das equações impacta mais na taxa de convergência da solução. Assim concluímos que a melhor estratégia para lidar com os erros numéricos neste caso é aumentar a truncagem.

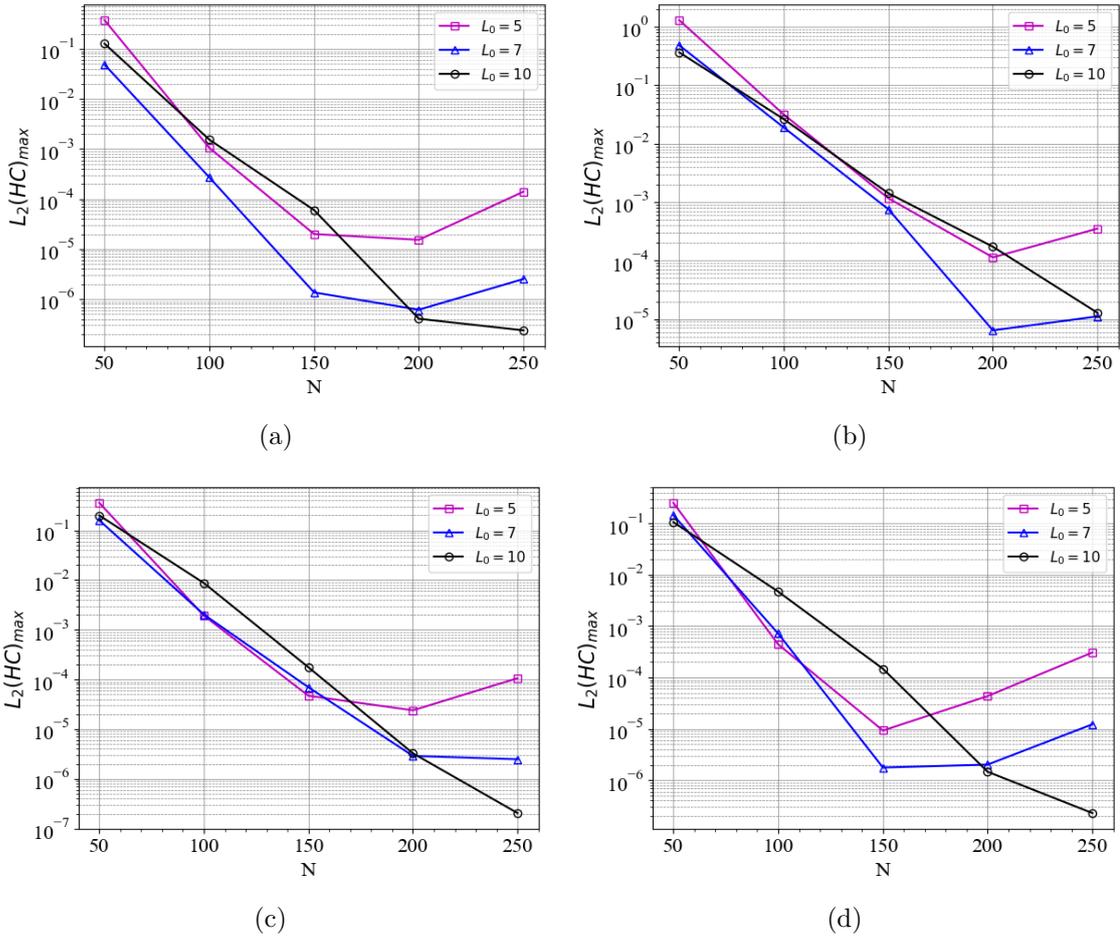
### 3.5.3 Testes numéricos para o calibre $\beta \neq 0$

Para o erro associado ao vínculo Hamiltoniano, observe nos gráficos da Fig. (24) que a curva de  $L_0 = 10$  teve maior decaimento e melhor precisão, da ordem de  $10^{-7}$  no calibre *shock avoiding* 1. No caso do calibre harmônico as curvas de  $L_0 = 7, 10$  tiveram melhor precisão, da ordem de  $10^{-5}$ . Para os demais calibres, nos casos  $L_0 = 5, 7$  houve uma tendência de piora da precisão numérica com o aumento da truncagem.

No caso do erro associado ao vínculo de momento, Fig. (25), para  $L_0 = 10$  há uma tendência de melhora na precisão com o aumento da truncagem em todos os calibres. A melhor precisão obtida neste caso é da ordem de  $10^{-7}$  nos calibres *1 + log* e *shock avoiding* 2. Para  $L_0 = 7$ , em relação a  $L_0 = 10$ , o calibre harmônico apresentou uma precisão ligeiramente melhor, da ordem de  $10^{-5}$ . Para esse mesmo calibre houve uma piora na precisão da curva de  $L_0 = 5$  ainda que aumentando a truncagem, assim também para as curvas de  $L_0 = 7$  nos demais calibres.

Para o erro relativo associado à massa ADM, observe nos gráficos da Fig. (26) que há um decaimento expressivo dos erros com o aumento da truncagem em todos os calibres. No calibre *shock avoiding* 2 a curva de  $L_0 = 10$  teve uma precisão melhor, da ordem de  $10^{-9}$ , enquanto que para os demais calibres foi melhor para  $L_0 = 7$ . Neste caso, a melhor precisão foi no calibre *1 + log*, da ordem de  $10^{-9}$ .

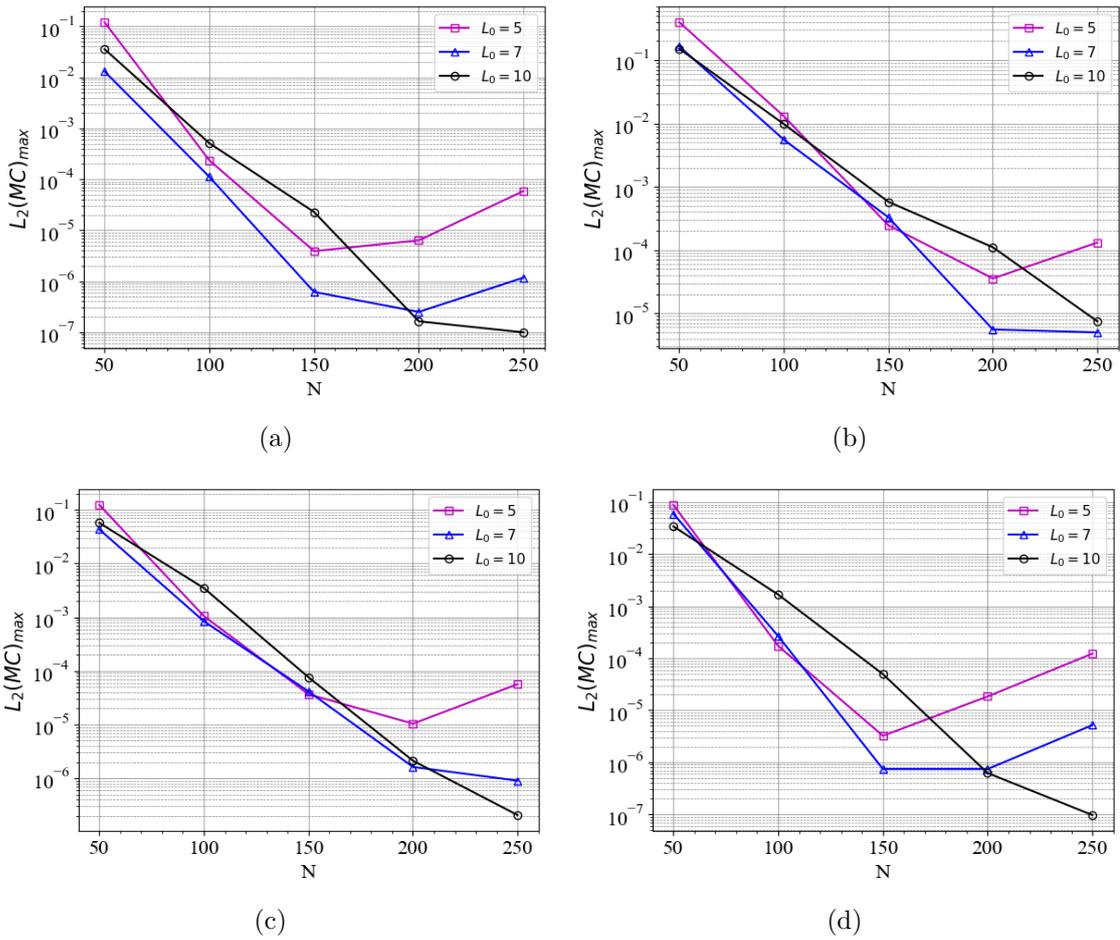
Figura 24 - Testes numéricos dos erros máximos  $L_2(HC)_{max}$  associados ao vínculo Hamiltoniano para diferentes calibres



Legenda: Slicing harmônico (a). Slicing  $1 + \log$  (b). Slicing shock avoiding 1 (c). Slicing shock avoiding 2 (d).

Fonte: A autora, 2024.

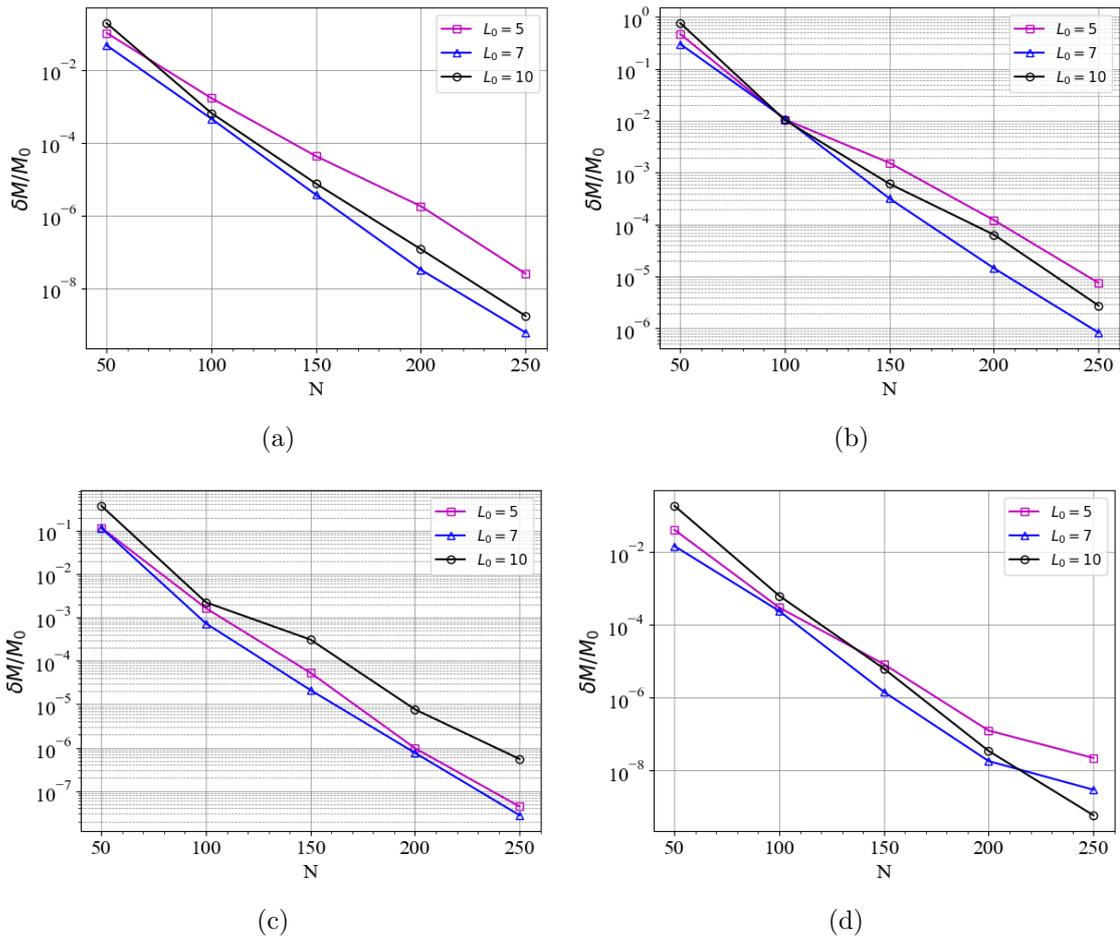
Figura 25 - Testes numéricos dos erros máximos  $L_2(MC)_{max}$  associados ao vínculo de momento para diferentes calibres



Legenda: Slicing harmônico (a). Slicing  $1 + \log$  (b). Slicing shock avoiding 1 (c). Slicing shock avoiding 2 (d).

Fonte: A autora, 2024.

Figura 26 - Testes numéricos dos erros relativos  $\delta M/M_0$  associados à massa ADM para diferentes calibres



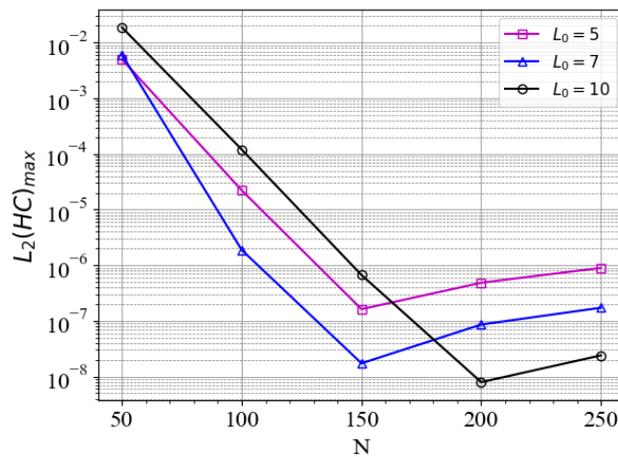
Legenda: Slicing harmônico (a). Slicing 1 + log (b). Slicing shock avoiding 1 (c). Slicing shock avoiding 2 (d).

Fonte: A autora, 2024.

### 3.5.4 Testes numéricos para o calibre maximal slicing

O código implementado para o calibre maximal slicing apresentou resultados interessantes. No caso do erro associado ao vínculo Hamiltoniano, Fig. (27), a curva de  $L_0 = 10$  teve melhor precisão, da ordem de  $10^{-8}$ . Enquanto que para as curvas de  $L_0 = 5, 7$  há inicialmente uma precisão melhor em relação a  $L_0 = 10$  e uma piora com o aumento da truncagem para esses 3 valores de parâmetros. Podemos, de fato, melhorar essa precisão aumentando a resolução numérica.

Figura 27 - Erro máximo  $L_2(HC)_{max}$  associado ao vínculo Hamiltoniano no calibre maximal slicing



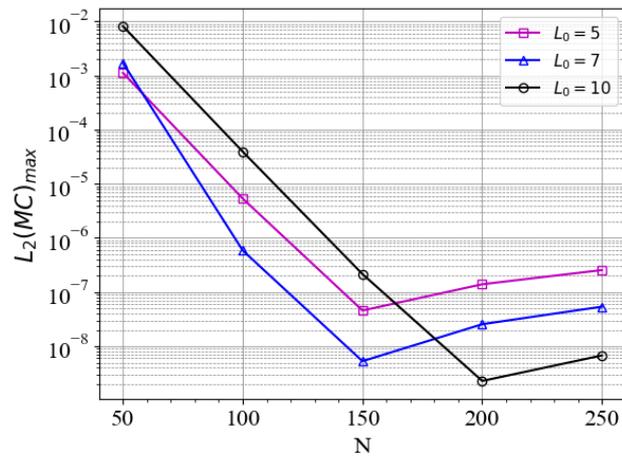
Legenda: O erro máximo associado ao vínculo Hamiltoniano apresenta um decaimento exponencial e uma tendência de aumento para maiores truncagens.

Fonte: A autora, 2024.

Os resultados foram similares no caso do erro associado ao vínculo de momento, Fig. (28). A curva para  $L_0 = 10$  teve melhor precisão, da ordem de  $10^{-8}$ , e uma tendência de piora na precisão com o aumento da truncagem.

É interessante notar que nos resultados do erro relativo da massa ADM, Fig. (29), a curva para  $L_0 = 7$  apresentou a melhor precisão numérica, da ordem de  $10^{-10}$ . Além disso, o comportamento e a precisão foram similares para  $L_0 = 5, 10$ .

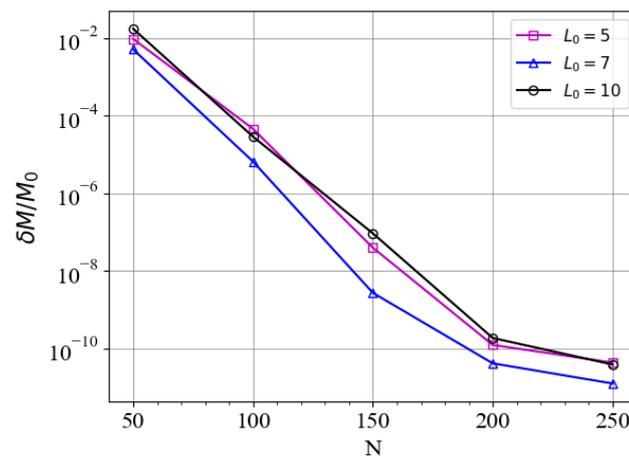
Figura 28 - Erro máximo  $L_2(MC)_{max}$  associado ao vínculo de momento no calibre maximal slicing



Legenda: O erro máximo associado ao vínculo de momento apresenta um decaimento exponencial e uma tendência de aumento para maiores truncagens.

Fonte: A autora, 2024.

Figura 29 - Erro relativo  $\delta M/M_0$  associado à massa ADM no calibre maximal slicing



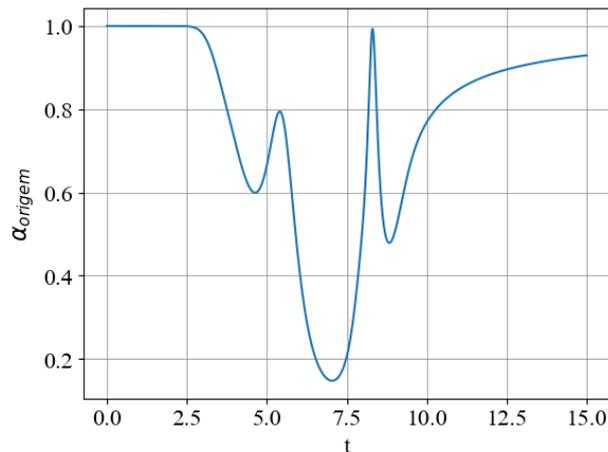
Legenda: O erro relativo absoluto associado à massa ADM apresenta um decaimento exponencial com o aumento da truncagem.

Fonte: A autora, 2024.

### 3.5.5 Aplicação: colapso de um campo escalar no calibre slicing $1 + \log$ , $\beta = 0$

A segunda simulação da dinâmica do campo escalar apresentou uma evolução similar à discutida na subseção anterior. Porém, implementamos as condições físicas do artigo de Alcubierre (Alcubierre; Mendez, 2011) para  $t = 15$  e escolhemos o calibre  $1 + \log$ ,  $\beta = 0$ . Essas condições físicas envolvem uma amplitude inicial do campo de  $A_0 = 0.209$  e o centro da gaussiana em  $r_0 = 5$ . A Fig. (30) mostra que a evolução de  $\alpha$  na origem obtida com o código espectral é idêntica à da referência. Entre  $t = 6$  e  $t = 8$   $\alpha$  decai para um valor menor que 0.2, indicando um campo gravitacional muito forte. Além disso, há um pico entre  $t = 7.5$  e  $t = 10$ , o que sugere uma implosão do campo gravitacional nesse intervalo. Porém, nenhum buraco negro se forma, uma vez que  $\alpha \rightarrow 1$  quando  $r \rightarrow \infty$ , o que sinaliza a dispersão do campo no infinito.

Figura 30 - Evolução da função lapso  $\alpha$  na origem (Slicing  $1 + \log$ ,  $L_0 = 10$ ,  $N = 450$ )



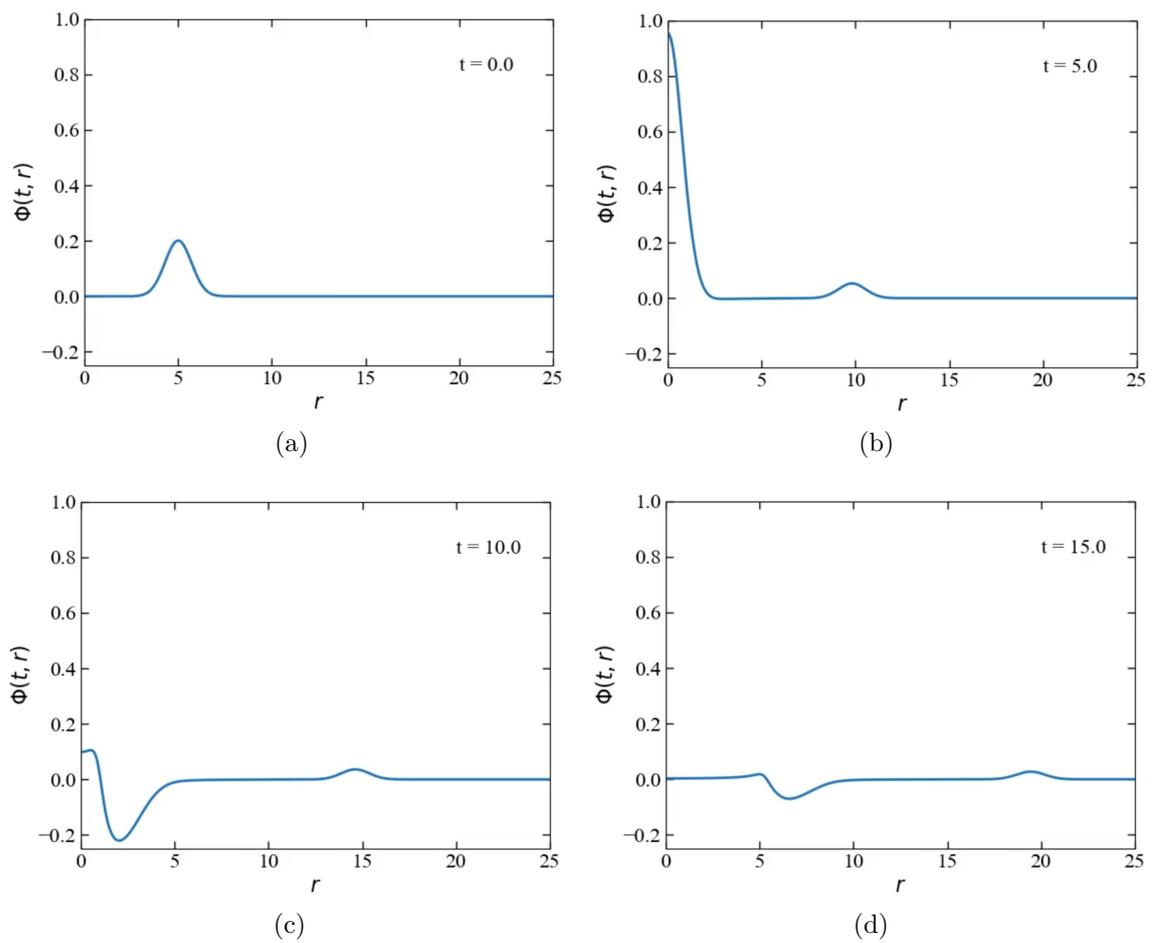
Legenda: A função lapso  $\alpha$  tem um mínimo entre  $t = 5$  e  $t = 7.5$ , indicando o instante em que o campo escalar é máximo, e um pico entre  $t = 7.5$  e  $t = 10$ , instante em que o campo implode na origem.

Fonte: A autora, 2024.

Os gráficos da Fig. (31) mostram como o pulso inicial se separa em duas partes. A parte de entrada implode na origem, é refletida com uma amplitude significativa e se afasta no mesmo sentido que a parte de saída, a de amplitude menor. A simulação permanece bem comportada em toda a região e a origem é regular a todo momento.

A menos de uma constante de normalização, a dinâmica do campo escalar descrita anteriormente é a mesma de (Alcubierre; Mendez, 2011). Nesse artigo foi utilizado o método das diferenças finitas e certas condições de regularização sobre as funções de campo para desaparecer com os termos irregulares na origem. A Fig. (32) descreve a simulação numérica usando uma malha com 800 pontos em  $r$  espaçados uniformemente (Alcubierre; Mendez, 2011).

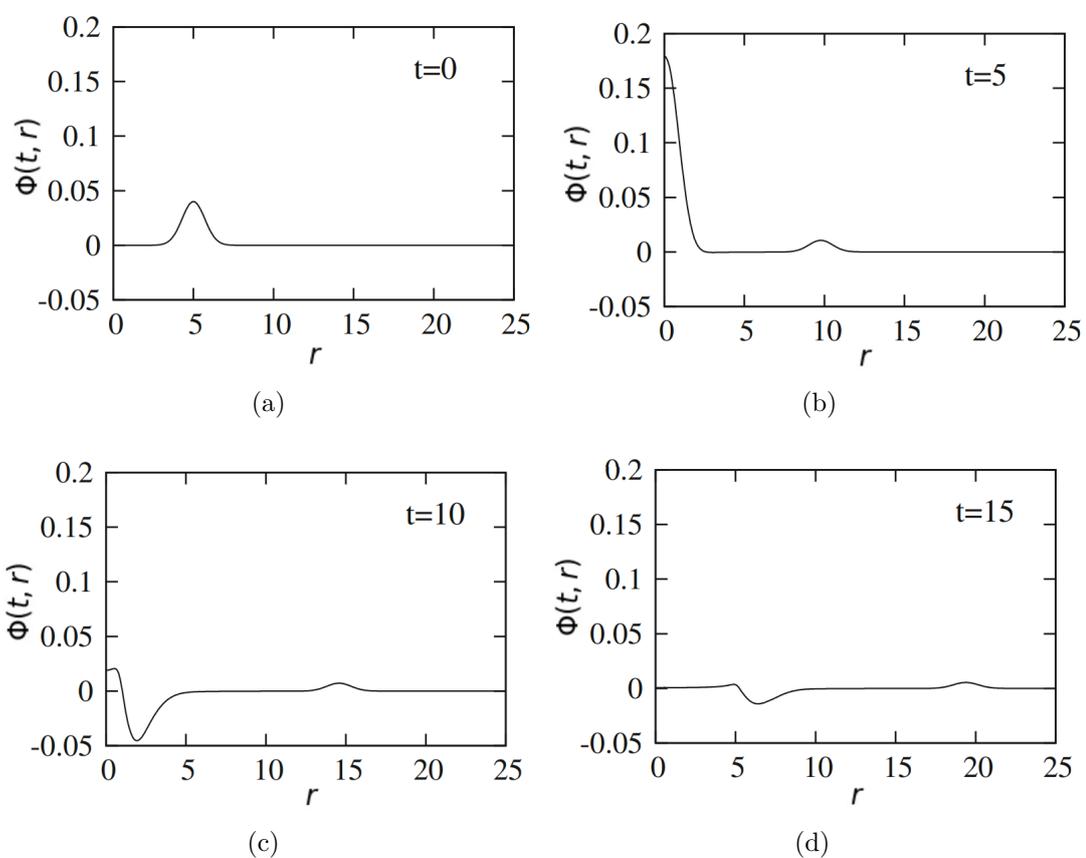
Figura 31 - Dinâmica espacial do campo escalar  $\Phi$  para  $L_0 = 10$ ,  $N = 450$ ,  $t = 15$



Legenda: O pulso inicial divide-se em uma parte de entrada e uma de saída. No instante  $t = 5.0$  a amplitude do campo é máxima. Logo, o pulso de entrada é invertido e se dispersa no infinito.

Fonte: A autora, 2024.

Figura 32 - Dinâmica espacial do campo escalar  $\Phi$  usando o método das diferenças finitas

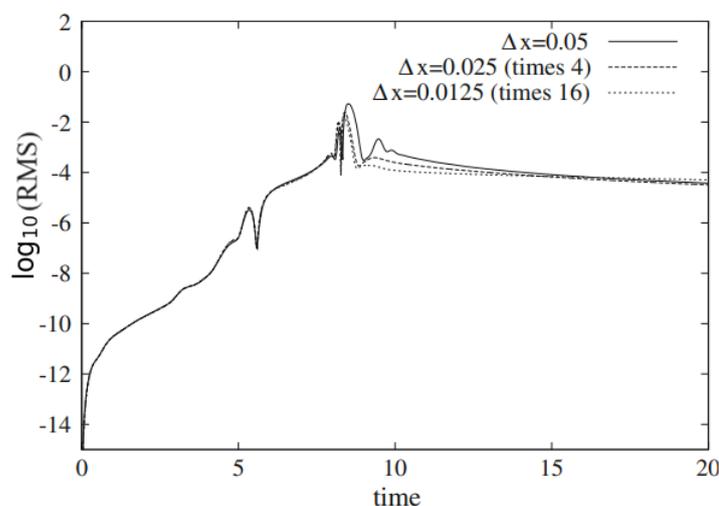


Legenda: O campo escalar da simulação utilizando diferenças finitas tem uma dinâmica idêntica à da simulação usando o método Galerkin-Colocação, Fig. (31).

Fonte: Alcubierre, 2011, p. 2798.

Observe na Fig. (33) o teste numérico aplicado por Alcubierre que mostra a evolução do erro RMS (*Root Mean Square*) associado ao vínculo Hamiltoniano. Há uma sobreposição quase perfeita das curvas dos testes realizados para  $\Delta x = 0.05$ ,  $\Delta x = 0.025$  e  $\Delta x = 0.0125$ . Note que entre  $t = 7$  e  $t = 15$  as curvas não se sobrepõem perfeitamente, mas convergem com boa precisão. Isso vem do fato de que o campo gravitacional é muito forte nesse intervalo de tempo. Portanto, no método das diferenças finitas é necessário aumentar a resolução numérica para descrever a situação apropriadamente.

Figura 33 - Evolução do erro RMS absoluto associado ao vínculo Hamiltoniano com o método das diferenças finitas (Slicing 1 + log, 800 pontos na malha numérica)



Legenda: Os testes numéricos mostram a sobreposição quase perfeita das curvas para 3 resoluções diferentes:  $\Delta x = 0.05$ ,  $\Delta x = 0.025$  e  $\Delta x = 0.0125$ .

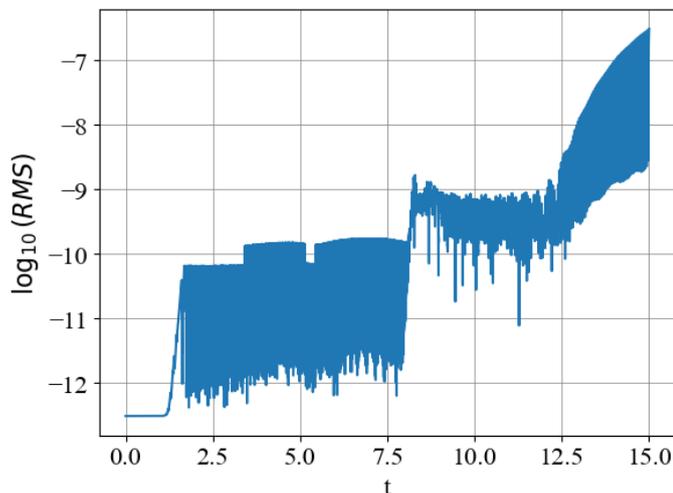
Fonte: Alcubierre, 2011, p. 2799.

A Fig. (34) mostra a evolução do erro RMS absoluto associado ao vínculo Hamiltoniano obtido com o código espectral. Observe que há uma oscilação maior dos modos espectrais no estágio final da simulação. Obtivemos uma precisão numérica melhor que a do artigo do Alcubierre, da ordem de  $10^{-7}$ , utilizando 450 pontos de colocação. No intervalo em que o campo gravitacional é mais forte, entre  $t = 5$  e  $t = 12$ , o erro manteve-se praticamente nulo e oscilou em apenas uma ordem de grandeza.

Outra maneira de validar o código espectral implementado é observar a evolução do erro RMS absoluto associado ao vínculo de momento. Na Fig. (35) notamos que o comportamento é similar ao erro associado ao vínculo Hamiltoniano. A precisão numérica é muito boa, da ordem de  $10^{-8}$ , e há uma pequena oscilação da ordem de  $10^{-2}$  entre  $t = 5$  e  $t = 12$ .

Também calculamos o erro relativo associado à massa ADM, que apresentou um valor da ordem de  $10^{-8}$ , Fig. (36). Observe uma oscilação a partir de  $t = 8$  que aumenta no estágio final da simulação. Como mencionado anteriormente, isto se deve ao fato

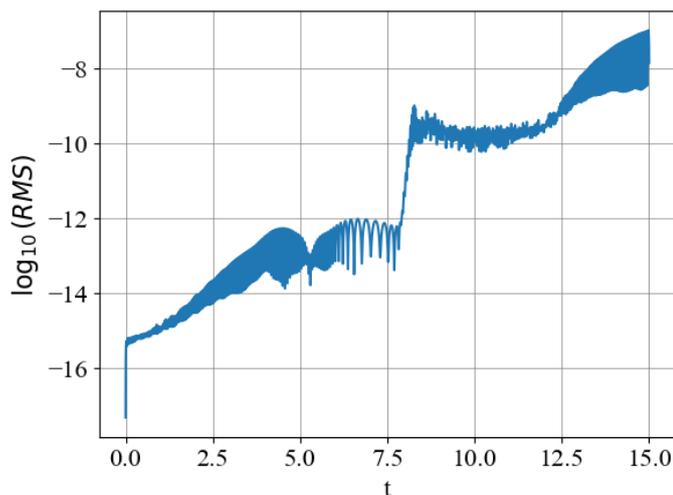
Figura 34 - Evolução do erro RMS absoluto associado ao vínculo Hamiltoniano com o método Galerkin-Colocação (Slicing  $1 + \log$ ,  $L_0 = 10$ ,  $N = 450$ )



Legenda: O erro RMS absoluto teve uma precisão máxima da ordem de  $10^{-7}$  e uma pequena oscilação no intervalo em que o campo gravitacional é mais forte, entre  $t = 5$  e  $t = 12$ .

Fonte: A autora, 2024.

Figura 35 - Evolução do erro RMS absoluto associado ao vínculo de momento com o método Galerkin-Colocação (Slicing  $1 + \log$ ,  $L_0 = 10$ ,  $N = 450$ )

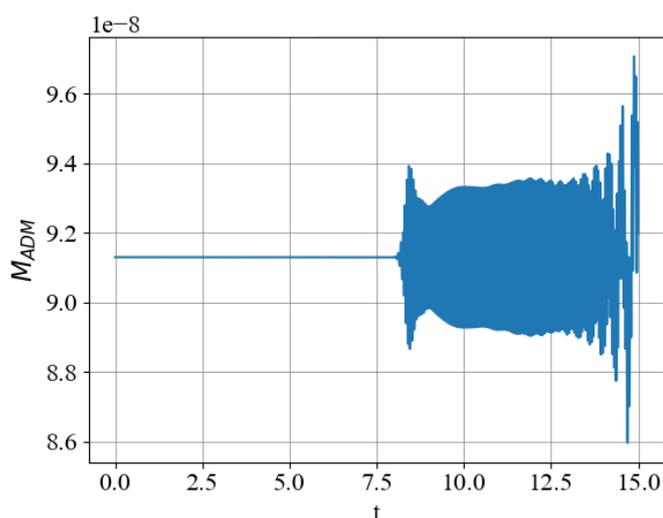


Legenda: O erro RMS absoluto tem uma precisão máxima da ordem de  $10^{-8}$  e uma pequena oscilação no intervalo em que o campo gravitacional é mais forte, entre  $t = 5$  e  $t = 12$ .

Fonte: A autora, 2024.

de que no método Galerkin-Colocação os pontos de colocação não estão uniformemente espaçados e perde-se resolução na malha numérica devido ao espaçamento maior entre os pontos mais afastados da origem.

Figura 36 - Evolução do erro relativo associado à massa ADM com o método Galerkin-Colocação (Slicing  $1 + \log$ ,  $L_0 = 10$ ,  $N = 450$ )

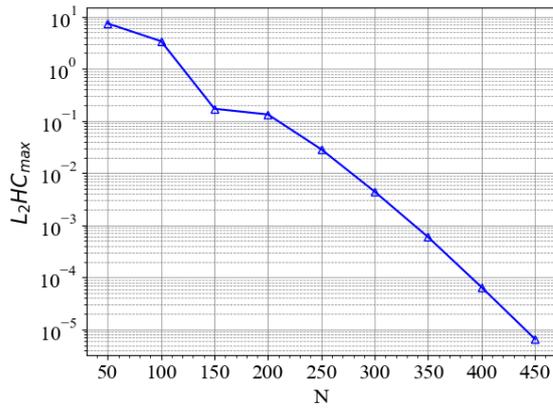


Legenda: O erro relativo tem uma precisão máxima da ordem de  $10^{-8}$  e apresenta uma oscilação a partir de  $t = 8$ .

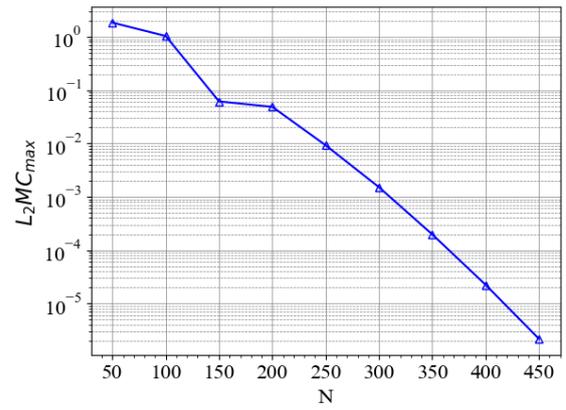
Fonte: A autora, 2024.

Nos gráficos da Fig. (37) observamos o decaimento significativo dos erros associados às grandezas descritas acima ao realizarmos simulações para um intervalo de tempo  $t = 15$ . À medida que a truncagem aumenta é esperada uma melhora significativa na precisão numérica. Porém, a escolha do parâmetro de mapa ideal pode ser feita utilizando alguma equação (Mendonça, 2019). Neste caso escolhemos  $L_0 = 10$  *ad hoc*, mas é possível variar  $L_0$  durante a integração numérica até encontrar um valor ótimo que melhore a precisão sem a necessidade de continuar aumentando a truncagem.

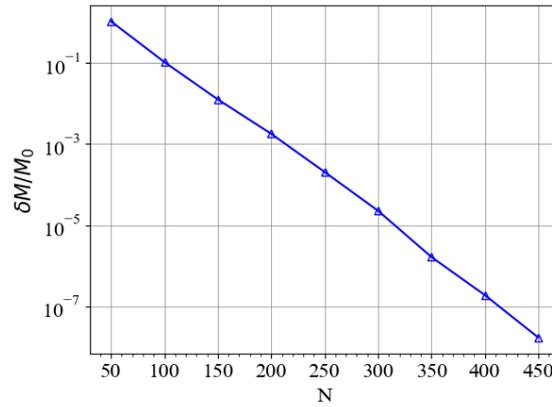
Figura 37 - Testes numéricos dos erros máximos  $L_2$  associados aos vínculos Hamiltoniano, de momento e do erro relativo da massa ADM (Slicing  $1 + \log$ ,  $L_0 = 10$ ,  $t = 15$ )



(a)



(b)



(c)

Legenda: Erro associado ao vínculo Hamiltoniano (a). Erro associado ao vínculo de momento (b). Erro associado à massa ADM (c).

Fonte: A autora, 2024.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O principal resultado deste trabalho é a aplicação bem sucedida de códigos numéricos baseados no método Galerkin-Colocação na resolução das equações do formalismo BSSN em simetria esférica. Utilizou-se um campo escalar como *toy model*, o que resultou ser extremamente útil para entender o colapso gravitacional e as condições iniciais que levam à dispersão do campo no infinito em diferentes calibres.

Os códigos numéricos implementados mostraram-se estáveis e altamente precisos. Com as simulações desenvolvidas obteve-se de forma satisfatória a evolução espaço-temporal do campo escalar. Constatamos que o método Galerkin-Colocação em um domínio é de implementação simples e é efetivo na expansão espectral das funções de campo. Ao longo da pesquisa procuramos documentar todo o desenvolvimento e apontar as principais vantagens e desvantagens deste método, a modo de considerar as particularidades de cada calibre utilizado.

Em relação à aplicação de filtros, observou-se que são efetivos nos casos que envolvem um mapeamento pouco ideal da malha numérica. Dentre tantas opções, o filtro exponencial foi adequado para o método Galerkin-Colocação, mas a melhor maneira de usar filtros ainda é uma questão a ser testada exaustivamente. Outra estratégia para aumentar a precisão numérica é aplicar a técnica de decomposição de domínios. Nesse sentido, o valor do parâmetro de mapa e a quantidade de domínios podem impactar o desempenho dos códigos numéricos. Abordagem que pode ser testada em trabalhos futuros.

As medidas de erro dos vínculos Hamiltoniano e de momento e da conservação da massa ADM validaram com sucesso os códigos implementados. A integração numérica e a obtenção de animações em Python resultou ser mais rápida e vantajosa, enquanto que o processamento computacional em Matlab tomou um tempo 7 vezes maior. Mesmo para truncagens baixas, o método Galerkin-Colocação apresentou boa convergência no primeiro experimento numérico. Cabe destacar que a precisão foi melhor para o caso mais simples,  $\beta = 0$ . O calibre maximal slicing teve melhor precisão, como esperado, quando comparado aos demais calibres para  $\beta \neq 0$ . Porém, o desempenho computacional destes calibres foi melhor que a do maximal slicing, entorno de 3 vezes maior rapidez na execução das simulações.

O segundo experimento numérico reproduziu os mesmos resultados da literatura com uma precisão numérica melhor. A grande virtude das técnicas utilizadas neste trabalho é a reprodução dos resultados de Alcubierre com melhor precisão, ainda que com baixa truncagem. Nesse sentido, o método Galerkin-Colocação foi muito vantajoso. Também destacamos que os códigos realizaram integrações no regime de campo forte e ainda assim as simulações mostraram-se bem comportadas até o final da simulação. Tal como

no primeiro experimento, as medidas de erros numéricos também validaram os códigos construídos. Portanto, é possível aplicar estes códigos para resolver outros casos e obter, com boa precisão, grandezas físicas associadas ao colapso gravitacional.

As perspectivas relacionadas aos códigos desenvolvidos até aqui envolvem a verificação de condições iniciais para fenômenos críticos no colapso gravitacional. Além disso, pretende-se explorar o comportamento do campo escalar para diferentes potenciais de auto-interação. A curto prazo almejamos sondar a interação do campo escalar com um BN e também utilizar esses códigos para simular a dinâmica de um binário de BH com extração de OGs.

Atualmente os esforços estão voltados para a finalização de simulações de colapso gravitacional com formação de horizonte aparente. Também está em curso a construção de um código em Python que configura e treina uma rede neural para resolver o mesmo problema abordado neste trabalho. A ideia é testar técnicas avançadas de *deep learning*, por exemplo, as *Physics-Informed Neural Networks* (PINNs), e posteriormente aplicá-las na resolução de outros problemas mais complexos da astrofísica.

Os principais resultados deste trabalho mostram a viabilidade dos códigos construídos para a resolução de problemas da RG no regime de campo forte. Com um ajuste adequado dos parâmetros  $L_0$ ,  $N$ , fatores de filtragem e decomposição de domínios é possível realizar simulações de alta precisão em regime de campo forte e com um custo computacional baixo. A grande importância deste trabalho reside na viabilização de códigos robustos e muito precisos que permitam o estudo de diversos problemas envolvendo campos escalares de interesse da astrofísica. Disponibilizando os códigos em repositórios como Github, por exemplo, podemos expandir a colaboração com outros grupos de pesquisa em RN. Além de fortalecer a troca de conhecimentos e técnicas com os interessados, pretendemos fazer a manutenção e a melhoria constante desses códigos e aumentar a produção de novas simulações.

Estas iniciativas fazem parte de uma proposta que viabilize a automatização de técnicas computacionais baseadas no formalismo BSSN. A longo prazo, vislumbra-se a implementação de um código que seja capaz de caracterizar, por exemplo, dados de detectores de OGs. Nesse sentido, será possível tanto a simulação com alta estabilidade e precisão envolvendo BNs, quanto a descoberta de fenômenos ainda não estudados analítica e experimentalmente.

## REFERÊNCIAS

- ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, [S.l.]. v. 116, n. 6, p. 061102, 2016.
- ALCOFORADO, M. A. et al. New numerical framework for the generalized Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura formulation: The vacuum case for spherical symmetry. *Phys. Rev. D*, [S.l.]. v. 104, p. 084065, Oct 2021.
- ALCUBIERRE, M. Hyperbolic slicings of spacetime: singularity avoidance and gauge shocks. *Classical and Quantum Gravity*, [S.l.]. v. 20, n. 4, p. 607, 2003.
- ALCUBIERRE, M. The status of numerical relativity. [S.l.]. p. 3–22, 2005.
- ALCUBIERRE, M. *Introduction to 3+1 numerical relativity*. [S.l.]: OUP Oxford, 2008. v. 140.
- ALCUBIERRE, M.; BRÜGMANN, B. Simple excision of a black hole in 3 + 1 numerical relativity. *Phys. Rev. D*, [S.l.]. v. 63, p. 104006, 2001.
- ALCUBIERRE, M.; MENDEZ, M. D. Formulations of the 3+1 evolution equations in curvilinear coordinates. *General Relativity and Gravitation*, [S.l.]. v. 43, p. 2769–2806, 2011.
- ANNINOS, P. et al. 3D numerical relativity at ncsa. arxiv preprint gr-qc/9412059. [S.l.]. 1994.
- ANNINOS, P. et al. Three-dimensional numerical relativity: The evolution of black holes. *Phys. Rev. D*, [S.l.]. v. 52, n. 4, p. 2059, 1995.
- ARANHA, R. F. ET AL. *Código RIO*. 2024.  
Disponível em: <https://github.com/aranharafael/aranharafael.github.io>, Acesso em: 31 mar. 2024.
- ARNOWITT, R.; DESER, S.; MISNER, C. W. Republication of: The dynamics of general relativity. *General Relativity and Gravitation*, [S.l.]. v. 40, p. 1997–2027, 2008.
- BAKER, J.; CAMPANELLI, M.; LOUSTO, C. O. The Lazarus project: A pragmatic approach to binary black hole evolutions. *Phys. Rev. D*, [S.l.]. v. 65, n. 4, p. 044001, 2002.
- BAKER, J. G. et al. Gravitational-wave extraction from an inspiraling configuration of merging black holes. *Phys. Rev. Lett.*, [S.l.]. v. 96, n. 11, p. 111102, 2006.
- BARLOW, N. S. ET AL. *Numerical Relativity Group*. 2024.  
Disponível em: <https://ccrg.rit.edu/>, Acesso em: 31 mar. 2024.
- BARRETO, W. et al. RIO: A new computational framework for accurate initial data of binary black holes. *General Relativity and Gravitation*, [S.l.]. v. 50, p. 1–13, 2018.
- BAUMGARTE, T. W.; SHAPIRO, S. L. Numerical integration of Einstein's field equations. *Phys. Rev. D*, [S.l.]. v. 59, p. 024007, 1998.

- BAUMGARTE, T. W.; SHAPIRO, S. L. Numerical relativity and compact binaries. *Physics Reports*, [S.l.]. v. 376, n. 2, p. 41–131, 2003.
- BAUMGARTE, T. W.; SHAPIRO, S. L. *Numerical relativity: solving Einstein's equations on the computer*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010.
- BERNSTEIN, D. H. *A Numerical Study of the Black Hole Plus Brill Wave Spacetime*. 1993. Tese (Doutorado) — University of Illinois at Urbana, Champaign, 1993.
- BONA, C.; MASSÓ, J. Harmonic synchronizations of spacetime. *Phys. Rev. D*, [S.l.]. v. 38, p. 2419–2422, Oct 1988.
- BONA, C. et al. New formalism for numerical relativity. *Phys. Rev. Lett.*, [S.l.]. v. 75, p. 600–603, Jul 1995.
- BOYD, J. P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. [S.l.]: Mathematics Dover Publications, 2001.
- BOYD, J. P. Finding the zeros of a univariate equation: proxy rootfinders, Chebyshev interpolation, and the companion matrix. *SIAM Rev.*, [S.l.]. v. 55, n. 2, p. 375–396, 2013.
- BRITANNICA, T. E. OF E. *Ernst Mach*. 2024.  
Disponível em: <https://www.britannica.com/biography/Ernst-Mach>, Acesso em: 31 mar. 2024.
- BROWN, D. J. Covariant formulations of Baumgarte, Shapiro, Shibata, and Nakamura and the standard gauge. *Phys. Rev. D*, [S.l.]. v. 79, p. 104029, May 2009.
- BRYAN, G. L. et al. Theoretical astrophysics: computational astrophysics. In: 12TH KINGSTON MEETING ON THEORETICAL ASTROPHYSICS. *ASP Conf. Ser.*, [S.l.]. v. 123, 1997.
- CAMPANELLI, M. et al. Accurate evolutions of orbiting black-hole binaries without excision. *Phys. Rev. Lett.*, [S.l.]. v. 96, n. 11, p. 111101, 2006.
- CANUTO, C. et al. *Spectral methods: fundamentals in single domains*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007.
- CHOPTUIK, M. W. Universality and scaling in gravitational collapse of a massless scalar field. *Phys. Rev. Lett.*, [S.l.]. v. 70, n. 1, p. 9, 1993.
- CHOQUET-BRUHAT, Y. *General relativity and the Einstein equations*. [S.l.]: OUP Oxford, 2008.
- CHOQUET-BRUHAT, Y.; GEROCH, R. Global aspects of the Cauchy problem in general relativity. *Communications in Mathematical Physics*, [S.l.]. v. 14, p. 329–335, 1969.
- CHOQUET-BRUHAT, Y.; RUGGERI, T. Hyperbolicity of the 3 + 1 system of Einstein equations. *Commun. Math. Phys.*, [S.l.]. v. 89, p. 269–275, 1983.
- DARMOIS, G. *Les équations de la gravitation einsteinienne*. [S.l.]: Gauthier-Villars et. cie., 1927.

- DEWITT, B. S. Quantum theory of gravity. i. the canonical theory. *Phys. Rev.*, [S.l.]. v. 160, n. 5, p. 1113, 1967.
- DEWITT, C.; DEWITT, B. J. A. Wheeler, in: *Relativity, groups and topology. Relativité*, [S.l.]. 1964.
- EINSTEIN, A. Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento. *Annalen Der Physik*, [S.l.]. v. 17, n. 4, p. 1–26, 1905.
- EINSTEIN, A. Die feldgleichungen der gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, [S.l.]. p. 844–847, 1915.
- EPPLEY, K. Evolution of time-symmetric gravitational waves: Initial data and apparent horizons. *Phys. Rev. D*, [S.l.]. v. 16, n. 6, p. 1609, 1977.
- FORNBERG, B. *A practical guide to pseudospectral methods*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996.
- FOURES-BRUHAT, Y. Sur l'intégration des équations de la relativité générale. *Journal of rational mechanics and analysis*, [S.l.]. v. 5, n. 6, p. 951–966, 1956.
- FRIEDRICH, H. On the hyperbolicity of Einstein's and other gauge field equations. *Communications in Mathematical Physics*, [S.l.]. v. 100, p. 525–543, 1985.
- GARFINKLE, D. Harmonic coordinate method for simulating generic singularities. *Phys. Rev. D*, [S.l.]. v. 65, p. 044029, Jan 2002.
- GOURGOULHON, E. *3+1 formalism in general relativity*. [S.l.]: Springer, 2012.
- HAHN, S. G.; LINDQUIST, R. W. The two-body problem in geometrodynamics. *Annals of Physics*, [S.l.]. v. 29, n. 2, p. 304–331, 1964.
- HEINRICHS, W. Improved condition number for spectral methods. *Mathematics of Computation*, [S.l.]. v. 53, n. 187, p. 103–119, 1989.
- HEINRICHS, W. Stabilization techniques for spectral methods. *Journal of Scientific Computing*, [S.l.]. v. 6, p. 1–19, 1991.
- HESTHAVEN, J. S.; KIRBY, R. M. Filtering in Legendre spectral methods. *Math. Comp.*, [S.l.]. v. 77, p. 1425–1452, 2008.
- HEYDEMAN, M. ET AL. *Black Hole Initiative*. 2024.  
Disponível em: <https://bhi.fas.harvard.edu/>, Acesso em: 31 mar. 2024.
- KIDDER, L. ET AL. *Spectral Einstein Code*. 2024.  
Disponível em: <https://www.black-holes.org/code/SpEC.html>, Acesso em: 31 mar. 2024.
- KOVACS, A. *The Cauchy problem and the initial data problem in effective theories of gravity*. 2021. Tese (Doutorado) — University of Cambridge, Cambridge, 2021.
- LICHNEROWICZ, A. Sur certains problemes globaux relatifs au systeme des equations d'Einstein. [S.l.]. 1939.

- LICHNEROWICZ, A. L'intégration des équations de la gravitation relativiste et le problème des  $n$  corps. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, [S.l.]. v. 9e série, 23, p. 37–63, 1944.
- MATZNER, R. ET AL. *Numerical Relativity Group na University of Texas at Austin*. 2024.  
Disponível em: <https://wwwrel.ph.utexas.edu/>, Acesso em: 31 mar. 2024.
- MENDONÇA, T. d. S. *Métodos espectrais aplicados à dinâmica de defeitos topológicos e oscilons*. 2019. Tese (Doutorado) — Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.
- MISNER, C. W. Wormhole initial conditions. *Phys. Rev.*, [S.l.]. v. 118, n. 4, p. 1110, 1960.
- MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. [S.l.]: Macmillan, 1973.
- MONTERO, P. J.; CORDERO-CARRIÓN, I. Bssn equations in spherical coordinates without regularization: Vacuum and nonvacuum spherically symmetric spacetimes. *Phys. Rev. D*, [S.l.]. v. 85, n. 12, p. 124037, 2012.
- NAKAMURA, T. 3D numerical relativity. Relativistic Cosmology. In: NISHINOMIYA-YUKAWA MEMORIAL SYMPOSIUM. [S.l.]. p. 8, 1994.
- NAKAMURA, T.; OOHARA, K.; KOJIMA, Y. General relativistic collapse to black holes and gravitational waves from black holes. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, [S.l.]. v. 90, p. 1–218, 1987.
- NEWTON, I. Principia mathematica. *Book III, Lemma V, Case*, [S.l.]. v. 1, p. 1687, 1934.
- OHME, F. ET AL. *Binary Merger Observations and Numerical Relativity*. 2024.  
Disponível em: <https://www.aei.mpg.de/>, Acesso em: 31 mar. 2024.
- PORSCHING, T. A. Numerical solution of partial differential equations: Finite difference methods. *SIAM Review*, [S.l.]. v. 22, n. 3, p. 376–376, 1980.
- PRETORIUS, F. Evolution of binary black-hole spacetimes. *Physical review letters*, [S.l.]. v. 95, n. 12, p. 121101, 2005.
- RINGSTRÖM, H. Origins and development of the Cauchy problem in general relativity. *Classical and Quantum Gravity*, [S.l.]. v. 32, n. 12, p. 124003, jun 2015.
- ROVELLI, C. Loop quantum gravity. *Living Reviews in Relativity*, [S.l.]. v. 11, p. 1–69, 2008.
- SCOTT, M. *Simulating Xtreme Spacetime*. 2024.  
Disponível em: <https://www.black-holes.org/>, Acesso em: 31 mar. 2024.
- SHIBATA, M.; NAKAMURA, T. Evolution of three-dimensional gravitational waves: Harmonic slicing case. *Phys. Rev. D*, [S.l.]. v. 52, n. 10, p. 5428, 1995.

SMARR, L. *Sources of Gravitational Radiation: Proceedings of the Battelle Seattle Workshop*. [S.l.]: CUP Archive, 1979.

SMARR, L. et al. Collision of two black holes: Theoretical framework. *Phys. Rev. D*, [S.l.]. v. 14, n. 10, p. 2443, 1976.

SMARR, L.; EPSTEIN, R.; CLARK, J. P. A. *Sources of gravitational radiation*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1978.

SMARR, L.; YORK, J. W. Kinematical conditions in the construction of spacetime. *Phys. Rev. D*, [S.l.]. v. 17, p. 2529–2551, May 1978.

SOPUERTA, C. F.; YUNES, N.; LAGUNA, P. Gravitational recoil from binary black hole mergers: The close-limit approximation. *Phys. Rev. D*, [S.l.]. v. 74, n. 12, p. 124010, 2006.

SOPUERTA, C. F.; YUNES, N.; LAGUNA, P. Erratum: Gravitational recoil from binary black hole mergers: The close-limit approximation. *Phys. Rev. D*, [S.l.]. v. 65, n. 13, p. 069903, 2007.

SOPUERTA, C. F.; YUNES, N.; LAGUNA, P. Erratum: Gravitational recoil from binary black hole mergers: The close-limit approximation. *Phys. Rev. D*, [S.l.]. v. 78, n. 4, p. 049901, 2008.

VRETINARIS, S. ET AL. *The Einstein Toolkit*. 2024.

Disponível em: <https://einstein toolkit.org/index.html>, Acesso em: 31 mar. 2024.

WHEELER, J. A. *Geometrodynamics and the issue of the final state*. [S.l.]: Gordon and Breach, 1964.

WHEELER, J. A. A journey into gravity and spacetime. *Scientific American Library*, [S.l.]. 1990.

YORK, J. W. Gravitational degrees of freedom and the initial-value problem. *Phys. Rev. Lett.*, [S.l.]. v. 26, p. 1656–1658, Jun 1971.

YORK, J. W. Role of conformal three-geometry in the dynamics of gravitation. *Phys. Rev. Lett.*, [S.l.]. v. 28, p. 1082–1085, Apr 1972.

YORK, J. W. Kinematics and dynamics of general relativity. [S.l.]. p. 83–126, 1978.

## APÊNDICE A – Algoritmo espectral

Este apêndice contém a descrição do algoritmo espectral para a resolução das equações dinâmicas de um campo escalar  $\Phi$ , sem  $\beta$ . O calibre considerado é o slicing  $1 + \log$ .

---

### Algoritmo 1 Funções principais P1

---

```

1: Função gerar_pontos_colocação(N, L0):
2: col <- cos(arange(2*N+3)*pi/(2*N+2))
3: colr <- col[1:N+2]
4: Retornar L0*colr/(sqrt(1 - colr2))
5: Função gerar_funções_base_impares(N, L0, r):
6: SB_impares <- matriz_zeros(N+1, N+1)
7: rSB_impares <- matriz_zeros(N+1, N+1)
8: rrSB_impares <- matriz_zeros(N+1, N+1)
9: Para i de 0 até N:
10: SB_impares[i,] <- sin((2*i+1)*arctan(L0/r))
11: Para i de 0 até N:
12: rSB_impares[i,] <- -cos((2*i+1)*arctan(L0/r))*(2*i+1)*L0/(r2*(1+L02/r2))
13: Para i de 0 até N:
14: rrSB_impares[i,] <- -sin((2*i+1)*arctan(L0/r))*(2*i+1)2*L02/(r4*(1+L02/r2)2)
    + 2*cos((2*i+1)*arctan(L0/r))*(2*i+1)*L0/(r3*(1+L02/r2)) -
    2*cos((2*i+1)*arctan(L0/r))*(2*i+1)*L03/(r5*(1+L02/r2)2)
15: Retornar SB_impares, rSB_impares, rrSB_impares, inversa(SB_impares)
16: Função aproximação_espectral_PHI(a0, SB_impares, rSB_impares,
    rrSB_impares):
17: Retornar a0*SB_impares, a0*rSB_impares, a0*rrSB_impares
18: Função gerar_grafico_base_funções_impares(N, L0, M, rplot):
19: SB_impares_plot <- matriz_zeros(N+1, M)
20: rSB_impares_plot <- matriz_zeros(N+1, M)
21: rrSB_impares_plot <- matriz_zeros(N+1, M)
22: Para i de 0 até N:
23: SB_impares_plot[i,] <- sin((2*i+1)*arctan(L0/rplot))
24: Para i de 0 até N:
25: rSB_impares_plot[i,] <- -cos((2*i+1)*arctan(L0/rplot))*(2*i+1)*L0/(rplot2*(1+
26: L02/rplot2))
27: Para i de 0 até N:
28: rrSB_impares_plot[i,] <- -sin((2*i+1)*arctan(L0/rplot))*(2*i+1)2*L02/(rplot4*(1+
29: L02/rplot2)2) + 2*cos((2*i+1)*arctan(L0/rplot))*(2*i+1)*
30: L0/(rplot3*(1+L02/rplot2)) - 2*cos((2*i+1)*arctan(L0/rplot))*
31: (2*i+1)*L03/(rplot5*(1+L02/rplot2)2)
32: Retornar SB_impares_plot, rSB_impares_plot, rrSB_impares_plot

```

---

---

**Algoritmo 2** Funções principais P2
 

---

- 1: **Função gerar\_grafico\_inicial\_PHI**(N, L0, rs, rplot, PHIplot\_init, PHIplot\_N):
  - 2: Criar Figura
  - 3: Criar Eixo
  - 4: Plotar rplot, PHIplot\_init com label Phi\_exato
  - 5: Plotar rplot, PHIplot\_N com linha tracejada e label Phi\_N
  - 6: Definir label do eixo x como "r"
  - 7: Definir limite do eixo x de 0 a rs
  - 8: Definir label do eixo y como "Phi\_exato"
  - 9: Adicionar legenda
  - 10: Salvar figura como "grafico\_phi\_inicial\_2D.png"
  - 11: Mostrar figura
  - 12: **Função gerar\_grafico\_erro\_PHI**(N, L0, rs, rplot, PHIplot\_init, PHIplot\_N):
  - 13: Criar Figura
  - 14: Calcular erro como valor absoluto de (PHIplot\_init - PHIplot\_N)
  - 15: Criar Eixo
  - 16: Plotar rplot, erro
  - 17: Definir label do eixo x como "r"
  - 18: Definir limite do eixo x de 0 a rs
  - 19: Definir label do eixo y como  $|\text{Phi\_exato} - \text{Phi\_N}|$
  - 20: Salvar figura como "erro\_phi\_inicial\_2D.png"
  - 21: Mostrar figura
  - 22: **Função gerar\_grafico\_3D\_estatico**(N, L0, rplot, PHIplot\_init):
  - 23: Criar Figura com tamanho de 13x13 polegadas
  - 24: Criar Eixo 3D
  - 25: Definir label do eixo x como "r" com fonte de tamanho 25
  - 26: Definir label do eixo y como "r" com fonte de tamanho 25
  - 27: Definir label do eixo z como "Phi\_exato" com fonte de tamanho 25
  - 28: Remover marcações dos eixos x, y e z
  - 29: Gerar matriz de coordenadas  $x_n, y_n, z_n$
  - 30: Plotar superfície com  $x_n, y_n, z_n$ , definindo rstride como 1, estride como 1, cmap como "magma" e sem bordas
  - 31: Definir ângulos de visualização com elevação de 30 graus e azimute de 30 graus
  - 32: Salvar figura como "grafico\_phi\_inicial\_3D.png"
  - 33: Mostrar figura
  - 34: **Função gerar\_grafico\_inicial\_Alpha**(N, L0, rs, rplot, Alphaplot\_init, Alphaplot\_N):
  - 35: Configurar "font.family" = "Times New Roman"
  - 36: Configurar "font.size" = 16
  - 37: Criar figura com dois subplots, com tamanho (10, 5)
  - 38: Plotar rplot versus Alphaplot\_init com label alpha\_0
  - 39: Plotar rplot versus Alphaplot\_N com linha tracejada e label alpha\_N
  - 40: Definir rótulo do eixo x como "r"
  - 41: Definir limite do eixo x de 0 a rs
  - 42: Definir rótulo do eixo y como "alpha\_0"
  - 43: Adicionar legenda
-

---

**Algoritmo 3** Funções principais P3
 

---

- 1: Calcular erro como valor absoluto de (Alphaplot\_init - Alphaplot\_N)
  - 2: Plotar rplot versus erro
  - 3: Definir título "Erro  $|\alpha_0 - \alpha_N|$  para  $L_0, N$ "
  - 4: Definir rótulo do eixo x como "r"
  - 5: Definir limite do eixo x de 0 a rs
  - 6: Definir rótulo do eixo y como  $\alpha_0 - \alpha_N$ "
  - 7: Adicionar legenda
  - 8: Ajustar layout
  - 9: Mostrar figura
  - 10: **Função gerar\_grafico\_inicial\_Alpha(N, L0, rs, rplot, Alphaplot\_init, Alphaplot\_N):**
  - 11: Configurar "font.family"= "Times New Roman"
  - 12: Configurar "font.size"= 16
  - 13: Criar figura com dois subplots, com tamanho (10, 5)
  - 14: Plotar rplot versus Alphaplot\_init com label  $\alpha_0$
  - 15: Plotar rplot versus Alphaplot\_N com linha tracejada e label  $\alpha_N$
  - 16: Definir rótulo do eixo x como "r"
  - 17: Definir limite do eixo x de 0 a rs
  - 18: Definir rótulo do eixo y como "alpha\_0"
  - 19: Adicionar legenda
  - 20: Calcular erro como valor absoluto de (Alphaplot\_init - Alphaplot\_N)
  - 21: Plotar rplot versus erro
  - 22: Definir título como "Erro  $|\alpha_0 - \alpha_N|$  para  $L_0, N$ "
  - 23: Definir rótulo do eixo x como "r"
  - 24: Definir limite do eixo x de 0 a rs
  - 25: Definir rótulo do eixo y como  $\alpha_0 - \alpha_N$ "
  - 26: Adicionar legenda
  - 27: Ajustar layout
  - 28: Mostrar figura
  - 29: **Função gerar\_funções\_base\_media(N, SB\_impares, rSB\_impares, rrSB\_impares):**
  - 30: Calcular média de SB\_impares em cada linha
  - 31: Calcular média de rSB\_impares em cada linha
  - 32: Calcular média de rrSB\_impares em cada linha
  - 33: Retornar SB\_av, rSB\_av, rrSB\_av, inversa(SB\_av[:,1:N+1])
  - 34: **Função gerar\_grafico\_base\_funções\_media(N, SB\_impares\_pares, rSB\_impares\_plot, rrSB\_impares\_plot):**
  - 35: Calcular média de SB\_impares\_pares em cada linha
  - 36: Calcular média de rSB\_impares\_plot em cada linha
  - 37: Calcular média de rrSB\_impares\_plot em cada linha
  - 38: Retornar SB\_av\_plot, rSB\_av\_plot, rrSB\_av\_plot
  - 39: **Função gerar\_grafico\_inicial\_a(N, L0, rs, rplot, aplot\_init, aplot\_N):**
  - 40: Configurar "font.family"= "Times New Roman"
  - 41: Configurar "font.size"= 16
  - 42: Criar figura com dois subplots, com tamanho (10, 5)
  - 43: Plotar rplot versus aplot\_init com label  $a_0$
  - 44: Plotar rplot versus aplot\_N com linha tracejada e label  $a_N$
  - 45: Definir rótulo do eixo x como "r"
-

---

**Algoritmo 4** Funções principais P4
 

---

- 1: Definir limite do eixo x de 0 a rs
  - 2: Definir rótulo do eixo y como "a\_0"
  - 3: Adicionar legenda
  - 4: Calcular erro como valor absoluto de (aplot\_init - aplot\_N)
  - 5: Plotar rplot versus erro
  - 6: Definir rótulo do eixo x como "r"
  - 7: Definir limite do eixo x de 0 a rs
  - 8: Definir rótulo do eixo y como  $a_0 - a_N$
  - 9: Adicionar legenda
  - 10: Ajustar layout
  - 11: Mostrar figura
  - 12: **Função gerar\_funções\_base\_pares(N, L0, r):**
  - 13: Inicializar matrizes SB\_pares, rSB\_pares e rrSB\_pares com zeros
  - 14: Calcular funções de base pares para cada linha
  - 15: Calcular derivadas de funções de base pares para cada linha
  - 16: Retornar SB\_pares, rSB\_pares, rrSB\_pares, np.linalg.inv(SB\_pares[:,1:N+1])
  - 17: **Função gerar\_grafico\_base\_funções\_pares(N, L0, M, rplot):**
  - 18: Inicializar matrizes SB\_pares\_plot, rSB\_pares\_plot e rrSB\_pares\_plot com zeros
  - 19: Calcular funções de base pares para cada linha
  - 20: Calcular derivadas de funções de base pares para cada linha
  - 21: Retornar SB\_pares\_plot, rSB\_pares\_plot, rrSB\_pares\_plot
  - 22: **Função gerar\_grafico\_inicial\_Del(N, L0, rs, rplot, Delplot\_init, Delplot\_N):**
  - 23: Configurar "font.family"= "Times New Roman"
  - 24: Configurar "font.size"= 16
  - 25: Criar figura com dois subplots, com tamanho (10, 5)
  - 26: Plotar rplot versus Delplot\_init com label Delta\_0
  - 27: Plotar rplot versus Delplot\_N com linha tracejada e label Delta\_N
  - 28: Definir rótulo do eixo x como "r"
  - 29: Definir limite do eixo x de 0 a rs
  - 30: Definir rótulo do eixo y como "Delta\_0"
  - 31: Adicionar legenda
  - 32: Calcular erro como valor absoluto de (Delplot\_init - Delplot\_N)
  - 33: Plotar rplot versus erro
  - 34: Definir rótulo do eixo x como "r"
  - 35: Definir limite do eixo x de 0 a rs
  - 36: Definir rótulo do eixo y como  $\Delta_0 - \Delta_N$
  - 37: Adicionar legenda
  - 38: Ajustar layout
  - 39: Mostrar figura
-

---

**Algoritmo 5** Funções principais P5
 

---

```

1: Função aproximação_espectral_Chi(c0,
2: SB_impares, rSB_impares, rrSB_impares):
3: Retornar np.dot(c0, SB_impares),
4: np.dot(c0, rSB_impares), np.dot(c0, rrSB_impares)
5: Função calcular_H0(c0, Chi, rChi, rrChi, rPHI, PI, K, coeforigin, r, N):
6: H0_0 = 4*rrChi[0] + 8*np.dot(coeforigin,c0) + (1/2)*np.exp(4*Chi[0])*PI[0]**2
7: H0_int = 4*rrChi[1:N+1] + 4*rChi[1:N+1]**2 +
8: 8/r[1:N+1]*rChi[1:N+1] + (1/2)*np.exp(4*Chi[1:N+1])*(PI[1:N+1]**2 +
9: np.exp(-4*Chi[1:N+1])*rPHI[1:N+1]**2)
10: H0 = np.hstack((H0_0, H0_int))
11: Retornar H0
12: Função calcular_inv_JH(Chi, rChi, rPHI, PI, K, SB_impares,
    rSB_impares, rrSB_impares, coeforigin, r, N):
13: J1 = rChi*rSB_impares
14: JH_0 = 4*rrSB_impares[:,0] + 8*J1[:,0] + 8*coeforigin
15: JH_int = 4*rrSB_impares[:,1:N+1] + 8*J1[:,1:N+1] +
    8/r[1:N+1]*rSB_impares[:,1:N+1] + 2*np.exp(4*Chi[1:N+1])*SB_impares[:,1:N+1]*
16: (PI[1:N+1]**2 + np.exp(-4*Chi[1:N+1])*rPHI[1:N+1]**2) -
    2*SB_impares[:,1:N+1]*rPHI[1:N+1]**2
17: JH = np.column_stack((JH_0, JH_int))
18: Retornar np.linalg.inv(JH)
19: Função newton_raphson(hc, tol, n, nf, N):
20: c0 = np.full(N+1, hc) ▷ inicialização de c0
21: Enquanto n <= nf faça
22: Chi = np.dot(c0, SB_impares)
23: rChi = np.dot(c0, rSB_impares)
24: rrChi = np.dot(c0, rrSB_impares)
25: H0 = calcular_H0(c0, Chi, rChi, rrChi, rPHI, PI, K, coeforigin, r, N)
26: inv_JH = calcular_inv_JH(Chi, rChi, rPHI, PI, K, SB_impares, rSB_impares,
    rrSB_impares, coeforigin, r, N)
27: cnew = c0
28: c0 = c0 - np.dot(H0, inv_JH)
29: err = np.abs(c0 - cnew)
30: Se np.max(err) <= tol então
31: Parar o loop
32: Incrementar n
33: Retornar c0
34: Função plotar_Chi_inicial(N, L0, rs, rplot, Chiplot_init):
35: Configurar "font.family"= "Times New Roman"
36: Configurar "font.size"= 16
37: Plotar rplot versus Chiplot_init
38: Definir rótulo do eixo x como "r"
39: Definir limite do eixo x de 0 a rs
40: Definir rótulo do eixo y como "chi_0"
41: Mostrar figura

```

---

---

**Algoritmo 6** Funções principais P6
 

---

```

1: Função gerar_funções_base_impares_q(N, L0, qN, qr):
2: qqSB_impares = np.zeros([qN+2,qN+1])
3: rqqSB_impares = np.zeros([qN+2,qN+1])
4: rrqqSB_impares = np.zeros([qN+2,qN+1])
5: Para i de 0 até qN+1 faça
6: qqSB_impares[i,] = np.sin((2*i+1)*np.arctan(L0/qr))
7: Para i de 0 até qN+1 faça
8: rqqSB_impares[i,] = -np.cos((2*i+1)*np.arctan(L0/qr))*(2*i+1)*L0/(qr**2*(1+
9: L0**2/qr**2))
10: Para i de 0 até qN+1 faça
11: rrqqSB_impares[i,] = -np.sin((2*i+1)*np.arctan(L0/qr))*(2*i+1)**2*L0**2/(qr**4*(1+
12: (1+L0**2/qr**2)**2) + 2*np.cos((2*i+1)*np.arctan(L0/qr))*(2*i+1)*L0/(qr**3*(1+
13: L0**2/qr**2)) - 2*np.cos((2*i+1)*np.arctan(L0/qr))*(2*i+1)*L0**3/(qr**5*(1+
14: L0**2/qr**2)**2))
15: SB_impares = qqSB_impares[0:N+1,]
16: rSB_impares = rqqSB_impares[0:N+1,]
17: rrSB_impares = rrqqSB_impares[0:N+1,]
18: Retornar SB_impares, rSB_impares, rrSB_impares
19: Função gerar_funções_base_media_q(N, SB_impares, rSB_impares, rrSB_impares):
20: SB_av = (1/2)*(SB_impares[1:(N+1),:] + SB_impares[0:(N),:])
21: rSB_av = (1/2)*(rSB_impares[1:(N+1),:] + rSB_impares[0:(N),:])
22: rrSB_av = (1/2)*(rrSB_impares[1:(N+1),:] + rrSB_impares[0:(N),:])
23: Retornar SB_av, rSB_av, rrSB_av
24: Função gerar_funções_base_pares_q(N, L0, qN, qr):
25: qqSB_pares = np.zeros([qN+1,qN+1])
26: rqqSB_pares = np.zeros([qN+1,qN+1])
27: rrqqSB_pares = np.zeros([qN+1,qN+1])
28: Para i de 0 até qN faça
29: qqSB_pares[i,] = np.sin((2*i+2)*np.arctan(L0/qr))
30: Para i de 0 até qN faça
31: rqqSB_pares[i,] = -np.cos((2*i+2)*np.arctan(L0/qr))*(2*i+2)*L0/(qr**2*(1+
32: L0**2/qr**2))
33: Para i de 0 até qN faça
34: rrqqSB_pares[i,] = -np.sin((2*i+2)*np.arctan(L0/qr))*(2*i+2)**2*L0**2/(qr**4*(1+
35: L0**2/qr**2)**2) + 2*np.cos((2*i+2)*np.arctan(L0/qr))*(2*i+2)*L0/(qr**3*(1+
36: L0**2/qr**2)) - 2*np.cos((2*i+2)*np.arctan(L0/qr))*(2*i+2)*L0**3/(qr**5*(1+
37: L0**2/qr**2)**2))
38: SB_pares = qqSB_pares[0:N,]
39: rSB_pares = rqqSB_pares[0:N,]
40: rrSB_pares = rrqqSB_pares[0:N,]
41: Retornar SB_pares, rSB_pares, rrSB_pares

```

---

---

**Algoritmo 7** Funções principais P7
 

---

```

1: Função gerar_quadratura_gauss_legendre(N, L0):
2: qN = int(3/2*N)                                ▷ ordem de truncagem
3: gauss_quadratura = np.polynomial.legendre.leggauss(qN+1)    ▷ gera os (qN+1)
   pontos de quadratura de Gauss-Legendre
4: x_k = gauss_quadratura[0]                      ▷ raízes dos polinômios (pontos onde a integral será
   calculada)
5: P, dP = gerar_polinomios_legendre(qN, x_k)    ▷ gera os polinômios e suas derivadas
6: P_max = P[qN+1]                                ▷ polinômio de ordem mais alta
7: dP_max = dP[qN+1]                              ▷ derivada do polinômio de ordem mais alta
8: qw = 2/((1 - x_k**2)*dP_max**2)                ▷ pesos
9: qr = L0*(1 + x_k)/(1 - x_k)                    ▷ mapeamento do domínio físico
10: Retornar qN, qw, qr, x_k
11: Função gerar_polinomios_legendre(qN, x_k):
12: P = np.zeros((qN+2, qN+1))
13: dP = np.zeros((qN+2, qN+1))
14:                                ▷ define os polinômios de ordens 0 e 1 e suas derivadas, respectivamente
15: P[0, :] = 1                                ▷ polinômio de ordem 0
16: P[1, :] = x_k                              ▷ polinômio de ordem 1
17: dP[0, :] = 0                                ▷ derivada do polinômio de ordem 0
18: dP[1, :] = 1                                ▷ derivada do polinômio de ordem 1
19: Calcula os polinômios de Legendre e suas derivadas
20: Para i de 2 até qN+1 faça
21: P[i, :] = ((2*i - 1)*x_k*P[i - 1, :] - (i - 1)*P[i - 2, :])/i
22: Para i de 2 até qN+1 faça
23: dP[i, :] = x_k*dP[i - 1, :] + i*P[i - 1, :]
24: Retornar P, dP
25: Função calcular_L2(qw, qr, qPHI, rqPHI, qPI, qK, rqK, qChi, rqChi,
   rrqChi, qa, rqa, rrqa, qb, rqb, rrqb, qAa, rqAa, qDel, rqDel):
26: R = -(1/qa)*np.exp(-4*qChi)*(0.5*rrqa/qa + rrqb/qb - qa*rqDel - rqa**2/qa**2 +
   0.5*rqb**2/qb**2 + (2/qr)*(rqb/qb)*(3 - qa/qb) + (4/qr**2)*(1 - qa/qb) + 8*rrqChi
   + 8*rqChi**2 - 8*rqChi*(0.5*rqa/qa - rqb/qb - 2/qr))
27: H = R - 1.5*qAa**2 + (2/3)*qK**2 - qPI**2 - np.exp(-4*qChi)*rqPHI**2/qa
28: Retornar np.sqrt(np.dot(H**2, qw)/2)
29: Função calcular_erro_mADM(N, c0, M0):
30: Madm = 2*np.dot(np.arange(1, 2*N+2, 2), c0)
31: Retornar (abs(Madm - M0)/M0)                    ▷ M0 = massa ADM (t = 0)
32: Função calcular_L1(qw, qr, qPHI, rqPHI, qPI, qK, rqK, qChi, rqChi,
   rrqChi, qa, rqa, rrqa, qb, rqb, rrqb, qAa, rqAa, qDel, rqDel):
33: M = rqAa - (2/3)*rqK + 6*qAa*rqChi + (3/2)*qAa*(rqb/qb + 2/qr) + qPI*rqPHI
34: Retornar np.sqrt(np.dot(M**2, qw)/2)

```

---

---

**Algoritmo 8** Funções principais P8
 

---

```

1: Função calcular_derivadas(N, xi, coeforigin, r, al0, a0, Alpha, rAlpha,
  rrAlpha, K, rK, PHI, rPHI, rrPHI, PI, Chi, rChi, rrChi, a, ra, rra, b, rb,
  rrb, Aa, rAa, Del, rDel, inv_SB_odd, inv_SB_av, inv_SB_even):
2: Equações de evolução dos coeficientes modais
3:                                     ▷ alpha
4: dal = np.dot(-Alpha**2*K, inv_SB_odd)   ▷ tamanho (N+1)X1
5:                                     ▷ chi
6: dc = np.dot(-(1/6)*Alpha*K, inv_SB_odd) ▷ tamanho (N+1)X1
7:                                     ▷ a
8: da = np.dot(-2*Alpha[1:N+1]*a*Aa, inv_SB_av) ▷ tamanho NX1
9:                                     ▷ b
10: db = np.dot(Alpha[1:N+1]*b*Aa, inv_SB_av) ▷ tamanho NX1
11:                                     ▷ K
12: dK_origin = Alpha[0]*(K[0]**2/3) + Alpha[0]*PI[0]**2 - np.exp(-
  4*Chi[0])*(rrAlpha[0] + 2*np.dot(coeforigin, al0))
13: dK_int = Alpha[1:N+1]*(K[1:N+1]**2/3) + 3*Alpha[1:N+1]*(Aa**2/2) -
  (np.exp(-4*Chi[1:N+1])/a)*(rrAlpha[1:N+1] - rAlpha[1:N+1]*(ra/(2*a) - rb/b -
  2*rChi[1:N+1] - 2/r[1:N+1])) + Alpha[1:N+1]*PI[1:N+1]**2
14: dK = np.dot(np.hstack((dK_origin, dK_int)), inv_SB_odd) ▷ tamanho (N+1)X1
15:                                     ▷ Aa
16: aux_1 = (np.exp(-4*Chi[1:N+1])/(3*a))*(2*rrAlpha[1:N+1] - rAlpha[1:N+1]*(ra/a
  + rb/b + 8*rChi[1:N+1] + 2/r[1:N+1]))
17: aux_2 = (np.exp(-4*Chi[1:N+1])/(3*a))*(2*a*rDel - rra/a + (5/4)*ra**2/a**2 -
  rb**2/b**2 + (3/2)*Del*ra - (3*ra)/(b*r[1:N+1]) + rrb/b + (2*rb)/(b*r[1:N+1])*(3
  - a/b) - (2/r[1:N+1]**2)*(1 - a/b)*(1 + (3*r[1:N+1]*rb)/b) - 4*rrChi[1:N+1] +
  8*rChi[1:N+1]**2 + 2*rChi[1:N+1]*(ra/a + rb/b + 2/r[1:N+1]))
18: dAa = np.dot(- aux_1 + Alpha[1:N+1]*aux_2 - (2/3)*Alpha[1:N+1]*(np.exp(-
  4*Chi[1:N+1])/a)*rPHI[1:N+1]**2 + Alpha[1:N+1]*K[1:N+1]*Aa, inv_SB_av) ▷
  tamanho NX1
19:                                     ▷ delta
20: dDel = np.dot(-(2/a)*(Aa*rAlpha[1:N+1] + Alpha[1:N+1]*rAa) +
  2*Alpha[1:N+1]*Aa*(Del - 3/(b*r[1:N+1])) + xi*(Alpha[1:N+1]/a)*(rAa -
  (2/3)*rK[1:N+1] + 6*Aa*rChi[1:N+1] + (3/2)*Aa*(rb/b + 2/r[1:N+1]) +
  PI[1:N+1]*rPHI[1:N+1]), inv_SB_even) ▷ tamanho NX1
21:                                     ▷ PHI
22: dfs = np.dot(Alpha*PI, inv_SB_odd)   ▷ tamanho (N+1)X1
23:                                     ▷ PI
24: dPIorig = Alpha[0]*K[0]*PI[0] + 2*np.exp(-4*Chi[0])*Alpha[0]*np.dot(coeforigin, a0)
  + np.exp(-4*Chi[0])*Alpha[0]*rrPHI[0]
25: dPIint = Alpha[1:N+1]*K[1:N+1]*PI[1:N+1] + (np.exp(-
  4*Chi[1:N+1])/a)*(Alpha[1:N+1]*rrPHI[1:N+1] + rAlpha[1:N+1]*rPHI[1:N+1])
  + (np.exp(-4*Chi[1:N+1])/a)*rPHI[1:N+1]*Alpha[1:N+1]*(rb/b - ra/(2*a) +
  2*rChi[1:N+1] + 2/r[1:N+1])
26: dfp = np.dot(np.hstack((dPIorig, dPIint)), inv_SB_odd)   ▷ tamanho (N+1)X1
27: Retornar dal, dc, da, db, dK, dAa, dDel, dfs, dfp

```

---

---

**Algoritmo 9** Evolução campo escalar P1
 

---

```

1: Função plotar_Alpha_origem(t1, Alpha_origem, A0, N, L0):
2: plt.rcParams["font.family"] = "Times New Roman"
3: plt.rcParams["font.size"] = 16
4: plt.plot(t1, Alpha_origem, color = "darkred", label = "A_0".format(A0))
5: plt.ylabel(r"alpha(t,0)")
6: plt.xlabel(r"t")
7: plt.legend()
8: Função plotar_PHI_origem(t1, PHI_origem, A0, N, L0):
9: plt.rcParams["font.family"] = "Times New Roman"
10: plt.rcParams["font.size"] = 16
11: plt.plot(t1, PHI_origem, color = "darkgreen", label = "A_0".format(A0))
12: plt.title(r"Campo escalar Phi na origem para L_0, N".format(L0, N))
13: plt.ylabel(r"Phi(t,0)")
14: plt.xlabel(r"t")
15: plt.legend()
16: Função plotar_erros(t1, M, L2, L1):
17: plt.rcParams["font.family"] = "Times New Roman"
18: plt.rcParams["font.size"] = 16
19: fig, ax1 = plt.subplots()
20: ax1.set_xlabel("tempo")
21: ax1.set_ylabel(r"L_2", color="tab:red")
22: ax1.plot(t1, L2, color="tab:red", label="L_2")
23: ax1.tick_params(axis="y", labelcolor="tab:red")
24: ax2 = ax1.twinx()
25: ax2.set_ylabel(r"L_1", color="tab:blue")
26: ax2.plot(t1, L1, color="tab:blue", label="L_1")
27: ax2.tick_params(axis="y", labelcolor="tab:blue")
28: fig.tight_layout()
29: plt.show()
30: N = 150
31: L0 = 10
32: r0 = 2
33: rs = 12
34: A0 = 0.05
35: sigma = 1
36: M = 1000
37: ss_plot = 0.000000000000000001
38: rplot = np.linspace(ss_plot, rs, M)
39: col = gerar_col_point(N, L0)
40: r = np.flip(col)
41: SB_odd, rSB_odd, rrSB_odd, inv_SB_odd = gerar_base_odd_functions(N, L0, r)

```

---

---

**Algoritmo 10** Evolução campo escalar P2
 

---

```

1: PHI_init = ( A0*r**2/(1 + r**2) )*(np.exp(-(r - r0)**2/sigma**2) + np.exp(-(r +
  r0)**2/sigma**2))
2: a0 = np.dot(PHI_init, inv_SB_odd)
3: PHI, rPHI, rrPHI = spectral_approximation_PHI(a0, SB_odd, rSB_odd,
  rrSB_odd)
4: SB_odd_plot, rSB_odd_plot, rrSB_odd_plot = gerar_plot_base_odd_functions(N, L0, M, rplot)
5: PHIplot_init = ( A0*rplot**2/(1 + rplot**2) )*(np.exp(-(rplot - r0)**2/sigma**2)
  + np.exp(-(rplot + r0)**2/sigma**2))
6: PHIplot_N = np.dot(a0, SB_odd_plot)
7: gerar_plot_initial_PHI(N, L0, rs, rplot, PHIplot_init, PHIplot_N)
8: gerar_plot_erro_PHI(N, L0, rs, rplot, PHIplot_init, PHIplot_N)
9: gerar_static_3D_plot(N, L0, rplot, PHIplot_init)
10: Alpha_init = 1 - 0*A0*(np.exp(-(r - r0)**2/sigma**2) + np.exp(-(r +
  r0)**2/sigma**2))
11: al0 = np.dot(Alpha_init - 1, inv_SB_odd)
12: K0 = np.zeros(N+1)
13: fk0 = np.dot(K0, SB_odd)
14: K = np.dot(fk0, SB_odd)
15: PI0 = np.zeros(N+1)
16: b0 = np.dot(PI0, SB_odd)
17: PI = np.dot(b0, SB_odd)
18: coeforigin = 1/L0**2*(-(-1)**(np.arange(N+1))*(2*np.arange(1,N+2)-1)**2)
19: Alphaplot_init = 1 - 0*A0*(np.exp(-(rplot - r0)**2/sigma**2) + np.exp(-(rplot +
  r0)**2/sigma**2))
20: Alphaplot_N = 1 + np.dot(al0, SB_odd_plot)
21: fa = np.zeros(N)
22: fb = np.zeros(N)
23: f = np.zeros(N)
24: de = np.zeros(N)
25: SB_av, rSB_av, rrSB_av, inv_SB_av = gerar_base_average_functions(N,
  SB_odd, rSB_odd, rrSB_odd)
26: SB_even, rSB_even, rrSB_even, inv_SB_even = gerar_base_even_functions(N,
  L0, r)
27: SB_av_plot, rSB_av_plot, rrSB_av_plot = gerar_plot_base_average_functions(N,
  SB_odd_plot, rSB_odd_plot, rrSB_odd_plot)
28: aplot_init = np.ones(M)
29: aplot_N = 1 + np.dot(fa, SB_av_plot)
30: gerar_plot_initial_a(N, L0, rs, rplot, aplot_init, aplot_N)
31: SB_even_plot, rSB_even_plot, rrSB_even_plot = gerar_plot_base_even_functions(N, L0, M, rplot)
32: Delplot_init = np.zeros(M)
33: Delplot_N = np.dot(de, SB_even_plot)
34: gerar_plot_initial_Del(N, L0, rs, rplot, Delplot_init, Delplot_N)

```

---

---

**Algoritmo 11** Implementação método RK4 P1
 

---

```

1: procedure IMPLEMENTAÇÃO NEWTON-RAPHSON(input)
2:   hc = 0.0001
3:   tol = 1e-18
4:   n = 0
5:   nf = 100
6:   c0 = np.zeros([N+1])
7:   c0 = newton_raphson(hc, tol, n, nf, N)
8:   Chi, rChi, rrChi = spectral_approximation_Chi(c0, SB_odd, rSB_odd,
   rrSB_odd)
9:   Chiplot_init = np.dot(c0, SB_odd_plot)
10:  plot_initial_Chi(N, L0, rs, rplot, Chiplot_init)
11: end procedure
12: procedure IMPLEMENTAÇÃO GAUSS-LEGENDRE(input)
13:  qN, qw, qr, x_k = gerar_gauss_legendre_quadrature(N, L0)
14:  qSB_odd, rqSB_odd, rrqSB_odd = gerar_base_odd_q_functions(N, L0, qN,
   qr)
15:  qSB_av, rqSB_av, rrqSB_av = gerar_base_average_q_functions(N, qSB_odd,
   rqSB_odd, rrqSB_odd)
16:  qSB_even, rqSB_even, rrqSB_even = gerar_base_even_q_functions(N, L0, qN,
   qr)
17: end procedure
18: xi = 2
19: h = 0.0001
20: t = 0
21: tf = 7
22: It = int(tf/h)
23: V = 0
24: M0 = 2*np.dot(np.arange(1, 2*N+2, 2), c0)
25: Alpha_origin = []
26: PHI_origin = []
27: L2HC = []
28: L2MC = []
29: Madm_error = []
30: PHI_set = []
31: out_r = open("R_origin.txt", "a")
32: out_r.truncate(0)
33: out_a = open("Alpha_origin.txt", "a")
34: out_a.truncate(0)
35: out_p = open("PHI_origin.txt", "a")
36: out_p.truncate(0)
   While t leq tf:

```

---

---

**Algoritmo 12** Implementação método RK4 P2
 

---

```

1: Estágio 1
2: Aproximações espectrais para alpha, K, chi, PHI, PI (tamanho (N+1)X1)
3: Alpha = 1 + np.dot(al0, SB_odd)
4: rAlpha = np.dot(al0, rSB_odd)
5: rrAlpha = np.dot(al0, rrSB_odd)
6: K = np.dot(fk0, SB_odd)
7: rK = np.dot(fk0, rSB_odd)
8: Chi = np.dot(c0, SB_odd)
9: rChi = np.dot(c0, rSB_odd)
10: rrChi = np.dot(c0, rrSB_odd)
11: PHI = np.dot(a0, SB_odd)
12: rPHI = np.dot(a0, rSB_odd)
13: rrPHI = np.dot(a0, rrSB_odd)
14: PI = np.dot(b0, SB_odd)
15: rPI = np.dot(b0, rSB_odd)
16: Aproximações espectrais para a, b, Aa (tamanho NX1)
17: a = 1 + np.dot(fa, SB_av[:, 1:N+1])
18: ra = np.dot(fa, rSB_av[:, 1:N+1])
19: rra = np.dot(fa, rrSB_av[:, 1:N+1])
20: b = 1 + np.dot(fb, SB_av[:, 1:N+1])
21: rb = np.dot(fb, rSB_av[:, 1:N+1])
22: rrb = np.dot(fb, rrSB_av[:, 1:N+1])
23: Aa = np.dot(f, SB_av[:, 1:N+1])
24: rAa = np.dot(f, rSB_av[:, 1:N+1])
25: Aproximações espectrais para Delta, beta (tamanho NX1)
26: Del = np.dot(de, SB_even[:, 1:N+1])
27: rDel = np.dot(de, rSB_even[:, 1:N+1])
28: Equações de evolução dos coeficientes modais
29: dal, dc, da, db, dK, dAa, dDel, dfs, dfp = calculate_derivatives(N, xi, coeforigin, r,
    al0, a0, Alpha, rAlpha, rrAlpha, K, rK, PHI, rPHI, rrPHI, PI, Chi, rChi, rrChi, a, ra,
    rra, b, rb, rrb, Aa, rAa, Del, rDel, inv_SB_odd, inv_SB_av, inv_SB_even)
30: K_1 = h*(dal)
31: L_1 = h*(dc)
32: M_1 = h*(da)
33: N_1 = h*(db)
34: O_1 = h*(dK)
35: P_1 = h*(dAa)
36: Q_1 = h*(dDel)
37: T_1 = h*(dfs)
38: U_1 = h*(dfp)

```

---

---

**Algoritmo 13** Implementação método RK4 P3
 

---

```

1: Erro L2 máximo associado ao vínculo Hamiltoniano
2: Inicialização das aproximações espectrais nos pontos de quadratura
3: qPHI = np.dot(a0, qSB_odd)
4: rqPHI = np.dot(a0, rqSB_odd)
5: qPI = np.dot(b0, qSB_odd)
6: qK = np.dot(fk0, qSB_odd)
7: rqK = np.dot(fk0, rqSB_odd)
8: qChi = np.dot(c0, qSB_odd)
9: rqChi = np.dot(c0, rqSB_odd)
10: rrqChi = np.dot(c0, rrqSB_odd)
11: qa = 1 + np.dot(fa, qSB_av)
12: rqa = np.dot(fa, rqSB_av)
13: rrqa = np.dot(fa, rrqSB_av)
14: qb = 1 + np.dot(fb, qSB_av)
15: rqb = np.dot(fb, rqSB_av)
16: rrqb = np.dot(fb, rrqSB_av)
17: qAa = np.dot(f, qSB_av)
18: rqAa = np.dot(f, rqSB_av)
19: qDel = np.dot(de, qSB_even)
20: rqDel = np.dot(de, rqSB_even)
21: Alpha na origem
22: Alpha_0 = 1 + np.dot(al0, SB_odd[:,0])
23: Alpha_origin.append(Alpha_0)
24: out_a.write(str(t) + " + str(Alpha_0))
25: out_a.write("\n")
26: PHI na origem
27: PHI_0 = np.dot(a0, SB_odd[:,0])
28: PHI_origin.append(PHI_0)
29: out_p.write(str(t) + " + str(PHI_0))
30: out_p.write("\n")
31: Erro associado ao vínculo Hamiltoniano
32: L2 = calculate_L2(qw, qr, qPHI, rqPHI, qPI, qK, rqK, qChi, rqChi, rrqChi, qa, rqa,
    rrqa, qb, rqb, rrqb, qAa, rqAa, qDel, rqDel)
33: print('L2HC =', L2)
34: L2HC.append(L2)
35: Erro associado ao vínculo de momento
36: L1 = calculate_L1(qw, qr, qPHI, rqPHI, qPI, qK, rqK, qChi, rqChi, rrqChi, qa, rqa,
    rrqa, qb, rqb, rrqb, qAa, rqAa, qDel, rqDel)
37: print("L2MC =", L1)
38: L2MC.append(L1)
39: Erro relativo associado à massa ADM
40: Madm_pc = calculate_error_mADM(N, c0, M0)
41: Madm_error.append(Madm_pc)

```

---

---

**Algoritmo 14** Implementação método RK4 P4
 

---

```

1: Estágio 2
2: Aproximações espectrais para alpha, K, chi, PHI, PI
3: Alpha = 1 + np.dot(al0 + K_1/2, SB_odd)
4: rAlpha = np.dot(al0 + K_1/2, rSB_odd)
5: rrAlpha = np.dot(al0 + K_1/2, rrSB_odd)
6: K = np.dot(fk0 + O_1/2, SB_odd)
7: rK = np.dot(fk0 + O_1/2, rSB_odd)
8: Chi = np.dot(c0 + L_1/2, SB_odd)
9: rChi = np.dot(c0 + L_1/2, rSB_odd)
10: rrChi = np.dot(c0 + L_1/2, rrSB_odd)
11: PHI = np.dot(a0 + T_1/2, SB_odd)
12: rPHI = np.dot(a0 + T_1/2, rSB_odd)
13: rrPHI = np.dot(a0 + T_1/2, rrSB_odd)
14: PI = np.dot(b0 + U_1/2, SB_odd)
15: rPI = np.dot(b0 + U_1/2, rSB_odd)
16: Aproximações espectrais para a, b, Aa
17: a = 1 + np.dot(fa + M_1/2, SB_av[:, 1:N+1])
18: ra = np.dot(fa + M_1/2, rSB_av[:, 1:N+1])
19: rra = np.dot(fa + M_1/2, rrSB_av[:, 1:N+1])
20: b = 1 + np.dot(fb + N_1/2, SB_av[:, 1:N+1])
21: rb = np.dot(fb + N_1/2, rSB_av[:, 1:N+1])
22: rrb = np.dot(fb + N_1/2, rrSB_av[:, 1:N+1])
23: Aa = np.dot(f + P_1/2, SB_av[:, 1:N+1])
24: rAa = np.dot(f + P_1/2, rSB_av[:, 1:N+1])
25: Aproximações espectrais para Delta, beta
26: Del = np.dot(de + Q_1/2, SB_even[:, 1:N+1])
27: rDel = np.dot(de + Q_1/2, rSB_even[:, 1:N+1])
28: Equações de evolução dos coeficientes modais
29: dal, dc, da, db, dK, dAa, dDel, dfs, dfp = calculate_derivatives(N, xi, coeforigin, r,
    al0, a0, Alpha, rAlpha, rrAlpha, K, rK, PHI, rPHI, rrPHI, PI, Chi, rChi, rrChi, a, ra,
    rra, b, rb, rrb, Aa, rAa, Del, rDel, inv_SB_odd, inv_SB_av, inv_SB_even)
30: K_2 = h*(dal)
31: L_2 = h*(dc)
32: M_2 = h*(da)
33: N_2 = h*(db)
34: O_2 = h*(dK)
35: P_2 = h*(dAa)
36: Q_2 = h*(dDel)
37: T_2 = h*(dfs)
38: U_2 = h*(dfp)

```

---

---

**Algoritmo 15** Implementação método RK4 P4
 

---

```

1: Estágio 3
2: Aproximações espectrais para alpha, K, chi, PHI, PI
3: Alpha = 1 + np.dot(al0 + K_2/2, SB_odd)
4: rAlpha = np.dot(al0 + K_2/2, rSB_odd)
5: rrAlpha = np.dot(al0 + K_2/2, rrSB_odd)
6: K = np.dot(fk0 + O_2/2, SB_odd)
7: rK = np.dot(fk0 + O_2/2, rSB_odd)
8: Chi = np.dot(c0 + L_2/2, SB_odd)
9: rChi = np.dot(c0 + L_2/2, rSB_odd)
10: rrChi = np.dot(c0 + L_2/2, rrSB_odd)
11: PHI = np.dot(a0 + T_2/2, SB_odd)
12: rPHI = np.dot(a0 + T_2/2, rSB_odd)
13: rrPHI = np.dot(a0 + T_2/2, rrSB_odd)
14: PI = np.dot(b0 + U_2/2, SB_odd)
15: rPI = np.dot(b0 + U_2/2, rSB_odd)
16: Aproximações espectrais para a, b, Aa
17: a = 1 + np.dot(fa + M_2/2, SB_av[:, 1:N+1])
18: ra = np.dot(fa + M_2/2, rSB_av[:, 1:N+1])
19: rra = np.dot(fa + M_2/2, rrSB_av[:, 1:N+1])
20: b = 1 + np.dot(fb + N_2/2, SB_av[:, 1:N+1])
21: rb = np.dot(fb + N_2/2, rSB_av[:, 1:N+1])
22: rrb = np.dot(fb + N_2/2, rrSB_av[:, 1:N+1])
23: Aa = np.dot(f + P_2/2, SB_av[:, 1:N+1])
24: rAa = np.dot(f + P_2/2, rSB_av[:, 1:N+1])
25: Aproximações espectrais para Delta, beta
26: Del = np.dot(de + Q_2/2, SB_even[:, 1:N+1])
27: rDel = np.dot(de + Q_2/2, rSB_even[:, 1:N+1])
28: Equações de evolução dos coeficientes modais
29: dal, dc, da, db, dK, dAa, dDel, dfs, dfp = calculate_derivatives(N, xi, coeforigin, r,
    al0, a0, Alpha, rAlpha, rrAlpha, K, rK, PHI, rPHI, rrPHI, PI, Chi, rChi, rrChi, a, ra,
    rra, b, rb, rrb, Aa, rAa, Del, rDel, inv_SB_odd, inv_SB_av, inv_SB_even)
30: K_3 = h*(dal)
31: L_3 = h*(dc)
32: M_3 = h*(da)
33: N_3 = h*(db)
34: O_3 = h*(dK)
35: P_3 = h*(dAa)
36: Q_3 = h*(dDel)
37: T_3 = h*(dfs)
38: U_3 = h*(dfp)

```

---

---

**Algoritmo 16** Implementação método RK4 P6
 

---

```

1: Estágio 4
2: Aproximações espectrais para alpha, K, chi, PHI, PI
3: Alpha = 1 + np.dot(al0 + K_3, SB_odd)
4: rAlpha = np.dot(al0 + K_3, rSB_odd)
5: rrAlpha = np.dot(al0 + K_3, rrSB_odd)
6: K = np.dot(fk0 + O_3, SB_odd)
7: rK = np.dot(fk0 + O_3, rSB_odd)
8: Chi = np.dot(c0 + L_3, SB_odd)
9: rChi = np.dot(c0 + L_3, rSB_odd)
10: rrChi = np.dot(c0 + L_3, rrSB_odd)
11: PHI = np.dot(a0 + T_3, SB_odd)
12: rPHI = np.dot(a0 + T_3, rSB_odd)
13: rrPHI = np.dot(a0 + T_3, rrSB_odd)
14: PI = np.dot(b0 + U_3, SB_odd)
15: rPI = np.dot(b0 + U_3, rSB_odd)
16: Aproximações espectrais para a, b, Aa
17: a = 1 + np.dot(fa + M_3, SB_av[:, 1:N+1])
18: ra = np.dot(fa + M_3, rSB_av[:, 1:N+1])
19: rra = np.dot(fa + M_3, rrSB_av[:, 1:N+1])
20: b = 1 + np.dot(fb + N_3, SB_av[:, 1:N+1])
21: rb = np.dot(fb + N_3, rSB_av[:, 1:N+1])
22: rrb = np.dot(fb + N_3, rrSB_av[:, 1:N+1])
23: Aa = np.dot(f + P_3, SB_av[:, 1:N+1])
24: rAa = np.dot(f + P_3, rSB_av[:, 1:N+1])
25: Aproximações espectrais para Delta, beta
26: Del = np.dot(de + Q_3, SB_even[:, 1:N+1])
27: rDel = np.dot(de + Q_3, rSB_even[:, 1:N+1])
28: Equações de evolução dos coeficientes modais
29: dal, dc, da, db, dK, dAa, dDel, dfs, dfp = calculate_derivatives(N, xi, coeforigin, r,
    al0, a0, Alpha, rAlpha, rrAlpha, K, rK, PHI, rPHI, rrPHI, PI, Chi, rChi, rrChi, a, ra,
    rra, b, rb, rrb, Aa, rAa, Del, rDel, inv_SB_odd, inv_SB_av, inv_SB_even)
30: K_4 = h*(dal)
31: L_4 = h*(dc)
32: M_4 = h*(da)
33: N_4 = h*(db)
34: O_4 = h*(dK)
35: P_4 = h*(dAa)
36: Q_4 = h*(dDel)
37: T_4 = h*(dfs)
38: U_4 = h*(dfp)

```

---

---

**Algoritmo 17** Implementação método RK4 P7
 

---

```

1: Atualização dos coeficientes modais
2: aI0 += (K_1 + 2*K_2 + 2*K_3 + K_4)/6
3: fK0 += (O_1 + 2*O_2 + 2*O_3 + O_4)/6
4: c0 += (L_1 + 2*L_2 + 2*L_3 + L_4)/6
5: a0 += (T_1 + 2*T_2 + 2*T_3 + T_4)/6
6: b0 += (U_1 + 2*U_2 + 2*U_3 + U_4)/6
7: fa += (M_1 + 2*M_2 + 2*M_3 + M_4)/6
8: fb += (N_1 + 2*N_2 + 2*N_3 + N_4)/6
9: f += (P_1 + 2*P_2 + 2*P_3 + P_4)/6
10: de += (Q_1 + 2*Q_2 + 2*Q_3 + Q_4)/6
11: t += h
12: Salva arquivos de saída
13: out_r.close()
14: out_a.close()
15: out_p.close()
16: Retorno dos resultados
17: return Alpha_origin, PHI_origin, L2HC, L2MC, Madm_error, PHI_set
18: Gráficos de evolução e medidas de erro
19: plot_Alpha_origin(t1, Alpha_origin, A0, N, L0)
20: plot_PHI_origin(t1, PHI_origin, A0, N, L0)
21: plot_L2HC_origin(t1, L2HC, A0, N, L0)
22: plot_L2MC_origin(t1, L2MC, A0, N, L0)
23: plot_Madm_error(t1, Madm_error, A0, N, L0)
24: y_sup gets 0.10
25: y_inf gets -0.10
26: z_sup gets 0.10
27: z_inf gets -0.10
28: plt.rcParams["font.family"] gets "Times New Roman"
29: plt.rcParams["font.size"] gets 16
30: fig gets plt.figure(figsize=(12,6))
31: ax1 gets fig.add_subplot(121)
32: ax2 gets fig.add_subplot(122, projection="3d")
33: ax1.set_xlim(0, rs)
34: ax1.set_ylim(y_inf, y_sup)
35: ax1.tick_params(direction="in", length=6, width=1, colors="k",
36: hspace=2cm grid_color="r", grid_alpha=0.5, top=True, bottom=True, left=True,
   right=True)
37: ax1.set_xlabel(r"r")
38: ax1.set_ylabel(r"Phi(t,r)")
39: ax2.set_xlim(-rs, rs)
40: ax2.set_ylim(-rs, rs)
41: ax2.set_zlim(z_inf, z_sup)
42: line, = ax1.plot([], [], lw=2)
43: time_text gets ax1.text(0.8, 0.85, "", transform=ax1.transAxes)

```

---

---

**Algoritmo 18** Gráficos P1
 

---

```

1: Função geração animação campo escalar
2: function INIT
3:   line.set_data([], [])
4:   time_text.set_text("")
5:   Return line, time_text
6: end function
7: function ANIMATE(i)
8:   y gets PHI_set[i]
9:   x gets rplot
10:  line.set_data(x, y)
11:  ax1.draw_artist(ax1.patch)
12:  ax1.draw_artist(line)
13:  time_text.set_text("t = %.1f".format(h + h*i))
14:  ax1.draw_artist(time_text)
15:  ax2.clear()
16:  ax2.set_xlim(-rs, rs)
17:  ax2.set_ylim(-rs, rs)
18:  ax2.set_zlim(z_inf, z_sup)
19:  zn gets np.tile(y, (len(theta), 1)).T
20:  ax2.plot_surface(xn, yn, zn, rstride=5, cstride=5, cmap="magma", edgecolor="none")
21:  Return line, time_text
22: end function
23: frames_show gets range(0, It, 4)
24: anim gets
25: Função_Animation(fig, animate, init_func=init, frames=frames_show,
    interval=20)
26: anim.save("21-02-24_colapso_gravitacional_3D_t_7.mp4")
27: plt.show()
28: y_sup gets 0.10
29: y_inf gets -0.10
30: plt.rcParams["font.family"] gets "Times New Roman"
31: plt.rcParams["font.size"] gets 20
32: fig, ax gets plt.subplots()
33: ax.set_xlim(0, rs)
34: ax.set_ylim(y_inf, y_sup)
35: ax.tick_params(direction="in", length=6, width=1, colors="k",
36: hspace2cm grid_color="r", grid_alpha=0.5, top=True, bottom=True, left=True,
    right=True)
37: line = ax.plot([], [], lw=2)
38: time_text gets ax.text(0.8, 0.85, "", transform=ax.transAxes)
39: x gets rplot
40: ax.set_xlabel(r"r")
41: ax.set_ylabel(r"Phi(t,r)")

```

---

---

**Algoritmo 19** Gráficos P2

---

```
1: function INIT
2:   line.set_data([], [])
3:   time_text.set_text("")
4:   Return line
5: end function
6: function ANIMATE(i)
7:   y gets PHI_set[i]
8:   line.set_data(x, y)
9:   time_text.set_text("t = :.1f".format(h + h*i))
10:  return line
11: end function
12: frames_show gets range(0, It, 4)
13: anim gets
14: Função gera_animação(fig, animate, init_func=init, frames=frames_show, interval=2)
15: anim.save("21-02-24_colapso_gravitacional_2D_t_7.mp4")
16: plt.show()
```

---