Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Educação e Humanidades
Faculdade de Educação da Baixada Fluminense

Lucas Felipe Clajus Pontes

Vetores no Ensino Básico: proposta de intervenção em aula e novas perspectivas na visão de licenciandos em matemática

Duque de Caxias
2023

Lucas Felipe Clajus Pontes

Vetores no Ensino Básico: proposta de intervenção em aula e novas perspectivas na visão de licenciandos em matemática

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção ao título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Educação, Cultura e Comunicação em Periferias, da Universidade do Estado de Rio de Janeiro. Área de Concentração: Educação, Cultura e Comunicação em Periferias.

Orientadora: Prof.ª Dra. Gabriela dos Santos Barbosa

Duque de Caxias

2023

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CEH/C

C585 Clajus, Lucas Felipe Pontes
Vetores no Ensino Básico: proposta de intervenção em aula e novas perspectivas na visão de licenciandos em matemática. / Lucas Felipe Clajus Pontes - 2023.
138 f.

Orientador(a): Gabriela dos Santos Barbosa.

Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação da Baixada Fluminense, Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

1. Vetores - Teses. 2. Abordagem vetorial no ensino - Teses. 3. Registros de representação semiótica – Teses. I. Barbosa, Gabriela dos Santos. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Faculdade de Educação da Baixada Fluminense. III. Título.

CDU 519.76

Bibliotecária: Ana Paola Araujo – CRB7/6387

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

_____ _____

Assinatura Data

Lucas Felipe Clajus Pontes

Vetores no Ensino Básico: proposta de intervenção em aula e novas perspectivas na visão de licenciandos em matemática

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação, Cultura e Comunicação em Periferias, da Universidade do Estado de Rio de Janeiro. Área de concentração: Educação, Cultura e Comunicação em Periferias.

Aprovada em 27 de março de 2024.

Banca Examinadora:

_____

Prof.ª Dra. Gabriela dos Santos Barbosa (Orientadora)
Faculdade de Educação da Baixada Fluminense – UERJ

_____

Prof.ª Dra. Jeanne Denize Bezerra de Barros
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

_____

Prof.ª Dra. Daniella Assemany da Guia
Universidade do Porto

Duque de Caxias

2023

DEDICATÓRIA

Ao meu avô, Abel Ribeiro Pontes, que é eterno no meu coração.

AGRADECIMENTOS

O sentimento de gratidão é algo intenso, que nem sempre conseguiremos registrar em palavras. Por vezes, é muito complicado expressar o que sentimos, e esse é o caso aqui. Para todos aqueles que lerem o meu trabalho e encontrarem seus nomes aqui, saibam que com toda a certeza, o sentimento dentro do meu peito é maior e mais profundo.

Começo agradecendo, primeiramente, pela vida, e pela oportunidade de a cada dia me levantar e realizar meu trabalho de professor com toda a minha dedicação.

À minha mãe, Fátima Clajus, e ao meu pai, Alan Pontes; agradeço à minha irmã, Lízie Clajus, e ao meu cunhado, Emanuel Bernardes. Agradeço ao meu padrasto, Carlos Alberto, e minha madrasta, Raimunda. Vocês são a minha família, que eu sempre pude contar nos momentos de maior necessidade. Tenho sorte de ter vocês.

À minha companheira, Hulhi Anne, que por muitos e muitos anos têm estado ao meu lado, sendo compreensiva e tendo paciência para quando não pudermos estar juntos (muitas vezes em função desse trabalho); agradeço por ser provedora de todo o carinho, amor e dedicação nesses últimos anos. Sem a sua presença, eu não seria capaz de chegar aqui. Agradeço também aos meus sogros, Fábio e Silvenir, por gentilmente me aturarem no seu lar, apesar de todo incômodo que trago com a minha presença.

Aos meus outros familiares, principalmente meus avós maternos Lydia e Gerard, minha tia Daisy e meu tio Dênis, que me ajudaram com recursos, seja afetivo, material ou financeiro, que impediram que minha trajetória acadêmica fosse interrompida. Agradeço meu tio Alex, que dividiu, mesmo que por pouco tempo, a moradia e os cuidados do meu avô paterno, Abel.

À Márcia e José Cibillo, e seus filhos, João e Lucas Cibillo, que por todo o ano de 2020, permitiram que eu morasse junto com eles nos momentos difíceis da pandemia. Compartilhamos, além do sentimento de tristeza pela situação, bons momentos que estreitaram nossos laços. Vocês são como uma família para mim. Nunca esquecerei de tudo o que fizeram.

À minha Orientadora, Gabriela dos Santos Barbosa, por toda a instrução, apoio e paciência de aos poucos ir lapidando esse trabalho. Parte da responsabilidade também é sua, e eu sou grato demais por poder contar com sua ajuda.

Agradeço às professoras Daniella Assemany e Jeane Barros, que aceitaram o convite de avaliar essa pesquisa, e contribuíram com textos, correções e indicações para que aos poucos essa pesquisa fosse aperfeiçoada.

Aos professores do PPGECC, que moldaram minha vivência como professor através das disciplinas estudadas nos últimos anos.

Aos meus colegas do GEPAEM, que muito me auxiliaram nesse processo de construção do texto. Agradeço especialmente à Érika Pereira, que foi um pilar nesses anos de mestrado, compartilhando comigo dicas, textos e muito do seu tempo para que eu pudesse desabafar e me sentir em paz.

Aos meus amigos Guilherme Vasiulis, Luiz Carlos, Pamela Carolina, Bruno Maestrini, Aurélio Ribeiro, Bruno Soares, Diego Lopez, Hiago Felipe, Roberto Lopes, Vitor Araújo, Leonardo Simões, Leonardo Bonanno, Cadu Brandão, Alex da Fonseca, Rodrigo Souza, Thayná Martins e entre outros velhos e novos amigos, que sofreram com a minha ausência nesses últimos anos, mas que não se distanciaram. As palavras, brincadeiras, sorrisos, músicas, e todos os momentos que passamos juntos, com certeza aliviaram meu espírito e não permitiram que eu quebrasse. Sou muito grato a vocês.

A todos os meus alunos e colegas, que me inspiraram a ser melhor e sempre a acreditar no poder da educação.

Ao meu falecido avô, Abel Ribeiro Pontes, que cuidou de mim enquanto eu cuidava dele. Infelizmente, não está mais aqui para comemorar comigo, mas estará sempre dentro de mim.

Todos vocês foram importantes em algum momento nessa trajetória. Esse trabalho só existe também por causa de vocês. Por tudo isso, serei eternamente grato.

E o que cabe a nós, educadores [...]? Encontrar alternativas.

Ubiratan D'Ambrósio

RESUMO

CLAJUS, Lucas Felipe Pontes. **Vetores no Ensino Básico:** proposta de intervenção em aula e novas perspectivas na visão de licenciandos em matemática. 2023. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação, Cultura e Comunicação) – Faculdade de Educação da Baixada Fluminense, Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Duque de Caxias, 2023.

Num contexto inserido dentro de debates do Ensino de Matemática, ao qual são reais as dificuldades identificadas que muitos alunos possuem em compreender as matemáticas da escola, do dia a dia e as matemáticas abstratas, e identificando fortes evidências de que a utilização de vetores pode contribuir no Ensino, através do seu contexto histórico e sua versatilidade de aplicação em diversas áreas da matemática e de outras ciências, o presente trabalho tem como eixo as seguintes questões: "Por que não utilizar um objeto matemático tão importante em diversas áreas do conhecimento no Ensino de Matemática? Qual é a compreensão que os alunos de Licenciatura em Matemática, que possuem contato com tal objeto e que serão futuros professores, tem sobre a utilização de vetores no Ensino Básico? Será que este objeto não ajuda no Ensino de Matemática nas etapas do Ensino Básico?". Portanto, o trabalho tem como objetivo geral descrever a apropriação de um projeto metodológico de ensino, de caráter intervencionista que ressalta a utilização da abordagem vetorial, por um grupo de Licenciandos em Matemática. Quanto a base teórica escolhida para atingir nossos objetivos, optou-se pelas teorias cognitivistas de Aprendizagem Matemática de David Tall e Reymund Duval. A metodologia escolhida possui caráter qualitativo, sendo tipificada como uma pesquisa-ação com traços de um estudo de caso. A pesquisa resultou numa intervenção de ensino realizada no curso de Licenciatura em Matemática de UERJ, onde um total de 11 licenciandos participaram da pesquisa. As etapas da pesquisa se resumem à pesquisas exploratórias das ementas das disciplinas ofertadas no curso, aplicação de um questionário para identificação do perfil e da relação que os licenciandos possuem com a abordagem vetorial; três encontros presenciais, de 90 minutos cada, para realização de atividades, discussões, troca de conhecimentos e outras nuances com relação a abordagem vetorial e ensino de matemática; questionário final, aplicado com o intuito de receber um retorno dos licenciandos, contribuindo para a autoavaliação individual e para a avaliação da intervenção proposta. Ao final da coleta dos dados, selecionaram-se apenas 3 dos participantes como sujeitos da pesquisa, e apenas 2 dos encontros presenciais. Os dados coletados apontam que os sujeitos da pesquisa fizeram uso da abordagem vetorial, trabalhando com múltiplos Registros de Representações Semióticas e desenvolveram conhecimentos pertinentes aos Três Mundos da Matemática. Os dados também indicaram que, na perspectiva dos licenciandos, a abordagem vetorial pode ser útil no Ensino de Matemática no Ensino Básico. Conclui-se que através da intervenção de ensino realizada, os licenciandos possuem uma perspectiva positiva da abordagem vetorial, e que a utilização da abordagem vetorial auxiliou na compreensão, aprendizagem e na realização de tarefas ligadas ao Ensino Básico. O trabalho espera poder contribuir para o debate no Ensino de Matemática.

Palavras-Chaves: Vetores. Abordagem vetorial no ensino. Registros de representação semiótica. Três mundos da matemática.

ABSTRACT

CLAJUS, Lucas Felipe Pontes. **Vectors in basic education:** proposal for intervention in the classroom and new perspectives in the view of mathematics degree students. 2023. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação, Cultura e Comunicação) – Faculdade de Educação da Baixada Fluminense, Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Duque de Caxias, 2023.

In a context inserted within debates on Mathematics Teaching, in which the identified difficulties that many students have in understanding school mathematics, day-to-day mathematics and abstract mathematics are real, and identifying strong evidence that the use of vectors can contribute in Teaching, through its historical context and its versatility of application in several areas of mathematics and other sciences, the present work has as its axis the following questions: "Why not use such an important mathematical object in several areas of knowledge in Teaching of math? What is the understanding that undergraduate students in Mathematics, who have contact with such an object and who will be future teachers, have about the use of vectors in Basic Education? Could it be that this object does not help in Mathematics Teaching in the stages of Basic Education?". Therefore, the general objective of the work is to describe the appropriation of a teaching methodological project, of an interventionist nature that emphasizes the use of the vector approach, by a group of Mathematics Degree Students. As for the theoretical basis chosen to achieve our objectives, we opted for the cognitive theories of Mathematics Learning by David Tall and Reymund Duval. The chosen methodology has a qualitative character, being typified as an action research with traces of a case study. The research resulted in a teaching intervention carried out in the Degree in Mathematics course at UERJ, where a total of 11 undergraduates participated in the research. The research steps boil down to exploratory research of the menus of the disciplines offered in the course, application of a questionnaire to identify the profile and the relationship that the undergraduates have with the vector approach; three face-to-face meetings, lasting 90 minutes each, to carry out activities, discussions, exchange of knowledge and other nuances regarding the vectorial approach and mathematics teaching; final questionnaire, applied with the aim of receiving feedback from undergraduates, contributing to individual self-assessment and to the evaluation of the proposed intervention. At the end of data collection, only 3 of the participants were selected as research subjects, and only 2 of the face-to-face meetings. The collected data indicate that the research subjects made use of the vector approach, working with multiple Semiotic Representation Records, and developed knowledge relevant to the Three Worlds of Mathematics. The data also indicated that, from the perspective of the undergraduates, the vector approach can be useful in the Teaching of Mathematics in Basic Education. It is concluded that through the teaching intervention carried out, the undergraduates have a positive perspective of the vector approach, and that the use of the vector approach helped in understanding, learning and carrying out tasks related to Basic Education. The work hopes to contribute to the debate on Mathematics Teaching.

Keywords: Vectors. Vector Approach in Teaching. Semiotic Representation Records. Three Worlds of Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Vetor $\vec{v}$ representando o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ 14
Figura 2 - Campo de vento na superfície do mar no dia 17/07/2000 15
Figura 3 - Exercício de Física com destaques para os componentes de resolução 23
Figura 4 - Esquema para a multiplicação distributiva 36
Figura 5 - Movimento cíclico da investigação-ação. 58
Figura 6 - Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) 60
Figura 7 - Atividade proposta para o primeiro encontro 68
Figura 8 - Questão 1 da Atividade 3 70
Figura 9 - Questão 2 da Atividade 3 71
Figura 10 - Triângulo ABC (segunda atividade) 72
Figura 11 - Enunciado original da pergunta 3 da Atividade 1 87
Figura 12 - Enunciado original de parte da pergunta 4 da Atividade 1 89
Figura 13 - Resposta de Felipe à pergunta 6 da Atividade 1 91
Figura 14 - Resposta de Luciana a pergunta 6 da Atividade 1 92
Figura 15 - Resposta de Rafael a pergunta 6 da Atividade 92
Figura 16 - Tentativa de Felipe da demonstração do Teorema da Base Média 97
Figura 17 - Tentativa de Rafael de demonstração do Teorema da Base Média 98
Figura 18 - Tentativa de Luciana de demonstração do Teorema da Base Média parte 1 99
Figura 19 - Tentativa de Luciana de demonstração do Teorema da Base Média parte 2 100
Figura 20 - Resposta de Felipe a questão 1 da Atividade 3 102
Figura 21 - Resposta de Luciana a pergunta 1 da Atividade 3 103
Figura 22 - Resposta de Rafael a pergunta 1 da Atividade 3 104
Figura 23 - Resposta de Rafael a pergunta 4 da Atividade 3 105
Figura 24 - Resposta de Felipe a questão 5 da Atividade 3 107
Figura 25 - Resposta de Luciana a pergunta 5 da Atividade 108
Figura 26 - Resposta de Rafael a pergunta 5 da Atividade 3 109

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Descrição de conteúdos relativos ao livro 8, referentes ao 3° ano do E.M. 21
Quadro 2 - Etapas da proposta curricular utilizando a abordagem vetorial no CAp-UFRJ 27
Quadro 3 - Reestruturação Curricular da 1ª e 2ª séries do Ensino Médio no CAp – UFRJ 28
Quadro 4 - Reestruturação Curricular da 3ª série do Ensino Médio no CAp – UFRJ..... 28
Quadro 5 - Exemplos de proceitos 39
Quadro 6 - Tipos e funções de representações 52
Quadro 7 - Tabela indicando em quais atividades os participantes se engajaram..... 65
Quadro 8 - Idade, Gênero, Período da graduação e bairro onde os sujeitos estabelecem moradia 76
Quadro 9 - Perfil da trajetória acadêmica e profissional dos sujeitos 77

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 13

1 REVISÃO DE LITERATURA 19

1.1 **A Abordagem vetorial no Ensino de Matemática** 19

1.2 **Estudos realizados sobre a abordagem vetorial no Ensino de Matemática** 25

1.3 **Algumas reflexões sobre os estudos apresentados** 31

2 REFERENCIAL TEÓRICO 35

2.1 **Os Três Mundos da Matemática** 35

2.1.1 Os vetores à luz da Teoria dos Três Mundos da Matemática 43

2.2 **Semiótica e Registros de Representação Semiótica** 43

2.2.1 Semiótica 43

2.2.2 Registros de Representação Semiótica 45

2.2.3 Vetores à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica 55

2.3 **Integrando as Teorias dos Três Mundos da Matemática e Registros de Representação Semiótica** 56

3 METODOLOGIA DA PESQUISA 57

3.1 **Pesquisa Qualitativa** 57

3.2 **A Pesquisa – Ação** 58

3.3 **Estudo de Caso** 61

3.4 **O Locus e os Sujeitos da Pesquisa** 59

3.5 **Trajetória da Pesquisa** 63

3.5.1 Pesquisa das Ementas 63

3.5.2 Etapas Posteriores à determinação da disciplina 64

3.6 **Instrumentos de coleta de dados** 66

3.6.1 Questionário 1 66

3.6.2 Encontros presenciais 66

3.6.3 Questionário Final 73

3.7 **Sujeitos da Pesquisa** 73

4 DESENVOLVIMENTO 74

4.1 **Questionário 1** 74

4.1.1 Informações pessoais 74

4.1.2 Informações Técnico-científicas 77

4.2 **Encontro presencial – 01/08** 82
4.2.1 Atividade 1..... 84
4.3 **Encontro Presencial – 22/08** 96
4.3.1 Atividade 3..... 96
4.4 **Questionário Final** 113
5 CONCLUSÃO..... 118
REFERÊNCIAS 123
APENDICE A – QUESTIONÁRIO 1..... 127
APÊNDICE B – ATIVIDADE 1..... 129
APÊNDICE C – ATIVIDADE 3 132
APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO FINAL 135

INTRODUÇÃO

A preocupação com o ensino e a aprendizagem relacionados com os estudos de matemática não são novidade no Brasil e no mundo. Muito pode-se questionar se o que tem sido feito desde então, para que ocorra uma mudança nesse aspecto, tem sido eficiente; porém, é inegável que políticas públicas e diversas pesquisas foram realizadas buscando apresentar propostas que possam melhorar o nível de Aprendizagem Matemática.

Podemos destacar, na esfera das políticas públicas, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, que foi reformulada em 1996; dentre as principais características dessa reformulação, vemos uma democratização do acesso à escola, tornando o acesso ao ensino gratuito e obrigatório. Além disso, a LDB 96 permitiu a elaboração de um Plano Nacional de Educação (PNE) e a elaboração de um documento conhecido como Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Começando a ser elaborada logo no ano seguinte (1997) e vindo a ser homologada ao final da década de 1990, a proposta para o Ensino Médio – que agora fazia parte do ensino básico – se direcionava para que os conhecimentos fossem mais significantes, amplos e abstratos:

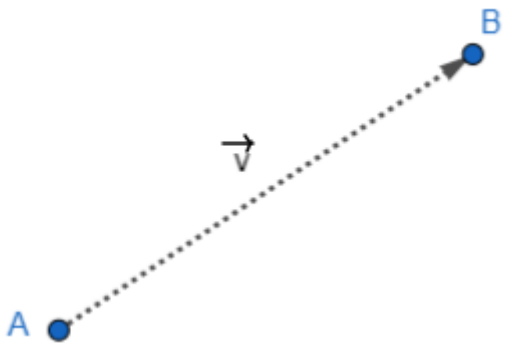
> Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam a necessidade da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. (BRASIL, 1999, p. 207)

Também se faz notar a divisão das disciplinas em blocos, para que houvesse uma maior integração entre elas. Os blocos formados foram Linguagens e suas tecnologias, Ciências da Natureza e suas tecnologias, Matemática e suas tecnologias, e Ciências Humanas e suas tecnologias. Ora, com tal divisão, é possível interpretar que o Ensino de Matemática deveria buscar uma interdisciplinaridade com as outras disciplinas consideradas como "Ciências da Natureza", destacando a Física, Química e Biologia.

Apesar de a Matemática ser academicamente uma ciência reconhecidamente permeada de objetos abstratos, seu comportamento como linguagem faz com que ela possa ser incorporada a diversas outras ciências (SANTAELLA, 2012). Logo, se nas orientações contidas nos PCN motivam que o Ensino de Matemática deve ter uma interdisciplinaridade com outras disciplinas, principalmente as ditas "Ciências da Natureza e suas tecnologias", se faz fundamental que seu ensino explore tais objetos matemáticos que são apropriados por outras ciências. Um destes objetos matemáticos é o que conhecemos como vetor.

Definimos vetor (matematicamente) como o conjunto de todos os segmentos de reta equipolentes, ou seja, que possuem a mesma direção, intensidade (módulo, valor absoluto) e sentido. A palavra vetor, que vem do latim "*vector*", significa "condutor". Tendo isto em vista, se tomarmos dois pontos quaisquer A e B, podemos entender que o vetor é aquele que conduz o ponto A até o ponto B. A figura 1 ajuda a compreender o processo utilizado no conceito definido.

Figura 1 - Vetor $\vec{v}$ representando o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$



Fonte: Adaptado de Assemany et al, 2013

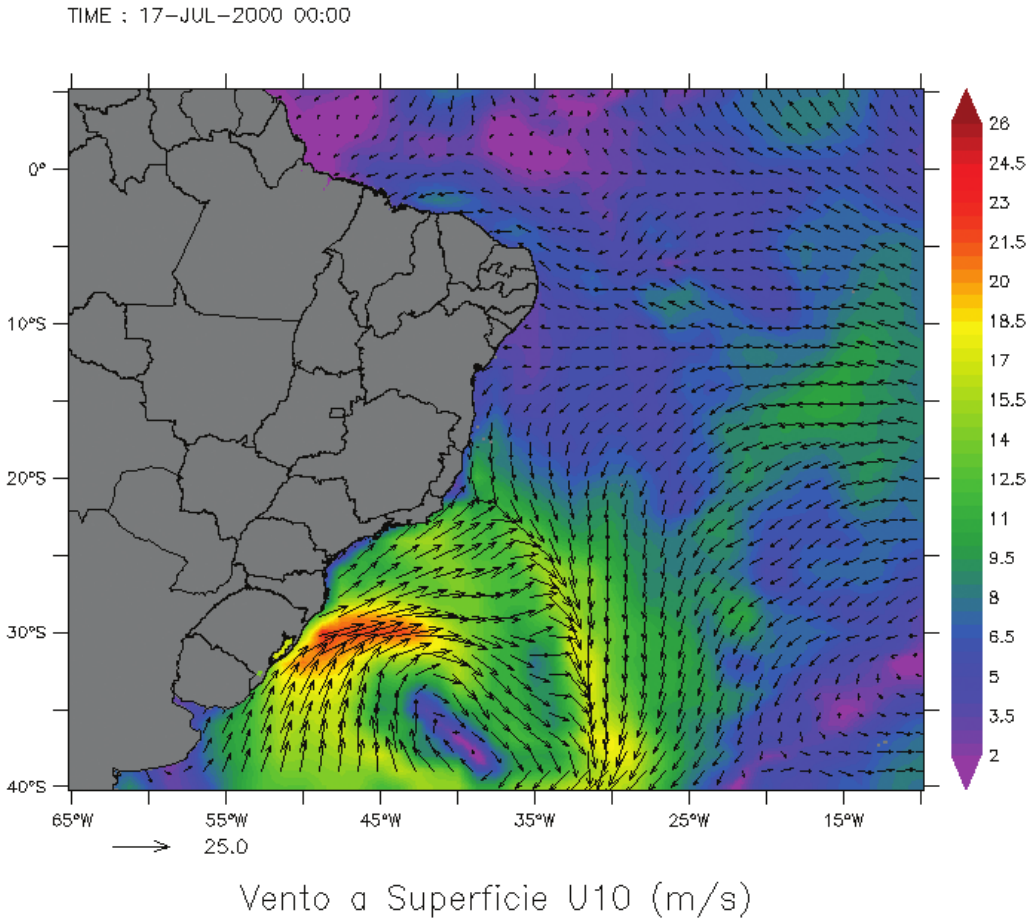
À primeira vista, o contato inicial com vetores pode não representar algo tão importante na integração com as demais áreas do conhecimento. Apesar disso, temos o vetor sendo amplamente utilizado na Física, uma vez que existem grandezas que possuem apenas intensidade (ou módulo) e grandezas que possuem, para além do módulo, direção e sentido. Essas concepções fizeram com que as grandezas que tivessem as três características citadas acima, como a *força* e a *aceleração*, fossem batizadas como *grandezas vetoriais*[1].

As características vetoriais, tal qual as possíveis relações com a ideia de vetor, não se limitam apenas à Física; uma vez que que a raiz etimológica da palavra vetor significa condutor, ele será amplamente utilizado em diversas áreas dentro da Matemática vista nas etapas do Ensino Básico: destacamos que essa ideia está presente nas transformações geométricas, principalmente de translação e rotação. Já a definição real e as características vetoriais podem realizar uma conexão com números complexos, quando interpretamos geometricamente tais números; outra aplicação dentro da matemática se encontra em usar da abordagem vetorial quando estudamos trigonometria e matrizes. Para o Nível Superior, as aplicações se estendem

[1] Por possuírem as características vetoriais (módulo, direção e sentido), essas grandezas foram batizadas fazendo referência ao vetor, que é o objeto matemático que possui tais características.

para áreas da Geometria Analítica, Cálculo, Álgebra Linear, entre outros. Além disso, a ideia de vetor ser originário da palavra condutor auxilia associação com outras áreas, como a própria biologia (quando um mosquito *Aedes Egypt* transmite dengue para um ser humano, ele é chamado de vetor, ainda que esse não seja o objeto matemático que entendemos como vetor[2]). Encontramos também em áreas mais técnicas, como edição de imagens (já que se lança mão de diversos vetores para locomover um objeto); também existem vetores representados dentro de áreas da Meteorologia. Para isso, vamos tomar como exemplo a figura 2 abaixo:

Figura 2 - Campo de vento na superfície do mar no dia 17/07/2000



Fonte: Alves et al, 2009

[2] Conforme dito anteriormente, vetor (matematicamente) é o conjunto de segmentos orientados de mesma direção, comprimento e sentido; quando fazemos associação com o mosquito da dengue, usamos a ideia de que, tal qual um mosquito conduz o vírus, um vetor conduz um ponto (ou até outros objetos geométricos) até um outro ponto

A figura 2 acima traz um exemplo de representação vetorial, pois a inclinação das "setas"[3] representam a direção ao qual o vento está soprando, a extremidade da "seta" indica o sentido do vento, enquanto as cores indicam a intensidade do vento, numa escala de 0 a 26 m/s.

Apesar de todo esse valor que o vetor carrega, é possível verificar de alguma forma que tal conteúdo é considerado ausente no Ensino de Matemática nas etapas do Ensino Básico, mesmo sendo bastante utilizado no Ensino Superior. Ainda que seja um assunto discutido e considerado no Ensino, conforme indica a 2ª versão da BNCC[4], lançada em 2016, os vetores foram retirados da versão oficial da BNCC[5], lançado em 2018, o que corrobora com a opção por manter esse conteúdo ausente. Os motivos para isso ainda são desconhecidos, e causam certa inquietação a minha pessoa; afinal, por que não utilizar um objeto matemático tão importante em diversas áreas do conhecimento no Ensino de Matemática? Qual é a compreensão que os alunos de Licenciatura em Matemática, que possuem contato com tal objeto e que serão futuros professores, tem sobre a utilização de vetores no Ensino Básico? Será que este objeto não ajuda no Ensino de Matemática nas etapas do Ensino Básico?

A partir de tudo o que foi apresentado, este presente trabalho busca contribuir com as pesquisas no ensino de matemática, uma vez que possui os seguintes objetivos:

- Descrever a apropriação de um projeto metodológico de ensino, de caráter intervencionista que ressalta a utilização da abordagem vetorial, por um grupo de Licenciandos em Matemática. (objetivo geral)
- Identificar, partindo do ponto de vista de Licenciandos em Matemática, quais as perspectivas sobre o uso de uma abordagem vetorial no Ensino de Matemática (objetivo específico)
- Averiguar se a abordagem vetorial no Ensino de Matemática auxilia na compreensão e aprendizagem Matemática, tal qual na realização de atividades pertinentes à Educação Básica (objetivo específico).

Definidos os objetivos de pesquisa, o trabalho está exposto em cinco capítulos. O primeiro capítulo, intitulado "Revisão de Literatura", traz as principais pesquisas já realizadas sobre vetores e a abordagem vetorial no ensino, apresentando qual a visão dos documentos oficiais sobre a utilização dos vetores, como a ausência de vetores se reflete nos materiais didáticos utilizados em Matemática, a utilização dos vetores no ensino de Física, o impacto de

[3] Mesmo compreendendo que aquelas setas são representações de vetores, optou-se por escrever setas no texto para que seja possível associar o objeto a sua forma de representação ilustrado na figura 2.
[4] Apresentamos essa citação no próximo capítulo.
[5] BRASIL, 2018.

uma abordagem vetorial na transição entre o Ensino Superior e o Ensino Médio, entre outros assuntos.

No capítulo 2, temos o Referencial Teórico; neste capítulo busca-se entender como a aprendizagem matemática pode ser aperfeiçoada partindo das teorias dos Três Mundos da Matemática (Tall) e Registros de Representação Semiótica (Duval). Além disso, observamos como a abordagem vetorial se insere e é interpretada à luz de cada teoria; também é feito um esforço para integralizar as teorias estudadas apresentadas.

No capítulo 3 está exposto a Metodologia de Pesquisa, suas características e todo o plano de ação proposto para que os objetivos da pesquisa sejam alcançados. No capítulo 4, está descrito o Desenvolvimento do Trabalho de Campo, com seus resultados e discussões; já no capítulo 5 se encontram as Conclusões Parciais, que podem ser colhidas conforme as premissas investigativas apresentadas até o momento.

MOTIVAÇÃO DE PESQUISA

Este trabalho é produto de muito esforço e curiosidade. Para isso, remontaremos a uma época muito importante e decisiva na minha trajetória: a graduação. Comecei a cursar Licenciatura em Matemática Pura e Aplicada na Faculdade de Educação da Baixada Fluminense (FEBF), o campus da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) em Duque de Caxias, cidade onde residia, em 2013. Tinha recém completado o Ensino Médio, no ano anterior, de modo que as matérias do Ensino Médio ainda estavam razoavelmente frescas na memória. Ainda assim, a transição entre a matemática utilizada no Ensino Médio e a matemática estudada no Ensino Superior não foi nada fácil. Tudo parecia e era muito diferente.

Uma das coisas que influenciaram nessa percepção foi a disciplina de Geometria Analítica. Normalmente, essa disciplina é aplicada no 3° Ano do Ensino Médio, ou seja, o último ano dessa etapa. A abordagem que a disciplina aplicada na faculdade utilizou foi bastante diferente do que eu tinha visto anteriormente. Logo no começo da disciplina, fui apresentado ao vetor dentro da Matemática, e isso me impactou. A primeira coisa que eu pensei foi “como vetor, uma coisa da Física, pode ser útil nessa matéria?”; o tempo veio a provar que foi bastante útil. Ao decorrer da disciplina, tive menos dificuldades na Geometria Analítica no Ensino Superior do que no Ensino Médio, e sempre me fiz a pergunta: se é mais fácil desse jeito, por

que não se utiliza a abordagem vetorial dentro da Geometria Analítica também no Ensino Médio?

A abordagem vetorial me acompanhou por bastante tempo na graduação, e sua importância como um objeto matemático foi observada em diversos momentos ao longo dela. Contudo, na minha prática profissional docente, a abordagem vetorial também se fez importante. Certa vez, em uma das aulas particulares que eu estava lecionando, enquanto ainda cursava a graduação, resolvi testar uma abordagem vetorial para as aulas de Geometria Analítica. Apesar da divergência entre o método visto na escola e o método visto nas aulas particulares, a estudante assumiu ter compreendido a matéria, mesmo que isso tenha acendido a desconfiança do professor que ministrava a disciplina no colégio em que ela estava matriculada – que falava que "apenas um estudante do Ensino Superior usava esses métodos".

Novamente, me encontrei no dilema de saber o porquê dessa abordagem não ser utilizada no Ensino Médio, uma vez que parecia se mostrar útil. Primeiro, resolvi investigar se de fato a abordagem vetorial era subutilizada. Essa investigação foi a proposta da minha monografia, intitulada "Vetores no Ensino de Matemática: Um estudo sobre a sua utilização e sua versatilidade", defendida em 2019. Desde então, constatando o fato de que a abordagem vetorial geralmente se encontra ausente no Ensino de Matemática, com pequenas exceções, como em colégios de aplicação, mantive a curiosidade de tentar entender o que justifica a ausência dessa abordagem, e, quem sabe, tentar descobrir algumas maneiras de evitar isso. Para isso, conto com a orientação da Prof.ª Dr.ª Grabriela Barbosa e o apoio de amigos e colegas na realização dessa pesquisa.

É importante ressaltar que essa pesquisa foi realizada com diversos propósitos, com a possibilidade de estimular debates acadêmicos sobre a utilização da abordagem vetorial no Ensino de Matemática nas etapas do Ensino Básico, sendo um destes. É inegável, porém, que também é propósito dessa pesquisa, que ela atinja professores de Matemática que se encontram também no Ensino Básico, e não atinja apenas a esfera acadêmica. Portanto, tendo consciência de ser um trabalho de longa leitura, buscou-se trazer um equilíbrio entre a linguagem formal e a linguagem coloquial, para que a leitura não fique maçante ao leitor, e nem desrespeite os parâmetros acadêmicos.

1 REVISÃO DE LITERATURA

1.1 A Abordagem vetorial no Ensino de Matemática

A abordagem vetorial é encontrada e utilizada principalmente na área da matemática. Com uma importância histórica e caráter versátil, o uso dos vetores se fez fundamental para a compreensão de conceitos imprescindíveis desta ciência tão abstrata. Os estudos de Assemany corroboram essa perspectiva:

> Na história da matemática, mais especificamente nas origens do aparecimento do conceito de vetor (Crowe, 1967), encontrei que o seu desenvolvimento se deu na busca de leituras geométricas para alguns resultados algébricos, permitindo a sua visualização e, desejavelmente, contribuindo para a sua compreensão. Sobretudo, os vetores foram utilizados, mesmo antes de sua conceituação, para vários fins, como: cooperar com o estudo de sistemas lineares; tentar generalizar os números complexos a lR^3, tentativa essa que veio a dar origem aos quatérnios, em lR^4; e dar uma interpretação dos números negativos como um deslocamento contrário a um sentido de referência. (ASSEMANY, 2020)

As contribuições que a abordagem vetorial proporciona não se limitam apenas à Matemática. Temos na Física Newtoniana, principalmente no estudo da Dinâmica, a presença da abordagem vetorial, cumprindo uma função de facilitar a visualização dos fenômenos observados. Desta maneira, encontramos uma das muitas interações possíveis entre a Matemática e a Física, áreas da ciência que estão presentes no currículo da Educação Básica.

Buscando promover uma educação mais acessível e de melhor qualidade para todo o país, muitos esforços foram empregados. Dentre os mais importantes, temos o estabelecimento a aprovação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) em 1996, dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) em 1999 e a Base Nacional Comum Curricular, aprovada em 2018.

No que tange à Matemática, encontramos orientações que indicam como positiva a interdisciplinaridade entre Matemática e as outras ciências. Podemos atestar isso quando analisamos dentro da BNCC os objetivos específicos da competência “Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio”:

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral. (BRASIL. 2018, p. 534)

É de se imaginar, então, que uma abordagem vetorial seria de extrema ajuda, visto que sua utilização não fica limitada apenas à Matemática. Porém, quando examinamos a BNCC na competência que envolve a Matemática e Suas Tecnologias no Ensino Médio, não encontramos

menção alguma ao uso de vetores no ensino. Não se sabe ao certo o motivo disso ocorrer, mas é possível identificar reflexos de uma ausência do uso de vetores em outros campos de atuação no Ensino de Matemática.

Como exemplo da ausência da abordagem vetorial no Ensino de Matemática, podemos destacar o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), que possui entre as suas atribuições a tarefa de selecionar as coleções de Livros Didáticos que são usados na Educação Básica. Portanto, as coleções de Livros Didáticos, desde a Educação Infantil até o Ensino Médio, passam por um processo de inscrição, onde serão avaliados e, se for o caso, aprovados. Com base nessa avaliação, elabora-se um documento, chamado de Guia do Programa Nacional do Livro Didático (representado neste trabalho pela sigla GPNLD), que é enviado para todas as Escolas Públicas da Educação Básica do país. As escolas, então, analisam os livros e escolhem qual coleção será utilizada para aquele ano de ensino. No ano de 2018 foi emitido o GPNLD referente aos Livros Didáticos do Ensino Médio, e, devido à transição para o Novo Ensino Médio, um novo GPNLD para o Ensino Médio foi publicado em 2021[6]. Ainda que não seja o GPNLD mais atualizado, tomaremos como base os dados no GPNLD de 2018, pois podemos encontrar dados mais aprofundados sobre as coleções livremente em sites do governo.[7]

O PNLD de 2018 [8]aprovou oito coleções para serem utilizadas no Ensino Médio voltados para o ensino de matemática. São elas:

- *Matemática – Contexto & Aplicações* (1). *Luís Roberto Dante. Editora Ática, 3ª edição, 2016;*
- *Quadrante – Matemática* (2). *Diego Prestes e Eduardo Chavant. Editora SM, 1ª edição, 2016;*
- *Matemática: Ciência e aplicações* (3). *David Degenszajn, Gelson Iezzi, Nilze de Almeida, Osvaldo Dolce, Roberto Périgo. Editora Saraiva, 9ª edição, 2016;*
- *Matemática para compreender o mundo* (4). *Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz. Editora Saraiva, 1ª edição, 2016;*
- *Matemática: Interação e tecnologia* (5). *Rodrigo Balestri. Editora Leya, 2ª edição, 2016;*

[6] Em 2019, o GPNLD foi voltado para livros do Ensino Fundamental nos anos iniciais; em 2020, foi voltado para livros do Ensino Fundamental nos anos finais.
[7] Infelizmente, o GPNLD 2021 não permite o acesso aos Livros Didáticos e nem ao título dos capítulos dos Livros sem um código de acesso, que só pode ser obtido através de um diretor de Escola Pública. Não conseguimos esse código, e preferimos trabalhar com a transparência de dados que podem ser acessados por qualquer indivíduo.
[8] O GPNLD de 2018 pode ser acessado através do link https://www.fnde.gov.br/pnld-2018/

- *#contato matemática* (6). *Jacqueline Garcia e Joamir Souza. Editora FTD, 1ª edição, 2016;*
- *Matemática – Paiva* (7). *Manoel Paiva. Editora Moderna, 3ª edição, 2016;*
- *Conexões com a matemática* (8). *Fábio Martins de Leonardo. Editora MODERNA, 3ª edição, 2016.*

Ao analisar as resenhas de cada um desses livros presente no GPNLD, é possível verificar a ausência do conteúdo de vetores em sete das oito coleções. Apenas a coleção *Conexões com a matemática* apresenta o conteúdo de vetores, numa relação com os números complexos, na série final do Ensino Médio. O quadro 1 a seguir deixa listada os conteúdos abordados no 3° ano do Ensino Médio encontrados na coleção.

Quadro 1 - Descrição de conteúdos relativos ao livro 8, referentes ao 3° ano do E.M.

3º ano – 9 capítulos – 223 p.	
1	Matemática financeira: taxa percentual, aumentos e descontos sucessivos, lucro e prejuízo, montante, juro simples, juro composto.
2	Experimento aleatório; espaço amostral; eventos: simples, certo e impossível; definição de probabilidade; eventos: complementares, mutuamente exclusivos; probabilidade condicional: definição, eventos dependentes e independentes; método binomial.
3	Estatística: população, amostra, variáveis, frequências absoluta, relativa e acumulada, distribuição de frequências para dados agrupados; representações gráficas; frequência relativa e probabilidade.
4	Medidas de tendência central: média, mediana, moda, para dados agrupados em intervalos; medidas de dispersão: desvio médio, variância e desvio padrão, para dados agrupados em intervalos.
5	Plano cartesiano; ponto: distância entre pontos, coordenadas do ponto médio, condições de alinhamento; retas: equações, inclinação e coeficiente angular, posição relativa entre duas retas no plano, ângulos formados entre retas concorrentes, distância a um ponto; inequações do 1º grau com duas incógnitas - área de uma superfície triangular.
6	Circunferência: lugar geométrico plano, equações; posições relativas entre: ponto e circunferência, reta e circunferência, duas circunferências.
7	Seções cônicas; elipse, parábola e hipérbole: definições, elementos e equações.
8	Números complexos: unidade imaginária, representação algébrica, igualdade, conjunto, operações, conjugado, representações geométricas, vetorial e trigonométrica, operações na forma trigonométrica.
9	Polinômios: grau, valor numérico, igualdade, operações, teoremas do resto e de D'Alambert; equações polinomiais: raiz, Teorema Fundamental da Álgebra, Teorema da decomposição, relação de Girard.

Fonte: Adaptado de Brasil, 2018.

É curioso pensar que, apesar da ausência de uma abordagem vetorial em grande parte dos Livros Didáticos que chegam até as escolas públicas do país, o próprio PNLD demonstra

ter um parecer favorável a uma interação de conteúdos de Matemática apresentados nos livros com a abordagem vetorial. Isso é perceptível neste trecho a seguir:

> Os números complexos têm sido incluídos como tópico a ser trabalhado no Ensino Médio. No entanto, muitos educadores só consideram o seu estudo indispensável para aqueles estudantes que vão utilizar modelos matemáticos mais avançados em suas profissões. Por exemplo, engenheiros (ou técnicos nas áreas da Engenharia), físicos e matemáticos. Mesmo nesses casos, é importante que o estudo dos complexos seja uma oportunidade privilegiada de articulação com tópicos como vetores e geometria no plano, com trigonometria e com as equações algébricas. (BRASIL. 2017, p. 24).

Essa ausência do conteúdo de vetores não é sentida apenas nos dias de hoje. Elon Lages Lima, um dos educadores matemáticos que foi referência na elaboração de livros didáticos em diversas etapas do Ensino de Matemática, realizou, junto com colaboradores, análises de livros didáticos no começo do milênio. Nos seus estudos, ele cita desconhecer o motivo da ausência desse conteúdo e considera tal fato um erro: "[...] um dos defeitos deste livro e de todos os livros de Matemática para Ensino Médio existentes no mercado é a completa omissão de vetores. Estranhamente, vetores são ensinados nos livros de Física, não nos de Matemática." (Lima et al, 2001, p. 130).

Seguindo, então, a investigação de Lima, percebe-se que o conteúdo de vetores está de fato presente nos livros de Física do Ensino Médio. Analisando o GPNLD de Física no mesmo ano de 2018[9], notamos que foram aprovadas 12 coleções; dentre as 12, 7 apresentam o conteúdo de vetores. Não parece coincidência que mais da metade dos livros opta por essa abordagem, principalmente na sessão de Dinâmica. A escolha se dá pela versatilidade que a abordagem vetorial traz ao conteúdo.

A presença do conteúdo de vetores quase que exclusiva nos Livros Didáticos de Física nos levam a questionar o motivo disso ocorrer e as consequências que isso gera nos estudantes. Dessa maneira, muitos dos alunos podem passar todo o Ensino Médio com a impressão de que o conteúdo de vetores é um conteúdo da Física, e não da Matemática, uma vez que a própria ciência à qual o vetor faz parte, escolhe renunciar a sua abordagem nas etapas do Ensino Básico.

Nesse sentido, investigando essas interações, temos os estudos de Santos (2014). Numa defesa de que a abordagem vetorial é um conteúdo de Matemática e que deve ser utilizada também por professores de Matemática, Santos traz essa investigação sobre a presença de vetores nos Livros Didáticos baseado no PNLD de 2012. Além disso, realiza a análise de três exercícios de Física onde a abordagem vetorial é aplicada para a resolução do exercício.

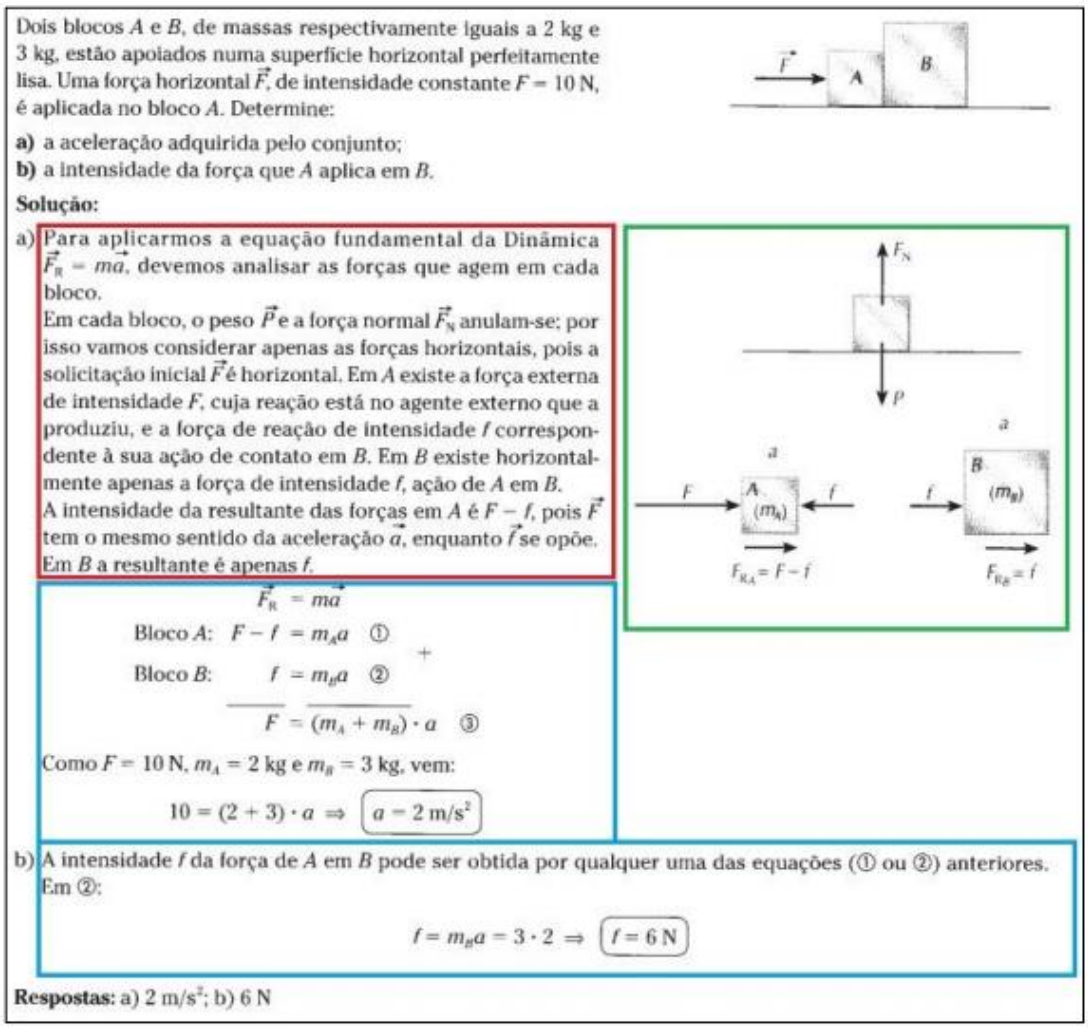
Analisando os exemplos dos estudos de Santos (2014), observa-se que ele separa a resolução em três componentes: a parte teórica da Física, a parte de desenvolvimento

[9] Também pode ser acessado através do link https://www.fnde.gov.br/pnld-2018/

matemático e a modelagem através de imagens; ao grifar os componentes na imagem, escolhe as cores vermelha, azul e verde para representar cada componente de maneira respectiva, como podemos observar na figura 3

.

Figura 3 - Exercício de Física com destaques para os componentes de resolução



Dois blocos A e B, de massas respectivamente iguais a 2 kg e 3 kg, estão apoiados numa superfície horizontal perfeitamente lisa. Uma força horizontal $\vec{F}$, de intensidade constante $F = 10$ N, é aplicada no bloco A. Determine:

a) a aceleração adquirida pelo conjunto;
b) a intensidade da força que A aplica em B.

Solução:

a) Para aplicarmos a equação fundamental da Dinâmica $\vec{F}_R = m\vec{a}$, devemos analisar as forças que agem em cada bloco.
Em cada bloco, o peso $\vec{P}$ e a força normal $\vec{F}_N$ anulam-se; por isso vamos considerar apenas as forças horizontais, pois a solicitação inicial $\vec{F}$ é horizontal. Em A existe a força externa de intensidade F, cuja reação está no agente externo que a produziu, e a força de reação de intensidade f correspondente à sua ação de contato em B. Em B existe horizontalmente apenas a força de intensidade f, ação de A em B.
A intensidade da resultante das forças em A é $F - f$, pois $\vec{F}$ tem o mesmo sentido da aceleração $\vec{a}$, enquanto $\vec{f}$ se opõe.
Em B a resultante é apenas f.

$$\vec{F}_R = m\vec{a}$$

Bloco A: $F - f = m_A a$ ①

Bloco B: $f = m_B a$ ②

$$F = (m_A + m_B) \cdot a \quad ③$$

Como $F = 10$ N, $m_A = 2$ kg e $m_B = 3$ kg, vem:

$$10 = (2 + 3) \cdot a \Rightarrow \boxed{a = 2 \text{ m/s}^2}$$

b) A intensidade f da força de A em B pode ser obtida por qualquer uma das equações (① ou ②) anteriores. Em ②:

$$f = m_B a = 3 \cdot 2 \Rightarrow \boxed{f = 6 \text{ N}}$$

Respostas: a) 2 m/s²; b) 6 N

Legenda 1- Destacado em vermelho a teoria física, em azul a resolução utilizando componentes matemáticos e em verde a modelagem em figuras

Fonte: Santos, L. S., 2014

É notável, porém, que o autor pondera que a parte em verde, que representa a modelagem em desenho, é a parte onde muitos dos alunos apresentam dificuldade, e é nela que os professores precisam demandar mais atenção. Após a análise da parte da modelagem, essa foi a conclusão do autor:

> "[...] percebe-se claramente que retirando os blocos para visualizarmos apenas o que se interessa em Matemática, o exercício se resumiu apenas à adição e subtração de vetores. As dificuldades dos alunos neste conteúdo poderiam ser provavelmente

> amenizadas com um ensino adequado no campo da Matemática. A partir do momento em que se define o módulo, a direção e o sentido correto dos vetores no exercício, a questão se torna puramente Matemática. Baseado nesta ideia, podemos organizar a abordagem dos exercícios físicos em etapas bem claras, para o aluno entender se suas dificuldades se encontram em conceitos da Matemática ou da Física. A meu ver, a parte grifada em verde que envolve vetores, é de cunho matemático" (SANTOS. 2014, p. 46)

De fato, pode existir um debate sobre o conteúdo apresentado e destacado de verde ser apenas matemático. Entretanto, corroboro a opinião do autor de que esse conteúdo é matemático, de maneira que entendo a Matemática como uma linguagem, que muitas vezes é utilizada por outras ciências. Contudo, compreender em qual componente reside de fato a dúvida do estudante é importante para a prática professoral; além disso, o fato da Física utilizar da linguagem matemática não deveria ser visto como negativo pelos professores de ambas as disciplinas, e nem pelos estudantes, uma vez que permite uma via de integração entre elas:

> Este trabalho não defende a retirada do ensino dos vetores nos livros de Física. Pelo contrário, podemos enumerar vários tópicos de Física, que o uso de vetores se torna essencial: as leis de Newton, Trabalho, Energia, Gravitação Universal, Hidrostática, campo elétrico, eletromagnetismo, entre outros tópicos, são aplicados o conceito de vetores em suas teorias. Não custa lembrar, o presente trabalho tem intenção de defender também, a inclusão do estudo de vetores nos livros de Matemática. (SANTOS. 2014, p. 29)

É neste momento em que a defesa do uso do conteúdo de vetores se faz importante para o Ensino de Matemática. Possibilitar ao aluno perceber a conexão entre as duas áreas, não as áreas como ciências distintas, pode ser proveitoso para o Ensino, principalmente se o aluno conhecer e souber realizar o tratamento dos conteúdos em ambas as disciplinas; isto permite que as dúvidas que um aluno tiver, no que diz respeito a Matemática, possa ser resolvida dentro do âmbito da Matemática, e não relegada quase que exclusivamente ao professor de Física. Porém, quando o conteúdo de vetores não é utilizado no estudo de Matemática do Ensino Básico, essa oportunidade é desperdiçada.

Trabalhar com vetores no Ensino de Matemática não seria algo inédito. Existem pesquisas e projetos onde a abordagem vetorial é central no desenvolvimento dos estudos de matemática. Podemos começar destacando que em locais como a França, o estudo de vetores é um componente presente na Educação Matemática desde o Ensino Fundamental:

> Na França, a geometria vetorial se encontra distribuída nos dois últimos anos do ensino fundamental (4º ciclo) e ao longo do ensino médio. (...) uma primeira leitura de livros didáticos de matemática adotados na França, para a educação básica, mostra claramente que a noção de vetor aparece nesse nível como um ente geométrico que deverá servir para resolver problemas de geometria: trata-se de introduzir uma nova ferramenta para resolver problemas por vezes já conhecidos dos alunos. (BITTAR, 2013, p. 71-73)

É possível observar um contraste entre a realidade do Ensino de Matemática entre o Brasil e França. Dadas as diferenças econômicas, sociais e políticas desses países, comparações entre ambos métodos e sistemas de ensinos deve ser feita com muita cautela. Vale a pena uma investigação do porquê a abordagem vetorial foi adotada pela França e é amplamente usada desde o Ensino Fundamental, ao contrário do que temos aqui. Contudo, vale a ressalva de que, caso a abordagem vetorial fosse adotada desde o Ensino Fundamental no Brasil, o estudante conheceria sobre vetores com antecedência, que o permitiria, além das interpretações geométricas, principalmente quando estudamos as transformações geométricas, ter mais facilidade nos conteúdos de Física que se apropriam da abordagem vetorial, entre outros. Temos como o exemplo o conteúdo de relações trigonométricas no triângulo retângulo, que os alunos brasileiros aprendem ao final do Ensino Fundamental e aplicam na Física, justamente na hora de decompor vetores.

1.2 **Estudos realizados sobre a abordagem vetorial no Ensino de Matemática**

Apesar da abordagem vetorial não ser usualmente presente na Matemática estudada no Ensino Básico no Brasil, isso não significa dizer que o assunto não tem sido discutido. Muito do que se é debatido aqui se deu de uma perspectiva do Ensino Superior. Podemos destacar, pelo seu papel de excelência de pesquisa e extensão na área de Educação Matemática, o Projeto Fundão[10], ligado ao Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Dentre os diversos trabalhos realizados, pode-se citar os de Nasser, Sousa e Torraca (2012) e Nasser, Vaz e Torraca (2015), que buscam identificar as dificuldades de transição entre as esferas de ensino, tendo como foco de estudo as disciplinas de Cálculo I e Geometria Analítica, respectivamente.

Quanto a disciplina de Cálculo I, percebeu-se que, dentre as dificuldades apresentadas, destacam-se aquelas relacionadas com a construção e análise de gráficos de funções. Os alunos perdem a oportunidade, muitas vezes por não terem aprendido tais métodos no Ensino Médio, de trabalhar com métodos de transformações geométricas, de maneira em que a principal crítica é que "e as dificuldades na transição para o Ensino Superior, em especial na disciplina de

[10] O Projeto Fundão atua profundamente na Extensão e na Formação Continuada do professor de Matemática. Atualmente, possui áreas de pesquisa voltada para temas como: Ensino de Matemática para Alunos com Deficiência Visual e Alunos Surdos; Estatística e Probabilidade no Ensino Fundamental; Matemática no Ensino Fundamental; Matemática nos Anos Iniciais; Transição do Ensino Médio para o Superior; entre outros. Mais informações podem ser encontradas no site http://www.matematica.projetofundao.ufrj.br/

Cálculo, podem ser amenizadas por abordagens adequadas de tópicos do Ensino Médio, tais como Funções e Geometria." (NASSER; SOUSA; TORRACA. 2012, p. 1).

Temos, dentro da abordagem vetorial, componentes que auxiliam justamente nas transformações geométricas. Através dos vetores, é possível realizar principalmente as transformações de translação e rotação. Vemos então uma relação daquilo que foi explicado por Bittar (2013), e por isso ocorre a utilização da abordagem vetorial desde os anos finais do Ensino Fundamental, uma vez que as transformações geométricas são componentes constantes no currículo desta etapa da Educação Básica brasileira.

Com relação aos estudos produzidos analisando a disciplina de Geometria Analítica, Nasser, Vaz e Torraca (2015) realizam um método semelhante ao estudo de Nasser, Sousa e Torraca (2012), que consiste em analisar a dificuldade da transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior. Nesse estudo, é chamado à atenção o fato de que os conteúdos de função, no Ensino Médio, geralmente desperdiçam a oportunidade de se integrar com outros conteúdos da Matemática:

> Ao trabalhar com funções em Cálculo, pode-se perceber que esse conteúdo é abordado no Ensino Médio (EM) de maneira ingênua e pontual, não contribuindo para a sua retomada de modo mais amplo no Ensino Superior. Em particular, as funções linear e afim poderiam remeter a outros conteúdos como proporcionalidade, progressões aritméticas, matemática financeira ou geometria analítica (estudo do plano cartesiano, vetores e retas, com suas diversas representações). (NASSER; VAZ; TORRACA. 2015, p. 2)

É possível observar que, para tais pesquisadores, as conexões com o conteúdo de funções e outros da Matemática deveriam ser mais bem trabalhados, e curiosamente, apontam os vetores como uma das maneiras de trabalhar a integração entre geometria analítica e função. Perceber que os conteúdos se conectam se revela importante quando falamos de Matemática, que pode não ser interpretada corretamente pelos alunos devido ao fato de ser muito abstrata. Ser abstrato já torna o conteúdo difícil para muitos alunos. Ser abstrato e desconexo, torna mais ainda. Frequentemente, essa conexão não é realizada, e a presença da abordagem vetorial no Ensino de Matemática poderia contornar essa situação. A ausência da abordagem vetorial também é notada e referenciada para os pesquisadores:

> Observando as dificuldades apresentadas por alunos ao chegar à universidade, o grupo começou a questionar o que se ensina de vetores e retas no EM. Para nossa surpresa, vetores é um tópico que, em geral, não faz parte dos currículos de EM de Matemática. Em alguns casos, aparece no currículo de Física, mas, infelizmente, os alunos não fazem a transposição para usar vetores na Matemática. (NASSER, VAZ; TORRACA. 2015, p. 2-3)

Percebe-se, então, que há um diálogo com as observações dos pesquisadores e aquilo que já foi abordado neste trabalho: não identificar o conteúdo de vetores como algo pertinente

à Matemática restringe o aluno quando se faz necessário aplicar o seu conhecimento para a resolução de problemas dentro da própria área. A não percepção da Matemática como uma linguagem que muitas vezes é utilizada por outras ciências faz com que o aluno separe a Matemática das demais, como algo puro e desconexo.

Em 2006, iniciou-se no Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro (CAp - UFRJ) um projeto de reestruturação curricular do Ensino Médio, sob a coordenação de Daniella Assemany. Essa experiência didática proporcionou dados que foram estudados e analisados pelo Projeto Fundão, permitindo um campo cheio para a pesquisa e para a análise dos resultados obtidos. A reestruturação curricular não visava apenas inserir o conteúdo de vetores no currículo dessa etapa de Ensino, mas também tinha como proposta tornar a abordagem vetorial um dos componentes principais dos conteúdos matemáticos a serem estudados, logo na série do 1°ano do Ensino Médio. A justificativa para realizar tal alteração foi baseada na metodologia francesa, visando explorar a parte de transformações geométricas para realizar uma integração entre os conteúdos:

> A introdução da noção de Vetores no R^2 no 1° ano do Ensino Médio pretende lançar mão de um instrumento importante e prático no estudo dos conteúdos expostos em sequência, mas principalmente da Trigonometria e Função Afim, reduzindo cálculos desnecessários que estes temas recorrem quando seu ensino é feito de maneira isolada. A organização dos conteúdos estruturados e baseados nos Vetores pretende conduzir o aluno a interpretações geométricas de fatos algébricos. (ASSEMANY. 2011, p. 6)

A aplicação dessa Metodologia se estendeu até 2013, de maneira que o conteúdo de vetores não ficou exclusivo apenas ao 1° Ano do Ensino Médio. Eventualmente, se percebeu necessária uma reestruturação curricular para as demais séries dessa etapa de ensino. Os quadros abaixo indicam o cronograma de reestruturação do projeto, e as componentes curriculares de cada série.

Quadro 2 - Etapas da proposta curricular utilizando a abordagem vetorial no CAp-UFRJ

	2006	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**
1ª série EM	1.1. Início da proposta apenas na 1ª série/EM	1.2. Alterações na proposta	Manutenção da proposta de 2007	Manutenção da proposta de 2007	1.3 Alterações significativas na proposta de 2007	1.4 Algumas adaptações à proposta de 2010	Manutenção da proposta de 2011	Manutenção da proposta de 2011
2ª Série EM	x	x	x	2.1. Início da proposta na 2ª Série/EM	2.2. Alterações significativas na proposta	Manutenção da proposta de 2010	Manutenção na proposta de 2010	Manutenção na proposta de 2010

3ª Série EM	x	x	x	x	x	3.1 Início da proposta na 3ª Série/EM	3.2. Alterações significativas na proposta	3.3 Algumas adaptações à proposta de 2012

Fonte: Adaptado de ASSEMANY, 2017.

Quadro 3 - Reestruturação Curricular da 1ª e 2ª séries do Ensino Médio no CAp – UFRJ

	Conteúdos	
	1º Semestre	**2º Semestre**
1º Ano Do EM	**Conjuntos Numéricos e Intervalos Reais**	**Funções**
	Vetores no R^2	**Módulo de um número real**
	Circunferência e sua equação	**Função Afim/Modular**
	Transformações no R^2	**Progressão Aritmética**
	Trigonometria no Círculo	**Função Quadrática/Modular**
	Equações da Reta no Plano	**Inequações**
2º Ano Do EM	**Função Exponencial/Modular**	**Matemática Financeira**
	Equação e Inequação Exponencial	**Trigonometria**
	Progressão Geométrica	**Funções Trigonométricas**
	Logaritmos	**Análise Combinatória**
	Função Logarítmica/Modular	**Probabilidade**
	Equação e Inequação Logarítmica	**Binômio de Newton**

Fonte: ASSEMANY, D.; HARAB, L., 2013.|

Quadro 4 - Reestruturação Curricular da 3ª série do Ensino Médio no CAp – UFRJ

	Conteúdos	
3° Ano Do EM	**1º Semestre**	**2º Semestre**
	Revisão de Funções, Vetores no plano e Geometria plana	**Geometria espacial por vetores no R^3**
	Números Complexos por vetores	**Prismas com equações de plano**
	Polinômios com funções reais	**Esfera e superfície esférica**

	Vetores no R^3	**Cilindros por rotações de retas**
	Sistemas, Matrizes e Determinantes	**Cones por rotação de retas**
	Transformações no plano através de matrizes	**Pirâmides com equações de plano**
	Equações de retas e planos (SLNH)	**Sólidos inscritos**
	Geometria espacial de posição	**Cônicas**
	Poliedros	**Estatística**

Fonte: ASSEMANY, D.; HARAB, L., 2013.|

Como destaques, observa-se que a reestruturação curricular se tornou um prato cheio para que o conteúdo de vetores pudesse ser aproveitado em todas as séries. No 2°ano do Ensino Médio, foi utilizado maior frequência nos assuntos relacionados com gráficos, enquanto no 3° ano, a abordagem vetorial retorna em quase todos os assuntos estudados, interligando todo o conteúdo.

É de se imaginar que tal estrutura curricular fosse tomar um formato diferente da estrutura das demais escolas públicas e particulares do país. A primeira diferença na estrutura se dá na divisão dos conteúdos em semestres, ao invés de bimestres, como adotado nas demais escolas do Ensino Básico. Além disso, na série do 3°Ano do EM, não se observa um enfoque muito grande na revisão de conteúdo das séries anteriores. Surge uma pequena revisão, sobre funções, apenas para fazer a integração com geometria plana. Isso é consequência de um conteúdo que está totalmente interligado, seguindo uma das orientações que os PCN consideram como ideal para o estudo de Matemática:

> De fato, não basta revermos a forma ou metodologia de ensino, se mantivermos o conhecimento matemático restrito à informação, com as definições e os exemplos, assim como a exercitação, ou seja, exercícios de aplicação ou fixação. Pois, se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para as ideias isoladas e desconectadas umas das outras. (BRASIL. 1999, p. 255)

Graças a essa metodologia, foram empregados diversos estudos sobre a reestruturação curricular conduzida no CAp – UFRJ. Podemos destacar o estudo de Azevedo (2013), que produziu um Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática sobre tal experimento realizado no CAp – UFRJ, tendo acompanhado integralmente, durante os anos de 2010 e 2011, as turmas do Ensino Médio. Vale ressaltar que o CAp – UFRJ, além de ser um colégio onde os projetos de extensão podem ser realizados, também é o local em que os licenciandos de diversas áreas fazem o seu estágio docente supervisionado. Analisando desde a metodologia até o material utilizado para a reestruturação curricular, Azevedo traz também

como ponto de discussão a opinião dos discentes que passaram por esta reestruturação. Dentre as conclusões apresentadas, destacamos:

> "Em suma, as respostas mais significativas para a questão da distinção entre o ensino de Matemática no CAp e nas outras escolas foram sobre o ensino de vetores na 1ª série do EM [...]. Os alunos destacam que a não utilização das fórmulas, estimula a compreensão do problema como um todo, trabalhando assim com várias resoluções possíveis, o que torna o ensino muito mais aprofundado. Colocam também que a escola não tem como meta a preparação para o vestibular [...]. Foi observado que os alunos, de uma forma geral, aprovam esse método de ensino, reconhecendo que são mais exigidos e encaram positivamente essa forma de trabalho [...]. O ponto mais comentado foi que essa interrelação permite ao aluno ter diferentes visões sobre uma mesma situação problema, podendo assim optar pela melhor forma de solucioná-la." (AZEVEDO. 2013, p. 47 e 48)

As conclusões obtidas da opinião dos estudantes são importantes para se levar em consideração, mas não são as únicas que podem ser obtidas dessa reformulação curricular em torno de vetores. Os estudos anteriormente apresentados de Nasser, Sousa e Torraca (2012) levantaram comparações sobre o desempenho do CAp – UFRJ e as demais escolas públicas e particulares do país. Dentre a metodologia aplicada nesses estudos, foram entrevistados 98 alunos de universidades particulares e 18 alunos egressos do CAp – UFRJ. Os estudos mostraram que os alunos egressos do CAp tiveram uma maior facilidade nos exercícios propostos pelos pesquisadores do que os demais alunos. Os autores destacam que um dos motivos para o sucesso nestes exercícios dos alunos egressos do CAp estava justamente na reestruturação curricular:

> Dentre as vantagens dessa proposta curricular, podemos citar a possibilidade de um currículo em espiral, no qual os conteúdos são constantemente revisitados. Além disso, a abordagem gráfica e as possíveis estratégias para a construção de gráficos podem ser facilitadores na aprendizagem de Cálculo. (NASSER, SOUSA e TORRACA. 2012, p. 16)

Entre os anos de 2012 e 2013, o Projeto Fundão coletou diversos dados sobre a metodologia proposta por Assemany aplicada no CAp – UFRJ, e outros estudos foram publicados. Podemos expor aqui as análises de Assemany e Harab (2013), que evidenciam como uma reestruturação curricular voltada no ensino de vetores podem potencializar a aprendizagem de números complexos:

> Quando se direciona esta abordagem vetorial para os números complexos, abre-se um leque de possibilidades para abordagens geométricas utilizando a geometria vetorial. No momento em que um número complexo é localizado no plano, sua leitura vetorial permite que os conceitos de Módulo e Argumento de números complexos sejam associados à Módulo e Inclinação de vetores, surgindo intuitivamente a forma trigonométrica de um número complexo[...]. (ASSEMANY e HARAB. 2013, p. 4)

Assemany e Harab (2013) destacam que, para além disso, essa metodologia não fica restrita apenas quando direcionamos o uso de vetores para o ensino de números complexos. As autoras concluem que, através de uma perspectiva de que a possibilidade de se trabalhar com

vetores pode potencializar diversos conteúdos dentro da Matemática, devido a capacidade de apresentar uma perspectiva geométrica para os demais conteúdos, interligando-os, há a possibilidade de se suprimir fórmulas e permitir aos estudantes mais recursos para compreender o que ele busca aprender dentro da Matemática.

Para além do Projeto Fundão, foi realizada uma pesquisa coordenada por Rafael Silva Patrício na Universidade Federal do Pará. Baseado nas experiências docentes em que Patrício ministrou a disciplina de Geometria Analítica no Ensino Superior, o autor pesquisa as dificuldades que os alunos podem apresentar no decorrer da disciplina. Dentre as suas considerações, Patrício traça um paralelo entre o ensino de Geometria Analítica no Ensino Médio e no Ensino Superior:

> Por outro lado, é comum observamos que as recomendações sobre a abordagem dos vetores só sejam desenvolvidas nos cursos universitários na área de exatas, como a Matemática, por exemplo. Deste modo, podemos entender que a ausência de um estudo sobre vetores, ainda que introdutório na Geometria Analítica, ao final do ensino médio, pode ocasionar algumas dificuldades na sua aprendizagem no início dos cursos superiores, onde a mesma disciplina também é ensinada. (PATRÍCIO. 2011, p. 16 e 17)

Para além disso, o autor aponta que a forma como a disciplina de Geometria Analítica se apresenta para os alunos pode atrapalhar a percepção dos futuros professores que ali se encontram. A justificativa para isso se dá pelo fato de que, na esfera do Nível Superior, grande parte da disciplina busca trabalhar com os vetores no R^3, devido às aplicações que serão pertinentes nas áreas de Cálculo ou de Álgebra Linear; porém, se levarmos em conta que possivelmente os estudantes tiveram contato com a Geometria Analítica apenas no R^2 e por uma metodologia onde não se utiliza vetores no Ensino Médio, a ênfase no R^3, aliada a uma metodologia onde se utiliza uma abordagem vetorial no Ensino Superior, faz com que se crie uma impressão de que são disciplinas muito diferentes da que eles estavam acostumados, uma vez que a disciplina de Geometria Analítica é ofertada logo no primeiro período da graduação. Tal impressão pode ser um dos fatores responsáveis pelas altas taxas de reprovação que essa disciplina tem (PATRÍCIO, 2011).

1.3 **Algumas reflexões sobre os estudos apresentados**

Analisando tanto as pesquisas de Assemany (2011; 2017; 2018; 2020), Nasser et al (2012; 2015) e Patrício (2011), percebemos que existe uma preocupação por parte dos pesquisadores no que se refere à transição dos estudantes que saem do Ensino Médio para o Ensino Superior. Essa preocupação é importante, uma vez que tais etapas de Ensino se mostram

muito distintas. No artigo intitulado “Formação de professores de Matemática: para uma abordagem problematizada”, Giraldo (2018) se propõe a debater sobre a formação dos professores e a prática escolar, percebendo que ainda existe uma ruptura entre a matemática estudada nas escolas e a estudada na universidade, de modo que muitos futuros docentes emergem numa formação onde a matemática escolar é praticamente jogada de lado, e uma matemática “mais pura” ganha espaço; ocorre, porém, que ao concluir a formação em licenciatura, o professor de matemática terá que lidar novamente com aquela matemática escolar, e dificilmente lidará com a matemática “mais pura”, fazendo com que essa diferenciação apenas atrapalhe na prática e na formação do professor.

Ao debater sobre a formação do professor de matemática, Giraldo (2018) nos mostra que existe uma ideia de que os currículos da licenciatura em matemática são construídos com uma matemática mais “pura” e estruturada pois, se o futuro professor compreender as estruturas lógicas dessa matemática, ele é capaz de lidar com as estruturas lógicas da matemática escolar. Porém, esse tipo de pensamento não é suficiente para uma formação ideal dos professores de matemática, pois ainda é importante se considerar que dentro da escola, o ambiente de sala de aula é um ambiente de construção de conhecimento de acordo com os contextos sociais e culturais que estão inseridos. Para além disso, uma lógica de formação de professores que segue esses preceitos pode induzir uma prática que reproduza a lógica de que a matemática escolar é apenas uma simplificação da matemática do nível superior, e que o objetivo de sua prática professoral seja preparar os alunos para o nível superior. Assim, como é importante que não haja ruptura entre a matemática do nível superior com a matemática escolar, também não deve haver uma hierarquização entre elas.

É possível entender que, dentre os papéis do professor de Matemática, a preocupação de preparar alunos para o Ensino Superior é importante, mas não apenas numa perspectiva dentro da Matemática, mas sim na perspectiva de formação do indivíduo como cidadão. É necessário que o Ensino de Matemática não fique determinado em práticas que fortaleçam apenas a Matemática em si e para si. Uma vez que a linguagem matemática é tão utilizada por outras áreas do conhecimento, nosso compromisso precisa ser com a formação do cidadão nas estruturas dessa linguagem e no desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo. Quando discutimos a proposta da utilização dos vetores no ensino, esperamos que seja compreensível a perspectiva de que, devido às suas características e versatilidades nas suas formas de representação, os vetores ajudam nessa direção.

Ao analisar os estudos apresentados por Assemany (2011; 2017; 2018; 2020) e Nasser et al (2012; 2015) sobre a temática da abordagem vetorial, percebemos que alguns

procedimentos foram realizados para garantir o sucesso da iniciativa. Foi necessário realizar uma alteração na estrutura curricular, além de também ser necessária a elaboração de materiais didáticos específicos adequados para a implementação da metodologia que se utilizou da abordagem vetorial. O êxito do experimento é atestado pelas conclusões das pesquisas, porém não podemos descartar as dificuldades que tal metodologia possui caso se deseje integrá-la de maneira integral para as demais instituições do ensino público da Esfera Básica. Portanto, ao tratar de alguns empecilhos que podem surgir na discussão sobre a implementação da abordagem vetorial no ensino, devemos levar em consideração a discussão curricular e o material didático.

Apesar de a versão aprovada e homologada da BNCC, em 2018, não conter orientação acerca da abordagem vetorial no ensino de matemática, a abordagem vetorial já fez parte de documentos e de discussões na hora da formulação destes. O documento oficial *Orientações curriculares para o Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*, em 2006, organizado pelo Ministério da Educação, traz a seguinte orientação sobre vetores:

> É desejável, também, que o professor de Matemática aborde com seus alunos o conceito de vetor, tanto do ponto de vista geométrico (coleção dos segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido) quanto algébrico (caracterizado pelas suas coordenadas). Em particular, é importante relacionar as operações executadas com as coordenadas (soma, multiplicação por escalar) com seu significado geométrico. A inclusão da noção de vetor nos temas abordados nas aulas de Matemática viria a corrigir a distorção causada pelo fato de que é um tópico matemático importante, mas que está presente no ensino médio somente nas aulas de Física. (BRASIL. 2006, p. 77)

Nas próprias discussões sobre a formulação da BNCC, o componente vetor estava incluído, ainda na segunda edição. O trecho a seguir foi vetado da versão final:

> Compreender o conceito de vetor, tanto do ponto de vista geométrico (coleção de segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido) quanto do ponto de vista algébrico, caracterizado por suas coordenadas, aplicando-o em situações da Física [...}. Estabelecer relações entre as transformações isométricas (reflexão, translação e rotação) e vetores no contexto do plano cartesiano, incluindo o uso de softwares de geometria dinâmica (BRASIL 2016, p. 564-565).

Acompanhando as discussões sobre a formulação da BNCC, o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) elaborou um projeto capaz de produzir um material didático de Matemática que atendesse as especificações do PNLD e que acompanhasse as possíveis mudanças no currículo de matemática que a BNCC impõe. Conhecido como *Livro aberto de Matemática*[11], seu diferencial é ser livre, permitindo o acesso gratuito para todas as pessoas através da internet, além de ser colaborativo, oferecendo a oportunidade de diversos professores de Matemática ajudarem na elaboração dos materiais.

[11] Disponível em: https://umlivroaberto.org/

O projeto optou por separar áreas da Matemática em livros completos, onde cada livro é dividido em capítulos que apresentam um conteúdo pertinente a essa área. Para o Ensino Médio, o projeto apresenta livros sobre *Funções*, *Geometria*, *Estatística e Probabilidade*, *Educação Financeira*, *Análise Combinatória* e *Pensamento Computacional*; além disso, está em desenvolvimento um material com o título *Matemática nas ciências sociais e da natureza*. Está nos planos do projeto elaborar um livro de Álgebra. O acesso aos livros e aos capítulos é realizado através de um link que redireciona para um documento em PDF que pode ser baixado.

Ao analisar o livro de *Geometria*, é possível encontrar 10 capítulos que abordam conteúdos que estão associados com a Geometria do Ensino Médio. É notável a presença de um capítulo inteiro dedicado para *Vetores no Plano*[12]. O material apresentado para alunos busca trazer uma conexão muito forte com as aplicações dos vetores nos conteúdos de Física, o que indica que a elaboração do material buscou seguir as orientações da segunda versão da BNCC, de 2016. Também é válido destacar que o conteúdo de vetores também pode ser encontrado no capítulo *Transformações Geométricas*, quando é abordado a transformação de translação.

Apesar de pouco utilizada, atesta-se que a abordagem vetorial vem sendo pesquisada e discutida atualmente no Brasil, o que implica que o assunto tem ganhado uma maior relevância no que envolve o Ensino de Matemática no Ensino Médio. As discussões na BNCC e o projeto do Livro Aberto de Matemática possibilitam o desenvolvimento de metodologias para o professor de Matemática que deseja inserir a abordagem vetorial na sua perspectiva de prática de ensino. Portanto, neste trabalho será debatido sobre o valor do uso da abordagem vetorial de acordo com algumas teorias de Aprendizagem Matemática.

[12] Disponível em https://umlivroaberto.org/producao/geometria/ ou também https://docs.google.com/viewer?url=https://github.com/livro-aberto/tex-design-development/raw/master/Cap%C3%ADtulos%20prontos%20-%20Aluno/Vetores%20no%20Plano.pdf

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Os Três Mundos da Matemática

As dificuldades no ensino de matemática no ensino básico não são uma exclusividade da nossa realidade brasileira, tampouco é relegada apenas aos tempos atuais. Tais dificuldades motivaram diversas pesquisas que buscavam debater o motivo da existência dessas dificuldades e sugerir alternativas de como construir de maneira efetiva o pensamento matemático. Podemos destacar David Tall e seus diversos parceiros de pesquisa, com seus esforços para compreender como os seres humanos aprendem matemática.

David Tall é um professor, pesquisador e apaixonado por música de origem inglesa. Nascido em 1941, se formou em Matemática em Oxford. Obteve seu doutorado em Filosofia, orientado por Michael Atiya, vencedor da Medalha Fields. Tall ensinou matemática por muitos anos, até ser diagnosticado em 1992 com Sarcoidose, uma doença autoimune que dificultou seu trabalho em sala de aula. Ao entrar de licença médica, dedicou seu tempo para pesquisar aprendizagem matemática, trabalho que continuou a realizar até se aposentar, em 2006.

Mesmo com o avanço da doença, Tall se dedicou a investigar os motivos de que os estudantes do Ensino Básico na Inglaterra estavam tendo dificuldade em entender Matemática. Iniciou então um grande processo de pesquisa, ao qual concluiu que um dos motivos pode ser encontrado justamente no fato de que muitos que praticam matemática, sejam professores, matemáticos profissionais ou até mesmo estudantes, tendem a reproduzir e afirmar com orgulho uma "exatidão" na matemática. De acordo com os autores, "Matemáticos abominam a ambiguidade, então raramente eles falam sobre tal dispositivo, ainda que constantemente usem dela por toda parte da prática matemática" (GRAY; TALL, 1994, p. 5). É na ambiguidade, na flexibilidade, que podemos compreender uma das muitas potenciais faces que a Matemática pode ter, tal qual seu imenso potencial para compreendê-la. David Tall, então, elabora uma teoria ao qual podemos categorizar as formas de aprendizagem matemática dos indivíduos. Daí surge o conceito dos Três Mundos da Matemática.

Conforme Tall (2004), os Três Mundos da Matemática são definidos entre "*Mundo Conceitual – Corporificado*", "*Mundo Proceitual – Simbólico*" e "*Mundo Formal – Axiomático"*. Esses mundos não possuem hierarquia entre eles, de maneira que o indivíduo que está estudando ou praticando matemática não precisa passar ordenadamente pelos mundos, além de estar livre para transitar pelos mundos de acordo com a forma mais conveniente

(FLORES; LIMA; MULLER, 2018). É importante perceber que existe um alinhamento das ideias Piagetianas de encapsulação:

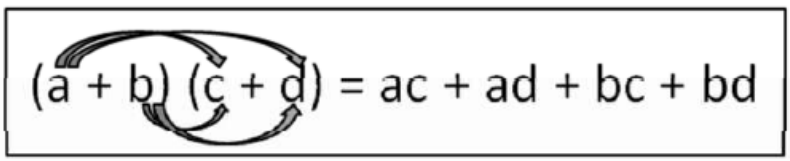
> O todo da matemática deve, portanto, ser pensado em termos de construções de estruturas. Entidades matemáticas se movem de um nível para outro; uma operação entre tais entidades se transformam um objeto de teoria, e esse processo se repete até alcançarmos as estruturas que estão se estruturando alternadamente ou sendo estruturadas por estruturas "mais fortes" (Piaget 1972, p. 70)

Estes três mundos da matemática deverão englobar e fornecer estruturas que ajudarão a construir o pensamento matemático. No mundo *Conceitual – Corporificado*, temos as estruturações matemáticas que podem ser desenvolvidas através das relações e manipulações do estudante com objetos e as coisas, sejam estas físicas ou não. Destacam-se que, pelo fato de não serem necessariamente objetos físicos, o estudante é capaz de se basear em experiências prévias para se estruturar na prática matemática. É importante, nesse contexto, entender o que seria a corporificação no âmbito matemático. Lima (2007) traz uma luz sob como se pode observar tais relações:

> No que diz respeito ao uso da palavra "corporificação" dentro do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, entendemos que ela se refere a experiências que envolvam objetos físicos e observação, descrição, ação e reflexão sobre eles, mas não se trata do uso de apenas objetos físicos. Ela refere-se, também, a experiências mentais, em que o indivíduo não precisa, necessariamente, da manipulação física de um objeto, pois ele pode manipulá-lo em seu pensamento, de forma a analisá-lo e levantar conjecturas sobre as propriedades do objeto ou de uma situação. (Lima, 2007, p. 74)

Utilizar formas distintas de visualização e manipulação de objetos se encaixam nesse grupo. Tem-se, como exemplo, quando comparamos x^2 com a área de um quadrado; podemos entender que os gráficos também se encaixam dentro desse mundo matemático (LIMA, 2007). E podemos encontrar, frequentemente, a associação entre a operação da multiplicação distributiva com a ideia do chuveirinho:

Figura 4 - Esquema para a multiplicação distributiva



Fonte: Muller (2015)

O segundo mundo referido nos trabalhos de Tall (2004) é o mundo *Proceitual – Simbólico*. Este mundo visa abarcar todas as relações simbólicas, que podem ser pensadas de maneira proceitual, que podem verificar e garantir situações matemáticas onde nem sempre é possível se verificar no mundo conceitual – corporificado. Um dos grandes exemplos que

podemos empregar está nas ideias associadas aos próprios números inteiros negativos, que por muito tempo eram descartados de resoluções de equações quando estas eram representadas por áreas de figuras planas, ou até mesmo balanças, sendo estes exemplos de elementos do mundo *Conceitual – Corporificado*.

Também podemos notar a presença de um novo termo: *proceitual*, que deriva da ideia de *proceito*. Portanto, se faz necessário contextualizar o que esse termo significa dentro do nosso quadro teórico.

Os estudos que Tall promoveu, juntamente com Gray, que buscavam compreender as dificuldades do aprendizado de atemática nas escolas da Inglaterra, chegaram a um diagnóstico de que um dos possíveis problemas da aprendizagem matemática poderia residir numa dicotomia entre coisas para fazer (processos) e coisas para saber (conceitos):

> Dentro do Reino Unido a imposição do currículo nacional (1989) objetivava "elevar o desempenho" em todas as matérias, inclusive matemática. Os requisitos deste currículo fazem distinção entre habilidades ou procedimentos que um indivíduo precisa adquirir, a fim de que eles consigam fazer as coisas, e os conceitos ou fatos básicos que se espera que eles saibam, com os quais eles operam com suas habilidades. Isso sugere uma dicotomia fundamental entre procedimentos e conceitos, entre coisas para *fazer* e coisas para se *saber*. De qualquer maneira, em matemática, podemos ver que a realidade é diferente em alguns aspectos. (GRAY; TALL, 1994, p. 2).

Baseado nos conceitos piagetianos de "encapsulação", que defende que os processos mentais podem ser encapsulados quando uma ação física ou mental é reestruturada em níveis superiores de pensamento, passando a ser mais bem compreendida pelo aprendiz (BETH e PIAGET, 1966), Gray e Tall (1991) percebem que através de uma interligação entre ação e conhecimento, entre o fazer e o saber, os conceitos podem ser encapsulados. Para isso, seria necessário que houvesse uma interligação entre os processos e os conceitos, algo que alguns poderiam classificar como uma difícil atividade mental (SFARD, 1989).

As evidências em representações matemáticas sugerem, porém, que tal interligação é bastante comum nesse meio. Os próprios números, através da sua representação simbólica, podem evocar tanto um conceito quanto um processo. Podemos tomar o número 8, que pode ser evocar a ideia de um processo (a soma entre 4 + 4) e um conceito (a quantidade representada por oito unidades). Representações desse tipo permeiam toda a matemática, de forma que os autores chegaram à conclusão de que:

> É através do uso da notação para representar tanto o processo ou o produto, o que for mais conveniente no momento, que os matemáticos são capazes de englobar ambos [...]. Nós acreditamos que essa ambiguidade é a raiz do sucesso do pensamento matemático. Isso possibilita o processamento de domesticação de matemáticas em um estado de subordinação. (GRAY; TALL, 1991, p. 2)

A ideia de ser capaz de englobar tanto os processos e o conceito no pensamento matemático permitiu a formulação da ideia de proceito, uma amálgama entre as duas palavras (processo + conceito = proceito). Nas palavras dos autores,

> "Nós definimos um proceito como uma mistura de processo e conceito, em que processo e produto são representados pelo mesmo simbolismo. Assim, o símbolo para um proceito pode evocar um processo e um conceito" (GRAY; TALL, 1991, p. 2).

É de se notar que a definição de proceito depende de outras três definições: a ideia de processo, conceito e símbolo. Os autores se baseiam na ideia de processo como um termo mais amplo, seja ele cognitivo ou matemático, como o "processo de adição", "processo de multiplicação", etc. É importante saber diferenciar "processo" de "procedimento", ao qual os autores buscam a definição de que o procedimento encarna um algoritmo específico, usado no processo desejado. Com relação ao "conceito", Furtado (2010), ao estudar a obra de Tall, aponta que se utilizou a definição dada por Greeno (1983), onde uma entidade conceitual pode ser manipulada e utilizada como o "input" para a realização de um processo mental. Já com relação aos símbolos, Furtado (2010) destaca que Gray e Tall (1991) se utilizaram das ideias de Hiebert (1988), que destaca que os símbolos são entidades que são capazes de representar e tomar o lugar de algum outro objeto. Conforme bem observado por Furtado (2010),

> De modo mais esclarecedor temos que "As funções principais de um símbolo na Matemática são de designar com precisão e clareza e de abreviar" e "interpretar um símbolo é associar-lhe algum conceito ou imagem mental, assimilá-lo na consciência humana" (Furtado 2010, *apud* Davis; Hersh, 1986, p.20).

Ainda que a compreensão da ideia de proceito fosse bastante plausível, os pesquisadores entenderam que a definição, da maneira como foi colocada, poderia ser incompleta ou não representar totalmente o desenvolvimento cognitivo. Portanto, eles flexibilizaram ainda mais a ideia, introduzindo os conceitos de proceito elementar. Para os autores, o proceito elementar seria de fato a mistura de três componentes:

> Um *processo* que produz um *objeto matemático*, e um *símbolo* que é usado para representar tanto o processo quanto o objeto; e o conceito de um Proceito seria a coleção de proceitos elementares que possuem o mesmo objeto (GRAY; TALL, 1994).

O motivo para a compreensão da flexibilização das definições pode ser compreendido através dos próprios números. Se tomarmos o exemplo anterior, do número 8, temos um proceito formado por proceitos elementares, já que podemos entender que o 8 pode ser obtido através da soma 5+3 ou até mesmo pelo produto 4 x 2. É importante notar que tanto 5+3 quanto 4 x 2 seriam proceitos elementares, já que representam o seu processo (adição ou multiplicação), o seu conceito (soma) e o seu objeto (o 8) através de símbolos.

Apesar de os estudos de Gray e Tall terem como experiências empíricas o aprendizado da adição, é perceptível que a ideia de proceito não se limita apenas a adição. Furtado (2010) traz uma tabela em que é possível observar alguns outros exemplos de proceitos nas mais diversas áreas da matemática, apresentada no quadro 5 a seguir:

Quadro 5 - Exemplos de proceitos

Símbolo	Conceito	Processo/Procedimento
7	Número	Contagem
2+3	Soma	Adição (“counting all”, “counting on”)
4.5	produto	Somas repetidas
$\frac{3}{4}$	fração	Divisão
+2	Número positivo	Somar 2 (2 passos para a direita)
$sen\ A = \frac{oposto}{hipotenusa}$	Sen A	Divisão (oposto/hipotenusa)
3x+2	expressão	Adicionar 2 à 3x
f(x)	função	Atribuição de valores

Fonte: Adaptado de Furtado, 2010.

Durante as investigações, Grey e Tall (1994) notaram que as crianças que possuem um pensamento menos dependente exclusivamente de procedimentos, costumavam ser mais bem sucedidos do que estudantes que dependem mais de procedimentos para a operação matemática. Desta forma, os autores conjecturaram o que pode ser entendido como formas de pensamento, onde diferentes estudantes de matemática podem ter diferenças na sua forma qualitativa de se pensar matemática. Surgem então os conceitos de pensamento procedimental e o pensamento proceitual.

O pensamento procedimental pode ser entendido como aquele que costuma dar mais valor aos procedimentos necessários para se realizar uma atividade cognitiva matemática. Desta forma, o pensamento procedimental pode ter um aspecto limitador:

> O aspecto limitador de tal pensamento é sobre a visão limitada que as crianças têm do simbolismo: números são apenas usados como entidades concretas para serem manipulados num processo de contagem. A ênfase no procedimento reduz o foco na relação entre entrada e saída, muitas vezes levando a extensões idiossincráticas do procedimento de contagem que geralmente não é generalizado (GRAY; TALL, 1994, p. 18)

Em contraste ao pensamento procedimental, temos o pensamento proceitual. O que caracteriza o pensamento proceitual é a flexibilidade de intercalar simbolicamente tanto os conceitos, quanto os processos, durante os estudos ou atividades matemáticas, conforme aquilo que for mais conveniente. Tomando como exemplo o número 3, os autores esclarecem que, ao se deparar com o símbolo "3", o estudante que faz uso do pensamento proceitual não o enxerga apenas como um número, mas de diversas maneiras, envolvendo também os seus processos que têm o "três" como um "produto". O 3 pode ser obtido através de diversos procedimentos: 1+1+1, 2+1, 1+2, 3.1, 6/2... e todos esses processos fazem parte do 3. Quando o estudante enxerga a possibilidade de organizar, manipular e reorganizar, conforme a conveniência da situação, ele está exercendo o pensamento proceitual. É possível destacar que, quando se utiliza o pensamento proceitual, estamos colocando em prática ao mesmo tempo a junção das "coisas para se *saber*" e "coisas para *fazer*".

Entretanto, mesmo que o pensamento proceitual seja utilizado por matemáticos e professores em diversos contextos, o pensamento proceitual muitas vezes não é desenvolvido ou estimulado nos estudantes. Como consequência disto, os autores destacam que pode ser observado o desenvolvimento de uma falha conhecida como "divisão proceitual", ao qual os autores atribuem o fato de que muitos estudantes não obtêm êxito nos momentos de aprendizagem matemática. Como uma das características da divisão proceitual, temos uma hierarquização das etapas e dos conceitos matemáticos reproduzidos, resultando numa maneira mais engessada de se desenvolver matemática. Como parte da analogia, por mais rígido que um gesso pode ser, ele limita. (GRAY; TALL, 1991)

A divisão proceitual, quando não corrigida, é levada adiante aos mais diversos níveis de ensino. É comum um professor de matemática escutar alunos se lamentando por compreender a explicação oferecida pelo professor, mas não conseguir realizar a atividade de maneira independente, por não ter o raciocínio que o professor demonstrou na explicação. Os autores destacam que muitas das vezes, os alunos acabam se sentindo lesados ao se deparem com algumas resoluções de problemas matemáticos: "É como se os menos habilidosos fossem enganados por algum truque conjurado que os mais habilidosos aprenderam a usar" (GRAY; TALL, 1991, p. 6).

Compreendendo a ideia de *proceito*, o objetivo de se trabalhar a aprendizagem matemática no interior desse mundo se dá pelo poder que os símbolos têm, tanto no poder de representar elementos conceituais na realidade, como de ampliar tais conceitos e poder compreendê-los de maneira proceitual, desenvolvendo o pensamento proceitual e diminuindo os impactos de uma divisão proceitual.

O terceiro mundo, *formal-axiomático*, trabalha com os teoremas, axiomas, formalizações, generalizações, entre outros. É neste terceiro mundo que se percebe um foco maior nas demonstrações dos fatos, numa linguagem mais formal. Ao verificar algumas pesquisas, têm-se a perspectiva de que, apesar do trabalho no mundo *formal-axiomático* ser desejado na Matemática do Ensino Superior, eles só são comumente encontrados em cursos de Matemática Pura, como Bacharelados, Mestrados e Doutorados (FLORES; LIMA; MULLER, 2018; MULLER, 2015); é possível encontrar também a abordagem do mundo formal axiomático nos cursos de Licenciatura em Matemática. Porém, quando debatemos a nível de Ensino Básico, a presença desse mundo matemático na aprendizagem é muito escassa. Existem evidências da presença desse mundo em diversas etapas do Ensino, porém ele não é devidamente apresentado aos estudantes. Um dos exemplos dados por Lima (2007), é com relação ao produto entre um número e 0 dentro do conjunto dos números reais:

> [...] Como o conjunto dos números reais é um anel de integridade, se o produto de dois fatores for zero, então um dos fatores deverá ser necessariamente zero. Alunos do Ensino Básico não conhecem anéis de integridade e nem sabem o que isso significa[...]. Entretanto, é possível que eles consigam perceber (mas não demonstrar) a validade dessa propriedade dos números reais por meios de cálculos ou até mesmo num raciocínio de buscar valores que a e b podem assumir no caso em que $a.b = 0$. Logo, é possível que alunos conheçam alguns princípios ou teoremas presentes no mundo formal, mas não que eles possam trabalhar livremente com totalidade no mundo formal. (Lima, 2007, p. 79-80)

Essa perspectiva de que o mundo *formal-axiomático* não se faz presente nas etapas da Educação Básica conversam com a discussão proposta por Giraldo (2018), apresentada neste trabalho anteriormente: a formação de Professores de Matemática acaba se adequando a uma estrutura de pensamento matemático muito baseado no *mundo formal-axiomático*, ao qual o graduando não tem muito contato anterior à graduação, e tampouco terá muito contato depois da graduação no decorrer da sua prática docente no Ensino Básico. Outro dos efeitos debatidos por Giraldo (2018) é de que ocorre uma subordinação entre as matemáticas escolar e superior. Ora, se ocorre uma subordinação entre tais matemáticas, e a matemática a Nível Superior faz uso do terceiro mundo matemático, enquanto esse mundo não se faz presente no Ensino Básico, é comum vermos, na prática, uma hierarquização entre os Três Mundos da Matemática. Apesar de não ser o ideal, e de os três mundos não serem hierarquizados entre si, essa hierarquização

ocorre na prática escolar brasileira (LIMA, 2007). Talvez, se faça necessário refletir e debater sobre tal hierarquização quando repensamos Ensino e Aprendizagem Matemática nos diferentes níveis de educação.

Quando Gray e Tall (1991) começaram a desenvolver a ideia de proceito, suas preocupações sobre como conceitos matemáticos se formavam cognitivamente os influenciaram a investigar os papéis simbólicos inerentes para o aprendizado. Essas ideias se expandiram para os Três Mundos da Matemática, de modo que um livre transitar por entre esses três mundos ajuda na estruturação da *imagem do conceito*, sendo este responsável por fazer com que haja progresso na aprendizagem (TALL, 2004). Se pensarmos que cada indivíduo pode fazer seu próprio percurso pelos mundos matemáticos, é possível concluir que diferentes imagens de um conceito podem ser formadas. Tall e Vinner (1981) definem imagem de conceito como:

> "... a estrutura cognitiva total que é associada ao conceito, que inclui todas as figuras mentais e propriedades e processos a eles associados. Ela é desenvolvida durante os anos por meio de experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece" (Lima *apud* Tall; Vinner. 2007, p. 86)

Da definição de Tall e Vinner, pode-se destacar dois pontos importantes que vão moldar a formação de imagem do conceito: as experiências que um estudante já passou, e os novos estímulos que o ajudarão a amadurecer. Tendo em vista tais perspectivas, Tall (2004) define as experiências anteriores com o termo *já encontradas*, e os novos estímulos como *a encontrar*. Estas dinâmicas se encontram em muitas situações no processo de aprendizagem matemática, de modo que o *já encontrado* pode interferir na percepção do *a encontrar* e vice-versa, de modo que essa dinâmica pode ser benéfica ou até mesmo maléfica para o ensino. Um estudante que aprendeu o cálculo da área de um retângulo e conseguiu estruturar tal conceito de forma que ele se torna um "já encontrado", ao se deparar com o cálculo da área de um quadrado (que viria a ser um "a encontrar"), normalmente costuma ter uma interação positiva entre essas dinâmicas, uma vez que podemos calcular a área do quadrado utilizando o mesmo procedimento que calculamos a área do retângulo. Geralmente, essa associação se dá intuitivamente, devido à semelhança entre tais figuras planas. Porém, é comum que o estudante, após ter formado a imagem do conceito de área de um retângulo e de um quadrado, ter dificuldades com a área de outros quadriláteros, como o losango. Isso exemplifica uma dinâmica em que o *já encontrado* pode se tornar um entrave perante o *a encontrar*. De maneira semelhante, porém, quando o aluno consegue compreender as diferenças entre losango e quadrado, e, portanto, compreender o motivo das diferenças dos métodos dos cálculos das áreas do quadrado com o losango, esse *a encontrar* moldará positivamente o *já encontrado*. Lima

(2007) destaca que as dinâmicas entre *já encontrado* e *a encontrar* são muito fluidas, de forma que um *a encontrar* pode rapidamente se tornar um *já encontrado*.

2.1.1 Os vetores à luz da Teoria dos Três Mundos da Matemática

Se pensarmos na dinâmica ao qual este trabalho se propõe, que é compreender as nuances do impacto de uma abordagem vetorial no Ensino de Matemática, os vetores podem ser devidamente compreendidos com todos os conceitos elucidados acima. O vetor pode auxiliar na compreensão de conceitos em diferentes Mundos da Matemática, uma vez que sua representação de seta se relaciona com o mundo *conceitual – corporizado*; sua definição algébrica com o mundo *simbólico-proceitual*; suas aplicações importantes em cálculo e álgebra linear se relacionam com o mundo *formal-axiomático*. Além disso, sua introdução no Ensino Básico pode ser compreendida como um *a encontrar*, capaz de moldar e ser moldado significativamente pelos *já encontrados* de um aluno. Podemos destacar que, o Teorema de Pitágoras (*já encontrado*) pode influenciar na aprendizagem do cálculo o módulo de um vetor (*a encontrar*); podemos destacar também que o novo estímulo vetorial (*a encontrar*), através das suas transformações e propriedades geométricas, podem influenciar sobre conceitos como trigonometria no círculo, funções, números complexos (*já encontrado)*, entre outros.

A seguir, buscaremos compreender, através de uma diferente teoria, motivos que corroboram para compreender o porquê de a abordagem vetorial ser tão flexível e possibilitar a transição entre os Três Mundos da Matemática.

2.2 **Semiótica e Registros de Representação Semiótica**

Ao analisar os trabalhos de David Tall, é inegável que existe uma boa compreensão do papel que os símbolos podem exercer na Aprendizagem Matemática. Inclusive, a ideia de que a simbologia matemática é seu ponto forte e ao mesmo tempo sua fraqueza (GRAY; TALL, 1994), pode nos fazer questionar qual a utilidade de tais símbolos para a aprendizagem de matemática. Para isso, se faz necessário conhecer sobre Semiótica e suas aplicações na Educação Matemática.

2.2.1 Semiótica

Para entendermos o que é semiótica, é necessário compreender seus objetivos. De acordo com Santaella (2012), a semiótica, que pode ser entendida como "A ciência dos signos", tem como foco investigar todos os tipos de linguagem. Usualmente, tais definições podem causar problemas, uma vez que a compreensão do que é signo ou linguagem nem sempre está bem construída nas estruturas mentais do receptor de tais informações. Dentre as possíveis confusões, destaca-se a ideia de que a semiótica se dedica ao estudo das línguas, e não das linguagens. A autora traduz que tal confusão pode ser compreendida devido a dominância que a língua tem sobre os seres humanos, de modo que nos faz esquecer as demais formas que seres gregários, como é a nossa espécie, podem estabelecer para nos comunicar, passar informações (SANTAELLA, 2012).

Outro ponto importante de concepção é que a semiótica não se limita ao tipo de linguagem verbal, mas se dedica também aos demais tipos de linguagem:

> "[...] quando dizemos linguagens, queremos nos referir a uma gama incrivelmente intrincada de formas sociais de comunicação e de significação que inclui a linguagem verbal articulada, mas absorve também, inclusive, a linguagem dos surdos-mudos, o sistema codificado da moda, da culinária e tantos outros. Enfim: todos os sistemas de produção de sentido aos quais o desenvolvimento dos meios de reprodução de linguagem propicia hoje uma enorme difusão." (Santaella, 2012, p. 16)

Ao se considerar que linguagens podem se expressar em diversas áreas da vida humana, inclusive no nosso próprio código genético, é preciso estar ciente de que a semiótica estará presente em diversas ciências, e, numa análise semiótica, voltamo-nos para as ações que os signos representam e influenciam em tal área ou ciência (SANTAELLA, 2012).

Nesse momento, é de grande valia tentar compreender a relação que a Matemática tem como linguagem e com os símbolos. De acordo com Charles Sanders Peirce, um dos expoentes responsáveis pela compreensão da Semiótica como ciência, a Matemática tem um caráter de ciência de descoberta, através de suas características de observação:

> "A Matemática é observativa na medida em que monta construções na imaginação de acordo com preceitos abstratos, passando, então, a observar esses objetos imaginários para neles encontrar relações entre partes que não estavam especificadas no preceito da construção. No entanto, a Matemática estuda o que é e o que não é logicamente possível, sem se fazer responsável pela existência atual desse possível. Nesse sentido, é a ciência que fornece subsídios e encontra aplicação em todas as outras ciências, inclusive a Fenomenologia e a Lógica" (Santaella, 2002, p. 37)

Como consequência, podemos perceber duas coisas fundamentais: a primeira é que a Matemática tem a capacidade de ser aplicada em outras ciências; a outra é que a Matemática é capaz de lidar com objetos imaginários, abstratos, e consolidar uma estrutura lógica. Quando pensamos no fato de que as Matemáticas lidam com objetos abstratos, surge a necessidade de representar tais objetos. É neste ponto que se faz necessário compreender os papéis que os

símbolos exercem na Matemática. Portanto, podemos introduzir os conceitos de Raymond Duval e as aplicações que a Semiótica tem no Ensino de Matemática.

2.2.2 Registros de Representação Semiótica

Raymond Duval obteve formação em psicologia, atuando em psicologia cognitiva desde 1970, quando atuou no IREM (Instituto de Pesquisa em Ensino Matemático) de Estrasburgo, na França. Sua jornada como um pesquisador capaz de contribuir no Ensino de Matemática não foi tranquila: o convívio em sala de aula o fez perceber que o comportamento da Matemática como uma linguagem poderia explicar as dificuldades que alunos tinham com tal disciplina, mas tais apontamentos foram constantemente rejeitados por Professores de Matemática, de tal forma que Duval chegou a abandonar as suas pesquisas. Numa reforma de ensino, porém, em que os estudantes tiveram mais contato com exercícios que demandavam interpretação de texto, que professores compreenderam que a linguagem, de fato, poderia ser um problema no aprendizado. Dessa forma, Duval retoma suas pesquisas que resultaram no embrião da teoria dos Registros de Representação Semiótica (FREITAS; REZENDE, 2013).

Na perspectiva da Semiótica, as Matemáticas, que se perpetuam nas instituições de Ensino, são apresentadas por diversas representações simbólicas, desde o início da jornada estudantil. Desde números, até gráficos, expressões, todos estão relacionados com um conjunto de signos que, dentro do sistema específico da Matemática, terão seus significados. Podemos destacar, como exemplo disso, a Álgebra, ramo da Matemática que faz uso de letras como *incógnitas*, onde cada letra tem um significado bem diferente da língua materna do estudante.

Essas representações simbólicas são fundamentais quando se leva em conta um ponto muito importante: objetos matemáticos não estão acessíveis na nossa realidade, de maneira física ou real; se algum professor pedir, em sala de aula, que um aluno manipule com suas próprias mãos uma função, o aluno não será capaz de fazer tal coisa. É então através do uso de representações que tais objetos matemáticos se fazem acessíveis.

Entretanto, Duval aponta que dois problemas surgem quando falamos sobre a relação entre Matemática e suas representações semióticas. O primeiro, de ordem mais prática, reside no fato de que alguns estudantes, durante sua trajetória de aprendizagem, não sejam capazes de distinguir um objeto matemático das suas representações. O segundo, de ordem mais psicológica, é a crença de que as representações semióticas são apenas uma forma de exteriorizar representações mentais, de maneira que tais representações seriam totalmente subordinadas às estruturas mentais (DUVAL, 2009).

Com relação ao primeiro problema, entre Matemáticos e Educadores Matemáticos existe essa percepção de que os objetos não estão acessíveis. Porém, nem sempre existe essa compreensão por parte do aluno. Duval defende que:

> [...] Não se pode ter compreensão em matemáticas, se nós não distinguirmos um objeto de sua representação. É essencial jamais confundir os objetos matemáticos, como os números, as funções, as retas, etc, com as suas representações, quer dizer, as escrituras decimais ou fracionárias, os símbolos, os gráficos, os traçados de figuras... porque um mesmo objeto matemático pode ser dado através de representações muito diferentes. [...] Toda confusão entre objeto e sua representação provoca, com o decorrer do tempo, uma perda de compreensão. (Duval, 2009, p. 14)

Este problema, apontado por Duval, pode ser tratado como algo a ser refletido na prática de Ensino de Matemática, espaço fundamental em que se torna possível estabelecer as considerações entre os objetos matemáticos e suas representações; cientes de que tais relações entre objetos matemáticos e suas representações também é um foco de interesse desta pesquisa, voltaremos a discutir tal problema posteriormente, neste capítulo.

Com relação ao segundo problema, de ordem mais psicológica, se faz necessário compreender o percurso do entendimento do papel das representações com o passar do tempo. Duval defende que "Não há conhecimento que não possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação" (Duval, 2009, p. 29). Portanto, a psicologia buscou entender o papel das representações na formação do conhecimento. Dessa forma, a função de representação é estudada com mais afinco e aparece com três características: podem ser representações mentais, computacionais ou semióticas. As representações também podem ser classificadas através das oposições interna/externa e consciente/inconsciente.

2.2.2.1 Tipos e classificações das Representações

Para iniciar a explanação sobre os tipos e classificações das representações, convém iniciar o percurso explicando as classificações e as oposições entre representações internas/externas e consciente/inconsciente. De acordo com Duval (2009), entende-se que a oposição consciente/não consciente é aquela em que o sujeito nota (consciente) e a que o sujeito não nota (inconsciente). Uma representação pode passar de inconsciente para consciente, e o processo que corresponde a essa descoberta pode ser entendida como objetivação. Já a oposição externa/interna é aquela à qual uma é observável (externa) e aquela que não é observável (interna). Cientes das classificações que um sistema de representações pode assumir, se torna possível entender as características de cada representação.

Piaget, por volta de 1924-1926, trouxe as relações das representações mentais. Utilizando-se de uma metodologia baseada em conversação, buscava estudar as representações mentais e suas relações com possíveis erros, de maneira que tais erros pudessem ser interpretados como uma outra visão dos acontecimentos ou outra lógica utilizada no raciocínio. Com o passar do tempo, a representação começa a ser percebida como "evocação de objetos ausentes". Duval afirma que "a teoria piagetiana do desenvolvimento da inteligência se articula em torno da oposição entre plano da ação e o da representação" (Duval, 2009, p. 30). Dessa forma, pode-se notar que as representações mentais são todas aquelas que permitem uma visão do objeto na ausência do significante[13] perceptível. Tais características permitem classificar as representações mentais como internas e conscientes.

A segunda forma de representação, as representações computacionais, podem ser definidas como "aquelas cujos significantes, de natureza homogênea, não requerem visão de objetos, e que permitem uma transformação algorítmica de uma sucessão de significantes em outras" (Duval, 2009, p. 47). Elas buscam privilegiar as maneiras como, em um determinado sistema de representações, pode ocorrer um tratamento em informações recebidas com a finalidade de produzir respostas adaptadas ao sistema. Duval pontua duas questões fundamentais: 1) Como as informações provenientes do exterior podem entrar no sistema; 2) Quais regras permitem transformar as informações no interior do sistema. Com tais questões, Duval (2009) aponta que se torna fundamental compreender a representação como forma sob a qual uma informação pode ser descrita e considerada em um sistema de tratamento. Cada uma dessas questões foi abordada em campos diferentes: a Psicologia Cognitiva teve interesse na primeira questão, enquanto os estudos em Inteligência Artificial, interessados no tratamento da informação, mantiveram-se interessados na segunda questão. Cientes das suas características, percebe-se que, por não precisarem do objeto, elas se classificam como representações internas; além disso, para sujeitos humanos, as representações computacionais não são representações conscientes.

A terceira forma de representação é a representação semiótica. Duval define as representações semióticas como "construções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento" (Duval, 2012, p. 4). Duval reconhece que os foram os estudos que se

[13] Conforme a teoria Piagetiana, a função simbólica é fruto da diferenciação entre significado e significante. Quando um indivíduo busca expressar algo (objetos, pessoas), mas a faz através de signos, ocorre a função simbólica. Neste caso, os objetos/pessoas recebem o nome de significado, enquanto os signos fazem o papel de significantes. Os estudos de Piaget evidenciam que, a partir dos dois anos de idade, um indivíduo já é capaz de realizar essa diferenciação e produzir função simbólica (PIAGET, 1978).

debruçavam sobre as perspectivas de aquisição de conhecimento Matemático e seus problemas de aprendizagem que surge a ideia de representação semiótica. Para o autor, o diferencial das representações semióticas para as demais é que elas são relativas a um sistema particular de signos (linguagem, escritura algébrica, gráficos cartesianos) e elas podem ser convertidas em outro sistema semiótico de forma equivalente, com a possibilidade do surgimento de diferentes significações conforme os sujeitos que as utilizam. Logo, passou-se a considerar as ideias de compreensão de conversão na perspectiva de "mudar a forma pela qual um conhecimento é representado". Outro diferencial se dava no fato de que as representações semióticas são classificáveis como conscientes e externas, já que dependem da visão do objeto, e a percepção destes é dada através dos seus estímulos, apresentando valor significante (DUVAL, 2009).

2.2.2.2 Representações Semióticas e Aprendizagem Matemática

Ao se fazer notável as características das representações e seus tipos, as representações semióticas ganharam destaque e tiveram a sua importância reconhecida por trabalhos dentro da Psicologia Cognitiva e Didática. Duval aponta três pontos relacionados com as representações semióticas:

> 1. A importância da forma em relação ao conteúdo representado, no caso dos símbolos em matemáticas: "Nenhuma atividade matemática significativa é possível sem formas materiais para sua expressão" (Kaput, 1987, p.159).
> 2. A diversidade das formas de uma representação para um mesmo conteúdo representado. [...]
> 3. O interesse na mudança de forma de representação por razões de economia de tratamento [...]. (Duval, 2009, p. 33)

Analisando os três pontos levantados, Duval (2009) aponta que são três atividades cognitivas que são inerentes as representações semióticas: a *formação*, a *transformação* e a *conversão*. Posteriormente, ainda neste capítulo, encontraremos uma explanação sobre tais atividades cognitivas, incluindo suas relações com a Matemática.

Duval (2012) resume o importante papel que as representações semióticas desempenham: são fundamentais para a realização de diferentes funções cognitivas (como a de objetivação, a de expressão e a de tratamento); também são fundamentais para a produção de conhecimentos, uma vez que a possibilidade de representar um mesmo objeto em diversos sistemas de representação semiótica, além de permitirem mais compreensões sobre objetos, também são responsáveis para o desenvolvimentos de sistemas semióticos menos dependentes da língua natural; e os sistemas semióticos tem um papel importante no desenvolvimento das representações mentais. Este último ponto será foco de nossa atenção momentânea.

Ainda que as representações semióticas começassem a ser relevantes no cenário acadêmico, é possível perceber que ainda não se tinha uma visão completa da importância cognitiva das representações semióticas. Duval considera que as representações semióticas ainda eram consideradas apenas como algo que ou era necessário para auxiliar a função de comunicação, ou servia de suporte para as imagens mentais. De acordo com ele, "Nessa perspectiva, o conteúdo seria facilmente destacável da sua forma semiótica e a mudança de forma seria uma operação intrinsicamente secundária" (Duval, 2009, p. 34), refletindo a realidade que anteriormente foi colocada à tona: as representações semióticas são consideradas totalmente subordinada as estruturas mentais. Outro problema perceptível se relaciona com a proximidade que as representações semióticas apresentavam com as representações computacionais.

Portando, se faz necessário compreender as relações entre representações semióticas e estruturas mentais. Duval apresenta aos leitores os termos *semiósis*[14] e *noésis*[15]:

> Se chamamos de *semiósis* a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e *noésis* os atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência, pareceria então evidente admitir que a *noésis* é independente da *semiósis* ou, ao menos, a dirige. (Duval, 2009, p. 15)

Quando pensamos nas relações entre semiósis e noésis, o caminho mais lógico que a Psicologia Cognitiva tomou foi a de que as relações semióticas são subordinadas às representações mentais. Porém, quando se analisam alguns pontos, vemos que isso não é necessariamente verdade. Um dos fatos é que comumente existe uma grande diferença entre as representações mentais que ocorrem no interior do sujeito, e as representações semióticas que são produzidas para expressar as representações mentais. Vale entender, então, que entre as funções de objetivação e expressão existe uma independência: se a objetivação, que deve ser entendido aqui como formação de representações mentais novas, nem sempre estará acompanhada de representações semióticas satisfatórias para sua expressão, de maneira semelhante, o contrário pode acontecer: as representações semióticas serem satisfatórias com relação a expressão e não trazer nenhuma objetivação ao indivíduo. É o que ocorre muitas vezes quando simplesmente imitamos ou copiamos representações semióticas sem se atentar ao sentido destas (DUVAL, 2009).

---

[14] Duval (2012), baseado em Kristeva (referência não citada no texto de Duval), esclarece que este termo é utilizado para designar as produções ligadas as práticas por intermédio de significantes.

[15] Com origem nos escritos de Platão, Duval (2012) apresenta o termo *noésis* como tudo aquilo capaz de despertar a compreensão através do pensamento. O autor esclarece que *noésis* não deve ser confundido nem com pensamento, nem com compreensão, pois tais termos são polissêmicos, e que *noésis* se relaciona muito mais com a formação e a aquisição de um conceito.

A prática das matemáticas em sala de aula mostrou uma realidade condizente com tais situações. Se a subordinação das representações semióticas com as representações mentais fosse uma realidade nas matemáticas, quando se analisa a mudança de forma entre as representações, percebemos que os alunos não deveriam possuir muita dificuldade em realizar tais mudanças, pois, se a *noésis* é independente da *semiósis*, tais operações deveriam ser triviais ou cognitivamente neutras. A realidade apontada, porém, é o contrário disso. Os alunos sentem muitas dificuldades em realizar essas mudanças de forma, muitas vezes dizendo que tais mudanças são impossíveis. É possível, então, apontar que, pelo menos com relação a aplicação matemática, ocorre uma não existência de *noésis* independente da *semiósis* (DUVAL, 2009).

Duval (2009) busca mostrar quais são os requisitos que um sistema semiótico deve ter para que ocorra relação entre *semiósis* e *noésis*: o primeiro requisito é que tal sistema seja capaz de ser identificável como uma representação de alguma coisa; o segundo que seja capaz de transformar representações pelas regras próprias do sistema, obtendo outras representações que são suficientes para constituir uma relação de conhecimento com as representações iniciais; o terceiro requisito é ser capaz de converter as representações produzidas num outro sistema, de maneira que a conversão possa trazer outras significações relativas ao objeto representado. A matemática, como é um sistema semiótico que cumpre os três requisitos, permite que a relação entre *semiósis* e *noésis* ocorra.

Algo interessante que se faz perceptível sobre as representações semióticas com relação as representações mentais é o que tange ao grau de liberdade que as representações semióticas permitem em relação ao tratamento da informação. Uma representação semiótica permite que sejam trabalhadas duas óticas: a visão com relação ao representante e ao representado; as representações mentais só permitem que se tome à visão do que é representado. Duval conclui que

> [...] as representações mentais não se prestam a tratamentos a não ser por meio da mobilização de um registro semiótico e da prática "mental" desse registro. Naturalmente, podemos sempre ter o "sentimento" de que estamos efetuando o tratamento no nível das representações mentais sem mobilizar explicitamente representações semióticas. Essa ilusão introspectiva apega-se ao desconhecimento de um fato genético e cultural fundamental: o desenvolvimento das representações mentais está ligado à aquisição e à interiorização de sistemas e de representações semióticas[...]. (Duval, 2009, p. 47)

Conclui-se, então, que as representações semióticas desempenham um papel importante para o desenvolvimento das representações mentais, uma vez que, estas dependem de uma interiorização das representações semióticas. Portanto, ao invés de pensar que a *noésis* é independente da *semiósis*, a relação é completamente oposta: não há *noésis* sem *semiósis* (DUVAL, 2009).

As proximidades das representações semióticas com as representações computacionais são expostas quando analisamos alguns tipos de representações computacionais que ressaltam uma linguagem ou um código, uma vez que realizam operações de combinação e substituição sobre significantes através de algumas regras previamente definidas. Parece que, de alguma forma, as representações computacionais também realizam a função de tratamento, tal qual uma representação semiótica. É onde se faz necessário enxergar as características e classificações de cada uma. Como citado anteriormente, as representações computacionais são do caráter interno, de forma que elas não dependem da visão que se tem de um objeto específico para a realização do tratamento; já as representações semióticas são externas e inseparáveis da visão que se tem do objeto. Portanto, isto sugere que existem dois tipos de tratamento: os tratamentos quase-instantâneos e os tratamentos intencionais. (DUVAL, 2009).

Duval (2009) define como tratamentos quase-instantâneos aqueles que são efetuados antes mesmo de terem sido marcados e que produzem informações e significações em que um sujeito tem imediatamente consciência; tem como características que podem ser efetuados de maneiras simultânea, e a quantidade de elementos integrados nessa operação não interferem nos tempos de reação. Podemos entender os tratamentos quase-instantâneos como aqueles que estão ligados a experiência ou familiaridade de uma longa prática. Já os tratamentos intencionais tomam tempo para ser efetuado, não possuem tanta liberdade quanto ao número de elementos integrados (ou seja, quanto mais elementos recebem o tratamento, mais tempo costuma demorar), e só podem ser aplicados sobre aquilo que o sujeito vê ou percebe de maneira quase que instantânea.

Uma das características diferenciais apontadas por Duval é de que “A capacidade de tratamento intencional é, ao mesmo tempo, restrita e não extensível em todos os sujeitos, qualquer que seja seu nível de conhecimento” (Duval, 2009, p. 52). Conclui-se que, se todo o indivíduo tem a mesma capacidade de tratamento intencional, o que vai ser o grande diferencial entre as performances cognitivas dos sujeitos são as estruturas mentais interligadas aos tratamentos quase-instantâneos que ele terá a sua disposição. O ideal é que, com uma maior variabilidade da capacidade de exercer tratamentos quase-instantâneos, a mente consiga focar a sua limitada capacidade de tratamentos intencionais em objetos mais complexos. Portanto, é importante que a mente obtenha a capacidade de realizar tratamentos quase-instantâneos para que haja progresso qualitativo na aprendizagem. Duval (2009) aponta que o caminho para que as aquisições de tratamentos quase-instantâneos passa por tratamentos intencionais, mas, infelizmente, seu trabalho não tem como objetivo se engajar nos métodos de aprendizagem que transformam tratamentos intencionais em tratamentos quase-instantâneos. Porém, Duval aponta

que “Toda a atividade cognitiva humana repousa sobre a complementaridade desses dois tipos de tratamentos” (Duval, 2009, p. 52). Cientes das diferenciações entre os tipos de tratamentos, conclui-se que as representações computacionais fazem uso dos tratamentos quase-instantâneos, enquanto as representações semióticas fazem uso dos tratamentos intencionais.

O quadro 6 a seguir traz um resumo sobre as classificações que cada representação se encaixa, além perceber os objetivos de atuação de cada uma delas:

Quadro 6 - Tipos e funções de representações

	Interna	Externa
Consciente	Mental Função de Objetivação	Semiótica Função de Objetivação Função de Expressão Função de Tratamento intencional
Inconsciente	Computacional Função de tratamento quase instantâneo	

Fonte: adaptado de Duval, 2009, p. 43

Conhecidas as características de cada tipo de representação, suas classificações, suas diferenças e métodos de atuação, é chegado o momento de apresentar um enfoque específico nas representações semióticas e suas três atividades cognitivas fundamentais: *formação*, *tratamento* e *conversão*.

Definimos como *formação* de uma representação semiótica aquela ao qual, seguindo um registro semiótico dado, implica na seleção de relações e de dados no conteúdo a representar. Se pensarmos de maneira comparativa, a *formação* seria equivalente a um esforço de descrição. A *formação* deve sempre estar atenta as regras do próprio sistema semiótico. É possível verificar um exemplo de tal atividade cognitiva o ato de escolher a forma de expressar área de um cômodo quadrado, cujo a medida da sua área é de 4 m; ao escolher como sistema semiótico a língua materna (neste caso, português), a formação pode ser entendida na escrita de uma frase (a área deste cômodo é de 4 metros quadrados), e as regras que a formação deve

estar atenta são as regras gramaticais; caso se escolha expressar a frase de maneira matemática, é possível escolher o registro de representação semiótica algébrico ($l^2 = 4m^2$). Chamamos estas regras de regras de conformação; elas têm como objetivo ajudar a identificar a representação e assegurar as condições necessárias para que *tratamentos* possam ser utilizados (DUVAL, 2012).

Os *tratamentos* atuam como transformações no interior do registro ao qual ocorreu a *formação*. Temos como exemplos, dentro de uma língua materna, a ideia de paráfrase, ao qual ocorre uma transformação dentro da formação do registro; quando pensamos na matemática, o cálculo é uma das possíveis transformações (por exemplo, trabalhar a soma dentro do registro de representação numérica). As transformações realizadas vão seguir as regras de *tratamentos* existentes em cada registro de representação semiótica escolhido, conforme determina Duval (2012). A título de curiosidade, o autor escreve que, numa língua materna, existem mais regras referentes a conformidade do que ao tratamento.

A última das atividades cognitivas associados aos registros de representação semiótica é a *conversão*. A *conversão* de um registro é definida como uma transformação desta função em uma interpretação em outro registro. Em outras palavras, é a ideia de realizar uma transformação externa ao registro inicial. Pode ser muito associado à ideia de mudança de forma, de maneira que se faz necessário conservar a totalidade ou alguma parte do conteúdo da representação inicial. Para tomar um exemplo relacionado com língua, ao realizar uma tradução, estamos *convertendo* uma formação de uma língua em outra. (DUVAL, 2012).

A *conversão* nos ajuda a lidar com o primeiro problema, citado anteriormente, quando estamos lidando com aprendizagem matemática e representações semióticas: a diferença entre o objeto e suas representações. Caso o aluno não perceba que ocorre uma diferença entre os objetos matemáticos e suas representações, ela pode apresentar problemas no aprendizado. Pode-se tomar como exemplo a soma de frações e soma de números decimais que representam a mesma quantidade:

$$\frac{1}{5} + \frac{8}{10} = \frac{50}{50}$$

$$0{,}2 + 0{,}8 = 1$$

As operações acima destacam a ideia de representações semióticas em registros distintos (fração e número decimal) dentro de um sistema semiótico (no caso, uma das representações da matemática) que caracterizam o mesmo objeto. Cada resultado foi obtido conforme as regras de *tratamento* de cada registro; *converter*, de um registro para o outro, permite ao aluno duas vantagens: perceber qual dos registros permite um tratamento mais simplificado; e, o

fundamental, permite ao aluno perceber o paradigma entre representante e representação "Se o objeto é *a*, como ele pode também ser *b*?". Representar objetos em diferentes registros semióticos permite o aluno perceber o paradoxo, concluindo que o objeto não é nem *a*, nem *b*; o objeto é ele mesmo, representado na forma de *a*, e também na forma de *b*.

A conversão, conforme definida por Duval (2009), possui uma relação diferente das demais atividades cognitivas das representações semióticas: normalmente, as regras de conversão não são estabelecidas, e, mesmo no caso de serem estabelecidas, elas nem sempre são as mesmas em cada sentido. Por exemplo: transformar a representação de uma função do primeiro grau, tendo como sua origem a representação algébrica ($y = ax + b$) e seu destino a representação gráfica, tem um conjunto específico de regras que são diferentes das regras no sentido contrário. Nas palavras do autor:

> "as regras de conversão não são as mesmas segundo o sentido no qual a mudança de registro é efetuada. [...] Em outras palavras cada vez que se liberam regras de conversão, a aplicação dessas regras é em sentido único" (Duval, 2009, p. 61).

De maneira geral, o Ensino de Matemática tem predileção pelas atividades cognitivas de formação das representações semióticas e nas regras relativas à atividade cognitiva de *tratamento*; quase não há espaço para a *conversão* no Ensino de Matemática. Duval (2009) explica que essa falta de espaço para a *conversão* encontra três justificativas: a primeira é justamente a relativa dificuldade de estabelecer regras de conversão; a segunda se relaciona com o fato de que quando a conversão é utilizada, os objetivos são apenas para que o *tratamento* seja simplificado dentro do registro, e não para que realmente se estabeleça as significações entre representante e representado. Com isto, há a verificação de um apego aos registros que já apresentam *tratamento* simplificado; a terceira causa é justamente a ideia de que utilizar as *conversões* com o objetivo de apenas simplificar *tratamentos* pode implicar em alunos menos preparados, ou, nas palavras do autor, "colocar-se atrás em relação a um ensino considerado sério das matemáticas" (Duval, 2009, p. 62).

Chama a atenção o fato das três justificativas serem contraditórias entre si. É compreensível que realmente a questão da dificuldade com as regras pode ser um empecilho; porém, se não há tantas regras assim, é necessário estar fortificado no conceito, na compreensão das representações e seus significantes; de maneira alguma isso pode ser entendido como algo que poderia ser um ensino aquém do sério. Além do mais, a segunda justificativa parte do princípio de que há um apego a representações que favorecem a simplificação; se há esse apego, então a terceira justificativa não faz sentido. Duval conclui que

> [...] a ausência de coordenação entre diferentes registros cria muito frequentemente uma deficiência para as aprendizagens conceituais. Inversamente, uma aprendizagem especificamente centrada na mudança e na coordenação de diferentes registros de representação produz efeitos espetaculares nas macro-tarefas de produção e de compreensão. [...] a conversão das representações é, para a aprendizagem, uma atividade tão fundamental quanto as atividades de formação ou de tratamento. Porque ela, sozinha, pode favorecer a coordenação dos registros de representações. (Duval, 2009, p. 63)

Se fazendo presente a apresentação sobre os conceitos referentes às representações semióticas e suas possibilidades para o Ensino de Matemática, é possível sintetizar que a Teoria dos *Registros de Representações Semióticas* nos alerta para a necessidade de se perceber a diferença entre o objeto e suas possíveis representações; também nos possibilita dizer que, sem representações semióticas, avançamos pouco ou mesmo não avançamos na construção de conceitos matemáticos. Portanto, se faz possível analisar como uma abordagem vetorial pode ser encarada conforme os *Registros de Representação Semiótica* e suas três atividades cognitivas (*formação*, *transformação* e *conversão*).

2.2.3 Vetores à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica

No que se refere à atividade de *formação*, um vetor pode ajudar na identificação do registro de representação semiótica que está sendo utilizado. Como exemplo, caso seja representado por uma seta (indicando um segmento orientado que possui direção, sentido e módulo), identificamos que se trata de um registro geométrico; com relação a *transformação*, essa atividade é facilmente identificável: caso tomemos um vetor cujo o seu registro de representação de formação escolhido foi do tipo $\vec{v} = (a, b)$, temos que o tratamento que representa a soma de dois vetores distintos seria equivalente a $\vec{v} + \vec{w} = (a, b) + (c, d)$, que resultaria num vetor $\vec{u} = (a + c, b + d)$; com relação às *conversões*, podemos ter que a soma vetorial, que foi representada na forma algébrica acima, também pode ser realizada na forma geométrica, convertendo o vetor para a sua representação de "seta" e realizando a soma através do método do polígono (ou do paralelogramo). É importante destacar que os vetores, para além de funcionarem em diferentes registros de representações semióticas, auxiliam nas atividades cognitivas de outros conteúdos matemáticos abordados no ensino médio. Como exemplo disso, temos que os vetores podem ajudar no *tratamento* quando realizamos transformações geométricas como a translação; outro exemplo palpável se dá pelo fato de que a *conversão* dos registros de representação semiótica de números complexos da forma algébrica para a forma geométrica pode ser realizada através de vetores.

2.3 Integrando as Teorias dos Três Mundos da Matemática e Registros de Representação Semiótica

Quando analisamos as três atividades cognitivas (*formação, tratamento e conversão*), encontramos semelhanças com a teoria de Tall (1991; 1994) e seus companheiros de investigação: a ideia de proceito se assemelha com as três atividades cognitivas da representação semiótica, onde a ideia de realizar conversão entre os registros nos faz pensar justamente na relação processo/conceito; David Tall (2004) interpreta que a aprendizagem está relacionada com elementos de três mundos diferentes dentro da matemática; já Duval (2009; 2012) interpreta como diferentes registros semióticos dentro das matemáticas.

Com relação aos diagnósticos ligados às dificuldades de ensino-aprendizagem Matemática, ambos identificam que o sistema de ensino não estimula os estudantes de maneira condizente com a ideal para um bom desenvolvimento cognitivo destes: Tall (1991; 1994; 2004) identifica que não há o estímulo do pensamento proceitual, enquanto Duval (2009, 2012) mostra que a atividade cognitiva de conversão entre registros de representação semiótica vem sendo deixada de lado. À luz das duas teorias, pode-se implicar que uma utilização da abordagem vetorial pode indicar um caminho ao qual é possível superar essas dificuldades.

3 METODOLOGIA DA PESQUISA

Tendo em vista o objetivo de descrever a apropriação de um projeto metodológico de ensino, que ressalta a utilização da abordagem vetorial, por um grupo de Licenciandos em Matemática, o presente estudo possui caráter intervencionista. Assim, a investigação é tipificada como qualitativa classificada como pesquisa-ação, com características de estudo de caso.

3.1 Pesquisa Qualitativa

O cerne da investigação será a análise dos possíveis saberes que irão emergir na intervenção de ensino proposta. Assim, optou-se pela abordagem qualitativa, que de acordo com Gil (2002, p.133) consiste em "uma sequência de atividades, que envolve a redução dos dados, a categorização desses dados, sua interpretação e a redação do relatório".

Depois de definida que uma pesquisa será qualitativa, é comum estabelecer as demais características de tal pesquisa. Entretanto, André (2013) evidencia que é através da prática durante a pesquisa que se tornará possível, de fato, identificar se a pesquisa é realmente qualitativa:

> "Na perspectiva das abordagens qualitativas, não é a atribuição de um nome que estabelece o rigor metodológico da pesquisa, mas a explicitação dos passos seguidos na realização da pesquisa, ou seja, a descrição clara e pormenorizada do caminho percorrido para alcançar os objetivos, com a justificativa de cada opção feita. Isso sim é importante, porque revela a preocupação com o rigor científico do trabalho, ou seja: se foram ou não tomadas as devidas cautelas na escolha dos sujeitos, dos procedimentos de coleta e análise de dados, na elaboração e validação dos instrumentos, no tratamento dos dados. Revela ainda a ética do pesquisador, que ao expor seus pontos de vista dá oportunidade ao leitor de julgar suas atitudes e valores." (André, 2013, p. 2)

Bicudo (2017) descreve em sua obra as características que são comuns numa pesquisa qualitativa:

> [...] privilegiam-se descrições de experiências, relatos de compreensões, respostas abertas a questionários, entrevistas com sujeitos, relatos de observações e outros procedimentos que deem conta de dados sensíveis, de concepções, de estados mentais, de acontecimentos, etc. (BICUDO, 2017, p. 117).

As características descritas acima corroboram as perspectivas de André (2013), que entende que tais pesquisas concebem o conhecimento como produto de todo um processo, construído em conjunto com os sujeitos, atuando na realidade, permitindo transformar a realidade e serem transformados pela mesma, sendo tarefa do pesquisador estar ciente de que o

meio em que os sujeitos estão inseridos são fundamentais para o resultado que será obtido, de maneira que o conhecimento emergido está em constante construção, diversas dimensões e podem ser analisadas e compreendidas por óticas distintas.

Assim, cientes de que nossa pesquisa leva em consideração dados sensíveis e subjetivos relacionados com os sujeitos propostos, não se faz adequado tentar organizar e analisar os dados de maneira quantitativa, e sim de maneira qualitativa, dando preferência às experiências que surgirão de cada encontro planejado. Optou-se, portanto, por este tipo de pesquisa, uma vez que possibilita uma abordagem interpretativa que se adequa ao objetivo traçado.

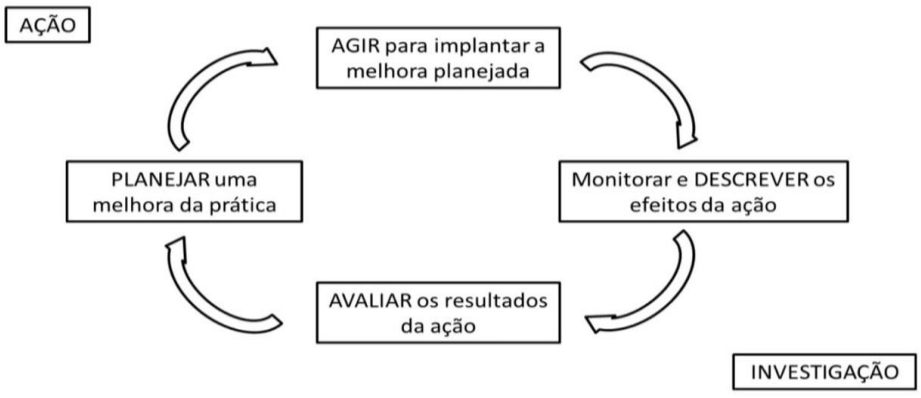
3.2 **A Pesquisa – Ação**

A pesquisa-ação é caracterizada pelo objetivo de identificar o problema, elaborar um plano de ação de acordo com o problema e, por fim, acompanhar e analisar os resultados. Neste sentido Thiollent (1986) afirma que a pesquisa-ação é

> [...] um tipo de pesquisa social com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com a ação ou com resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo. (Thiollent, 1986, p. 14)

Tripp (2005), ao discorrer também sobre essa metodologia, define que é um processo que segue um ciclo onde a prática é aprimorada através da oscilação sistemática entre a ação e investigação a respeito da prática. Assim, são determinadas quatro importantes fases, são elas: planejamento, implementação, descrição e avaliação de uma mudança para a melhora da prática, conforme ilustrado na figura 6.

Figura 5 - Movimento cíclico da investigação-ação.



Fonte: Tripp (2005).

Assim, relacionando o ciclo exposto acima com o presente estudo, temos a ação de *planejar*, que trata do levantamento dos sujeitos de pesquisa e criação das propostas da intervenção a partir do referencial teórico apresentado, visando promover discussões a respeito da abordagem vetorial na trajetória dos estudantes para que se possa compreender, também na perspectiva dos alunos, o motivo de sua notória ausência no Ensino Básico. Já, o ato de *agir* corresponde à execução da proposta. *Monitorar e descrever* o desenvolvimento da intervenção, de maneira atenta e responsável, se torna fundamental para que se possa, finalmente, *avaliar os resultados*, neste caso específico, os saberes emergidos a partir da intervenção de ensino; caso se faça necessário, e pretenda-se continuar a desenvolver a investigação-ação, é preciso repensar a ação executada, bem como suscitar novas questões para futuras pesquisas.

Deste modo, levando em consideração que o presente estudo possui o intuito de investigar de maneira que o autor promova uma ação no lócus de pesquisa, a partir de uma intervenção de ensino, a escolha pelo método de pesquisa-ação foi considerada adequada, uma vez que

> Em geral, a ideia de pesquisa-ação encontra um contexto favorável quando os pesquisadores não querem limitar suas investigações aos aspectos acadêmicos e burocráticos da maioria das pesquisas convencionais. Querem pesquisas nas quais as pessoas implicadas tenham algo a "dizer" e a "fazer". Não se trata de simples levantamento de dados ou de relatórios a serem arquivados. Com a pesquisa-ação os pesquisadores pretendem desempenhar um papel ativo na própria realidade dos fatos observados. (Thiollent, 1986, p. 16)

3.3 **O Locus e os Sujeitos da Pesquisa**

A Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) foi o local escolhido para o desenvolvimento do trabalho de campo. A Universidade, que tem sua criação datada em 1950 (com raízes que perduram desde 1938), possui hoje cerca de 40 mil alunos, 2,9 mil docentes, 5,1 mil servidores, além de 19 campus e unidades externas, 612 laboratórios, 83 cursos de graduação, 68 cursos de mestrado, 47 cursos de doutorado, e mais de 1000 projetos de extensão. Sua expressiva colaboração para a sociedade fluminense e brasileira vai além disso; a Universidade foi pioneira na elaboração de uma ouvidoria própria, além de ter sido a primeira do país a ter adotado um sistema de reserva de vagas de acesso à Universidade através do seu vestibular, no começo dos anos 2000. O motivo para a escolha deste local para a aplicação do trabalho de campo é algo que sempre foi de desejo do autor desse trabalho; morador, em grande parte da vida, da baixada fluminense, na divisa entre os munícipios de São João de Meriti e

Duque de Caxias; a presença de um Campus da UERJ (a Faculdade de Educação da Baixada Fluminense – FEBF) em Duque de Caxias foi fator definitivo para que eu cursasse Licenciatura em Matemática; foi neste campus onde realizou-se a minha graduação e tive o contato com a abordagem vetorial que é o eixo condutor dessa pesquisa; anos depois, tive a oportunidade de regressar ao campus, dessa vez como mestrando em uma das linhas de pesquisa do Programa de Pós Graduação em Educação, Cultura e Comunicação (PPGECC). Ter o privilégio da oportunidade de conduzir a pesquisa nessa Universidade de tamanha história e tradição de luta por uma educação pública acessível e de qualidade faz com que eu me sinta honrado.

Figura 6 - Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)

Fonte: UERJ (c2018)

Com a intenção de trabalhar com futuros professores como sujeitos da pesquisa, decidiu-se que o presente estudo seria conduzido em algum no curso de Licenciatura em Matemática da UERJ, que visa formar professores para atuarem na Educação Básica nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Considerou-se realizar a pesquisa na FEBF, por possuir uma Licenciatura que atende esses requisitos. Porém, por motivos de agenda por parte do pesquisador e da sua orientadora, a pesquisa só poderia ser realizada no turno da noite, o que impossibilitaria que a pesquisa se perpetuasse pela FEBF, que ainda não possui Licenciatura em Matemática no turno da noite. Optou-se, então, de realizar o trabalho de campo na

Licenciatura em Matemática no turno noturno do Campus Maracanã, coordenado pelo Instituto de Matemática e Estatística (IME). De acordo com o site da instituição[16], o curso possui o objetivo de

> "Habilitar o futuro profissional a lecionar no ensino fundamental e médio [...], através de uma ação pedagógica que integra didática e conteúdos matemáticos permitindo maior abrangência de modelos e meios pedagógicos para o desenvolvimento do futuro educado." (IME, c2015)

o que corrobora com a missão que a UERJ possui de proporcionar um ensino democratizante, que formam profissionais éticos, críticos e agentes transformadores da sociedade.

3.4 **Estudo de Caso**

A história da metodologia de Estudo de Caso pode ser traçada até o final do Século XIX e início do Século XX, tendo entre seus principais expoentes a Escola de Chicago, Frederic LePlay; os objetivos dos estudos promovidos com essa metodologia era de tornar evidente determinadas características e atributos destacáveis provenientes de interações sociais (ANDRÉ, 2013; HAMMEL, 1993). Ventura (2007) destaca que essa metodologia foi utilizada em diversas áreas de pesquisa, como em casos clínicos, psicoterapêuticos, dentro da área de didática e educação, entre outros.

Devido às suas diversas possibilidades de aplicações, existem também diversos pontos de vistas sobre a metodologia de estudo de caso. Podemos destacar aqui a visão de Goode e Hatt (1979), que diz que o interesse no ponto de vista de um estudo de caso é investigar, dentro de uma unidade[17] determinada, as características importantes para o objeto de pesquisa.

Também podemos levar em consideração, para a nossa pesquisa, a perspectiva de Lüdke e André (1986), onde nos é dito que o estudo de caso pode ser simples ou complexo, prático ou abstrato, mas que deve respeitar sempre suas limitações. Os dados obtidos podem ser, ao mesmo tempo, similares aos demais, e também distintos, pois o objeto de interesse na pesquisa pode tornar a pesquisa singular; também destacam que esse tipo de pesquisa possui um potencial representativo nas áreas da educação (VENTURA, 2007).

Dentro do contexto educacional, André (2013), baseando-se em Mazzoti (2006), cita que as perspectivas iniciais do estudo de caso utilizado na educação estavam muito ligadas às

[16] Disponível em: https://www.ime.uerj.br/licenciatura-plena-em-matematica/

[17] Ventura (2007) esclarece que na perspectiva de Goode e Hatt (1979), quando nos referimos a unidade, não falamos exclusivamente de um único ser, mas também de famílias, classes, conjuntos de relações, pessoa, entre outros.

concepções de pesquisas quantitativas, cujo significado estava atrelado à ideia de que tal metodologia seria simplesmente um "estudo descritivo de uma unidade", além de ser caracterizado como "não experimental" e "menos científico", entre os anos de 1960 e 1970. Porém, no início dos anos 1980, esse cenário é alterado, pois o estudo de caso passar a ser considerado numa perspectiva de pesquisa qualitativa. André sinaliza que nessa perspectiva,

> "o estudo de caso ressurge na pesquisa educacional com um sentido mais abrangente: o de focalizar num fenômeno particular, levando em conta seu **contexto** e suas **múltiplas dimensões**. Valoriza-se o aspecto unitário, mas ressalta-se a necessidade de **análise situada e em profundidade**." (André, 2013, p. 3)

André (2013) especifica que, normalmente, são definidas três fases em uma pesquisa qualitativa de estudo de caso: fase exploratória, fase de coleta de dados, e fase de análise de dados. Apesar dessas três fases serem as mais comuns, o autor destaca que, como a pesquisa qualitativa é um processo criativo e sujeito às particularidades que podem ocorrer durante tal processo, por vezes a pesquisa pode apresentar apenas duas dessas três fases, ou até mesmo ser necessária mais uma fase para que seja realizada de maneira satisfatória.

A fase exploratória, também conhecida como a fase em que se definem os focos de estudo, é a fase responsável por definir e amarrar todos os detalhes antes de se partir para uma coleta de dados: estabelecer os contatos, confirmar (e se necessário, refazer) as indagações motrizes para a pesquisa, determinar o local e os sujeitos da pesquisa, estabelecer os instrumentos que serão utilizados para a coleta de dados, entre outros (ANDRÉ, 2013).

A fase de coleta de dados, é também conhecida como a fase em que se delimita o estudo, pois numa pesquisa desse tipo, por vezes se torna impossível observar todas as perspectivas, de maneira que realizar um recorte do que será coletado e posteriormente analisado é crucial (ANDRÉ, 2013). Dentre os métodos mais utilizados para se coletar os dados, pode-se destacar a entrevista, dentre quais os focos desse método consistem em fazer perguntas interligadas com o objeto de pesquisa, e ouvir atentamente o que os sujeitos tem a construir e colaborar com a pesquisa; outro método que se destaca é o método da observação, fundamental para analisar e buscar compreender o comportamento da unidade estabelecida, além de auxiliar, na fase posterior (de análise dos dados), pois uma boa observação costuma produzir relatos bem detalhados. Além desses dois métodos, também se destacam a análise documental, pois, por muitas vezes, além de fornecer informações no âmbito legal, histórico e outros, um documento pode substituir ou complementar uma informação que não pode ser coletada através de outros métodos (ANDRÉ, 2013; BASSEY, 2003; STAKE, 1995).

A fase da análise de dados é uma fase que está presente durante todo o processo de pesquisa, pois uma pesquisa de estudo de caso exige que se faça uma boa análise desde a

definição dos focos, desde a delimitação do estudo, e, principalmente, dos conhecimentos que vão emergindo durante a coleta dos dados. Entretanto, a fase de análise se torna mais aguda durante a elaboração do relatório de pesquisa, uma vez que, com a elaboração de tal documento, que deve ser bem-organizado e completo, o pesquisador se torna capaz de ler, reler e reviver fatos da pesquisa, podendo-os comparar com seu referencial teórico, o que permite tirar as conclusões sobre a pesquisa conduzida.

3.5 **Trajetória da Pesquisa**

A intervenção de ensino passou por diversas alterações durante o seu processo de planejamento. Inicialmente, existia a intenção de que fosse implementada de forma totalmente presencial. Contudo, com a pandemia causada pelo vírus SarsCov-2, que, além das insanáveis perdas de vida, provocou o isolamento e distanciamento social, houve um planejamento para que a intervenção fosse realizada 100% online. Porém, conforme o processo de imunização avançou (mesmo que tardiamente) durante o ano de 2022, as atividades presenciais puderam ser retomadas. Portanto, a intervenção foi pensada conforme o apresentado a seguir:

a) Pesquisa exploratória de ementas das disciplinas ofertadas no curso de Licenciatura em Matemática da UERJ, com a intenção de definir em qual disciplina a intervenção metodológica será aplicada;
b) Definida a disciplina, ocorreu a aplicação de questionário semiaberto com levantamento pessoal e científico dos sujeitos, no dia 25/07/2022;
c) Encontros presenciais: 3 encontros com duração de 90 minutos cada, totalizando 270 minutos máximos, realizados nos dias 01/08/2022, 15/08/2022 e 22/08/2022.
d) Aplicação de questionário semiaberto com avaliação do percurso formativo, aplicado a partir do dia 22/08/2022.

3.5.1 Pesquisa das Ementas

A grade curricular do curso é composta por 35 disciplinas obrigatórias, sendo que 18 dessas disciplinas possuem caráter científico-técnico aprofundado em Matemáticas, e as demais 17 tem como objetivo aperfeiçoar a prática de ensino, didática, compreensões sobre a educação e sociedade, programas pedagógicos e culturais. Além das 35 disciplinas obrigatórias, existem diversas disciplinas eletivas, tornando o número de disciplinas disponíveis para a formação do

futuro professor de matemática superior à 100. Para esta pesquisa foi realizada a leitura das ementas das disciplinas do curso, a fim de identificar disciplinas voltadas ao aperfeiçoamento do licenciando como professor. Dentre tais disciplinas, podemos destacar a disciplina Práticas Pedagógicas em Matemática I e II. Ambas as disciplinas têm o mesmo objetivo: “Propiciar o aprofundamento dos conhecimentos pedagógicos dos conteúdos matemáticos, respeitando as vertentes: Teóricos, Práticos e Metodológicos aplicados ao Ensino Médio” [OBJ]. Nas suas ementas, encontramos ‘estudos de funções, geometria de posição, geometria e suas medidas, grandezas proporcionais’, além de outros assuntos. Portanto, surgia uma boa oportunidade de poder trabalhar a abordagem vetorial com licenciandos inscritos em uma dessas disciplinas, uma vez que a abordagem vetorial pode ser uma aliada no ensino de geometria e de funções.

Com isso, foi determinado que seria implementado uma intervenção de ensino no curso de licenciatura em Matemática da universidade apresentada, na disciplina Prática Pedagógica em Matemática II (PPM2), disciplina para estudantes do 4° período, uma vez que tal intervenção pode ser considerada como reflexão metodológica, ou até mesmo pode ser considerada como uma proposta curricular ou um projeto de ensino. Apesar de poder ser escolhida outras disciplinas, um fator determinante para a escolha desta disciplina foi o fato da mesma ser ministrada pela orientadora dessa pesquisa, Gabriela dos Santos Barbosa. Contar com a presença da orientadora nos encontros, supervisionando, direcionando e cuidando para que a trajetória do trabalho de campo pudesse ser satisfatória para com a pesquisa.

Cálculos de amostragem não foram adotados, pois a preocupação do estudo centra-se no desenvolvimento, e não apenas em resultados. Portanto, mesmo que a quantidade de sujeitos participantes não fosse alta, isso não seria um problema devido ao teor da pesquisa. Ainda assim, a época da definição do trabalho de campo, escolheu-se uma disciplina obrigatória do curso, o que resultaria numa amostragem razoável de sujeitos participantes da pesquisa. Estavam inscritos 11 licenciandos na disciplina quando o trabalho de campo foi iniciado, e todos participaram, de alguma maneira, da pesquisa que foi realizada.

3.5.2 Etapas Posteriores à determinação da disciplina

Após definida que a intervenção ocorreria na disciplina de PPM2, aplicou-se o questionário 1, que trouxe questões acerca das experiências pessoais e conhecimento científico do participante no tocante ao conteúdo de vetores, enviado para os participantes através de formulário do *Google Forms*. A opção por manter o questionário de maneira online se deu por motivos de possibilitar a participação da totalidade dos licenciandos, evitando que, por motivos

de ausência, dados pudessem não ser coletados. Os encontros presenciais tiveram como objetivos trazer a abordagem vetorial aplicada ao ensino básico, compreender de maneira prática as teorias presentes no quadro teórico e realizar uma reflexão sobre a utilização da abordagem vetorial no ensino de Matemática. Vale salientar que não houve a pretensão de que o autor se posicionasse como detentor do conhecimento a ser transmitido, mas sim como um facilitador disposto a propiciar momentos de troca e construção de saberes. O segundo questionário foi aplicado, também, pelo Google Forms, após os encontros presenciais, e é caracterizado como uma avaliação da intervenção.

Após todas as etapas descritas acima realizadas, construiu-se uma tabela para identificar o nível de participação dos licenciandos matriculados na disciplina de PPM2. Não há intenção de expor os nomes e nem os demais dados dos participantes. Portanto, para que haja então uma identificação de cada participante, adotou-se então a sigla "**Px**", em que x se refere a posição que o nome real do participante ocuparia em uma ordenação crescente dos nomes referentes à ordem alfabética. Portanto, nos referiremos aos participantes da pesquisa pelas siglas P1, P2, P3... P11. O quadro abaixo traz a participação de cada sujeito no trabalho de campo.

Quadro 7 - Tabela indicando em quais atividades os participantes se engajaram

Participante	Questionário 1	Atividade 1	Atividade 2	Atividade 3	Questionário Final
P1	x			x	
P2	x			x	
P3	x	x		x	x
P4	x		x		x
P5			x	x	
P6	x	x	x	x	x
P7	x			x	
P8	x		x	x	
P9	x		x		x
P10	x		x		x
P11	x	x		x	x

Fonte: Próprio autor, 2023.

Como podemos notar observando os dados da tabela acima, nem todas as etapas tiveram uma adesão muito alta. Dos 11 licenciandos inscritos da disciplina, nem todos participaram de maneira regular dos encontros e das atividades. Com isso, os dados do segundo encontro e da segunda atividade, realizados no dia 15/08, não serão considerados para a análise e nem para a discussão. A opção pela remoção dos dados desse encontro e dessa atividade se deram pelo fato de que metade dos presentes nesse encontro não participaram de nenhum outro encontro

presencial. Portanto, para fins de clareza, vamos analisar os dados das seguintes etapas da pesquisa de campo:

1) Questionário 1
2) Encontro presencial – 01/08/2022
3) Encontro presencial – 22/08/2022
4) Questionário final

Também se faz necessário notar que apenas 3 licenciandos participaram do primeiro encontro; para que não haja confusão na hora de analisar os dados, optou-se por definir como sujeitos de pesquisa apenas os participantes P3, P6 e P11, que serão identificados posteriormente no capítulo através de nomes fictícios.

Com a exclusão de algumas etapas do trabalho de campo para fins metodológicos, vamos apresentar os instrumentos de coletas de dados

3.6 **Instrumentos de coleta de dados**

A esta seção compete descrever os instrumentos de coleta apresentados na trajetória da pesquisa, que são: Questionário 1, Encontros presenciais e Questionário final.

3.6.1 Questionário 1

O primeiro questionário possuiu o objetivo de investigar dados individuais dos participantes que sejam relevantes que possibilitam ao autor planejar (ou replanejar) as propostas dos encontros presenciais conforme os dados coletados. O questionário foi aplicado com antecedência ao primeiro encontro que foi realizado, corroborando com o objetivo proposto para ele. Assim, o questionário semiaberto possuiu 16 perguntas divididas em duas categorias: a primeira categoria, contendo as 8 primeiras questões, está relacionada com o perfil pessoal dos indivíduos participantes, com perguntas que variam sobre local de residência, período da graduação, gênero, idade, entre outros. A segunda categoria está relacionada com o nível de contato que os indivíduos têm com o conteúdo de vetores na sua trajetória estudantil, avaliação pessoal da experiência com tal conteúdo, sua opinião para a utilização dessa abordagem, entre outros. A íntegra do questionário pode ser encontrada no apêndice A.

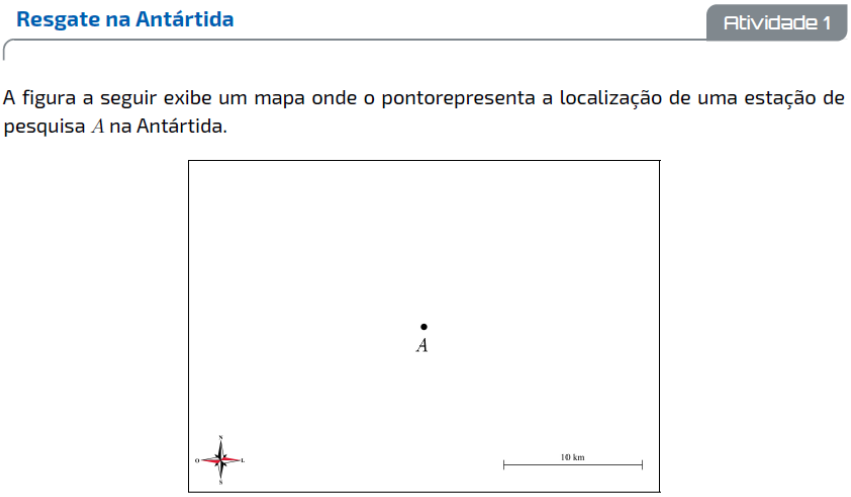
3.6.2 Encontros presenciais

Foram selecionados dois encontros presenciais, seguindo estratégias planejadas para os sujeitos da pesquisa. O primeiro encontro teve como objetivo se aproximar dos sujeitos, contar as trajetórias do pesquisador e da pesquisa que o conduziram até aquele presente momento, familiarizar os sujeitos com a ideia da pesquisa, e aplicar a Atividade 1 – Um problema de Localização.

Roteiro do Encontro Presencial – 01/08/2022: Munidos das informações obtidas através do Questionário 1, o encontro inicia através de uma singela apresentação pessoal. Após passado o período de apresentação, será então levantado aos sujeitos presentes o que eles entendem com vetor; após essa pergunta, será perguntada a definição de vetor (caso a definição não tenha surgido como resposta para a primeira pergunta), anotar as respostas no quadro; depois, será perguntado conceitos como "do que você se lembra quando escuta a palavra vetor?" As respostas dos dois (ou três) questionamentos serão anotadas e discutidas, buscando trazer ali as possíveis representações para um mesmo conteúdo. Depois, será realizado uma breve apresentação do vetor, principalmente relacionado ao seu contexto histórico. Aqui o foco não será trazer grandes aprofundamentos nas suas definições, pois lidaremos com indivíduos de notável conhecimento. A ideia é buscar, através do contexto histórico dos vetores, interligá-lo com conteúdo presente no Ensino Básico, começando com números complexos. Aqui, é bom dar uma pequena atenção sobre números complexos e sua presença no Ensino Básico também. Após fazer essa pequena condução, serão realizados alguns questionamentos, como "É possível perceber a relação dos vetores com a Matemática?"; "E sua relação com números complexos, dá pra perceber também?"; "Você já tinha conhecimento dessa relação quando estava no ensino médio?"; depois desse breve contexto, comentar que não é necessário se prender a um conteúdo como números complexos para introduzir vetores no Ensino Básico, e que oportunidades para isso existem em contextos que podem variar tanto daquilo que já foi discutido, como também através de atividades. Após isso, apresentar a Atividade 1, coletar as respostas, e discutir o que emergir das respostas.

A Atividade 1, presente no Apêndice B, baseado no capítulo de vetores do *Livro Aberto de Matemática*, chamada de "Localizando o grupo no mapa", busca relatar um problema referente a localização, onde se utilizam as ideias de direção, sentido e módulo. O problema estará descrito a seguir:

Figura 7 - Atividade proposta para o primeiro encontro



Fonte: Impa, 2021.

Os licenciandos receberão uma folha de papel com a figura acima e as perguntas descritas abaixo. A primeira pergunta, com o objetivo de abordar a importância de se estabelecer a direção quando queremos ajudar na localização, será: "Supondo que o grupo presente na estação de pesquisa receba um comunicado informando que há um outro grupo de pesquisadores que necessita de socorro, seria possível localizar o grupo que precisa de socorro apenas com a informação de que eles se encontram à 10 quilômetros de distância? Por quê?"

Uma segunda pergunta será feita: "Se tentarmos traçar todas as possibilidades de localização onde o grupo que precisa de socorro está, formaríamos qual figura geométrica?"; o objetivo da questão é mostrar que uma figura geométrica emerge dessa informação, a circunferência de raio 10 km.

A próxima pergunta será: "Se, ao invés da informação representada anteriormente na questão 1, suponha que o grupo presente na base recebesse a informação de que um outro grupo de pesquisadores precisa de socorro, estando estes localizados à leste da base. Seria possível determinar a localização exata do grupo que precisa de socorro, sem sair da base de pesquisas? Por quê?". Nessa questão, será reforçada o fato de que, sem saber a distância que o grupo está da base, não será possível determinar a localização do grupo, uma vez que teremos infinitos pontos localizados a leste da base.

Relacionada a essa mesma situação, será perguntado também: "se tentarmos traçar todas as possibilidades de localização onde o grupo que precisa de socorro está, formaríamos qual

figura geométrica?"; novamente, o objetivo é tentar reconhecer a figura geométrica formada pela situação apresentada.

Uma terceira situação será colocada diante dos alunos, na questão 5, complementando as informações: "se, após a informação da questão 3 ter sido captada, o grupo presente na base recebesse uma nova informação, dizendo que o grupo que precisa de socorro está à 10 km da base, na direção leste, seria possível determinar a localização exata do grupo que precisa de socorro? Por quê?". Aqui o objetivo é mostrar que é sim possível, pois há apenas um ponto no mapa que está localizado à 10 km da estação A na direção leste, reforçando as ideias de direção, módulo, e localização de pontos.

Na questão 6, será pedido aos alunos: "represente o deslocamento realizado pelo grupo de resgate que sai da base, em direção ao grupo que necessita de socorro"; com essa atividade, reforçamos a ideia de sentido. Será colocado um espaço para desenhar a representação do deslocamento, permitindo a possibilidade desse deslocamento ser representado por um vetor.

A questão 7 tem como objetivo reforçar as características da representação realizada na questão anterior. Por exemplo, um vetor tem como características conhecidas a direção, o módulo e o sentido.

As questões 8 e 9 tem como objetivo investigar o que os sujeitos de pesquisa pensam da atividade que foi proposta a eles, perguntando se, como futuro professor, essa atividade seria utilizada por eles, e em que etapa do Ensino Básico.

Será disponibilizado um tempo máximo de 30 minutos para a resolução da atividade; porém, o intuito é que tal atividade se encerre antes desse tempo, conforme a turma for respondendo e concluindo. Após o término da resolução, será realizado a discussão com os licenciandos, comentando as respostas e permitindo que os saberes possam emergir dessa discussão, compreendendo as motivações por detrás das respostas, entre outras coisas.

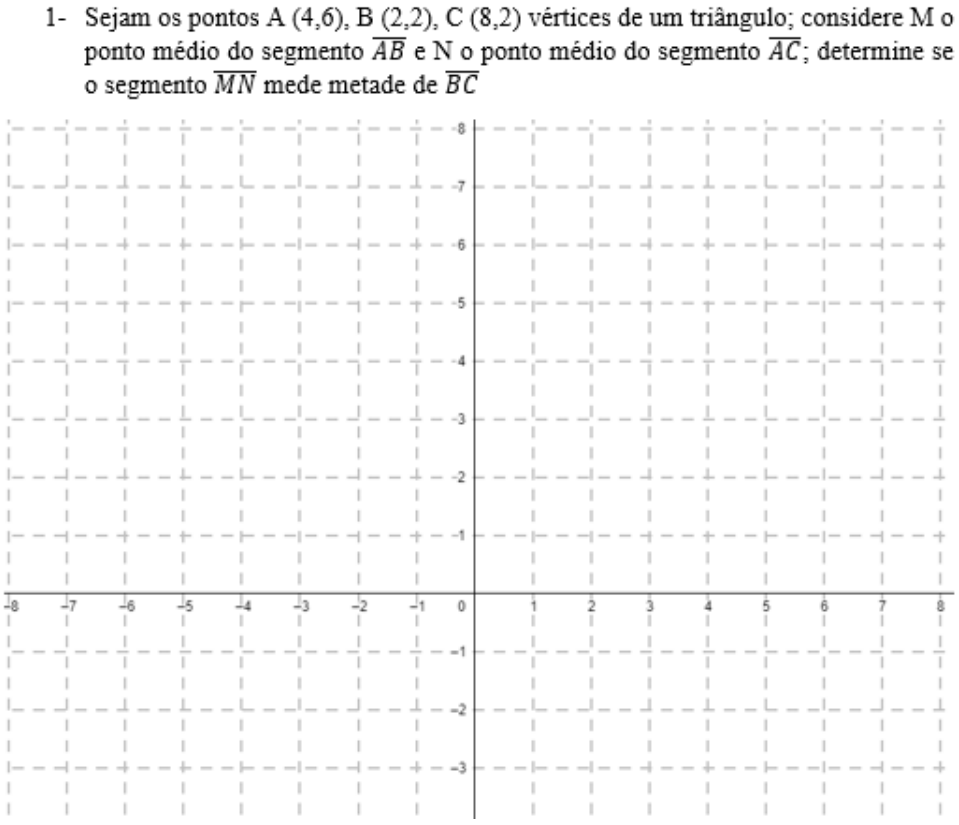
O segundo encontro selecionado foi mais prático, pois se iniciou pela atividade e, logo após, houve uma discussão. Além disso, foi um dos objetivos de o encontro poder trabalhar com os sujeitos os conceitos apresentados no Quadro Teórico, permitindo conectar o que foi trabalhado nas atividades com tais conceitos. Também se buscou, através de uma breve discussão, tentar provocar nos sujeitos a opinião deles sobre a abordagem vetorial, e também sobre a sua (baixa) utilização no Ensino Básico. Tentou-se entender, na ótica deles, o motivo dessa abordagem não ser utilizada.

Roteiro do Encontro Presencial – 22/08/2022: Começar o encontro apresentando a Atividade 3. Coletar as respostas, iniciar a discussão com os sujeitos sobre a atividade. Fazer uma brevíssima recapitulação do que foi visto nos dois encontros anteriores, e, tentar através

dessas lembranças, apresentar os conceitos de Três mundos da Matemática, Registros de Representação Semiótica; debater, na perspectiva dos sujeitos, sobre a presença de vetores no ensino básico; o porquê ele é ausente.

A atividade 3, presente no Apêndice C, busca trazer um exercício que parte de um caso particular para uma demonstração. Nessa atividade temos a oportunidade de discutir a questão da abstração na aprendizagem de matemática. Além disso, é uma atividade que permite apresentar uma nova abordagem para uma demonstração que geralmente é apresentada através dos métodos da geometria Euclidiana. Essa atividade é dividida em partes; a primeira parte da atividade chega pedindo a demonstração da base média. O objetivo dessa primeira parte é tentar verificar se os licenciandos já conhecem a demonstração, e qual estratégia esse licenciando decidiu tomar. A segunda parte apresenta então um caso particular, utilizando como recurso uma malha quadriculada. Não foi exigido o uso de régua para realizar a atividade, mas seu uso foi recomendado.

Figura 8 - Questão 1 da Atividade 3



Fonte: Próprio autor, 2023.

A questão 1 pede para que o sujeito que responde a atividade trace os pontos, forme os triângulos e verificar, da maneira que achar mais interessante, se os segmentos são metade um

do outro. Aqui, a atividade não conduz para que o sujeito necessariamente use uma abordagem vetorial para descobrir essa relação, sendo possível surgirem respostas obtidas através do teorema de Pitágoras, distância entre pontos, entre outros (que, nesse contexto, não são de fato distintas).

Figura 9 - Questão 2 da Atividade 3

2- Com relação aos vetores $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{MN}$, além da relação do módulo, o que mais eles têm em comum?

_____

_____

3- É possível determinar a relação entre os vetores $\overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{BC}$?

4- É possível estabelecer alguma relação entre os vetores $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}$ *e* $\overrightarrow{BC}$? E entre os vetores $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AN}$ *e* $\overrightarrow{MN}$?

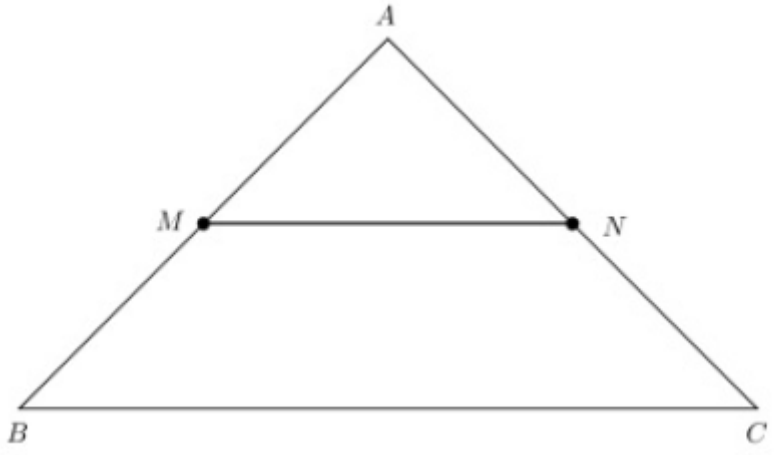
Fonte: Próprio autor, 2023.

O exercício 2 já trabalha com a notação vetorial, que será adotada no restante do exercício. O objetivo do exercício é que o sujeito identifique que os vetores possuem mesma direção e mesmo sentido; o exercício 3 é parecido com o anterior, permitindo ampliar a resposta através de uma representação em um registro diferente; a opção para isso é perceptível na ausência de linhas para a resposta, sugerindo um RRS diferente da anterior; o objetivo é estabelecer o fato de que, devido a possuírem a mesma direção, um vetor é múltiplo do outro, e, dessa forma, um vetor é paralelo ao outro

Na quarta questão, o objetivo é que os licenciandos identifiquem que os vetores $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{MN}$ são vetores obtidos através da soma dos vetores anteriores. Porém, a questão não direciona para isso, possibilitando que o sujeito encontre diferentes relações.

A quinta questão retoma então ao problema da demonstração, sugerindo que ela seja realizada através da abordagem vetorial. Se o sujeito conseguiu entender as relações entre as somas vetoriais e as demais relações apresentadas nas questões 4, 3 e 2, existe uma chance de que, ao tentar fazer a demonstração na questão 5, o sujeito caminhe em direção a generalização e a abstração para conseguir demonstrar o que se pede. Uma das possíveis demonstrações pode ser observada na imagem a seguir:

Figura 10 - Triângulo ABC (segunda atividade)



Fonte: Rigonatto (2018)

Vamos considerar os vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}$; é possível compreender que $\overrightarrow{AM}$ é versor de $\overrightarrow{AB}$, assim como $\overrightarrow{AN}$ é versor de $\overrightarrow{AC}$, de maneira que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; conclui-se então que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$ é $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AN}$; analisando a figura, podemos notar que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, onde $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$; de maneira análoga, podemos entender que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$, onde $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AM}$; com isso, temos o seguinte: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \rightarrow \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \rightarrow \overrightarrow{BC} = -\left(2\overrightarrow{AM}\right) + 2\overrightarrow{AN} \rightarrow \overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AN} \rightarrow \overrightarrow{BC} = 2\left(-\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\right) \rightarrow \overrightarrow{BC} = 2.\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}\right) \rightarrow \overrightarrow{BC} = 2.\overrightarrow{MN} \therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

As duas últimas questões, como em todas as atividades preparadas para serem empregadas durante os encontros dessa pesquisa, são de caráter avaliativo da atividade; A sétima pergunta busca saber se os futuros professores utilizariam esse tipo de demonstração durante o Ensino Básico, e o porquê. A sexta questão é elaborada com o objetivo de tentar entender qual é a maior dificuldade que a atividade apresenta; aqui, como a resposta é discursiva, qualquer resposta pode emergir dos sujeitos. Portanto, é um prato cheio ao pesquisador, pois pode indicar que a dificuldade vem de identificar as relações vetoriais, o que pode abrir excelentes margens para discussão da compreensão que os licenciandos num geral possuem sobre a abordagem vetorial e os impactos que tais dificuldades podem trazer.

Apesar da atividade ter como objetivo geral trazer a abordagem vetorial como método para uma demonstração, ela não tem o intuito de ser tão direta com relação ao seu objetivo, como pode ser visto na primeira parte da atividade e na questão 1. Porém, a intenção é de que

eventualmente, o participante que realiza a atividade se sinta confortável e faça uso em algum momento da abordagem vetorial para concluir a atividade.

3.6.3 Questionário Final

O segundo questionário foi construído com a função de atuar como um instrumento de avaliação das atividades apresentadas aos alunos, e sobre o êxito da pesquisa. Dividida em cinco questões, coletou, no ponto de vista dos sujeitos, o que eles pensam da abordagem vetorial, se eles acreditam que uma abordagem vetorial no Ensino Básico poderia ter feito diferença na aprendizagem deles, se as discussões que ocorreram nos encontros o influenciariam a utilizar a abordagem vetorial, se é possível a utilização da abordagem vetorial no Ensino Básico, e o motivo de não ser muito utilizada tal abordagem. O questionário também foi planejado para ser inicialmente aplicado de maneira presencial, ao final do terceiro encontro, porém, pelos mesmos motivos anteriormente explicados na sessão sobre o Questionário 1, optou-se por conduzir o questionário de maneira virtual, através do Google Forms. A íntegra do Questionário Final pode ser encontrada no Apêndice D.

3.7 **Sujeitos da Pesquisa**

Como a participação dos licenciandos não foi regular em todas as etapas propostas pelo trabalho de campo, se faz necessário descrever os sujeitos da pesquisa.

Foram determinados, dentro da turma de 11 participantes, três indivíduos, P3, P6 e P11, como sujeitos da pesquisa. A opção da escolha pelos três indivíduos se justifica pela possibilidade de realizar um bom acompanhamento dos dados, uma vez que os três participaram dos dois encontros escolhidos para a análise dos dados, além de responderem aos questionários. Para uma melhor aproximação dos sujeitos com a pesquisa, não utilizaremos mais as siglas P3, P6 e P11, e sim nomes fictícios, respeitando os gêneros de cada um: Felipe, Luciana e Rafael.

Conscientes de todas as características e limitações presentes na pesquisa, no capítulo a seguir apresentaremos o relatório de como foi desenvolvido o trabalho de campo e a etapa de coleta de dados da pesquisa,

4 DESENVOLVIMENTO

Este capítulo tem o objetivo de descrever e discutir o trabalho de campo realizado durante as aulas da disciplina de Práticas Pedagógicas em Matemática II (PPM2). As etapas, descritas detalhadamente no capítulo "Metodologia", começaram a ser colocadas em prática a partir do dia 25/07/2022, quando a Drª Profª Gabriela dos Santos Barbosa solicitou que eu fosse adicionado ao grupo de troca de mensagens da turma, que era realizado pelo aplicativo *Whatsapp*, principal meio de comunicação entre os licenciandos e a Professora; no mesmo dia, foi enviado o link com o *Google Forms* contendo o questionário 1 para que os licenciandos pudessem responder; o primeiro encontro ocorreu no dia 01/08/2022; o segundo encontro ocorreu no dia 15/08/2022; o terceiro encontro ocorreu no dia 22/08/2022. A coleta dos dados do último questionário permaneceu até o dia 05/09/2022. Por motivos de respeito as identidades de cada sujeito participante da pesquisa, não iremos expor os nomes dos participantes; para que haja então uma identificação de cada participante, adotou-se então os nomes fictícios de Felipe (P3), Luciana (P6) e Rafael (P11).

4.1 Questionário 1

O questionário 1 foi respondido por 10 dos 11 licenciandos inscritos na disciplina. Foi a etapa do trabalho de campo que possuiu a maior adesão entre os participantes. Foram levantadas informações pessoais sobre os sujeitos e sobre o contato e opiniões que os sujeitos poderiam ter sobre o conteúdo de vetores. Conforme o que foi determinado no capítulo anterior, vamos analisar as respostas apenas de Felipe, Luciana e Rafael.

4.1.1 Informações pessoais

Além dos nomes, foram questionados a idade, a identidade de gênero, qual o bairro e o munícipio que os sujeitos moram, qual o período da graduação, se possui outra graduação, se pretende seguir a carreira de professor, e, caso contrário, qual outra carreira gostaria de seguir. Vamos analisar as respostas a partir da segunda pergunta.

Pergunta 2 – "Qual é a sua idade?":

A idade dos sujeitos varia entre 21, para Felipe, 27 para Rafael, e 49 para Luciana.

Pergunta 3 – "Qual é a sua Identidade de Gênero?":

Rafael e Felipe se declaram como Homens. Luciana se declara como Mulher.

Pergunta 4 – "Em qual bairro e município você reside?":

Ao ser perguntado sobre o bairro e o município em que os sujeitos residem, Felipe respondeu "Riachuelo, Rio de Janeiro", bairro localizado na Zona Norte da cidade. Luciana respondeu "Tijuca, Rio de Janeiro", bairro também da Zona Norte da cidade, bairro vizinho ao local onde foi desenvolvido os encontros presenciais, de grande extensão territorial. Rafael respondeu "Bangu, Rio de Janeiro", bairro localizado na Zona Oeste da cidade, sendo considerado um bairro que não é próximo do local onde os encontros presenciais ocorreram. A pergunta sobre moradia é importante para conhecer o perfil do licenciando, e serve como indicativo que, de fato, a UERJ, no papel de Universidade pública, possibilita o acesso do ensino superior entre membros periféricos do Estado do Rio de Janeiro, e que o Ensino Superior gratuito e de qualidade não é exclusividade das elites.

Pergunta 5 – "Em qual período da graduação você se encontra?":

Visando ter conhecimento da trajetória dos licenciandos dentro da Licenciatura em Matemática, o período de graduação ajuda a ter uma singela noção de algumas disciplinas que os licenciandos já cursaram enquanto inscritos na disciplina de PPM2. A disciplina de PPM2 só possui como pré-requisito Prática Pedagógica em Matemática I, e pode ser cursada a partir do 2° semestre. Os licenciandos que estivessem no 2° período poderiam ainda não ter tido contato suficiente com algumas disciplinas que, dentro da sua ementa, possibilitariam o contato com a abordagem vetorial, como Cálculo II e Cálculo III, Álgebra Linear I, entre outros. O retrato dos participantes da pesquisa sugere um grupo com períodos distintos, e, levando em consideração o tempo recomendável para concluir a graduação (10 períodos), se encontram do meio para o final da graduação: Felipe se encontrava no 5° período, Luciana se encontrava no 7° período e Rafael se encontrava no 9° período. Analisando os resultados, não seria exagerado concluir que houve algum contato com vetores, pelo menos no Ensino Superior.

Pergunta 6 – "Possui alguma outra formação de nível superior?":

Aqui, além de tentar conhecer melhor o perfil do licenciando, essa pergunta poderia ainda garantir que, dependendo da graduação em questão, o licenciando tivesse contato com vetores. Dentre todos os sujeitos da pesquisa, todos indicaram estar cursando sua primeira graduação.

Pergunta 7 – "Pretende seguir a carreira de professor de matemática?":

A pergunta descrita acima é fundamental para a pesquisa: se os licenciandos tinham a intenção de seguir carreira de professor de matemática. A pergunta pode parecer boba, uma vez que é esperado que os graduandos que cursam Licenciatura possuem esse interesse; porém, alguns dados nos mostram que a faculdade de matemática é uma das faculdades que tem o

maior número de desistências[18]; garantir que os licenciandos querem de fato ser professores é um indicativo de que há o desejo de conclusão; além disso, existem ainda os que fazem uma graduação apenas para fins de critérios para concursos públicos, entre outros. Também é importante enfatizar que essa pesquisa foi planejada para ter como sujeitos futuros professores de matemática, e, mesmo que ainda fossem considerados os dados daqueles que não pretendiam seguir essa carreira, certamente a discussão giraria mais ao entorno dos que de fato desejam seguir a carreira indicada. Levando tudo o que foi dito anteriormente em consideração, todos os participantes do questionário responderam que pretendem seguir carreira de professor de matemática.

Pergunta 8 – "Caso você não deseje seguir carreira de professor de matemática, qual é a carreira que você tem em mente para o futuro?": Essa pergunta foi destinada para aqueles que, caso não tivessem interesse em ser professor de matemática, ainda pudesse colocar qual a ideia de carreira que tinham em mente. A única resposta obtida foi 'também carreira acadêmica', dada por Luciana, indicando que, além de professora de matemática, a carreira acadêmica é uma possibilidade de futuro, conduzindo as duas carreiras de maneira conjunta, uma realidade cada vez mais comuns para os professores de matemática no Ensino Básico.

Os quadros 8 e 9 abaixo trazem os dados pessoais coletados de maneira organizada, permitindo uma análise interseccional dos dados para futuras discussões:

Quadro 8 - Idade, Gênero, Período da graduação e bairro onde os sujeitos estabelecem moradia

Licenciando	Idade (Anos)	Gênero (Feminino/Masculino)	Período	Bairro (Cidade)
Felipe	21	M	5°	Riachuelo (Rio de Janeiro)
Luciana	49	F	7°	Tijuca (Rio de Janeiro)
Rafael	27	M	9°	Bangu (Rio de Janeiro)

Fonte: Próprio autor, 2023.

[18] Dados da reportagem do Poder 360; disponível em: https://www.poder360.com.br/governo/universidades-federais-tem-evasao-de-15-em-2018/

Quadro 9 - Perfil da trajetória acadêmica e profissional dos sujeitos

Licenciando	Outra Graduação (Sim/Não)	Pretende ser professor (Sim/Não)	Pretende outra carreira (Sim/Não)
Felipe	N	S	N
Luciana	N	S	S
Rafael	N	S	N

Fonte: Próprio autor, 2023.

4.1.2 Informações Técnico-científicas

A segunda parte do questionário foi dedicado a coletar informações sobre o contato que os sujeitos da pesquisa tiveram com a abordagem vetorial. Foram realizados 8 questionamentos, cujo resultados serão expostos a seguir

Pergunta 9: "Você já teve contato com o conteúdo de vetores durante sua trajetória estudantil?":

Na primeira pergunta dessa sessão, nenhuma surpresa; todos os sujeitos responderam positivamente à essa questão. Isso era esperado, uma vez que pelo período da graduação, todos os sujeitos já passaram pelo menos pela disciplina de Geometria Analítica na graduação, cujo a ementa da disciplina [19]garante que a abordagem utilizada é a vetorial: "Sistemas de coordenadas. Transformações de coordenadas. Vetores: tratamento geométrico e algébrico. Produto Escalar. Produto Vetorial. Produto Misto. Estudo da Reta. Estudo do Plano. Distâncias. Cônicas superfícies quádricas".

Pergunta 10 – "Em qual (quais) nível (níveis) de Ensino você teve contato com o conteúdo de vetores?":

Esse questionamento tentou mapear em qual etapa a abordagem vetorial se fez presente no Ensino dos sujeitos; como opções de respostas, o sujeito poderia marcar mais de uma opção entre Ensino Fundamental, Ensino Médio, Ensino Superior e Não tive contato. A opção por poder marcar mais de uma resposta é evidente, uma vez que há a possibilidade de que o contato com a abordagem vetorial tenha ocorrido em mais de uma etapa de Ensino. Dentre as respostas obtidas, nenhum licenciando marcou as opções 'Ensino Fundamental' e 'Não tive contato'; Todos os sujeitos marcaram "Ensino Médio" e "Ensino Superior" simultaneamente, indicando que seu contato com vetores vem desde o Ensino Básico.

[19] Disponível em: https://www.ementario.uerj.br/ementa.php?cdg_disciplina=9323

Pergunta 11 – "Em caso de contato com vetores no Ensino Fundamental/Médio, o contato se deu em qual (quais) assunto(s)?":

Essa questão, discursiva, buscava tentar identificar em qual área do conhecimento os sujeitos tiveram a oportunidade de trabalhar com vetores na matemática desde antes do Ensino Superior.

Luciana: *"Em mecânica, na disciplina de Física, para indicar as forças que atuam num corpo, por exemplo."*

Felipe: *"Física - introdução aos vetores"*

É interessante que, corroborando com tudo o que foi trabalhado na introdução, conforme o que diz Lages et al (2001) e Patrício (2011), é muito raro ver o ensino de vetores ser realizado no Ensino Básico em matemática; tanto que, de 3 sujeitos, nenhum cita essa possibilidade. Vale destacar que a resposta 'geometria' é interessante, pois, conforme aquilo trabalhado por Bittar (2013), em outros países, é comum ter um contato com vetores em geometria ainda no Ensino Fundamental.

A resposta de Rafael fugiu levemente do objetivo do questionamento:

Rafael: *"Módulo, direção, sentido, soma, subitraçao, ângulo e etc."*

A resposta de Rafael indica que a questão, do jeito que foi colocada, pode ter sido ambígua, e o sujeito respondeu os assuntos sobre vetores que ele teve no Ensino Básico, apesar de, o termo "O contato se deu em qual (quais) assunto (assuntos)" indica, na intenção do pesquisador, em quais assuntos do Ensino Básico os sujeitos tiveram contato com vetores, e não quais os assuntos de vetores que os sujeitos tiveram contato no Ensino Básico. O sujeito então destaca que nessa etapa de Ensino, aprendeu conceitos básicos; a frase concluída em 'etc' não nos permite saber com precisão os conceitos sobre vetores que ele viu, como, por exemplo, decomposição vetorial.

Como não temos precisão sobre quais áreas do conhecimento Rafael trabalhou com vetores no Ensino Básico, concluímos que pelo menos 2/3 dos participantes não tiveram contato com a abordagem vetorial em Matemática nessa etapa de ensino.

Pergunta 12 – "Em caso de contato com vetores no Ensino Superior, o contato se deu em qual (quais) disciplina(s)?":

Felipe: *"GA"*

Luciana: *"Geometria Analítica"*

Rafael: *"Geometria analítica"*

Todos os sujeitos fizeram menção à disciplina de Geometria Analítica (GA seria a sigla para a disciplina). Patrício (2011) nos lembra que essa disciplina, geralmente ofertada no 1°

período de graduação em Licenciaturas de Matemática, causa muito impacto nos licenciandos. Era de se esperar que ela aparecesse nas respostas.

Pergunta 13 – "Na sua compreensão, o conteúdo de vetores é: de Fácil compreensão, Média compreensão ou Difícil compreensão":

Todos os sujeitos responderam essa questão objetiva, onde todos responderam "Média compreensão". Uma coisa, porém, martelou a minha cabeça apenas após as coletas dos dados: Por que obtivemos essas respostas? O que ocorreu na trajetória de cada um dos sujeitos para que nenhum deles considerasse o conteúdo de fácil compreensão? O que eles de fato consideravam como 'conteúdo de vetores'?

Mesmo não tendo esses questionamentos no formulário, o que me fez pensar que, do ponto de vista de pesquisador, isso foi uma falha gigantesca (pois a curiosidade se manteve latente até o momento de produção desse trabalho), ainda é possível tentar conjecturar algumas coisas. Como a maioria das respostas da questão anterior fez referência a Geometria Analítica, é capaz de que muitos considerem o conteúdo de vetores totalmente relacionado com essa disciplina; Rigonatto (2014), conforme já citado anteriormente, nos fala que essa disciplina causa muito impacto nos licenciandos. Portanto, essa conjectura nos faz perceber que essa disciplina pode ser responsável pela visão que os licenciandos tem sobre vetores. Além disso, vetores tem tantas aplicações em outras disciplinas, que por ter tantos desdobramentos, pode parecer que seu conteúdo é demasiadamente grande, o que o impede de ser considerado fácil pela grande maioria.

Pergunta 14 – "Você é capaz de definir vetor sem nenhum material para consulta? Se sim, defina vetor com suas próprias palavras":

Todos os sujeitos responderam a essa questão.

Rafael: *"Sim, uma semirreta orientada que tem módulo direção e sentido"*

A resposta acima se aproximou ou tenta se aproximar do conceito clássico de vetores. Rafael, apesar de ter citado corretamente as características de um vetor, utilizou 'semirreta', na sua definição, ao invés de "segmento de reta". Uma semirreta tem um ponto determinando sua origem, mas não tem um ponto determinando seu fim, o que não possibilitaria definir corretamente o módulo do vetor.

Luciana: *"Vetores indicam direção, sentido e grandeza de uma medida."*

Felipe: *"Representa grandezas vetoriais com sentidos e direções."*

Essas respostas são interessantes, pois indicam associações dos vetores com outros conceitos. Luciana associam vetores com medidas, e Felipe, com grandezas vetoriais, muito estudadas, principalmente, na Física. Compreender que conceitos matemáticos estão

relacionados entre si e com conceitos de outras disciplinas pode ser muito útil para a aprendizagem matemática, como podemos encontrar no trabalho de Assemany (2018). Ainda assim, é importante relembrar que os vetores existem como objetos matemáticos, e, como todo objeto Matemático, ele é abstrato e cumpre uma função importante para a Matemática como uma linguagem (DUVAL, 2009).

Além disso, toda tarefa de definição de um conceito ou de um objeto matemático, mesmo quando realizado pelas suas próprias palavras, trabalham com atividades cognitivas presentes na teoria dos Registros de Representação Semiótica. Há um esforço de se apropriar de um objeto matemático e, através da atividade de *formação*, descrever os vetores na língua materna do sujeito. As respostas descritas acima são exemplos de *formação*.

Pergunta 15 – "Qual é a sua opinião sobre como deve ser feito o ensino de vetores?":

Todos os participantes responderam essa questão. Vamos detalhar cada resposta a seguir:

Luciana: *"Imagino que o ensino Matemática pode contribuir para o entendimento de vetores no ensino médio. O professor pode tratar do tema usando exercícios introdutórios voltados especificamente para vetores."*

A resposta acima indica que vetores devem ser, de alguma maneira, introduzidos no Ensino Médio. Isso pode indicar que ela tem uma visão que se assemelha com o que o *Livro Aberto* propõe: tratar do tema com exercícios introdutórios voltados para vetores.

Rafael: *"Para boa introdução, definir, caracterizar (propriedades e dimensões) e exemplificar o que são vetores é fundamental para bom entendimento da matéria"*

Felipe: *"De forma ligada à matemática, tentando tornar o aluno mais próximo desta temática."*

Mesmo sem identificar em qual etapa de Ensino, Felipe é enfático em dizer que o ensino de vetores deve ser realizado de forma ligada à matemática, reivindicando a abordagem vetorial para a disciplina ao qual ela faz parte. Já Rafael acredita que o ensino de vetores precisa passar por sua definição, características e exemplificações para se compreender a matéria, optando por uma abordagem mais tradicional.

De acordo com as palavras de Rafael, vemos que ele considera que a introdução de vetores, através de definições, propriedades, dimensões, e exemplos, evoca uma noção de que os Três Mundos da Matemática devem estar presentes na abordagem vetorial. Dentro do mundo *Conceitual – Corporificado*, podemos realizar as exemplificações da ideia de vetor e até mesmo

as características; dentro do mundo *Proceitual – Simbólico*, as definições e algumas características também.

Pergunta 16 - "Em qual/quais nível/níveis de Ensino você acredita que o ensino de vetores deve ser abordado?":

Todos os participantes responderam à questão. Essa questão, de caráter discursivo, deixava a opção para que o licenciando pudesse dar mais de uma resposta. Porém, um dado relevante é o de que nenhum dos participantes considerou que o ensino de vetores deve ser abordado exclusivamente no Ensino Superior. Vamos as respostas:

Luciana: *"Ensino Fundamental sem a formalização e Ensino Médio usando conceitos e exercícios introdutórios."*

Felipe: *"Fundamental 2"*

Rafael: *"Ensino médio a faculdade"*

A resposta de Luciana e de Felipe parece ser condizente com o que Bittar (2013) relata que ocorre na França: as noções de vetores são apresentadas, desde o Ensino Fundamental, junto com geometria. Não há necessidade de se realizar uma formalização dos conceitos nos primeiros contatos, de acordo com Luciana, e essa etapa pode ser realizada no Ensino Médio. Já Rafael cita que deve começar no Ensino Médio, para facilitar a transição para o Ensino Superior, dando uma boa base aos estudantes, corroborando com os estudos de Nasser, Sousa e Torraca (2012), Nasser, Vaz e Torraca (2015), Patrício (2011) e Rigonatto (2018).

É interessante, do ponto de vista da pesquisa, buscar compreender o que os futuros professores de matemática pensam sobre a abordagem vetorial no Ensino. É um consenso, entre os participantes da pesquisa, que a abordagem não pode ser exclusiva do Ensino Superior. Apesar de Rafael ter uma pequena divergência com relação à etapa de Ensino com relação aos seus colegas, há um acordo de que há, de fato uma necessidade de que a abordagem vetorial seja apresentada antes do que ela tem sido comumente apresentada aos estudantes.

Apesar de concluirmos que os sujeitos participantes concordam com relação a antecipação da abordagem vetorial no Ensino de Matemática, não é possível conhecer a motivação que tais licenciandos tem para que essa antecipação ocorra. Talvez, faltou refinamento e objetividade na hora de formular a pergunta, pedindo que os participantes justificassem, se possível, a sua opinião. A resposta de Rafael talvez nos traga uma justificativa do pensamento dele: forrar uma base para o Ensino Superior. Como já discutido anteriormente nesse trabalho, entendemos que isso é muito importante, mas, como visto em Giraldo (2018), essa não deve ser a única preocupação do Ensino de Matemática; portanto, como temos tantos respaldos teóricos nos Três Mundos da Matemática e Registros de Representações Semióticas,

a antecipação da abordagem vetorial no Ensino de Matemática, sendo apresentada ainda no Ensino Básico, garante um desenvolvimento epistemológico que pode ser fundamental para o desenvolvimento como ser humano, indivíduo, cidadão.

Além disso, temos, na resposta de Luciana, uma defesa de que o primeiro contato que os alunos do Ensino Fundamental têm com a abordagem vetorial não deve ser realizado de maneira formalizada. Analisando essa resposta, podemos dizer que essa opinião implicaria que os professores de Matemática, ao conduzir esse primeiro contato, podem se utilizar do Mundo *Conceitural – Corporificado*, além de buscar diferentes Registros de Representações Semióticas que não trazem a formalização. Para isso, é preciso entender o que Luciana entende como formalização; se, para ela, formalização é trazer a definição do que é vetor no quadro, não se deve escolher a língua materna, tampouco exercer a atividade de *formação* dentro do registro algébrico. Nada impede, porém, de se realizar representações dentro do registro geométrico.

É interessante notar que, pelo menos para os participantes da pesquisa, não parece que, caso um dia se deseje que a abordagem vetorial seja introduzida desde o Ensino Básico, que esses futuros professores precisarão ser convencidos ou terão que dar o braço a torcer. Muito pelo contrário, todos consideram que deveria ser dessa maneira, inclusive. É possível que, ao apresentar uma proposta metodológica para que, quem sabe, seja incorporada para a prática professoral desses futuros colegas, eles não tenham resistência com relação a isso.

Com todos os dados do Questionário 1 devidamente discutidos, o trabalho de campo prossegue para as etapas seguintes, referentes aos encontros presenciais

4.2 **Encontro presencial – 01/08**

O primeiro encontro presencial aconteceu no dia primeiro de agosto, no campus Maracanã da UERJ. Marcado para começar às 18:00 e tendo o horário máximo para o término às 19:30, os encontros ocorreram sob a supervisão da Profª Drª Gabriela dos Santos Barbosa. O primeiro encontro iniciou com um pequeno atraso de aproximadamente 15 minutos, devido à sala onde seria realizado o encontro ainda não estava aberta para o acesso dos participantes. Assim, oficialmente às 18:15 do dia 01/08/2022, se deu início ao primeiro encontro presencial com os sujeitos da pesquisa.

A adesão dos sujeitos foi baixa. De início, apenas dois licenciandos estavam presentes. Consultou-se então a Professora Gabriela, ao qual se fez a opção de esperar a presença de pelo menos mais um licenciando antes de iniciar a conversa e a atividade prevista. Após a chegada

de mais um licenciando, começou a roda de conversa. Como a adesão dos sujeitos foi baixa, não fazia sentido manter a mesma estrutura planejada para um encontro com 11 sujeitos (ou algo próximo a isso). Portanto, optou-se por, ao invés de se dirigir à frente da turma ou ao quadro, de se fazer uma pequena roda de conversa inicial, sem precisar me levantar, nem nada do tipo. Estavam presentes Felipe, Luciana e Rafael.

A conversa iniciou pela apresentação pessoal. Foi descrito quem era o pesquisador, qual o motivo de ele estar ali e o que pretendia ser realizado naquele dia; também, como estávamos em poucas pessoas, a trajetória estudantil do pesquisador foi apresentada, o que fez surgir a curiosidade nos sujeitos presentes. Felipe e Rafael não tinham ouvido falar sobre a FEBF, unidade da UERJ localizado no município de Duque de Caxias. Então, a conversa se direcionou brevemente sobre as diferenças e semelhanças entre os cursos de Licenciatura ofertados no Maracanã e na FEBF. Luciana, entretanto, sentiu maior curiosidade com relação ao Mestrado, PPGECC. Foi relatado um pouco sobre o programa, o que faz um pesquisador/mestrando, e como se dá o acesso a uma vaga de estudante de mestrado. Isso foi interessante, mas não inesperado, uma vez que já era de conhecimento do pesquisador que Luciana possuía interesse em também seguir uma carreira acadêmica.

Após esse período de conversas, foram direcionados questionamentos sobre vetores para os licenciandos. Perguntou-se "O que vocês entendem como vetores?"; ao qual, surgiu a resposta sobre 'segmento orientado que possui módulo, direção e sentido'; após, questionou-se os sujeitos acreditavam ser possível uma abordagem vetorial em etapas do Ensino Básico. Luciana disse que sim, desde que fossem aplicados bons exemplos do que se tratava vetor. Por isso, foi levantado que conhecer o que as pessoas entendiam sobre vetores é essencial para que se compreenda o conceito. Portanto, começou-se a trabalhar a ideia de vetor com os licenciandos, desde o significado da palavra e sua raiz do latim, até as situações em que se torna possível identificar vetores. Definiu-se então vetores como os conjuntos de todos os segmentos orientados com mesmos módulo, direção e sentido, e, que como vetor vem da palavra *vector*, que significa condutor, um vetor $\vec{v}$, que conduz o ponto A até o ponto B, pode então ser, através de abuso de notação, ser descrito como $A + \vec{v} = B \rightarrow \vec{v} = B - A$. Toda a parte relatada anteriormente foi feita utilizando como auxílio o quadro branco.

Após isso, foi comentado com os licenciandos que, apesar de ser fácil de compreender o sentido de vetores dentro da matemática, existem situações que não necessariamente são restritas à Matemática em que se pode usar o conceito de vetores. Apresentou-se uma imagem, já mostrada anteriormente nesse trabalho (Figura 2), onde era possível identificar as características vetoriais numa situação relacionada com metereologia; também, era possível

trabalhar os conceitos de vetores de maneira mais simples, usando ideias básicas de deslocamento e noções de geografia.

Com esse gancho, foi introduzida a Atividade 1 para os Licenciandos. Como o tempo já estava avançado devido aos atrasos e mudanças no roteiro do encontro, permitiu-se que os licenciandos presentes realizassem a atividade em, no máximo, 20 minutos, para que ainda sobrasse algum tempo para discutir as respostas com os colegas. A seguir, vamos expor e discutir as respostas provenientes da Atividade 1.

4.2.1 Atividade 1

Por motivos de evitar repetição, não vamos colocar a figura 8, mesmo entendendo que ela se faz necessária para responder as perguntas da atividade. Contamos com a colaboração do leitor, uma vez que a Atividade 1 está na integra no anexo, e as questões já foram apresentadas no capítulo de Metodologias. Vamos nos dedicar a colocar apenas o enunciado e as respostas.

Pergunta 1 – "Supondo que o grupo presente na estação de pesquisa receba um comunicado informando que há um outro grupo de pesquisadores que necessita de socorro, seria possível localizar o grupo que precisa de socorro apenas com a informação de que eles se encontram à 10 quilômetros de distância? Por quê?":

Felipe: *"Sim, pois eles se encontram há 10 km em alguma direção/sentido, portanto é possível"*

Luciana: *"Não seria possível localizá-los, porque existem infinitos pontos em torno do ponto A que distam 10 km."*

Rafael: *"Não, pois sabendo apenas o módulo (distância) sem saber o sentido e a direção fica difícil identificar onde estão"*

As respostas acima transcritas são ricas em informações. Para o propósito da atividade, que busca estabelecer uma introdução à noção de vetores e às suas características, a resposta de Rafael é adequada o suficiente, pois, de fato, essa é maior dificuldade representada pela questão: não ter uma direção para seguir, e apenas a distância. Nesse sentido, a resposta de Luciana vem complementando e justificando o porquê de ser tão difícil de localizar o grupo, apresentando o princípio geométrico de que uma circunferência possui infinitos pontos (mesmo que a licencianda não tenha escrito diretamente nessa resposta que se trata de uma circunferência). Pensar em conceitos matemáticos em situações não necessariamente descritas dentro de registros usualmente usados no estudo de Matemática (como o registro algébrico, geométrico

etc.), caracteriza uma compreensão da situação Matemática dentro do mundo *Conceitual – Corporificado.*

A resposta de Felipe é interessante, mesmo apresentando um erro teórico. Acredito que o licenciando estava ciente do que foi pedido no exercício e tenha compreendido parcialmente o contexto. Mesmo sabendo que existem infinitos pontos que distam 10 km de A, não é impossível que, dado tempo e recursos, se encontre o grupo que precisa de resgate. Porém, o exercício se refere a uma situação de resgate na Antártica, o que, pelo contexto, demanda urgência, além de geralmente não contar com recursos a bel-prazer dos pesquisadores. Durante o período de discussão da atividade com os sujeitos, Felipe explicou que entendeu, momentos antes do encerramento do tempo proposto para a conclusão da atividade, que de fato, era bastante improvável que fosse possível determinar a localização do grupo que necessita de resgate, e não teve tempo hábil de alterar a resposta. Com isso, não restou dúvida que todos os sujeitos captaram a essência do que foi pedido na primeira pergunta.

Pergunta 2 – "Se tentarmos traçar todas as possibilidades de localização onde o grupo que precisa de socorro está, formaríamos qual figura geométrica?":

Felipe: *"Círculo"*

Luciana: *"Formaríamos um círculo"*

Rafael: *"Um círculo"*

As respostas acima nos mostram que, apesar da confusão comum entre círculo e circunferência, os licenciandos compreenderam corretamente a primeira situação. No rigor da definição, definimos como circunferência o conjunto de todos os pontos que equidistam de um centro definido, enquanto o círculo é definido pela união da circunferência e todos os pontos que estão na região delimitada no interior dela. No período de discussão com os licenciandos, rapidamente eles perceberam a confusão realizada e assumiram que as respostas foram um singelo descuido.

Analisando o erro obtido à luz das Teorias dos Três Mundos da Matemática e do RRS, é possível dizer que houve uma incorreta compreensão da situação ao tentar assimilar conceitos no mundo *Conceitual – Corporificado,* e uma dificuldade na realização de alguma atividade cognitiva. Não se sabe exatamente em qual momento a dificuldade ocorreu; pode ter sido na *conversão* do enunciado para os registros matemáticos; pode ter sido na etapa posterior à *conversão,* pois para descrever corretamente a figura geométrica da circunferência, é necessário o *tratamento* que toma todos os pontos possíveis, sendo ligados e transformados em circunferência, para depois, ter sua *conversão* para a resposta em língua materna. Isso nos mostra que, com tantas atividades cognitivas, um erro entre o processo é compreensível.

Além disso, podemos notar que a resposta, para ser dada de maneira correta, deve levar em consideração as ideias do Mundo *Proceitual – Simbólico*, em que, dependendo do *processo* que se forma a representação da situação, se obtém *conceitos* – características *proceituais* – distintos. Se o sujeito participante da atividade não pensou apenas nos pontos que estão localizados à 10 km de distância da estação, e sim em todos os pontos que estão localizados em até 10 km da estação de pesquisa, o processo de formação representativa é diferente, resultando num conceito equivocado – gerando a resposta "círculo", ao invés de "circunferência"

Pergunta 3 – "Se, ao invés da informação representada anteriormente na questão 1, suponha que o grupo presente na base recebesse a informação de que um outro grupo de pesquisadores precisa de socorro, estando estes localizados à leste da base. Seria possível determinar a localização exata do grupo que precisa de socorro, sem sair da base de pesquisas? Por quê?":

Felipe: *"Não. Pois não haveria uma informação exata da localização"*

Luciana: *"Seria possível localizar com algum grau de precisão, porém não exatamente porque a informação dada configuraria uma região no mapa"*

Rafael: *"Não seria possível determinar com precisão, pois sabendo apenas a direção não dá pra determinar quantos metros estão da base"*

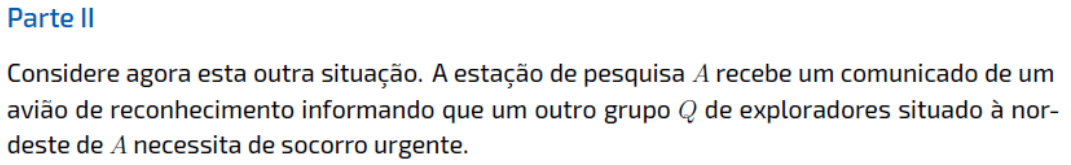
Vamos começar discutindo a resposta de Luciana, que acredita que é possível localizar o grupo com algum grau de precisão, porém não exatamente. A justificativa para isso seria que a informação se referia a uma região no mapa; isso mostra que, talvez tenha ocorrido um mal entendimento sobre a figura geométrica que a situação descreve, ou, uma má *conversão* da representação da situação em língua materna para uma representação geométrica, ou até mesmo, uma má *formação* do processo de resposta e *tratamento* dentro da representação geométrica. Se levarmos em consideração que o enunciado descreve uma semirreta, certamente não corresponde à uma região por não determinar uma área; além disso, comparando com a resposta que Luciana deu na primeira questão, retrata uma incoerência, pois lá houve uma conclusão de que, existindo infinitos pontos que distam do ponto A, não seria possível localizar o grupo que necessita de resgate; nessa situação, em que formamos uma semirreta, também existem infinitos pontos que podem representar o grupo que precisa de resgate. Sabendo disso, durante o período de discussão da atividade, essa questão foi levantada para que Luciana explicasse o seu ponto de vista. A explicação dada por ela foi:

"Olha, é que na verdade, tem que ver o que de fato representa a direção leste"; pedi para ela expandir o pensamento, ao qual ela complementou: "é que leste pode ser uma grande região compreendida entre norte e sul, e precisa ser muito bem delimitada". Respondi que existia uma

rosa dos ventos na atividade, que delimitaria o que seria leste para o enunciado, e, que as regiões que ela se refere seriam o que conhecemos como sudeste, nordeste. Rafael então disse “é, eu também tive esse tipo de dúvida, pois pra mim, a gente poderia dividir a o círculo em 8 partes, encontraríamos as direções e suas divisões, e, que nas regiões entre as divisões, ficaria difícil saber o que é de fato leste, nordeste, etc”. Comentei que esse tipo de precisão de localização só é possível com uma ideia de coordenadas, com latitude e longitude bem definidos, mas, que para o exercício, se basear pela rosa dos ventos seria o suficiente. Luciana então disse que “é, de fato eu entendi isso com o decorrer da atividade, pois ao ler as outras questões, pude perceber a intenção do exercício, mas fiquei com essa dúvida”. Rafael complementou “eu não entendi dessa forma não, e mantive a ideia de uma região, tanto que na questão quatro eu respondi setor circular, pois pra mim isso representaria o Leste real”

De fato, as respostas posteriores de Rafael vão refletir esse pensamento do licenciando. Porém, vamos discutir essas respostas no seu devido tempo. Aqui, vamos tentar refletir as colocações feitas por Luciana e Rafael com relação a pergunta anterior. Como citado no capítulo de Metodologia, a Atividade 1 foi inspirada por uma atividade que pode ser encontrado no *Livro Aberto de Matemática*. Para essa questão, foi realizada uma pequena alteração, justamente na direção que o grupo B se encontra para ser resgatado. A imagem abaixo busca retratar o conteúdo presente na atividade original:

Figura 11 - Enunciado original da pergunta 3 da Atividade 1


Parte II

Considere agora esta outra situação. A estação de pesquisa A recebe um comunicado de um avião de reconhecimento informando que um outro grupo Q de exploradores situado à nordeste de A necessita de socorro urgente.

Fonte: IMPA, 2021

A opção por mudar a direção, de nordeste para leste, foi justamente para que não houvesse confusão na direção representada, uma vez que a rosa dos ventos que a questão traz é uma rosa dos ventos simples, indicando apenas as quatro direções principais. Não passou pela minha cabeça que, durante a atividade, pudesse surgir uma contestação desse nível, e falo isso no sentido positivo, pois me fez pensar muito nessa questão da região. Na hora, me mantive firme de que a direção leste era aquela indicada pela rosa dos ventos, mas concordei que o enunciado poderia ser mais claro, e delimitar que a direção leste era apenas aquilo indicado pela rosa dos ventos. Tanto Luciana, quanto Rafael, concordaram que isso poderia deixar a questão mais direcionada e menos ambígua.

Perguntei, então, o que Felipe achava da discussão; ele respondeu que não teve dúvida com relação a entender a direção, e que se baseou na rosa dos ventos.

Não posso negar que isso levantou uma dúvida sobre essa questão de direção; nos é ensinado, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, que o leste é um ponto cardeal, e que representamos a direção leste pela rosa dos ventos, de maneira que em um mapa, o sentido leste sempre estará naquela direção. Com o surgimento do questionamento por parte dos sujeitos, corri atrás de materiais que pudessem elucidar a questão:

> "O leste (nascente), não pode ser ensinado apenas como "o lugar onde o So1nasce" e o oeste (poente) como o "lugar onde o Sol se esconde". Na verdade, são os pontos da entrada da Terra na luz e/ou sombra do lugar onde o sujeito se encontra, sendo observáveis pela presença do Sol ou pela sua ausência. No entanto, o leste e o Oeste não são pontos. São antes o sentido de que se pode tomar indo na direção do surgimento da luz ou da sombra considerando o sentido do movimento de rotação da Terra que se faz de oeste para leste" (Almeida; Passini, 2015, p. 42, grifo nosso)

Tentando digerir o conceito de leste, nos valendo da parte grifada, temos novamente as representações de direção e sentido, em que a ideia de leste está atrelada ao caminhar na direção da luz do sol sobre a terra, no sentido da luz, e não da sombra. Conclui-se então que, como o referencial correto (luz do sol) não está descrito no problema, a melhor maneira de se basear no que é leste é através da rosa dos ventos da atividade. Portanto, analisando as respostas de Luciana e Rafael, percebe-se que houve uma falha em trabalhar as representações semióticas, principalmente no sentido de *conversão*, ao tentar converter a palavra leste para um registro geométrico.

Quanto as demais respostas das questões, não se faz necessário adicionar muitos comentários; porém, é interessante que a resposta de Felipe estava rasurada no papel da atividade, e ele tinha anteriormente dito que era possível localizar o grupo; isso corrobora o que o próprio havia dito, que, no decorrer da atividade, percebeu alguns erros, e que corrigiu alguns, mas que não houve tempo hábil de corrigir todos (que foi o caso da pergunta 1).

Pergunta 4 – "Se tentarmos traçar todas as possibilidades de localização onde o grupo que precisa de socorro está, formaríamos qual figura geométrica?":

Felipe: *"Uma semi-reta"*

Luciana: *"Formaríamos um círculo"*

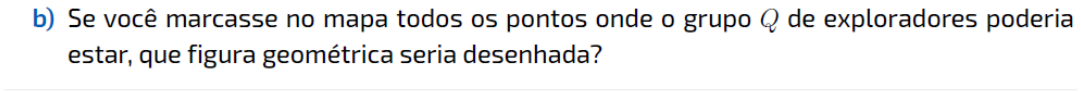
Rafael: *"Setor circular"*

As três respostas, tão distintas, chamaram a atenção; Felipe identificou corretamente a situação; Rafael, após toda a justificativa realizada na durante a discussão, já havia antecipado seu entendimento sobre direção leste e que suas respostas refletiriam isso. A maior surpresa se deu mesmo pela resposta de Luciana. Durante o período de discussão, a licencianda disse que

teve dificuldade de entender que seria uma semirreta pois o enunciado disse ‘figura geométrica’. Em seguida, todos os licenciandos fizeram coro a observação de que o enunciado, ao falar ‘figura geométrica’, causa uma confusão. Perguntei então se, na opinião deles, uma reta, ou semirreta, ou segmentos de reta não podem ser consideradas figuras geométricas. Todos responderam que não poderiam, e então perguntei o que eles imaginam quando pensam no termo figura geométrica. Após um tempo em silêncio, Felipe falou “ah, figuras planas, polígonos”. Também perguntei o que eles entendem que uma reta seria (já que “não é uma figura geométrica”). Eles ficaram calados, pensando, até que Rafael disse ‘é algo mais parecido com uma entidade geométrica’. Respondi que, se ao invés de escrever ‘figura geométrica’, eu tivesse escrito ‘ente geométrico’, eles entenderiam melhor que se trata de uma semirreta, e todos responderam positivamente à pergunta. Rafael disse que, se talvez não tivesse escrito ‘figura geométrica’, ele não teria errado essa questão e o resto da atividade.

Mesmo gostando do termo que surgiu dos licenciandos (Ente geométrico), figura geométrica não é uma expressão errada para caracterizar retas (ou semirretas, ou segmentos de reta); elas só não são usuais. Ao formular a atividade, optei por deixar o termo figura geométrica, que foi um termo utilizado pelo material original:

Figura 12 - Enunciado original de parte da pergunta 4 da Atividade 1



Fonte: IMPA, 2021.

A confusão que surgiu nos licenciandos nos demonstra que há uma dificuldade de separar objeto de representação, e dificuldade de *conversão* ao se deparar com o termo “figura geométrica”, no registro de língua materna, e tentar representar nos registros matemáticos, ficando restritos às figuras planas e polígonos. Como não houve uma diferenciação entre o conceito de figura geométrica e alguns exemplos de suas possíveis representações, isso configurou num déficit de aprendizagem, que poderia ter sido sanado no momento de construção conceitual, nas etapas anteriores de Ensino de Matemática, através de uma utilização consciente de outras representações semióticas para o conceito matemático em questão. Também, podemos analisar que para alguns licenciandos, a ideia de figura geométrica foi formada de maneira equivocada dentro das estruturas de pensamento, se tornando um *já encontrado* que atrapalhou no desenvolvimento correto da resposta da atividade, ou seja, interferindo diretamente no *a encontrar* desejado.

Ainda assim, é compreensível a dúvida que surgiu nos licenciandos, e, se essa dúvida surgiu em licenciandos, pode ser que também surja em futuros alunos do Ensino Básico que eventualmente farão essa atividade. Não descarto, num futuro, ao testar a atividade com estudantes, verificar se essa confusão surge entre eles, e, quem sabe, além de aproveitar a oportunidade para reforçar que retas, semirretas, segmentos de retas e outros também são figuras geométricas, estudar uma alteração no enunciado.

Pergunta 5 – "Se, após a informação da questão 3 ter sido captada, o grupo presente na base recebesse uma nova informação, dizendo que o grupo que precisa de socorro está à 10 km da base na direção leste, seria possível determinar a localização exata do grupo que precisa de socorro? Por quê?":

Felipe: *"Sim, pois haveria uma informação exata da localização"*

Luciana: *"Sim, porque será possível traçar uma reta de medida 10 km na direção leste"*

Rafael: *"Não seria possível determinar com exatidão, pois não há o sentido determinado para localização"*

As respostas acima indicam que o que foi levantado na discussão era real. Felipe, sabendo que agora há uma direção e há uma distância determinada, responde que existe informação exata da localização. Luciana, no decorrer da atividade, entendeu qual era o objetivo que a atividade estava propondo, e, mesmo tendo dúvidas sobre o que seria a 'direção leste', seguiu o princípio da rosa dos ventos e conseguiu identificar a possibilidade de localizar o grupo. Já Rafael se manteve firme na ideia de que o leste é toda uma região do mapa, e se manteve dizendo que não era possível identificar o grupo. O curioso de sua resposta, porém, é dizer que não era possível pois não havia a informação do 'sentido'. Talvez, exista uma confusão no que é direção e no que é sentido. Como é um exercício em que um grupo de resgate sai do ponto A e vai de encontro ao grupo no ponto B, o sentido de um eventual deslocamento será de A para B. Acredito aqui que o licenciando em questão pensa ainda não ser possível localizar o grupo pois, sendo o 'leste real' um setor circular, ainda existiriam muitos pontos que estão a 'leste' e a 10 km do ponto A.

Infelizmente, esse detalhe – do sentido – só foi percebido depois do encontro, enquanto olhava mais atentamente os dados, e não foi possível indagar ao licenciando durante o encontro sobre se de fato havia uma confusão entre direção e sentido, ou se, com 'sentido', o licenciando quis dizer outra coisa.

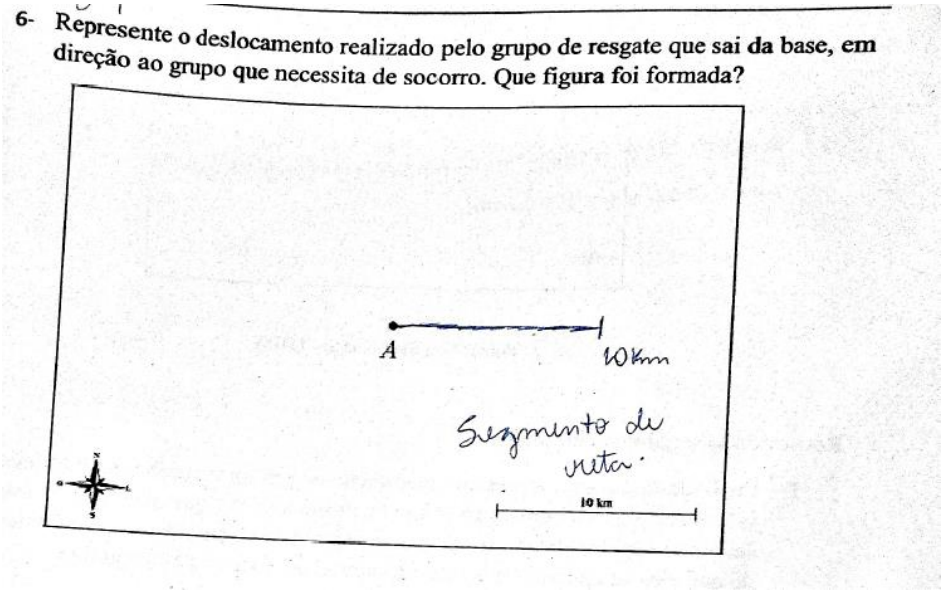
Vale destacar que nessa pergunta, Felipe e Luciana realizaram a atividade de *conversão* de maneira correta, traduzindo o enunciado da língua materna para representações semióticas

matemáticas, para depois novamente traduzir para a língua materna para escrever a resposta. Um detalhe interessante é que Luciana escreveu que era possível "traçar uma reta de medida 10 km", o que indica uma confusão de reta com segmento de reta. Ainda assim, ao contrário do exercício anterior, Luciana deixou de lado o *já encontrado* que a atrapalhou antes, e seguiu em direção ao *a encontrar*.

Pergunta 6 – "Represente o deslocamento realizado pelo grupo de resgate que sai da base, em direção ao grupo que necessita de socorro. Que figura foi formada?":

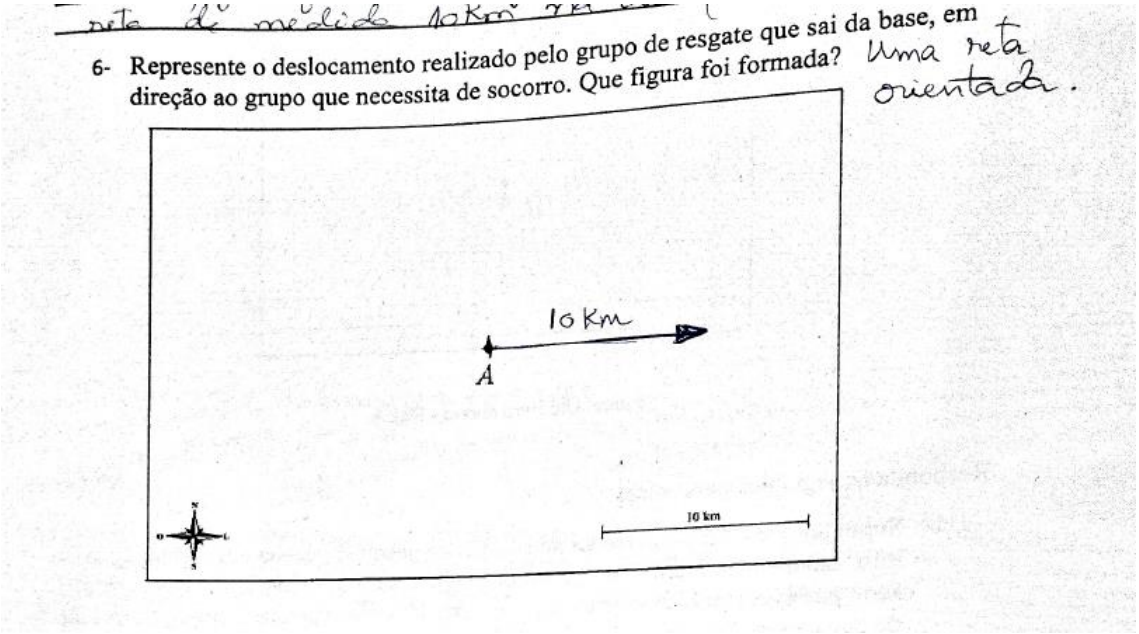
Para que haja uma melhor compreensão do leitor sobre as respostas dos licenciandos, a seguir serão colocadas as figuras que representam as respostas dos participantes:

Figura 13 - Resposta de Felipe à pergunta 6 da Atividade 1



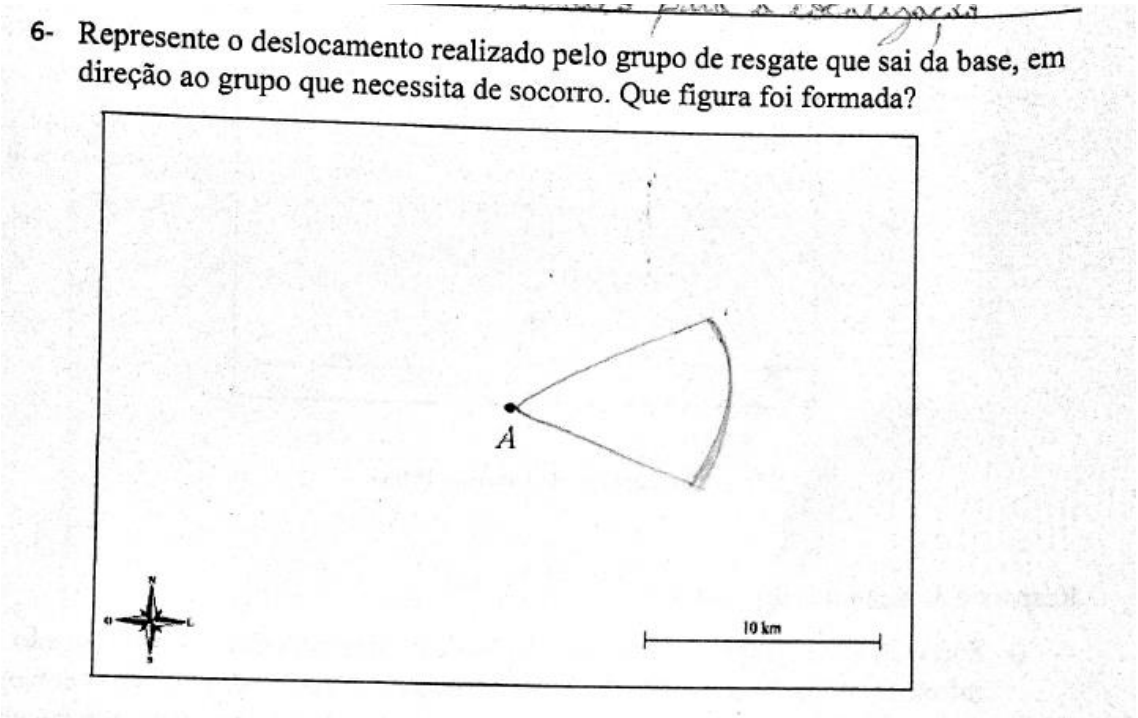
Fonte: Próprio autor, 2023.

Figura 14 - Resposta de Luciana a pergunta 6 da Atividade 1



Fonte: Próprio autor, 2023.

Figura 15 - Resposta de Rafael a pergunta 6 da Atividade



Fonte: Próprio autor, 2023.

Seguindo o que foi apresentado na discussão, Rafael realmente pensou num setor circular, e, dessa maneira, é possível perceber que não há uma tentativa de desenhar um 'sentido' para o deslocamento.

Luciana representa o deslocamento com uma seta, que é uma das formas de representação que um vetor pode ter. A resposta, no sentido da representação através de desenhos, foi correta. O que chama a atenção, porém, é a resposta escrita no canto da imagem: "uma reta orientada". Apesar de ter representado um vetor, ela descreveu a figura como uma reta, que não tem nem início, nem fim, ao invés de responder 'um segmento de reta orientado'. Considerando toda a trajetória de Luciana durante a atividade, não restam dúvidas de que a licencianda sabe que um vetor é um segmento de reta, e não uma reta. Acreditamos ser, novamente, uma pequena confusão nos conceitos, mas não podemos descartar a possibilidade da existência de uma certa resistência em diferenciar reta de segmento de reta.

A resposta de Felipe foi quase correta; mesmo compreendendo o segmento, desenhando na direção leste e simulando ali o comprimento do segmento, faltou determinar o sentido para esse segmento. A pergunta não foi "represente a distância que o grupo B está do grupo A", e sim, "represente o deslocamento realizado pelo grupo de resgate[...]". A falta de sentido faz com que não seja possível caracterizar corretamente o deslocamento. Durante a discussão, Felipe disse ter entendido que se tratava do deslocamento, mas que realmente não deu orientação ao segmento de reta por desatenção, deixando de representar o sentido, o que acarretou num erro.

Podemos destacar que todos optaram por representar o deslocamento geometricamente, o que fornece indícios das atividades cognitivas em ação. Sabemos que o espaço deixado para desenho poderia induzir a isso. Além disso, Luciana e Felipe fizeram a opção de, após representar geometricamente a situação, adicionar o registro de representação semiótica da língua materna, para responder qual figura geométrica havia sido formada, dando mais indícios das atividades cognitivas, o que faz sentido quando analisamos que as características de uma abordagem vetorial permitem que se transite entre registros semióticos distintos.

Além disso, esse exercício traz indícios de uma assimilação do mundo *Conceitual – Corporificado*, pois, através da ideia de deslocamento, produz construção do conceito de segmento orientado.

Pergunta 7 – "Quais as características da figura que representa o deslocamento obtido no exercício anterior?":

Felipe: *"Ao sair da base (ponto A), será percorrido um trajeto de 10 km até o grupo, formando um segmento"*

Luciana: *"A figura possui um tamanho e uma direção"*

Rafael: *"dois lados iguais, ângulo igual ao setor central (parece uma pizza)"*

Das respostas obtidas, nenhuma atingiu totalmente o objetivo da questão, que era de reforçar as características vetoriais. Luciana chegou mais perto, mas não citou o sentido como característica da figura que ela fez (mesmo desenhando o sentido no vetor e escrevendo 'reta orientada'). Rafael buscou descrever características do setor circular, o que pode não ser fácil de fazer de prontidão, sem estudar as características dessa figura geométrica. Felipe teve uma resposta que é, ao mesmo tempo parecida e diferente de Rafael. Ele tenta descrever o que desenhou (que na concepção dele, foi o deslocamento), mas, ainda assim, não conseguiu dar as características da figura que ele fez, talvez por não ter compreendido corretamente o deslocamento; mas, apesar de sua resposta anterior estar incompleta, ele poderia dizer que um segmento de reta tem direção (a direção da reta suporte) e tem início e fim.

Durante a discussão, não havia me atenuado à resposta de Luciana; ao questionar Felipe, ele novamente citou o fato de o enunciado trazer 'figura geométrica' dificultou de entender o que o exercício queria.

Pergunta 8 – "Na sua perspectiva como futuro(a) professor(a) de matemática, você acha plausível utilizar essa atividade com os alunos em sala de aula? Por quê?":

Felipe: *"Sim. É uma atividade simples que consiste no questionamento do aluno sobre a temática de forma bem introdutória"*

Luciana: *"Sim, porque envolve conceitos já conhecidos e utilizados no dia a dia do aluno"*

Rafael: *"Sim, porque [apresenta] novos mecanismos de didática e conteúdo para obter maior significação"*

Todos os sujeitos participantes acreditam que essa atividade seja adequada para ser utilizada em sala de aula. Felipe justifica isso dizendo que é uma atividade introdutória, e Luciana justifica dizendo que, por já serem conceitos conhecidos pelos alunos, não será necessário muito esforço para a realização da atividade. É importante pontuar que, mesmo com todas as dúvidas que surgiram no meio do caminho, os sujeitos aprovaram a atividade.

As respostas de Rafael e Luciana podem ser analisadas através dos Três Mundos da Matemática e da Teoria dos RRS. Quando lançamos mão de conceitos utilizados no dia a dia do aluno, podemos estar estimulando o Mundo *Conceitual – Corporificado*; quando utilizamos de novos mecanismos de didática para maior significação, utilizamos novas maneiras de representações, trabalhamos as atividades cognitivas, e construímos o conteúdo.

Durante a discussão, os sujeitos também comentaram que, se possível, fariam pequenas alterações nos enunciados para garantir um melhor entendimento da atividade. Comentei que essa atividade era baseada no *Livro Aberto de Matemática*, o que me fez perceber que o projeto coordenado pelo IMPA não era de conhecimento dos licenciandos. Disse que era possível acessar a atividade de apoio de maneira gratuita na internet, que o material era muito bom, que existiam conteúdos de outras áreas da Matemática também e até novas áreas que tem ganhado destaque recentemente (como computação).

Pergunta 9: "Em qual ano, série ou segmento você acredita ser o mais adequado para a aplicação dessa atividade?"

Felipe: *"6° Ano"*

Luciana: *"Acredito ser interessante nos anos finais do ensino fundamental, talvez 8° e 9° sejam as séries mais apropriadas"*

Rafael: *"1° Ano do ensino médio"*

As respostas variaram com relação as etapas do Ensino; enquanto Felipe acredita que o 6° ano do Ensino Fundamental II já seria uma série capaz de desenvolver a atividade, Luciana acredita que essa atividade é mais adequada para os anos finais. É compreensível o ponto de vista de ambos, mas, é provável que um estudante das séries finais do Ensino Fundamental II já teve algum contato com as noções ligadas à Física e um pouco mais de bagagem em conceitos ligados à Geografia, e talvez compreendesse melhor a atividade, até mesmo por uma questão de maturidade. Rafael, por sua vez, respondeu 1° Ano do Ensino Médio. Sem dúvidas, é possível imaginar que alunos do Ensino Médio são capazes de responder a atividade. Durante a discussão, questionei Rafael sobre a opção do Ensino Médio, e ele disse que acreditava que era uma etapa de Ensino propícia para fazer uma breve introdução sobre a ideia de vetor. Essa resposta dele faz sentido com relação aos dados do Questionário 1, em que ele acredita que os vetores devem ser ensinados no Ensino Médio (e no Ensino Superior), sem fazer menção ao Ensino Fundamental. Não quis argumentar nesse ponto com o licenciando, apenas tive curiosidade de coletar o dado. Respondi que acreditava que de fato, escolheria aplicar essa atividade nos anos finais do Ensino Fundamental, mas que em qualquer uma das séries respondidas seriam experiências interessantes.

Com isso, deu-se por encerrado o Encontro 1, que, mesmo com baixa adesão por parte dos sujeitos da pesquisa, gerou uma discussão riquíssima. Ao final do encontro, a Profª Drª Gabriela disse que a baixa adesão dos licenciandos naquele encontro era compreensível, uma vez que ela descobriu que boa parte dos sujeitos realizaria uma prova de outra disciplina no dia. Ao questionar se deveria repetir a Atividade quando o grupo estivesse maior, ela me orientou a

não fazer isso, uma vez que poderia prejudicar o cronograma, e que mesmo com poucos participantes, a discussão foi tão proveitosa que já seria um prato cheio suficiente para a pesquisa, o que eu gentilmente concordei.

4.3 **Encontro Presencial – 22/08**

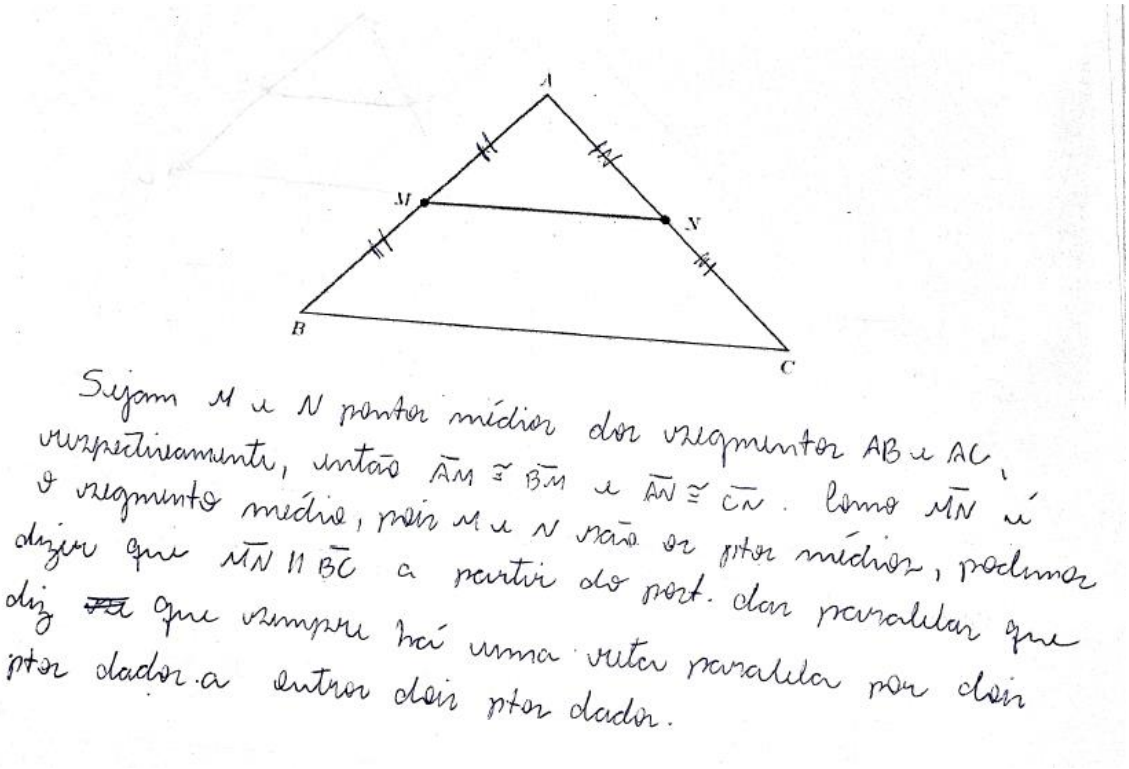
O segundo encontro selecionado para ter os dados coletados e analisados se deu no dia 22/08. Inicialmente, o encontro estava programado para começar às 18h, porém, devido à compromissos de banca da Prof.ª Dr.ª Grabriela dos Santos Barbosa, o compromisso teve que ser adiado por aproximadamente 40 minutos. Portanto, às 18:40, marcou-se o início daquele que seria o último encontro presencial com os sujeitos.

O plano era de que inicialmente, esse encontro tivesse uma atividade (Atividade 3), uma discussão sobre a atividade, e uma discussão sobre vetores. Porém, quando o início foi protelado, imaginou-se que não seria possível realizar o encontro conforme o planejado. Portanto, optou-se por começar o encontro com a atividade e, logo após, discussão sobre atividade. Foram dedicados 30 minutos para a atividade, pois lidava com demonstração de conceitos, e 20 minutos para a discussão. Alguns dos participantes não chegaram a tempo do início do encontro, como foi o caso de Luciana, que chegou ainda com 10 minutos de atraso. A seguir, vamos nos dedicar a apresentar e discutir os dados colhidos através da atividade proposta.

4.3.1 Atividade 3

A Atividade 3 inicia pedindo que os participantes comecem fazendo a demonstração do Teorema da Base Média. Para melhor análise dos resultados, compensa colocar aqui as imagens com as respostas, ao invés da transcrição, pois sabemos que é comum em demonstrações, principalmente geométricas, a possibilidade de realizarem construções geométricas.

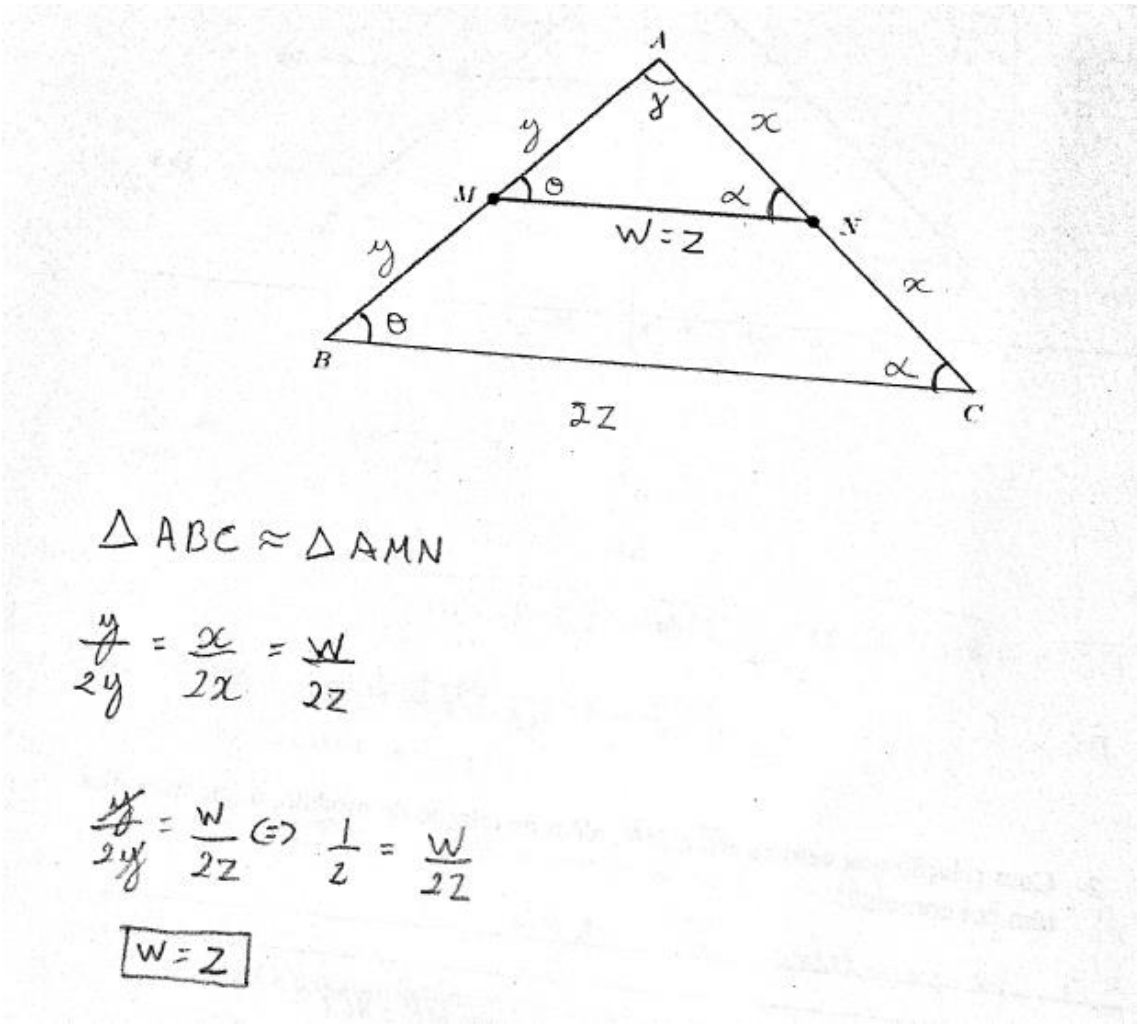
Figura 16 - Tentativa de Felipe da demonstração do Teorema da Base Média



Fonte: Próprio autor, 2023.

Felipe tentou realizar a demonstração evocando o postulado das paralelas. Mesmo bem-intencionado, a demonstração está incompleta (pois não demonstrou que $\overline{MN}$ é metade de $\overline{BC}$) e em partes equivocadas, pois, além de enunciar o postulado das paralelas de maneira errada (a maneira pelo qual esse postulado é conhecido atualmente seria “Dado um ponto P fora de uma reta r, podemos traçar uma única reta paralela a r que passa pelo ponto P”), também assume que a reta que contém $\overline{MN}$ é a reta paralela à reta que contém $\overline{BC}$ sem demonstrar que realmente é (o que é, inclusive, um dos objetivos da demonstração pedida).

Figura 17 - Tentativa de Rafael de demonstração do Teorema da Base Média



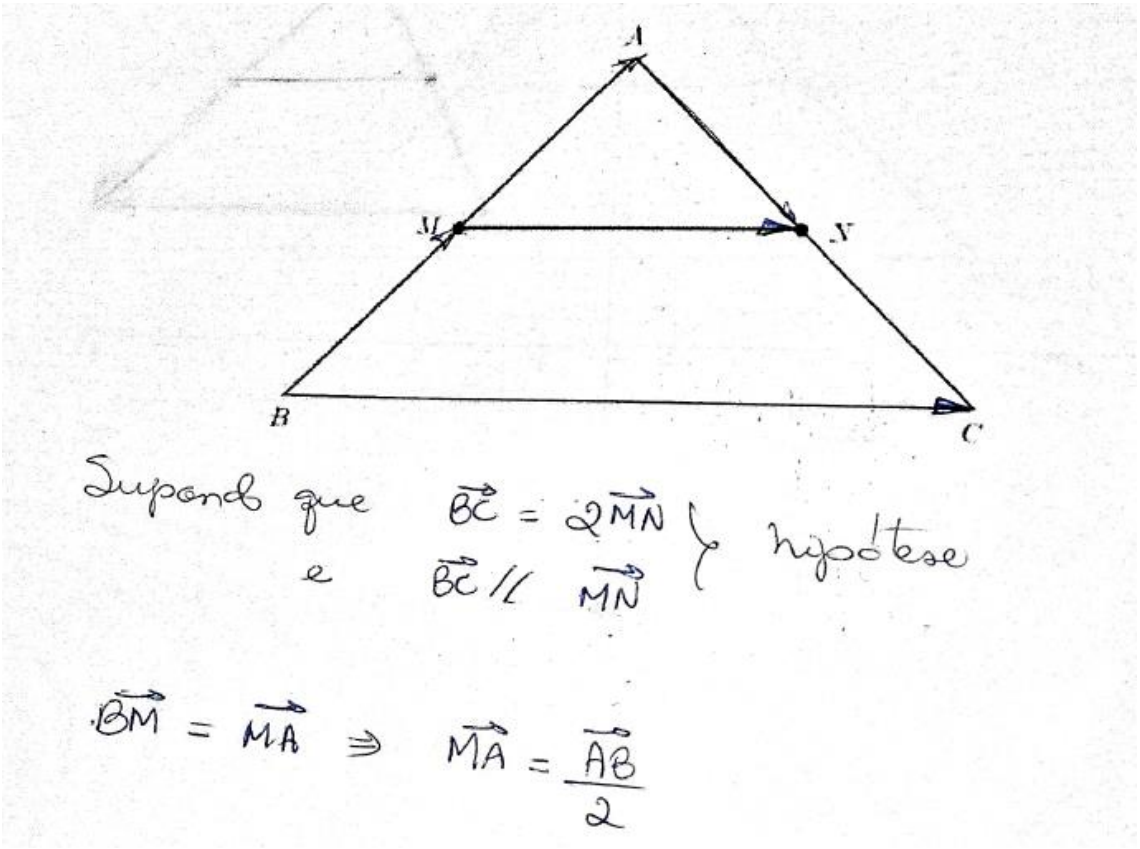
Fonte: Próprio autor, 2023.

A tentativa de Rafael é muito simples: apresenta que os triângulos são semelhantes entre si, e, através das razões de semelhança, consegue obter o resultado com relação a medida ($\overline{BC}$ é o dobro de $\overline{MN}$). É possível sim demonstrar por semelhança, mas antes, é preciso provar que os triângulos ABC e AMN são semelhantes; é comum que nós, praticantes de matemática, identifiquemos esse caso clássico de semelhança enquanto fazemos exercícios, baseados no Teorema Fundamental da Semelhança, que diz "toda reta paralela a um dos lados do triângulo, que intercepta os outros dois lados destes, determina um segundo triângulo, semelhante ao primeiro". Porém, é importante notar que esse teorema se utiliza de um resultado que queremos provar (que, de fato, $\overline{BC}//\overline{MN}$). Isso faz com que a estratégia que Rafael utilizou para tentar realizar a demonstração não fosse adequada, resultando numa demonstração equivocada.

Durante a discussão, quando perguntei para os participantes "E aí, como vocês fizeram essa demonstração?", Rafael respondeu "professor, eu fiz por semelhança". Perguntei "você se

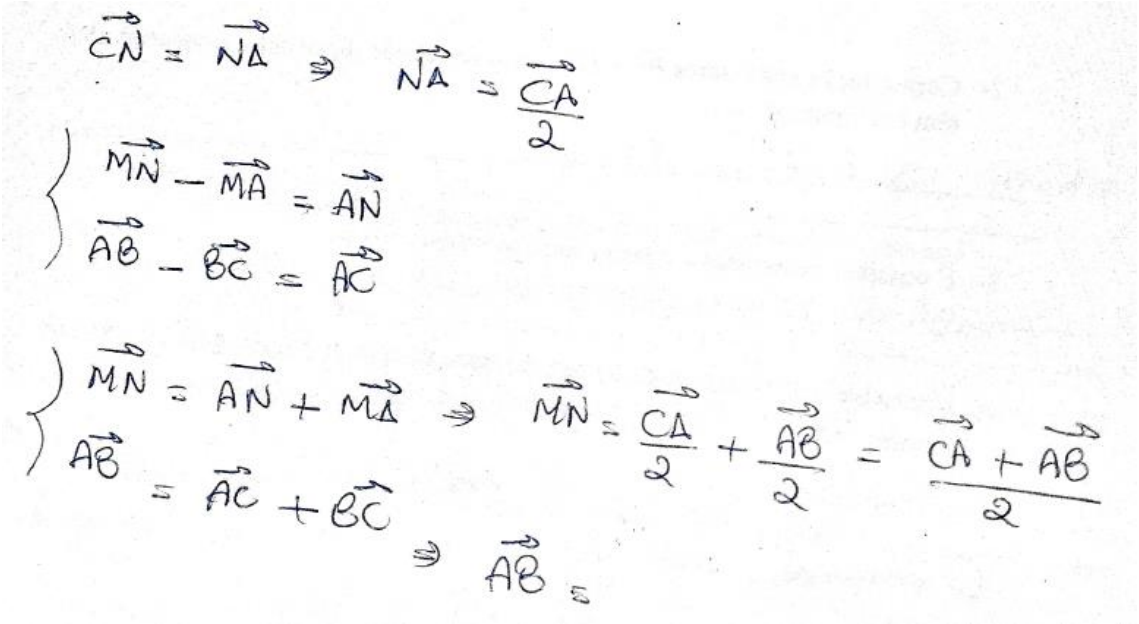
refere a semelhança entre ABC e AMN?" e ele respondeu positivamente. Logo depois, perguntei "E qual é o caso de semelhança aqui?", ao qual obtive como resposta "Usei o teorema fundamental da semelhança". Expliquei então que o teorema fundamental da semelhança parte do fato de que os segmentos são paralelos, coisa que ainda não estava demonstrado. Rafael então comentou "ah sim... é, tinha esquecido desse detalhe". Então, apresentei para turma que era possível, por construção, demonstrar que os dois triângulos são semelhantes, traçando um ponto M' simétrico ao ponto M, tomando N como eixo de simetria, e, passando por esse ponto M', traçar um segmento de reta paralelo a reta que contém os pontos A e B. Com essa construção, seríamos capazes de descobrir a semelhança entre alguns triângulos traçados, e concluir o paralelismo entre os segmentos.

Figura 18 - Tentativa de Luciana de demonstração do Teorema da Base Média parte 1



Fonte: Próprio autor, 2023.

Figura 19 - Tentativa de Luciana de demonstração do Teorema da Base Média parte 2



Fonte: Próprio autor, 2023.

Luciana tentou fazer a demonstração por vetores. O resultado final não foi atingido ou não foi escrito. Os motivos para isso são incertos, e não consegui notar o fato dela não ter concluído antes da discussão da atividade. Pode-se conjecturar que, talvez ao achar que estava com a demonstração bem encaminhada, ela resolveu fazer o restante da atividade.

Alguns comentários podem ser tecidos sobre a tentativa de demonstração de Luciana: primeiro, uma pequena confusão do que é hipótese e do que é tese. As anotações iniciais dizem "Supondo que $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$ *e* $\overrightarrow{BC}//\overrightarrow{MN}$", escrevendo uma "hipótese" ao lado, na verdade se referem ao resultado que queremos atingir, que seria a tese. Sua hipótese, baseado no enunciado, é de que M e N são pontos médios dos seus respectivos lados.

Além disso, nas primeiras relações escritas, temos $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MA}$, que está correto, uma vez que M é ponto médio. O problema vem a seguir: $\overrightarrow{MA} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$, o que não está correto, uma vez que o sentido do vetor $\overrightarrow{AB}$ é contrário ao de $\overrightarrow{MA}$; o correto seria dizer $\overrightarrow{MA} = \frac{\overrightarrow{BA}}{2}$ ou $\overrightarrow{MA} = -\frac{\overrightarrow{AB}}{2}$; também é possível verificar erro na expressão $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$; novamente, inverteu o sentido, dessa vez do vetor $\overrightarrow{BC}$; a frase estaria correta se fosse $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, ou $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$, o que poderia ser útil, uma vez que ela já havia encontrado uma relação que utiliza $\overrightarrow{CA}$ (e também relação com vetor $\overrightarrow{BA}$, se tivesse feito corretamente a relação entre $\overrightarrow{MA}$ e $\overrightarrow{BA}$). Tudo isso pode ter contribuído para ela não chegar no resultado final.

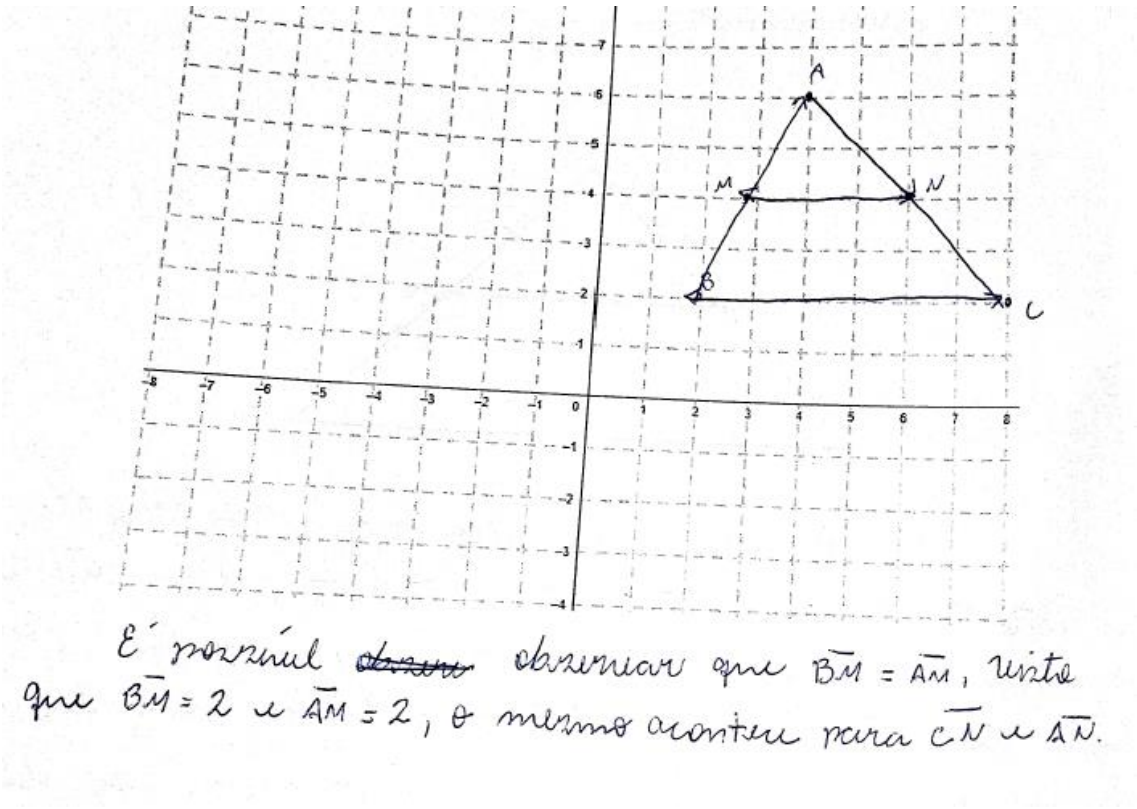
É interessante notar que Luciana resolveu fazer as relações partindo de subtrações vetoriais, e não através de soma vetoriais. Durante a discussão, enquanto eu realizava a demonstração no quadro, Luciana interveio dizendo 'eu encontrei na verdade as relações de subtração'; eu perguntei 'qual, por exemplo' e ela respondeu '$\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AN}$', que eu assumi que estava correto, então disse 'isso, é possível fazer por subtração também, desde que se faça de maneira correta... É preciso ter muito cuidado com o sentido dos vetores' ao qual ela disse 'é, eu estava no caminho, mas não cheguei a concluir, mas senti que dava para fazer por aí'. Como o tempo era apertado, não pedi nem para ela se dirigir ao quadro para continuar a demonstração, nem tentei fazer a demonstração por subtração também. Talvez, se tivesse feito alguma das duas coisas, teria notado o equívoco a ponto de enriquecer mais a discussão.

Essa atividade de demonstração permite desenvolvimentos relacionados com o mundo *Formal – Axiomático*; além disso, é comum ocorrer muitas atividades cognitivas de *tratamento* e *conversão* durante uma demonstração. Podemos observar que uma das principais dificuldades presente na demonstração de Luciana é o momento de trabalhar os *tratamentos* e as *conversões* entre os vetores representados no registro geométrico, e os vetores representados no registro algébrico, principalmente na hora de estabelecer o sentido dos vetores envolvidos nas operações. Como essa atividade é abstrata, uma demonstração utilizando vetores através do registro algébrico, principalmente na etapa de *tratamento*, poderia gerar muitas dificuldades. Então, utilizar o registro geométrico, realizar os *tratamentos* quando estipulamos as somas, as diferenças, os vetores múltiplos, para então *converter* os resultados para o registro algébrico, é o caminho mais prático para demonstrar a partir de vetores. Isso indica, porém, que caso alguma das atividades cognitivas não for bem desenvolvida, as chances de se cometer um erro aumentam. Não sabemos se Luciana errou enquanto realizava os *tratamentos* da diferença vetorial no registro geométrico, ou se errou na hora de *converter* as informações do registro geométrico para o registro algébrico; apenas sabemos que um erro ocorreu em algumas dessas atividades cognitivas. Além disso, encontramos evidências de que a resposta de Rafael contém evidências de que o *já encontrado* (no caso, saber que a demonstração pode ser feita por semelhança), atrapalhou o *a encontrar* (que seria justamente identificar o porquê de os triângulos serem semelhantes).

Pergunta 1 – "Sejam os pontos A (4,6), B (2,2), C (8,2) vértices de um triângulo; considere M o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e N o ponto médio do segmento $\overline{AC}$; determine se o segmento $\overline{MN}$ mede metade de $\overline{BC}$":

Novamente, essa questão será mais bem analisada se colocarmos imagens diretamente dos documentos, pois é uma questão que utiliza malha quadriculada e Plano Cartesiano.

Figura 20 - Resposta de Felipe a questão 1 da Atividade 3



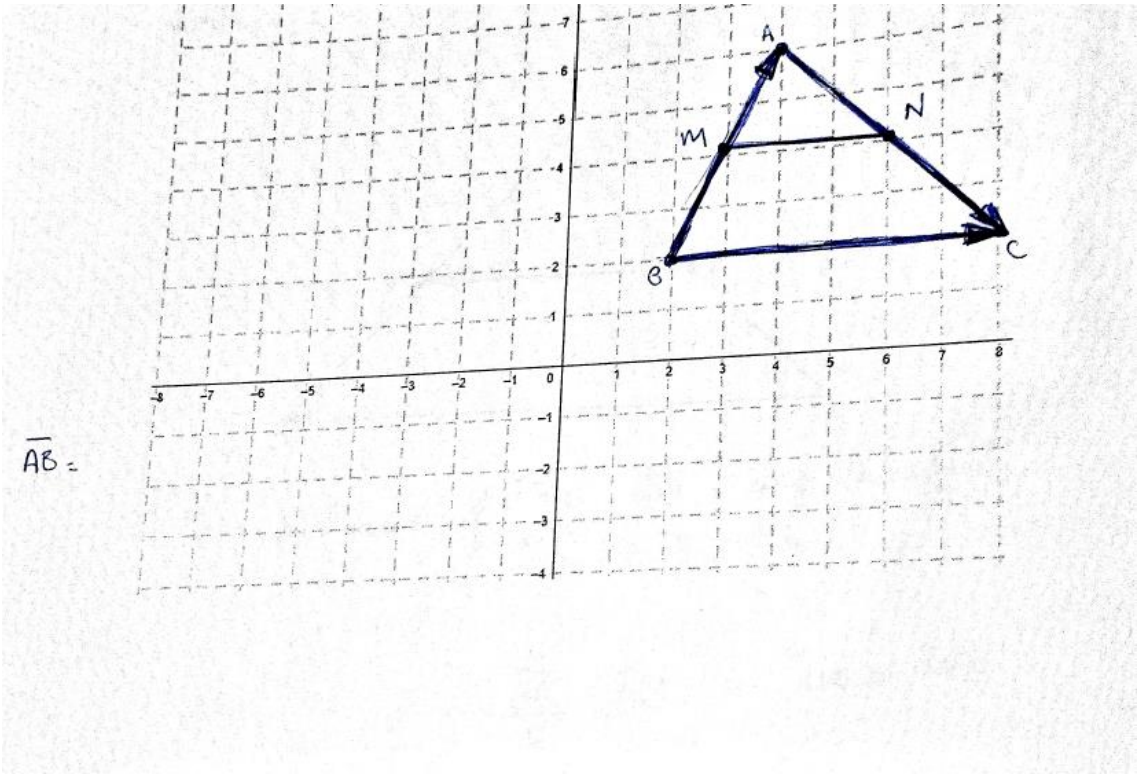
Fonte: Próprio autor, 2023.

O licenciando, mesmo representando os pontos e os segmentos de maneira correta, não cumpre o objetivo da questão, uma vez que ele não determina se $\overline{MN}$ é metade de $\overline{BC}$; pelo contrário, encontra relações já facilmente obtidas pela hipótese do exercício, e ainda dá as medidas erradas para os segmentos $\overline{BM}$ e $\overline{AM}$. É perceptível que aqui, o sujeito em questão até traçou os vetores, mas na hora de escrever as relações, optou por usar a notação de segmento. O sujeito pode ter utilizado os vetores apenas nas demais questões, onde já há um maior direcionamento para que isso seja feito.

Também podemos destacar que ele optou por não utilizar o registro algébrico, tentando *converter* diretamente as informações no registro geométrico para a língua materna e vice-versa. Mesmo não sendo necessário realizar essa conversão para responder a atividade, baseados no que Duval (2012) afirma, ao realizar conversões, há uma melhor construção de significação do conteúdo matemático estudado. Se o participante optasse por quem sabe,

converter as representações para o registro algébrico, calcular a distância entre os pontos, poderia atingir o objetivo da atividade.

Figura 21 - Resposta de Luciana a pergunta 1 da Atividade 3

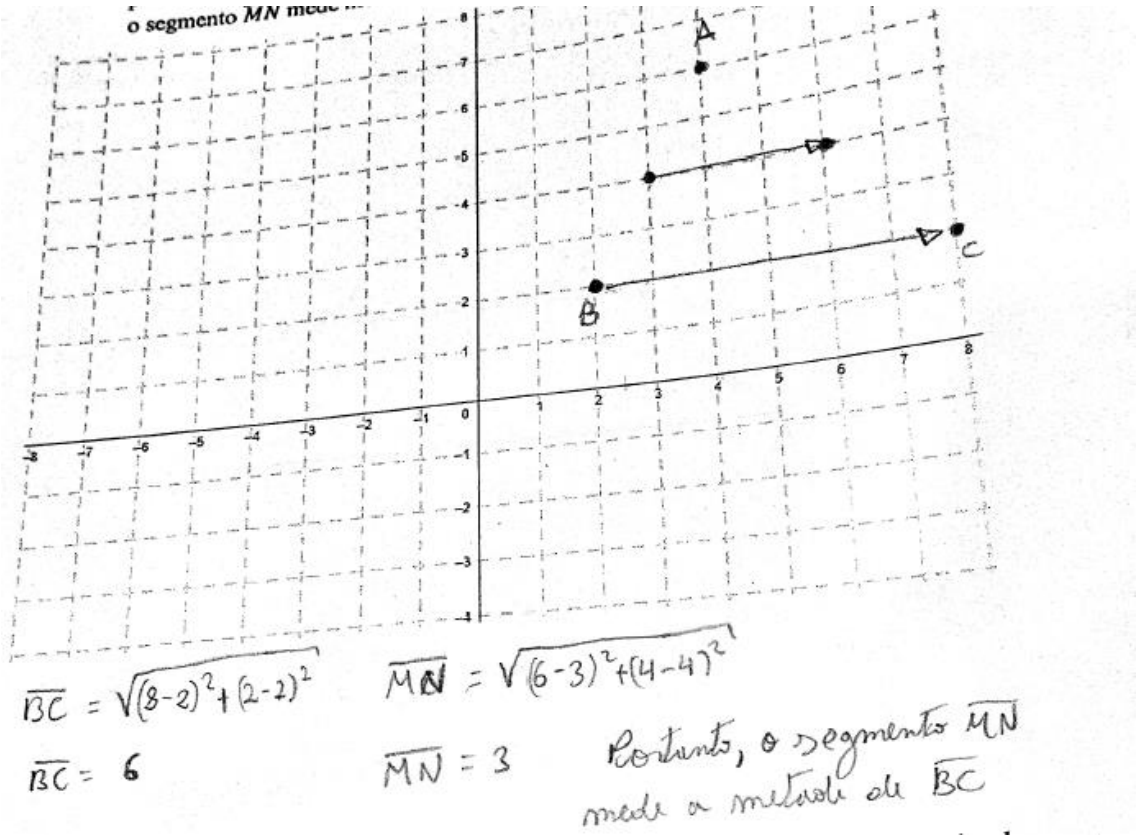


Fonte: Próprio autor, 2023.

Aqui, Luciana desenhou os pontos, os segmentos e traçou os vetores, mas não escreveu e nem verificou a relação entre os segmentos, conforme o que o enunciado pede. Também não atingiu o objetivo completo da atividade.

Podemos debater se houve uma falha nas atividades de *conversão*, ao ler o enunciado e realizar a atividade de maneira incompleta, ou se, na hora de analisar a situação exposta no registro geométrico, houve falha na hora de converter as relações para um registro algébrico (ou até mesmo na língua materna).

Figura 22 - Resposta de Rafael a pergunta 1 da Atividade 3



Fonte: Próprio autor, 2023.

Rafael foi capaz de responder corretamente o que o exercício pedia. É curioso pensar que ele não desenhou os triângulos (até porque, para esse exercício em si, ele não se faz necessário), e, quando foi determinar o tamanho dos segmentos, parece ter utilizado a fórmula de distância entre pontos (mesmo não sendo necessário, pois os segmentos são paralelos ao eixo das abscissas, e, portanto, facilmente mensuráveis). Porém, podemos analisar que as atividades cognitivas de *conversão* e *tratamento* foram bem realizadas: tanto para calcular a distância entre pontos, tanto nas mudanças de RRS aparentes nas suas respostas.

Pergunta 2 – "Com relação aos vetores $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{MN}$, além da relação do módulo, o que mais eles têm em comum?"

Felipe: *"Direção (Horizontal)"*

Luciana: *"Mesmo sentido e direção"*

Rafael: *"Eles são paralelos,* $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{MN}$

A resposta de Felipe foi incompleta, uma vez que só identificou a direção como característica em comum; apesar de só ter percebido a direção, era através disso que seria possível perceber que são vetores paralelos. Luciana, de maneira análoga, até chegou a responder também sobre o sentido dos vetores, mas não falou do paralelismo entre os vetores.

Já Rafael atingiu o objetivo, pois trouxe exatamente o que a questão queria ressaltar: o paralelismo entre vetores, e que isso significa poder escrever um vetor em função do outro, multiplicando por um valor real *k*.

Parece que, ao realizar a atividade, Rafael foi fazendo as conexões com a demonstração que havia sido pedido anteriormente, e foi encontrando as relações vetoriais necessárias para poder utilizar num caso geral depois.

Nesse exercício, Felipe e Luciana buscaram analisar dentro do registro geométrico as relações vetoriais existentes e responder tais relações dentro do registro da língua materna, enquanto Rafael, ao falar da relação de paralelismo entre vetores, além de trazer o registro em língua materna, trouxe o registro para essa relação de maneira algébrica.

Pergunta 3 – "É possível determinar a relação entre os vetores $\overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{BC}$?

Felipe: *"Sim"*

Luciana: *"Sim, $\overrightarrow{BC}$ é o dobro de $\overrightarrow{MN}$"*

Rafael: *"Sim, $\overrightarrow{MN}$ é múltiplo do vetor $\overrightarrow{BC}$"*

Todos acertaram a resposta da pergunta; Felipe, porém, preferiu não escrever a relação entre os vetores (o que não seria problema nenhum, uma vez que o enunciado não pede que seja escrito); Luciana e Rafael acharam as relações entre os dois vetores, ambas corretas; é importante ressaltar para o leitor que, para vetores, afirmar que um vetor é múltiplo do outro automaticamente implica que possuem mesma direção, o que significa dizer que são paralelos.

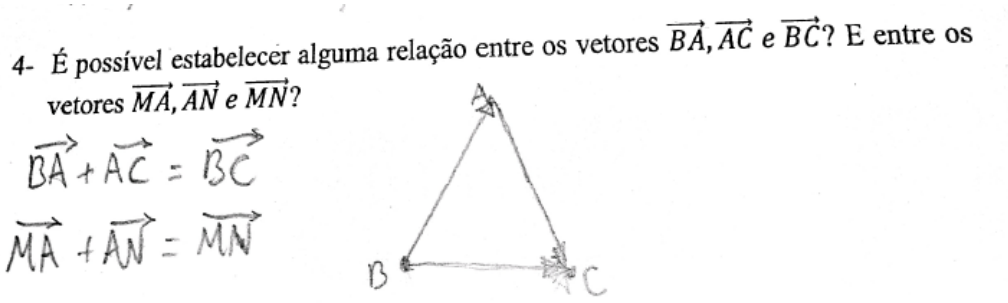
Pergunta 4 – "É possível estabelecer alguma relação entre os vetores $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$? E entre os vetores $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AN}$ e $\overrightarrow{MN}$?"

Felipe: (Deixou em branco)

Luciana: *"O vetor $\overrightarrow{AC}$ pode ser considerado o vetor diferença entre os vetores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$. O mesmo pode ser dito no triângulo AMN, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MA}$"*

Rafael: (imagem abaixo)

Figura 23 - Resposta de Rafael a pergunta 4 da Atividade 3



Fonte: Próprio autor, 2023.

Todas as respostas são interessantes; Felipe não chegou ao objetivo do exercício; Luciana chegou novamente nas relações de diferença entre vetores, tal qual fez na demonstração no começo do exercício. É interessante notar que, assim como fez na demonstração, a relação $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MA}$ está correta, porém a diferença entre $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$ não resulta em $\overrightarrow{AC}$, e sim em seu oposto, $\overrightarrow{CA}$; cometendo o mesmo erro em situações distintas indica que ela de fato não procurou pelas relações, e sim importou a relação que ela havia formado erroneamente no caso anterior. Mesmo com a oportunidade de fazer e perceber o erro cometido anteriormente, optou por permanecer com seus conceitos.

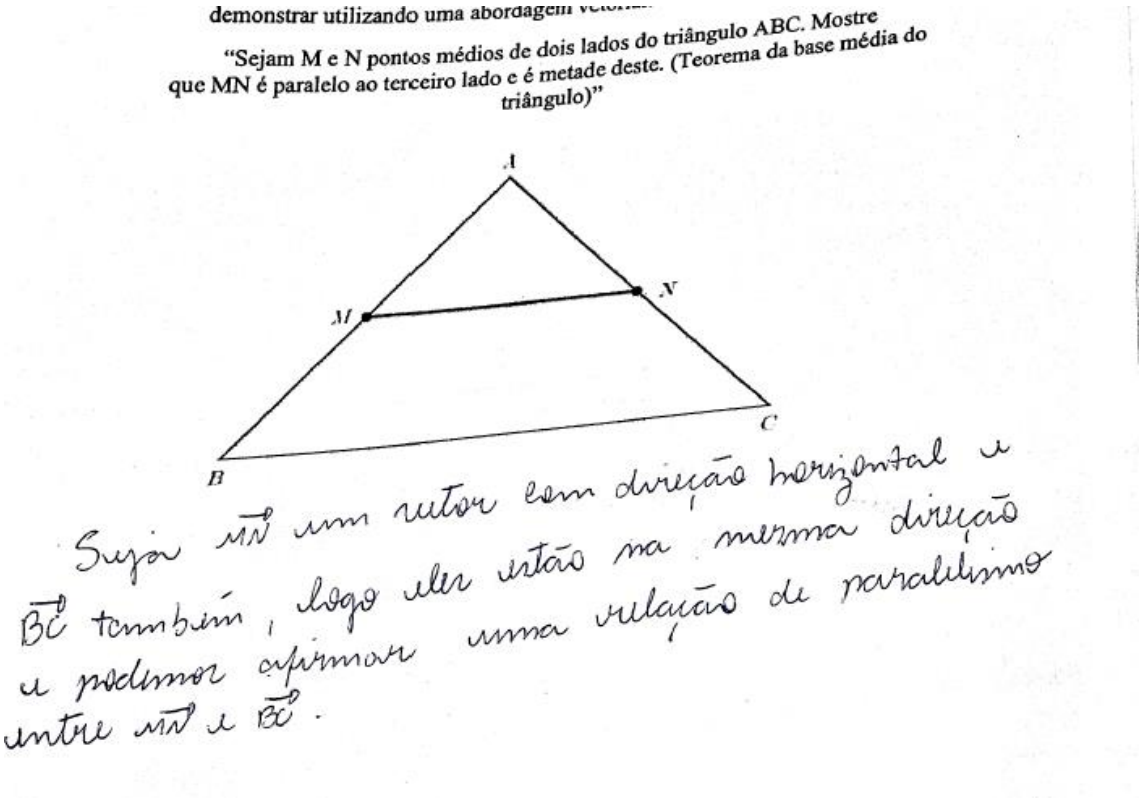
Novamente podemos conjecturar que, caso houvesse uma *conversão* entre os registros geométricos e algébricos, talvez ela pudesse ser capaz de chegar nas relações vetoriais corretamente. Não podemos descartar também a hipótese de que, como Luciana chegou atrasada, pode ter optado por não fazer a atividade com tanta atenção.

A opção por colocar uma imagem para representar a resposta fornecida por Rafael se justifica pela escolha do sujeito de responder com representações em dois registros semióticos distintos. Além de trazer corretamente as somas vetoriais no registro algébrico, também trouxe a soma vetorial através do registro geométrico, ambas corretas, corroborando com o que Duval (2012) defende, sobre como as *conversões* podem auxiliar na compreensão matemática.

Pergunta 5 – "Volte ao teorema da base média, apresentada no começo da atividade, e tente demonstrar utilizando uma abordagem vetorial."

Felipe: (Figura abaixo)

Figura 24 - Resposta de Felipe a questão 5 da Atividade 3



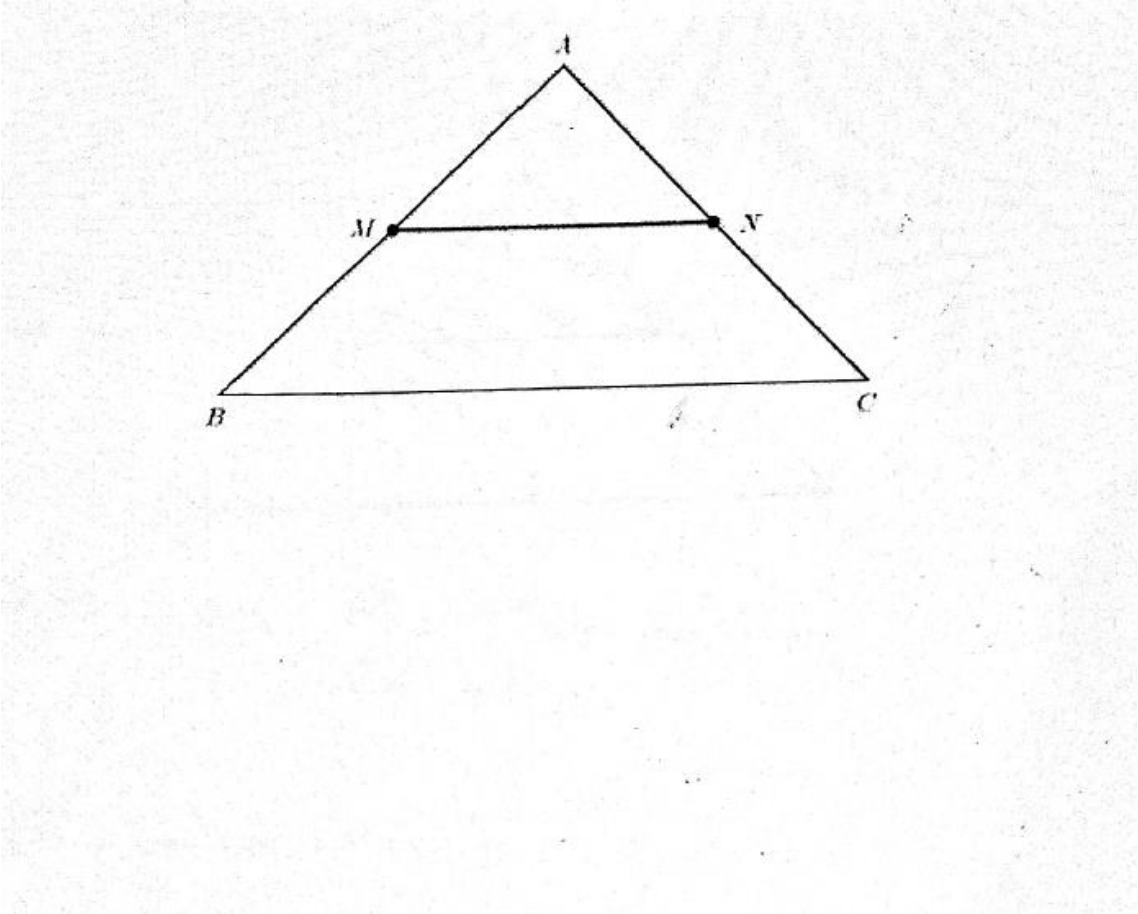
Fonte: Próprio autor, 2023.

Na sua tentativa de demonstração, Felipe acaba não conseguindo garantir a generalização. Sua conclusão, analisando a imagem, está correta: os vetores $\overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{BC}$ estão na direção horizontal, estão na mesma direção, e são paralelos entre si. Porém, uma demonstração não pode ficar restrito ao caso em que os vetores estão na horizontal. É necessário então garantir que, mesmo em figuras em que os triângulos não estejam nessa posição, de que os vetores citados são paralelos entre si, coisa que o sujeito em questão não fez. Além disso, faltou garantir que o vetor $\overrightarrow{MN}$ é metade de $\overrightarrow{BC}$.

Ao analisarmos a trajetória de Felipe durante a atividade, vemos que ele não atingiu o objetivo de maneira completa em nenhuma das questões que foram propostas. O objetivo com a atividade é que ela conduza quem está fazendo a atividade através de um exemplo particular, que permite trabalhar conceitos *já encontrados*, para que haja uma generalização, migrando aos poucos do *já encontrado* para o *a encontrar*, e também entre os Mundos *Proceitual – Simbólico* e *Formal – Axiomático*, além de propiciar o uso de diversos RRS no percurso. Quando um dos sujeitos acaba não estimulando suas percepções dentro do Mundo *Proceitual – Simbólico* e não trabalha para moldar os conhecimentos *já encontrados* para o *a* encontrar dentro da atividade, há um risco de ele não conseguir transitar para o Mundo *Formal – Axiomático*.

Luciana: (Imagem abaixo)

Figura 25 - Resposta de Luciana a pergunta 5 da Atividade

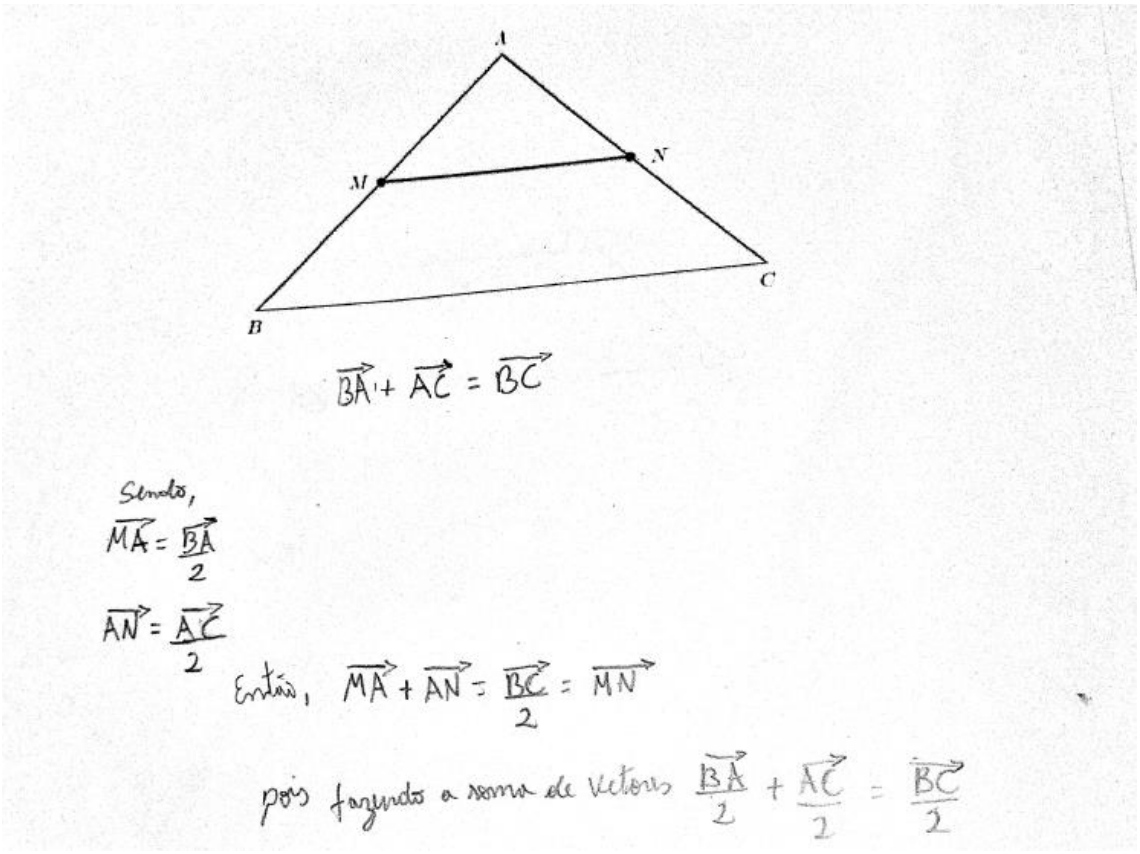


Fonte: Próprio autor, 2023.

A resposta de Luciana foi em branco. Durante a discussão, quando foi perguntado sobre a demonstração para os participantes, ela confessou que não fez, pois já havia realizado a demonstração através de uma abordagem vetorial no começo da atividade, o que considerei compreensível no momento da discussão. Olhando os resultados posteriores, talvez fosse positivo se ela tentasse refazer a demonstração, mas não há garantia que ela chegasse nos resultados corretos mesmo com a tentativa, tal qual vimos na questão anterior.

Rafael: (Imagem abaixo

Figura 26 - Resposta de Rafael a pergunta 5 da Atividade 3



Fonte: Próprio autor, 2023.

O sujeito em questão atingiu o objetivo proposto pela pergunta. A única observação que pode ser feita está relacionada com a possibilidade de ser mais organizado com relação a sua escrita. Por exemplo, poderia escrever a soma $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MN}$ separada, igual fez com a soma $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$, para depois concluir que $\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{BC}}{2}$

Podemos destacar que esse tipo de demonstração, apresentada por Rafael, trabalha muito bem a *conversão* e o *tratamento*, uma vez que é através do registro geométrico que se observa a soma vetorial, e é através do registro algébrico que se desenvolve a demonstração. Percebemos também a presença de elementos que pertencem aos Mundos *Formal – Axiomático* e *Proceitual – Simbólico*. Também, ao acompanhar a trajetória de Rafael na atividade, vimos que ele trabalhou bem os conceitos *já encontrados* para atingir o *a encontrar*.

Durante o período de discussão, comecei a realizar a demonstração no quadro. Mesmo com Felipe não comentando nada durante a discussão, questionei a turma se alguém tinha dúvida com relação a demonstração, e ele afirmou ter compreendido, não tendo dúvidas. Luciana também não declarou ter ficado com dúvidas com relação a demonstração. Rafael comentou que conseguiu fazer algo parecido na atividade, e que só não estava escrito da mesma

maneira. Falei que mesmo que existissem diferenças entre os processos de escrita, pois cada indivíduo pode organizar a demonstração de formas distintas, o importante para os propósitos da atividade era atingir o objetivo de garantir a demonstração. Perguntei ao sujeito se qual das duas formas de demonstrar ele tinha achado mais fácil: através da abordagem vetorial ou da maneira 'tradicional'. Ele comentou que achava o método utilizado para demonstrar na primeira tentativa (por semelhança de triângulos) bem fácil de fazer, mas que, como não havia se ligado que antes precisava garantir que os triângulos são semelhantes, isso deixaria o método mais tradicional um pouco mais complicado, fazendo com que a abordagem vetorial fosse uma opção bem tranquila de se fazer também. Isso ajudou a puxar a discussão das próximas perguntas.

Pergunta 6: "Qual a maior dificuldade encontrada em realizar a atividade anterior?"

Felipe: *"Encontrar as relações vetoriais existentes, bem como relacionar com vetores."*

Luciana: *"Relembrar as operações com vetores"*

Rafael: *"Explicar a relação vetorial entre $\overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{BC}$"*

As respostas colocadas na folha foram condizentes com a trajetória dos estudantes no decorrer da atividade. Felipe realmente teve dificuldade de encontrar as relações vetoriais existentes, tanto que nos exercícios, não chegou a atingir o objetivo proposto. Durante a discussão, ele comentou que "como eu não estou totalmente acostumado com a abordagem vetorial, tive uma dificuldade de encontrar essas relações." Perguntei para ele se ele considera então que isso seria uma questão de hábito, e ele disse que sim.

Luciana também comentou sua resposta da folha durante a discussão. Comentou que não conseguia exatamente relembrar a operação vetorial de soma, mas que a operação vetorial de diferença ela conseguiu recordar, e, portanto, foi a operação que ela escolheu para realizar as operações. A resposta me fez refletir sobre minha trajetória, ao qual compartilhei com os participantes: "por todo o meu Ensino Médio, eu não entendia a subtração vetorial. Fazia o processo algébrico, mas na hora de compreender o processo geométrico, sempre fazia errado. Eu não lembro em que momento eu realmente entendi, mas lembro que só fui compreender a subtração entre vetores através da ideia de somar o vetor oposto. É interessante como o ser humano pode ter diferentes maneiras de pensar e lembrar da matéria. Para mim, seria impossível lembrar da subtração sem lembrar da soma, mas para você, o processo é diferente".

Com relação a Rafael, ele também comentou, durante a discussão, que o mais difícil foi enxergar a relação entre os vetores $\overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{BC}$. Respondi que, de certa forma, essa era uma das etapas chaves da demonstração: enxergar os vetores não apenas como os vetores de forma

conceitual, mas também como o resultado de um processo. Nem todos estão acostumados ou se sentem incentivados a pensar nos objetos matemáticos dessa maneira, mas que aqueles que desenvolvem esse tipo de capacidade, costumam obter êxito nas suas realizações, referenciando o trabalho de Grey e Tall (1994). Perguntei se, na opinião dele, essa tarefa o fez perceber essa relação entre processo e conceito, e ele respondeu "acho que ajudou de alguma forma".

Com isso, avançamos para a discussão da pergunta 7:

Pergunta 7 – "Você, como professor(a), consideraria trabalhar esse tipo de demonstração para seus alunos do Ensino Básico? Por quê?":

Felipe: *"Sim. É muito importante pois aborda uma geometria não muito comum, fugindo do padrão da geometria Euclidiana"*

Luciana: *"Somente se o aluno já tivesse bem ambientado ao uso de vetores"*

Rafael: *"Sim, pois quanto mais mecanismos ou ferramentas ter o aluno do mesmo assunto fará melhor absorção"*

Durante a discussão, Luciana foi a primeira a dar a sua resposta. Ao dizer que aplicaria essa atividade somente se os alunos estivessem habituados com vetores, primeiro eu perguntei "o quão habituado você acha que os alunos devem estar?", tentando extrair do sujeito o quanto sobre vetores ela considerava que deveria ser discutido com estudantes do Ensino Básico. Recebi como resposta "ah, o básico... as definições, as operações... decomposição vetorial... até aí tá bom". Logo depois emendei com a pergunta "e você não acha que esse fato de que os alunos precisarem estar ambientados com vetores é mais um reforço pra que vetores estejam presentes no Ensino Básico, até pra ajudar nesse tipo de exercício de demonstração?"; ela respondeu "sim, acho..., mas aí a gente pode pensar se esse tipo de exercício de fato é necessário, já que não vemos muitas mais demonstrações no Ensino Médio". Achei um questionamento muito pertinente, e na época do questionamento, eu não tinha dados sobre as demonstrações estarem ou não presentes no Ensino Médio, estava apenas munido da experiência pessoal. Mas, utilizei o gancho para falar com os participantes sobre os Três Mundos da Matemática.

Quando questionei se algum participante conhecia sobre os "Três Mundos da Matemática" e sobre David Tall, a Prof.ª Dr.ª Gabriela Barbosa fez uma intervenção. Ela disse aos participantes: "Pessoal, peço muita atenção aqui e agora pois isso é muito importante. É isso que caracteriza um dos principais trabalhos de um bom professor de matemática: buscar descobrir como os alunos aprendem. O que o Lucas vai falar agora é sobre o trabalho de um professor e pesquisador que se dedicou a descobrir isso. E é isso que nós, como professores, temos que fazer... se aperfeiçoar, estudar, descobrir como nossos alunos pensam... Só assim que

nós podemos ter certeza de que estamos fazendo um bom trabalho". Ela então deu espaço para que eu pudesse explicar sobre a teoria.

Tentei explicar de maneira superficial e básica as ideias dos Três Mundos da Matemática, sem me aprofundar principalmente em decorrência do tempo. Exemplifiquei os Três Mundos e disse que cada indivíduo aprende Matemática conforme a percepção que ele tem sobre ela e sobre como ela se encaixa em um desses Mundos, e que para muitos indivíduos, a melhor maneira de entender a matemática é através do mundo *formal-axiomático*, que trata justamente das demonstrações, formalizações, entre outros. Então, por mais que para alguns, trabalhar as demonstrações talvez não seja interessante, para outros estudantes pode fazer toda a diferença, e que é importante numa sala de aula um professor saber encaixar os Três Mundos da Matemática na sua profissão, para alcançar o máximo de alunos possível.

Avançando na discussão, perguntei se mais algum sujeito gostaria de compartilhar sua resposta. Felipe comentou a sua resposta e Rafael comentou logo depois. Comentei se eles achavam positivo então ter mais 'ferramentas', e eles comentaram que sim. Então, senti que poderia ter a oportunidade de falar sobre os Registros de Representação Semiótica. Comentei que existia um outro pensador, Duval, que gostava de interpretar a matemática como se fosse um tipo de linguagem, e que dentro dessa linguagem existiam três operações cognitivas que nos ajudavam a compreender essa linguagem cada vez melhor, e que realizamos essas operações com frequência: a formação, o tratamento e a conversão. Exemplifiquei de maneira simplificada cada operação e conclui dizendo que de acordo com Duval, fazer conversão entre os registros semióticos era fundamental para entendermos sobre matemática, e que os vetores, por terem esse caráter flexível, de poder trabalhar de forma algébrica e geométrica, permitia que essa operação de conversão poderia ser realizada em vários contextos, e que isso permitiria ao estudante que ele tivesse mais ferramentas para tentar entender a Matemática em si.

Conforme debatíamos, a Prof.ª Gabriela me alertou sobre o horário, que eu já havia estourado em 2 minutos. Tratei de agradecer aos participantes e à Prof.ª pela oportunidade o tempo cedido para que eu realizasse a minha pesquisa, ressaltei que eles estavam contribuindo, de certa forma, para que eu pudesse ser um profissional melhor, e pedi para que eles participassem da última etapa da pesquisa: o Questionário Final, que já estava com o link disponível para ser acessado através do grupo do *WhatsApp* da turma. E assim, com um outro professor e uma outra turma já esperando na porta, encerramos o último encontro presencial que seria realizado com a turma de PPM2.

4.4 **Questionário Final**

A última etapa do trabalho de campo foi realizada de maneira remota. O questionário final possui 6 questões, todas abertas, para que os participantes pudessem desenvolver livremente suas respostas. As respostas dos sujeitos serão disponibilizadas na íntegra e discutidas abaixo:

Pergunta 2 – "Qual a sua opinião sobre a abordagem vetorial no ensino de matemática?"

Felipe: *"Acredito que ela seja muito útil para apoiar em construção de ideias para além da tradicional. Essa fuga para os vetores é muito rica, pois apresenta aos estudantes um método completamente diferente de análise/demonstração da matemática."*

Luciana: *"Considero muito importante a introdução destes conceitos no ensino básico."*

Rafael: *"É uma ferramenta para abordar vários assuntos no ensino fundamental e de extrema importância no ensino médio, pois eles precisam do assunto para futuras carreiras que exigiram esse conhecimento."*

A resposta de Felipe traz a perspectiva de apresentar maneiras distintas de se estudar e analisar conceitos matemáticos. O termo "Essa fuga" me chama a atenção, como se a abordagem vetorial fosse uma válvula de escape para uma matemática não tradicional. É curioso que alguns possam pensar isso, uma vez que os vetores são um objeto matemático bastante tradicional, bastante presente no Ensino Superior. Pensar em vetores como algo 'além do tradicional' pode ser reflexo de licenciandos que, por não possuírem contato com a abordagem vetorial no Ensino Básico em Matemática, não enxerguem vetores como objetos legitimamente matemáticos.

Luciana não aprofundou muito a sua opinião. De maneira sucinta, apenas disse que a introdução dos conceitos de vetores no Ensino Básico é Muito importante.

Rafael começa classificando a abordagem vetorial como uma ferramenta de extrema importância no Ensino Médio, e novamente parte de uma perspectiva de que conhecer essa abordagem auxiliaria nas futuras carreiras. É possível inferir que essa resposta configura uma reafirmação da opinião do sujeito observada durante a pesquisa, onde ele parecia estar preocupado com a transição do Ensino Médio para o Ensino Superior, estendendo sua preocupação para áreas de atuação das consideradas "Ciências Exatas".

Pergunta 3 – "Você acredita que existe alguma possibilidade da utilização da abordagem vetorial em alguma etapa no ensino de matemática para a Educação Básica? Por quê?"

Felipe: *"Sim. Como vimos durante as aulas de PPM2, trabalhar vetores em geometria/cartografia é muito possível. Não há dificuldade alguma em abordar isso com estudantes da educação básica."*

Luciana: *"Sim, de acordo com as atividades realizadas na turma de PPM2 pude observar várias possibilidades."*

Rafael: *"Introduzir o conceito e com abordagens lúdicas fará com que o aluno não estranhe vetores quando estudar a fundo no exijo médio"*

Tanto Felipe, quanto Luciana, acreditam que abordagem vetorial pode ser utilizada na Educação Básica, e fazem referência às atividades que foram realizadas durante os encontros presenciais com a turma de PPM2. Felipe, principalmente, recorda a Atividade 1, em que existe uma interseção com as ideias de cartografia, que estão presentes, inclusive, no conteúdo de Geografia no Ensino Básico, o que pode nos sugerir que uma interdisciplinaridade entre Geografia e Matemática é possível, e a abordagem vetorial pode ser um meio para a realização dessa interdisciplinaridade. Além disso, Felipe também destaca a possibilidade de trabalhar vetores com geometria, fazendo referência, principalmente, a Atividade 3.

Rafael, apesar de não explicitamente responder que acredita na possibilidade da utilização da abordagem vetorial no Ensino Básico, dá uma resposta positiva, indicando como ele acredita que deve ser realizado o contato inicial da abordagem vetorial: abordagens lúdicas. O que também chama a atenção na resposta de Rafael é o trecho final, onde diz "fará com que o aluno não estranhe vetores quando estudar a fundo no exijo médio". Acredito que, além do pequeno erro de português, dá para perceber que o sujeito talvez não tenha total compreensão do fato de que o Ensino Médio é uma etapa que compõe o Ensino Básico.

Pergunta 4: "Você acredita que se beneficiaria de uma abordagem vetorial enquanto estudante de matemática na Educação Básica? Por quê?"

Felipe: *"Sim. A visão do conteúdo seria de uma forma completamente diferente da tradicional, pois haveria mais de uma forma de tradução do assunto abordado."*

Luciana: *"Sim, porque já estaria familiarizada antes do ingresso na graduação."*

Rafael: *"Sim, pois vetores é muito amplo e ajudaria em muitos assuntos na matemática"*

É possível perceber, nas respostas descritas acima, que todos os sujeitos afirmam positivamente que se beneficiariam da abordagem vetorial enquanto alunos da Educação

Básica. Esse tipo de resposta nos permite ver que para os sujeitos, de certa maneira, a abordagem vetorial nessa etapa de Ensino auxilia aos estudantes. Além disso, as justificativas apresentadas são muito interessantes.

A justificativa de Luciana parece se direcionar com a ideia de familiaridade com os vetores para auxiliar na transição entre o Ensino Básico e o Ensino Superior. Essa perspectiva parece estar bastante presente nos sujeitos que participaram da pesquisa, uma vez que já notamos esse tipo de preocupação nas respostas dadas por Rafael. Talvez isso indique que, de alguma maneira, os licenciandos enxerguem a Matemática vista na graduação como muito distante da matemática vista no Ensino Médio, o que, de acordo com os estudos de Patrício (2011) e Giraldo (2018), costuma ser prejudicial aos licenciandos.

Rafael apresenta como justificativa a ideia de que 'vetores é muito amplo', e que isso permite que ele possa ajudar em diversas áreas da matemática. De fato, mesmo não apresentando aos participantes da pesquisa o processo de reestruturação curricular coordenado por Assemany (2017), em que a *geometria vetorial*[20] é o eixo condutor do conteúdo de Matemática no Ensino Médio devido a facilidade que esse conteúdo tem de se relacionar com os conteúdos estudados em Matemática, o sujeito tem estabelecida essa visão sobre a abordagem vetorial.

Já Felipe nos apresenta como justificativa novamente a ideia de que a abordagem vetorial seria uma maneira menos tradicional de se ver o conteúdo de Matemática. Entretanto, o que de fato me chamou a atenção foi o trecho em que diz "[...] pois haveria mais uma forma de tradução do assunto abordado". Com essa fala, o sujeito sinaliza que a discussão sobre Registros de Representação Semiótica, teoria de Duval, foi de alguma forma assimilada por ele, uma vez que durante a discussão, comentei que o processo cognitivo de *conversão* seria, guardando suas devidas proporções, um tipo de tradução, e na discussão, comentamos que a abordagem vetorial poderia auxiliar nesse tipo de atividade cognitiva.

Pergunta 5 – "Na sua opinião, por qual motivo a abordagem vetorial não é usualmente utilizada na educação básica?"

Felipe: *"O apego ao ensino tradicional pode ser um dos maiores problemas, visto que vetor é abordado apenas em física no ensino médio, restringido o assunto a uma única área."*

Luciana: *"Creio que por conta de um ensino engessado e sem o interesse de arriscar novas abordagens."*

[20] Termo cunhado pelos professores do Cap – UFRJ para se referir à geometria que possui uma abordagem vetorial como foco.

Rafael: *"Pela dificuldade de abordar um conceito abstrato no currículo da educação básica e pela massiva grade conteudista."*

Todas as respostas obtidas, em algum grau, fazem uma discussão centrada na questão do Currículo de Matemática, afirmando que o Ensino é engessado, tradicional, com grade massivamente conteudista, entre outros. Como essa pergunta é uma questão de opinião, é possível tentar analisar se a opinião dos sujeitos condiz com a realidade dos fatos.

É notório que, durante as discussões para a elaboração da BNCC, existiu um esforço para se alterar a grade curricular, visando evitar justamente os problemas que foram citados pelos sujeitos. A discussão sobre o Currículo de Matemática foi ampla, foram produzidas diversas versões antes da versão que foi aprovada. É importante dizer que o conteúdo de vetores foi discutido pelos intelectuais, professores e pesquisadores responsáveis pela seleção dos conteúdos que fariam parte ou não da BNCC. A maior evidência disso é a presença do conteúdo de vetores na segunda versão do documento, de 2016. Uma outra evidência é presença de um capítulo dedicado a vetores no livro de Geometria no projeto Um Livro Aberto de Matemática, do IMPA, que optou por realizar a inclusão desse capítulo por causa do que foi discutido na BNCC. Os motivos para a não inclusão de vetores na versão final da BNCC não são conhecidos pelo autor dessa pesquisa.

Uma outra forma de analisar a tentativa de se diminuir essa 'grade curricular engessada, conteudista e tradicional' pode ser vista através dos parâmetros do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). O ENEM tem como propósito não ser uma avaliação conteudista, e sua existência como principal meio de acesso ao Ensino Superior influencia diretamente ou indiretamente a forma como se pensa e como os conteúdos são aplicados em diversas escolas no nosso país.

Dito isso, não me parece ser possível negar que esses esforços, ainda que necessários, se mostraram insuficientes, e aqui nem entro no mérito de ter ou não vetores no currículo de matemática, e sim entro no mérito do que diz Giraldo (2018) diz sobre nossa proposta de Ensino de Matemática. É interessante que essa perspectiva não escapa aos olhos dos nossos sujeitos em questão.

Pergunta 6: "Com tudo o que foi debatido nos encontros, você consideraria utilizar a abordagem vetorial no ensino de matemática na sua prática professoral?"

Felipe: *"Sim, já olho algumas matérias da faculdade com outros olhos, pensando nos encontros que tivemos, pensando na utilização de vetores"*

Luciana: *"Consideraria, sim."*

Rafael: *"Sim, quanto mais ferramentas o aluno e professor tiver a disposição melhor para os 2 no âmbito escolar da aprendizagem"*

Novamente, parece que há um consenso entre os sujeitos de que eles considerariam utilizar a abordagem vetorial no Ensino de Matemática enquanto professores. A pergunta não precisava de justificativa, mas Rafael e Felipe expuseram um pouco mais do seu pensamento. Rafael escreve que entende que ter esse recurso é bom tanto para o professor, quanto para o aluno, no processo de aprendizagem. Felipe comenta que desde já tem refletido sobre a utilização de vetores, relatando que os encontros produziram um impacto de algum nível sobre si.

5 CONCLUSÃO

Até o presente momento, com a presente pesquisa tendo alcançado todas as fases de desenvolvimento, podemos analisar algumas coisas já constatadas nesse trabalho: cientes das investigações realizadas e expostas na revisão de literatura, temos que a abordagem vetorial é comumente preterida no Ensino de Matemática nos níveis da Educação Básica, mesmo sendo utilizada de maneira constante tanto no nível Superior em matemática quanto em Física (nos níveis Básico e Superior). Esta escolha de não utilização da abordagem vetorial pode ser notada analisando o currículo de matemática proposto na BNCC e analisando os materiais didáticos aprovados pelo PNLD. Entretanto, alguns estudos já foram realizados que comprovam a eficácia de usar uma abordagem vetorial no Ensino de Matemática.

Munidos das teorias de David Tall e seus colabores, juntamente com as ideias de Raymound Duval, conclui-se que os vetores podem auxiliar no desenvolvimento cognitivo e na aprendizagem em matemática, pois sua versatilidade o faz ser capaz de transitar entre os Três Mundos da Matemática, suas representações podem estimular o pensamento proceitual e seu alto valor semiótico faz com que a conversão entre os registros de representação semiótica possam ser feitos, não apenas com os vetores, mas também com outros conteúdos do nível básico de matemática.

Levando em consideração toda a trajetória acadêmica pessoal, as inquietações particulares sobre a não utilização da abordagem vetorial me fizeram buscar saber qual é a compreensão que os alunos de Licenciatura em Matemática, que possuem contato com tal objeto e que serão futuros professores, tem sobre a utilização de vetores no ensino; e se, na visão destes, este objeto não ajuda no Ensino de Matemática. É importante salientar que nos referimos a etapas de ensino pertinentes ao Ensino Básico.

Com o intuito de responder essas perguntas, o presente trabalho possui como objetivo geral descrever a apropriação de um projeto metodológico de ensino, de caráter intervencionista que ressalta a utilização da abordagem vetorial, por um grupo de Licenciandos em Matemática. Através da descrição desse projeto metodológico de ensino, tentar identificar, partindo do ponto de vista de Licenciandos em Matemática, quais as perspectivas sobre o uso de uma abordagem vetorial no Ensino de Matemática e averiguar se a abordagem vetorial no Ensino de Matemática auxilia na compreensão e na aprendizagem Matemática, tal qual na realização de atividades pertinentes à Educação Básica (sendo ambos objetivos específicos). Portanto, com as metodologias e os instrumentos de pesquisa empregados, verificaremos se, de alguma maneira, os objetivos da pesquisa foram atingidos, e se as respostas foram sanadas.

Com relação ao objetivo geral, o capítulo anterior buscou trazer a descrição sobre o contato com uma turma de Licenciandos de Matemática da UERJ, que cursavam a disciplina de Práticas Pedagógicas em Matemática II, ao qual foram apresentados questionários e atividades que evidenciariam a abordagem vetorial no Ensino Básico. Tendo isto em vista, podemos concluir que o objetivo geral foi cumprido.

Ao que se refere ao objetivo "identificar, partindo do ponto de vista de Licenciandos em Matemática, quais as perspectivas sobre o uso de uma abordagem vetorial no Ensino de Matemática", obtivemos dados que interagem com esse objetivo em todos os instrumentos de coleta de pesquisa. Em todas as etapas, os sujeitos de pesquisa se mostraram favoráveis ao uso de uma abordagem vetorial em etapas do Ensino Básico. Além disso, os sujeitos declararam que se beneficiariam de ter uma abordagem vetorial durante a própria trajetória no Ensino Básico. Portanto, foi possível identificar uma perspectiva positiva que os Licenciandos em Matemática têm sobre a abordagem vetorial no Ensino de Matemática, fazendo com que esse objetivo específico fosse atingido.

Sobre o objetivo específico "averiguar se a abordagem vetorial no Ensino de Matemática auxilia na compreensão e aprendizagem Matemática, tal qual na realização de atividades pertinentes à Educação Básica", é possível analisar com respaldo no referencial teórico as respostas obtidas principalmente nas Atividades 1 e 3, tal qual os saberes emergidos durante as discussões realizadas com os participantes sobre essas atividades, e verificar se de fato a abordagem vetorial foi significativa na compreensão, aprendizagem e realização de atividades que foram propostas aos licenciandos.

Sobre as performances obtidas das atividades, constatamos que dos três sujeitos, pelo menos dois deles conseguiram realizar de maneira satisfatória Atividade 1. Mesmo apresentando erros durante a trajetória, Luciana conseguiu ao menos identificar e representar a ideia de vetor na atividade. Podemos dizer algo parecido sobre Felipe, que também cometeu erros na atividade, mas compreendeu que a questão sobre a localização do grupo que necessita de socorro poderia ser resolvida se as características vetoriais fossem de conhecimento do grupo que prestaria ajuda. Levando em consideração a Teoria de Duval, a Atividade 1 é rica em *atividades cognitivas*, permitindo as operações de *conversão*, *formação* e *transformação*, permitindo desse jeito que as representações semióticas pudessem ajudar na construção de conhecimento desses indivíduos. Além disso, os dois sujeitos identificaram que é uma atividade que é possível de se utilizar no Ensino Básico, sendo que um deles destaca que a Atividade "[...]envolve conceitos já conhecidos e utilizados no dia a dia do aluno". Isso é um indício de

que as características vetoriais podem ser percebidas no cotidiano dos estudantes, o que é uma oportunidade de se trabalhar a Matemática dentro do *mundo Conceitual – Corpóreo*.

Apesar de Rafael não ter tido um bom desempenho na Atividade 1, ele concluiu a Atividade 3 de maneira amplamente satisfatória. Em uma atividade em que as relações vetoriais de um caso particular conduziram o sujeito até uma generalização, se utilizando de sua flexibilidade e facilidade de trabalhar tanto no registro algébrico, quanto no geométrico, para compreender o que foi pedido na Atividade. Portanto, a abordagem vetorial facilitou com suas atividades cognitivas de *formação, tratamento* e *conversão* que o conhecimento fosse construído; além disso, essa atividade com vetores buscava desenvolver conceitos pertinentes aos *Mundos Proceitual – Simbólico* e *Formal – Axiomático*.

Luciana e Felipe encontraram algumas dificuldades de realizar a Atividade 3; mesmo não atingindo completamente o objetivo de nenhuma das questões propostas. Durante a sua trajetória, observamos como ele trabalhou com a abordagem vetorial, em que os aspectos não foram suficientes para que ele atingisse a generalização proposta pela atividade. Luciana, mesmo já demonstrando um contato mais sofisticado com vetores durante essa Atividade, não atingiu o objetivo, muito por uma relação vetorial de diferença que foi estabelecida de maneira errada, faltando muito pouco para ela atingir o objetivo. O apego por não tentar, durante os exercícios de caso particular, outras representações semióticas para as relações vetoriais, pode ter sido o motivo para o não cumprimento da Atividade de maneira satisfatória. O único que demonstrou fazer *conversões* entre as representações das somas vetoriais, que foi o caso de Rafael, conseguiu cumprir o objetivo da demonstração do exercício posterior.

É notório que os três sujeitos, durante a Atividade 3, comentaram sobre as dificuldades que emergiram. Essas dificuldades, de certa maneira, foram todas relacionadas com a abordagem vetorial. Luciana comentou que sua dificuldade foi relembrar as operações vetoriais, Rafael deu uma resposta parecida (as relações que ele teve dificuldade de lembrar eram justamente a operação de soma vetorial entre os vetores especificados), e Felipe teve dificuldade com as relações vetoriais em si; pelo menos Felipe e Luciana associaram essa dificuldade com a falta de hábito, o que é mais um sintoma sobre o fato da abordagem vetorial não ser suficientemente estimulada entre alguns dos sujeitos da pesquisa, que se encontram atualmente no Ensino Superior.

Nesse ponto, é importante relembrar sobre o período atípico em que essa pesquisa foi desenvolvida. Essa pesquisa começou a ser desenvolvida em *março de 2020*, por onde passou por um período de pandemia, que afetou as dinâmicas de Ensino em todas as suas esferas, seja no Ensino Básico, quanto no Superior, que sofreram com paralisações, transições entre Ensino

à Distância, Ensino Híbrido, para que finalmente, em 2022, no período em que foi realizado o trabalho de campo, pudéssemos ter o retorno presencial. Isso pode ter sido determinante para Felipe, que estava no 5° período, onde há a possibilidade de ter começado a cursar a graduação durante o período da pandemia. Essa possibilidade se confirma, pois, ao analisar o calendário da UERJ[21], vimos que o período em que o trabalho de campo se realizou (2022.1) seria equivalente ao quinto período de um aluno que iniciou em 2020. Portanto, não é nenhum absurdo imaginar que, dado o contato atípico que o licenciando teve com a disciplina de Geometria Analítica, isso pode ter acarretado a sua dificuldade em realizar as associações necessárias entre as relações vetoriais pedidas na Atividade 3.

Com toda essa discussão posta a mesa, com relação ao objetivo "averiguar se a abordagem vetorial no Ensino de Matemática auxilia na compreensão e aprendizagem Matemática, tal qual na realização de atividades pertinentes à Educação Básica", podemos concluir que foi atingido, ainda que parcialmente, pois verificamos que a abordagem vetorial auxiliou os sujeitos, mesmo que não na sua totalidade, na compreensão e na realização das Atividades 1 e 3. Vale lembrar que, como essa pesquisa possui traços de um Estudo de Caso, analisar os resultados obtidos de cada sujeito nos permite ter algum tipo de respaldo para as nossas conclusões, de maneira que não é a intenção dessa pesquisa extrapolar seus resultados em busca de uma generalização, e sim apenas analisar as inquietações pertinentes à pesquisa da perspectiva colocada.

Em vista disso, podemos concluir que as perguntas sobre a compreensão que os alunos de Licenciatura em Matemática, que possuem contato com tal objeto e que serão futuros professores, tem sobre a utilização de vetores no ensino; e se, na visão destes, este objeto não ajuda no Ensino de Matemática nas etapas do Ensino Básico, foram respondidas: os alunos de Licenciatura tem uma compreensão de que vetores devem ser utilizados sim no Ensino de Matemática nas etapas do Ensino Básico, auxiliando, disponibilizando mais dispositivos, tanto para professores, quanto para alunos, de se realizar um Ensino de Matemática eficaz.

Quanto as minhas próprias inquietações, principalmente sobre o motivo da abordagem vetorial não ser utilizada no Ensino de Matemática nas etapas do Ensino Básico, ainda não encontrei respostas contundentes, apesar de ter encontrado pistas durante a pesquisa, partindo da perspectiva dos Licenciandos. Na perspectiva dos sujeitos, o problema se encontra na grade conteudista e massiva, nas metodologias de ensino tradicionalistas, que não estão 'preparadas para o novo'. Sendo assim, não podemos dizer que esse assunto foi encerrado, muito pelo

[21] Para isso, foi levado em consideração o calendário desde 2020, até o de 2022. O calendário está disponível em https://www.uerj.br/ensino/calendario-academico/#custom-collapse-0-2

contrário. Existem perspectivas para novas pesquisas e investigações, lideradas por essas pistas. Será que o problema de fato reside na grade, no currículo de matemática? O que será que os especialistas, que constroem o currículo de matemática, que trabalham com a elaboração e seleção dos Livros Didáticos para o Ensino básico, pensam da abordagem vetorial? Além disso, o que será que os professores de matemática do Ensino Básico pensam sobre a abordagem vetorial? Qual é a impressão que os estudantes do Ensino Básico têm sobre a abordagem vetorial? Será que é possível, dado as condições atuais da educação brasileira, um horizonte onde a abordagem vetorial seja utilizada amplamente no Ensino de Matemática nas etapas do Ensino Básico? Essas são perguntas que apenas novas pesquisas poderão responder.

Tendo isto em vista, após a conclusão dessa pesquisa, espera-se que este estudo promova e auxilie discussões sobre a abordagem vetorial no Ensino Básico, tanto nos meios acadêmicos, quanto entre professores do Ensino Básico, para que, de maneira conjunta, a abordagem vetorial seja ao menos mais considerada como mais um dispositivo capaz de auxiliar na Educação Matemática na nossa educação brasileira.

REFERÊNCIAS

ALVES, J. H. G. M.; RIBEIRO, E. O.; MATHESON, G. S. G.; LIMA, J. A. M.; RIBEIRO, C. E. P. **Reconstituição do clima de ondas no sul-sudeste brasileiro entre 1997-2005.** Revista Brasileira de Geofísica, set. 2009.

ANDRÉ, M. **O que é um estudo de caso qualitativo em educação?** Revista da FAEEBA – Educação e Contemporaneidades, Salvador, v. 22, n. 40, p. 95-103, 2013.

ASSEMANY, D**. Insubordinação criativa, auto(trans)formação e conexões matemáticas:** Engendrando saberes na autoformação de professores portugueses. 2018. Tese (Doutorado em Ciências) - Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, 2018.

ASSEMANY, D. **O ensino e aprendizagem dos vetores no 1° ano do Ensino Médio: Uma reestruturação curricular**. III Colóquio de Educação Matemática – UFJF – 2011.

ASSEMANY, D. **Uma proposta metodológica para a Geometria Vetorial no Ensino Médio.** Sensos – e, v.III, n.2, 2017. Disponível em: http://sensos-e.ese.ipp.pt/?p=11918&lang=en. Acesso em: 27 de set. 2020.

ASSEMANY, D.; COSTA, C.; MACHIAVELO, A. **Uma proposta para montar o puzzle dos conteúdos do Ensino Secundário de matemática a partir do conceito de vetor**. Oficina de Formação Contínua; Universidade do Porto; Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro. 2018.

ASSEMANY, D.; HARAB, L. **Potencializando o ensino de números complexos através da abordagem vetorial**. VII CIBEM, Montevideo, 2013.

AZEVEDO, C. A. M. **A contribuição dos vetores na reestruturação curricular do Ensino Médio: Um estudo de caso.** Monografia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2013.

BASSEY, M. **Case study research in educational settings**. Londres: Open University Press, 2003.

BETH, E.W.; PIAGET J. **Mathematical Epistemology and Psychology** (W. Mays, trans.), Dordrecht: Reidel, 1966.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: FIORENTINI, D; GARNICA, A. V. M; BICUDO, M. A. V. (org.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2017.

BITTAR, M. **O ensino de vetores e os registros de representação semiótica.** *In:* Machado, Silvia Dias Alcântara (org). Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica. 8. ed. 1. reimpr. São Paulo: Ed. Papirus, 2013. p. 71-94.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Secretaria de Educação**. Base Nacional Comum Curricular:** Proposta preliminar, Segunda Versão Revista. MEC/CONSED, 2016. Disponível em: http://undime-sc.org.br/wp-content/uploads/2016/05/2%C2%AA-BNCC-BOOK.pdf. Acesso em: 10 out. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2018)**. Brasília: MEC/SEB. Acesso em 15 de out, 2019. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 2006. v. 2.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Médio. Brasília: MEC/SEMTEC, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. **PNLD 2018: matemática** – guia de livros didáticos – Ensino Médio/ Ministério da Educação – Secretária de Educação Básica – SEB – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, 2017. 122 p.

CROWE, M. **A History of Vector Analysis**. The Evolution of the Idea of a Vectorial System. London: Notre Dame. 1967.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. **A Experiência Matemática.** Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1986.

DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento.** Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano**: registro semiótico e aprendizagens Intelectuais (Sémiosis et Penspee Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels): (fascículo I). São Paulo, Brasil, 2009. Ed. Livraria da física.

FLORES, J. B.; LIMA, V. M. R.; MÜLER, J. T. **Convergências e Complementariedades entre as Teorias dos Três Mundos da Matemática e da Sociointeratividade.** Bolema, Rio Claro - SP, v. 34, n. 68, p. 1341-1358, dez. 2020

FREITAS, J. L. M.; REZENDE, V. **Entrevista: Raymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica.** Revista Paranaense de Educação, v.2, n.3. Campo Mourão, Paraná**,** jul-dez 2013.

FURTADO, A. L. C. **Dificuldades nas aprendizagens de conceitos abstratos da álgebra linear**. Dissertação. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GRAY, E.; TALL, D. **Duality, ambiguity e flexibility in successful mathematical thinking.** PME 15, Assisi, 2 72-79, 1991.

GRAY, E.; TALL, D**.** Duality, ambiguity e flexibility in successful mathematical thinking. **The jornal for research in mathematics education,** v. 26, n. 2, p. 115-141, 1994.

GREENO, J. G. **Response to Phillips.** Education Psychologist, v. 12, i. 2, p. 75-80. DOI: 10.1080/00461528309529264. 1983.

GIRALDO, V. A. Formação de Professores de Matemática: para uma abordagem problematizada. **Revista Ciência e Cultura**, São Paulo, v. 70, n. 01, p. 37 - 42, jan-mar-2018.

GOODE, W. J.; HATT, P. K. **Métodos em pesquisa social.** 5. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1979.

HAMEL, J. **Case study methods**. London: SAGE Publications, 1993.

HIEBERT, J. *A.* **Theory of Developing Competence with Written Mathematical Symbols.** In: Educational Studies in Mathematics. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, v. 19, p. 333-355, 1988.

IME –INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA DA UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO. **Licenciatura em Matemática.** c2015. Página inicial > Graduação>Licenciatura em Matemática. Disponível em: https://www.ime.uerj.br/licenciatura-em-matematica/ Acesso em 30 de out. de 2022.

IMPA – INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA. **Livro aberto de matemática:** vetores no plano. Rio de Janeiro, 2021. Disponível em: https://docs.google.com/viewer?url=https://github.com/livro-aberto/tex-design-development/raw/master/Cap%C3%ADtulos%20prontos%20-%20Aluno/Vetores%20no%20Plano.pdf ;

LIMA, E. L. et al. **Exame de Textos:** Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio. SBM, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.

LIMA, R. N. **Equações algébricas no Ensino Médio:** Uma jornada por diferentes mundos da matemática. Tese. Pontífice Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação:** Abordagens Qualitativas. São Paulo: EPU, 1986

MAZZOTTI, A. J. Usos e abusos dos estudos de caso. **Cadernos de Pesquisa,** v. 36, n. 129, p. 637-651, set./dez. 2006.

MÜLLER, T. J. **Objetos de aprendizagem multimodais e o Ensino de Cálculo:** uma proposta baseada em análise de erros. 2015. Tese. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2015.

NASSER, L.; SOUZA, G. A. & TORRACA, M. A. A**. Transição do Ensino Médio para o Superior:** como minimizar as dificuldades em Cálculo? V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Petrópolis, 2012. Rio de Janeiro, Brasil.

NASSER, L.; VAZ, R. F. M. & TORRACA, M. A. A. **Transição do Ensino Médio para o Superior:** Investigando Dificuldades em Geometria Analítica. VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Pirenópolis, Goiás, Brasil, 2015.

PATRÍCIO, R. S. **As dificuldades relacionadas à aprendizagem do conceito de vetor à luz da teoria dos registros de representação semiótica**. 2010. Dissertação. Universidade Federal do Pará, Belém, 2010.

PIAGET, J. **The principles of Genetic Epistemology** (W. Mays trans.). London, 1972.

PIAGET, J. **A formação do símbolo na criança.** Rio de Janeiro: Editora Zahar, 1978.

RIGONATTO, M. **Introdução ao estudo de vetores e Aplicações no Ensino Médio**. 2018. Dissertação. Universidade Federal de Goiás. Goiânia, 2018.

SANTAELLA, L. **O que é semiótica**. Coleção Primeiros Passos, v. 103. Editora Brasiliense, São Paulo, 32ª reimpressão, 2012.

SANTOS, L. S. **Vetores:** Um conceito matemático. 2014. Dissertação. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

SFARD, A. **Transition from Operational to Structural Conception**: The notion of function revisited. Proceedings of PME XIII, Paris, 1989.

STAKE, R. E. **The art of case study research**. London: SAGE Publications, 1995.

TALL, D. **Thinking Through Three Worlds of Mathematics.** In: Conference of the International group for the psychology of mathematics education. 28., 2004, Bergen. Proceedings. Bergen: PME, 2004. p. 281-288.

TALL, D; VINNER, S. **Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity.** Educations studies in Mathematics. The Netherlands, Kluwer Academics Publishers, v. 12, p. 151-169, 1981.

THIOLLENT, M. **Metodologia da pesquisa-ação**. São Paulo: Cortez, 1986.

TRIPP, D. **Pesquisa-ação: uma introdução metodológica**. Revista Educação e Pesquisa, São Paulo, v. 31, n. 3, p. 443-466, set./dez. 2005. Disponível em: https://www.scielo.br/pdf/ep/v31n3/a09v31n3.pdf. Acesso em: 20 nov. 2020.

UERJ. – UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO. **A Universidade,** c2018. Página institucional contendo informações sobre a universidade. Disponível em https://www.uerj.br/a-uerj/a-universidade/. Acesso em: 30 de out. de 2022.

VENTURA, M.M. **O estudo de caso como modalidade de pesquisa.** Revista da Sociedade de Cardiologia do Estado do Rio de Janeiro – SOCERJ. Rio de Janeiro, p. 383-386, set/out 2007.

APENDICE A – QUESTIONÁRIO 1

QUESTIONÁRIO 1[22]

Sessão 1: Conhecimentos pessoais

1 – Qual é o seu nome completo?

_____
_____

2 – Qual a sua idade?

_____

3 – Qual é a sua identidade de gênero?

( ) Feminino ( ) Masculino ( ) Outro:_____ ( ) Prefiro não dizer

4 – Em qual bairro e município você reside?

_____

5 – Em qual período da graduação você se encontra?

_____

6 – Possui alguma outra formação de nível superior? Se sim, qual?

( ) Não ( ) Sim: _____

7 – Pretende seguir carreira de professor de matemática? Se não, qual outra carreira você tem em mente para o futuro?

( ) Sim ( ) Não: _____

Seção 2: Conhecimentos sobre o conteúdo de vetores

8 – Você já teve contanto com o conteúdo de vetores durante a sua trajetória estudantil?

( ) Não ( ) Sim

9 – Em qual (quais) nível (níveis) de ensino você teve contato com o conteúdo de vetores?
( ) Ensino Fundamental ( ) Ensino Médio ( ) Ensino Superior ( ) Não tive contato.

10 - Em caso de contato com vetores no Ensino Fundamental/Ensino Médio, o contato se deu em qual (quais) assunto(s)?

[22] Versão online disponível em: https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSdkBGxyFyvYlfGDyelDnhMqeqFRLm__yxLJEhCjW_EZHdzPIg/viewform?usp=sf_link

_____
_____
_____

11 – Na sua concepção, o conteúdo de vetores é de:

( ) Fácil compreensão ( ) Média compreensão ( ) Difícil compreensão

12- Você é capaz de definir vetor sem utilizar nenhum material para consulta? Se sim, defina vetores com as suas próprias palavras.

_____
_____
_____

13- Qual é a sua opinião sobre como deve ser feito o ensino de vetores?

_____
_____
_____

14 - Em qual/quais nível/níveis de Ensino você acredita que o ensino de vetores deve ser abordado?

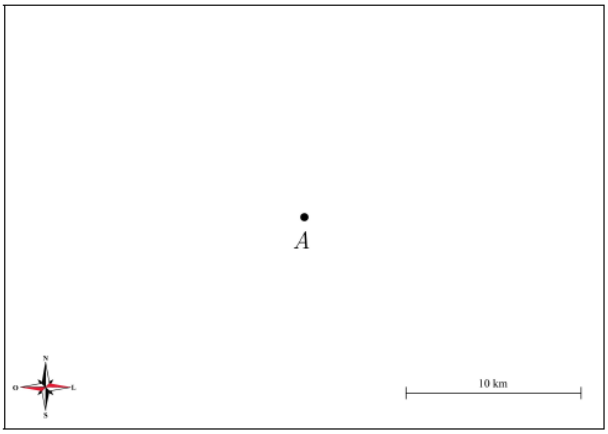
_____
_____
_____

APÊNDICE B – ATIVIDADE 1

Atividade 1 – Localizando o Grupo no mapa

Resgate na Antártida — Atividade 1

A figura a seguir exibe um mapa onde o pontorepresenta a localização de uma estação de pesquisa A na Antártida.



Fonte: IMPA, 2021.

Responda às seguintes perguntas:

1- Supondo que o grupo presente na estação de pesquisa receba um comunicado informando que há um outro grupo de pesquisadores que necessita de socorro, seria possível localizar o grupo que precisa de socorro apenas com a informação de que eles se encontram à 10 quilômetros de distância? Por quê?

_____
_____
_____

2- Se tentarmos traçar todas as possibilidades de localização onde o grupo que precisa de socorro está, formaríamos qual figura geométrica?

_____

3- Se, ao invés da informação representada anteriormente na questão 1, suponha que o grupo presente na base recebesse a informação de que um outro grupo de pesquisadores precisa de socorro, estando estes localizados à leste da base. Seria possível determinar a localização exata do grupo que precisa de socorro, sem sair da base de pesquisas? Por quê?

_____
_____
_____

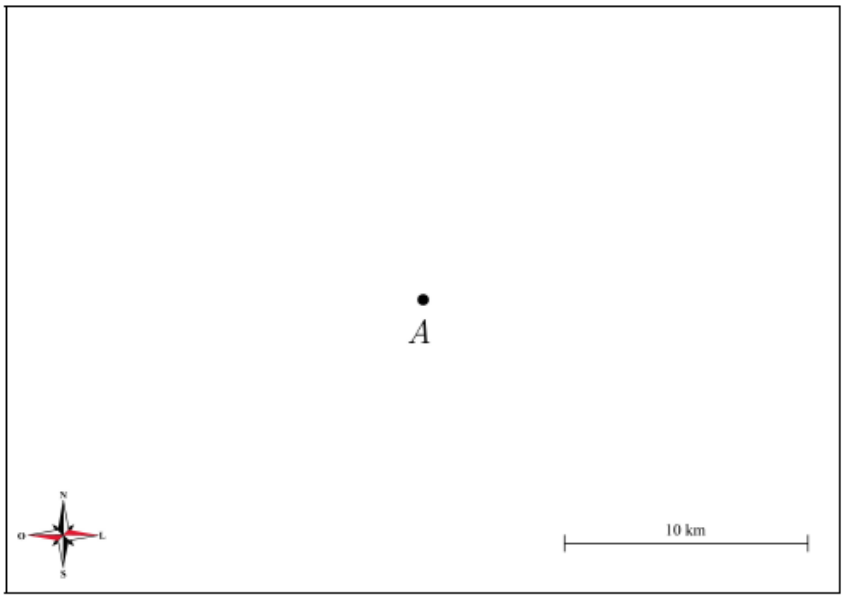
4- Se tentarmos traçar todas as possibilidades de localização onde o grupo que precisa de socorro está, formaríamos qual figura geométrica?

_____

5- Se, após a informação da questão 3 ter sido captada, o grupo presente na base recebesse uma nova informação, dizendo que o grupo que precisa de socorro está à 10 km da base na direção leste, seria possível determinar a localização exata do grupo que precisa de socorro? Por quê?

_____
_____

6- Represente o deslocamento realizado pelo grupo de resgate que sai da base, em direção ao grupo que necessita de socorro. Que figura foi formada?



7- Quais as características da figura que representa o deslocamento obtido no exercício anterior?

_____
_____
_____

8- Na sua perspectiva como futuro(a) professor(a) de matemática, você acha plausível utilizar essa atividade com os alunos em sala de aula? Por quê?

_____
_____
_____

9- Em qual ano, série ou segmento você acredita ser o mais adequado para a aplicação dessa atividade?

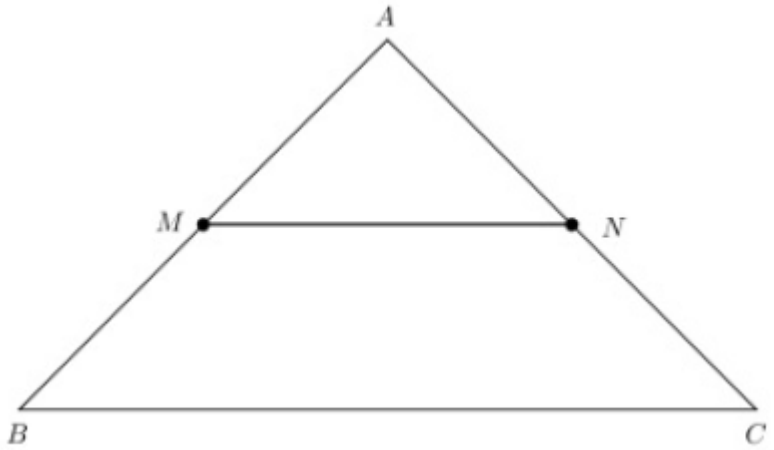
_____

APÊNDICE C – ATIVIDADE 3

Atividade 3 – Base média de um triângulo

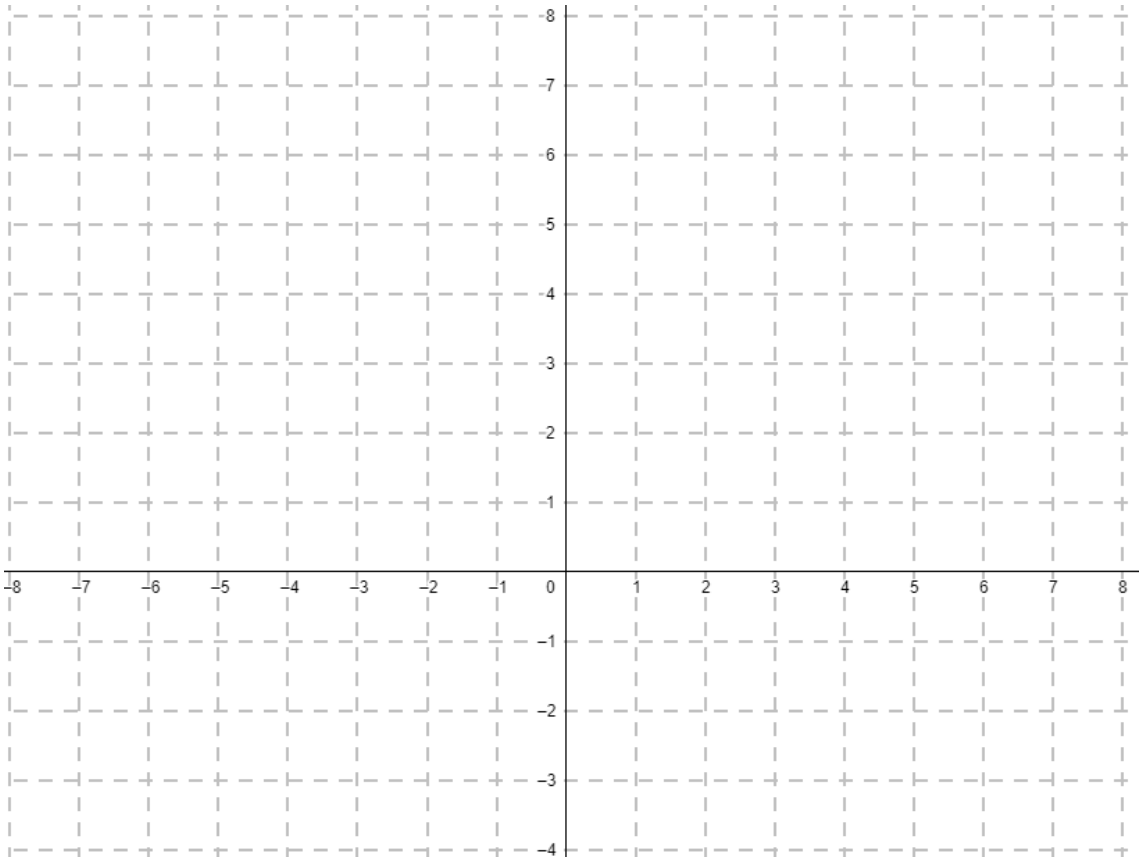
Leia o enunciado a seguir e faça o que lhe é pedido:

> "Sejam M e N pontos médios de dois lados do triângulo ABC. Mostre que MN é paralelo ao terceiro lado e é metade deste. (Teorema da base média do triângulo)"



Esse é um exercício de demonstração que pode ser aproveitado para realizar uma conexão com vetores. Acompanhe os seguintes passos:

1- Sejam os pontos A (4,6), B (2,2), C (8,2) vértices de um triângulo; considere M o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e N o ponto médio do segmento $\overline{AC}$; determine se o segmento $\overline{MN}$ mede metade de $\overline{BC}$



2- Com relação aos vetores $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{MN}$, além da relação do módulo, o que mais eles têm em comum?

_____

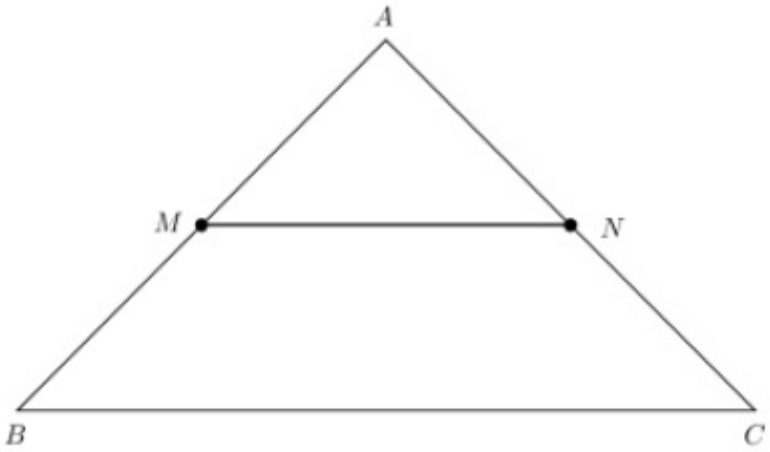
_____

3- É possível determinar a relação entre os vetores $\overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{BC}$?

4- É possível estabelecer alguma relação entre os vetores $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}$ *e* $\overrightarrow{BC}$? E entre os vetores $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AN}$ *e* $\overrightarrow{MN}$?

5- Volte ao teorema da base média, apresentada no começo da atividade, e tente demonstrar utilizando uma abordagem vetorial.

"Sejam M e N pontos médios de dois lados do triângulo ABC. Mostre que MN é paralelo ao terceiro lado e é metade deste. (Teorema da base média do triângulo)"



6- Qual a maior dificuldade encontrada em realizar a atividade anterior?

_____

_____

7- Você, como professor(a), consideraria trabalhar esse tipo de demonstração para seus alunos do Ensino Básico? Por quê?

_____
_____

APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO FINAL

Questionário Avaliativo Final[23]

1 – Nome:

_____

2 – Qual é a sua opinião sobre uma abordagem vetorial no ensino de matemática?

_____
_____
_____
_____
_____

3 – Você acredita que existe alguma possibilidade da utilização da abordagem vetorial em alguma etapa no ensino de matemática para a Educação Básica? Por quê?

_____
_____
_____
_____
_____

4 – Você acredita que se beneficiaria de uma abordagem vetorial enquanto estudante de matemática na Educação Básica? Por quê?

_____
_____
_____
_____
_____

5 – Na sua opinião, por qual motivo a abordagem vetorial não é usualmente utilizada na educação básica?

_____
_____
_____

[23] Versão online disponível em: https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSfZpWGq4uKbzC_DpbXF8uTmL_8KlouJ3HY4eRrVb-dUlPTGeQ/viewform?usp=sf_link

_____
_____

6 – Com tudo o que foi debatido nos encontros, você consideraria utilizar a abordagem vetorial no ensino de matemática na sua prática professoral?

_____