



Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Faculdade de Engenharia

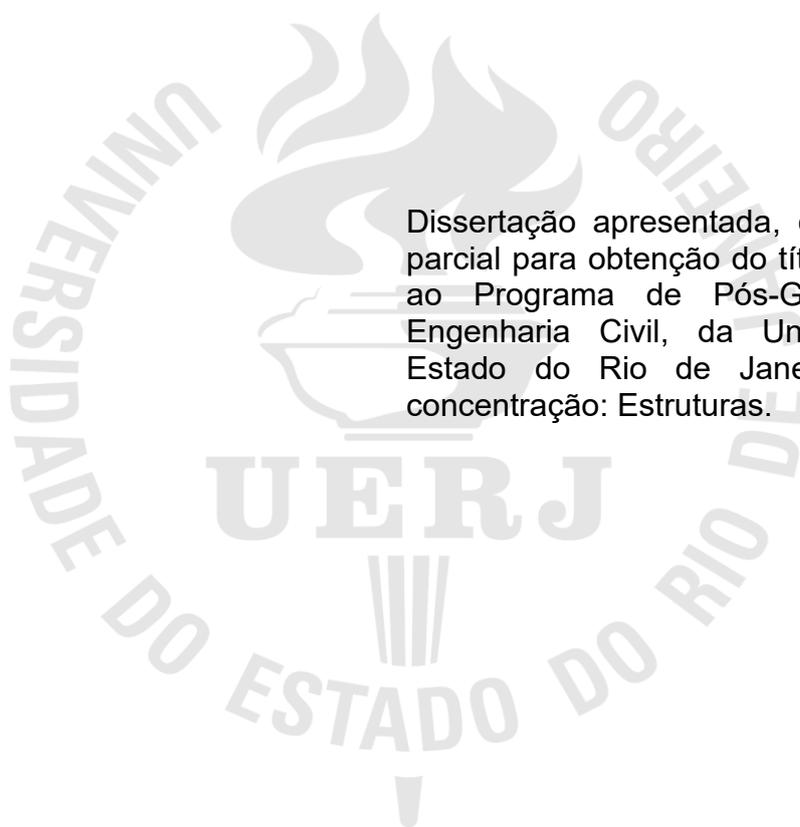
Matheus Barros do Amaral

**Análise comparativa da formulação “exata” de elementos pela
teoria de Timoshenko com o software de elementos finitos
MASTAN2 para problemas de instabilidade de colunas e pórticos**

Rio de Janeiro
2024

Matheus Barros do Amaral

Análise comparativa da formulação “exata” de elementos pela teoria de Timoshenko com o software de elementos finitos MASTAN2 para problemas de instabilidade de colunas e pórticos



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Bird Burgos

Rio de Janeiro

2024

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

A485 Amaral, Matheus Barros do.
Análise comparativa da formulação “exata” de elementos pela teoria de Timoshenko com o software de elementos finitos MASTAN2 para problemas de instabilidade de colunas e pórticos / Matheus Barros do Amaral. – 2024.
72 f.

Orientador: Rodrigo Bird Burgos.
Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro,
Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia civil - Teses. 2. Análise estrutural (Engenharia) - Teses. 3. Colunas - Teses. 4. Pórticos estruturais - Teses. 5. Análise funcional não-linear - Teses. 6. Equações diferenciais - Teses. 7. Método dos elementos finitos - Teses. I. Burgos, Rodrigo Bird. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia. III. Título.

CDU 624.073.13

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Matheus Barros do Amaral

Análise comparativa da formulação “exata” de elementos pela teoria de Timoshenko com o software de elementos finitos MASTAN2 para problemas de instabilidade de colunas e pórticos

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Estruturas.

Aprovado em: 24/09/2024.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Rodrigo Bird Burgos (Orientador)
Faculdade de Engenharia – UERJ

Prof. Dr. José Guilherme Santos da Silva
Faculdade de Engenharia – UERJ

Prof. Dr. Gilvan Lunz Debona
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ

Rio de Janeiro

2024

DEDICATÓRIA

A Deus, por sempre cuidar de mim. Ao meu pai, minha mãe e minha irmã, pelo apoio incondicional. A minha família, por todo carinho.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Wellington e Cíntia, por todo apoio familiar, incentivo e orações.

A minha irmã, Raquel, por sempre me incentivar nos momentos difíceis.

A minha namorada, Thuany, por toda paciência, cuidado e carinho.

Ao meu orientador, Prof. Doutor Rodrigo Bird Burgos, por toda ajuda, paciência e orientação.

A todos professores do PGECIV, pelos ensinamentos.

A empresa e meus colegas de trabalho, pela disponibilidade e paciência com os meus estudos.

Aos meus colegas de mestrado, pelo companheirismo.

A UERJ, porque sem ela não poderia ter realizado este sonho.

A todos aqueles, que embora não citados nominalmente, contribuíram direta e indiretamente para a execução deste trabalho.

Alguns homens veem as coisas como são, e dizem 'Por quê?'
Eu sonho com as coisas que nunca foram e digo 'Por que não?'

Geroge Bernard Shaw

RESUMO

AMARAL, Matheus Barros do. *Análise comparativa da formulação “exata” de elementos pela teoria de Timoshenko com o software de elementos finitos MASTAN2 para problemas de instabilidade de colunas e pórticos*. 2024. 72 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2024.

Uma das estratégias usuais utilizadas para resolver problemas geometricamente não lineares é a utilização do método dos elementos finitos, discretizando a estrutura para resultados satisfatórios. O processo de escolha do refinamento da malha (discretização) é definido, basicamente, de acordo com a experiência do analista. Sendo assim, muitas vezes estudantes de engenharia ou recém-formados não possuem a bagagem necessária para escolher de forma adequada o grau de discretização da estrutura, ocasionando resultados fora da realidade ou aumento exagerado do custo computacional para essa análise. A teoria de vigas de Timoshenko, considerada a mais próxima da realidade, leva em consideração a deformação por cisalhamento, além da deformação decorrente da flexão, diferentemente da teoria de vigas de Euler-Bernoulli. O método dos dois ciclos iterativos, utilizando como base o elemento “exato”, se mostra mais simples para análises não lineares em comparação com métodos tradicionais, como o método de Newton-Raphson e outras estratégias iterativas, tendo em vista que seu resultado independe do grau de discretização da estrutura. Sendo assim, o objetivo desse trabalho é realizar uma análise comparativa utilizando o método dos dois ciclos iterativos com a consideração da distorção por cisalhamento por meio do software Matlab, com o software de análise não linear Mastan2, utilizando métodos tradicionais. Os resultados demonstram a eficiência do método dos dois ciclos iterativos, sem discretização, em comparação aos resultados do Mastan2 discretizado em mais elementos.

Palavras-chave: Teoria de Timoshenko; Análise Não-Linear; Equações diferenciais; Análise de Elementos Finitos.

ABSTRACT

AMARAL, Matheus Barros do. *Comparative analysis of the “exact” formulation of elements using Timoshenko theory with results from MASTAN2 finite element software for instability problems of columns and frames*. 2024. 72 f. Master's thesis (Master of Science in Civil Engineering) – Engineering Faculty, Rio de Janeiro State University, Rio de Janeiro, 2024.

One of the usual strategies used to solve geometrically nonlinear problems is the use of the Finite Element Method, discretizing the structure for satisfactory results. The process of choosing the mesh refinement (discretization) is defined according to the analyst's experience. Therefore, engineering students or recent graduates often do not have the necessary knowledge to appropriately choose the degree of discretization of the structure, resulting in unrealistic results or an exaggerated increase in the computational cost for this analysis. Timoshenko's beam theory, considered more realistic, considers shear deformation, in addition to deformation resulting from bending, unlike Euler-Bernoulli beam theory. The two-cycle iterative method, using the "exact" element as a basis, proves simpler for non-linear analyses compared to traditional methods like Newton-Raphson and other iterative strategies, as its result is independent of the degree of structure discretization. Thus, the objective of this work is to perform a comparative analysis using the two-cycle iterative method with the consideration of shear distortion using the Matlab software, with the non-linear analysis software MASTAN2, using traditional methods. The results demonstrate the efficiency of the two-cycle iterative method, with no discretization, compared against results from MASTAN2 using discretization.

Keywords: Timoshenko's theory. Non-Linear analysis. Differential equations. Finite Element analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Modelo de viga Bernoulli e Timoshenko, (Silva, 2019).....	14
Figura 2 – Consideração do cisalhamento na viga de Timoshenko, (Martha e Burgos, 2014)	18
Figura 3 – Graus de liberdade de viga à flexão, (Filho, 2002).....	19
Figura 4 – Deslocamento unitário linear no grau de liberdade 1, (Filho, 2002).	20
Figura 5 – Bifurcação de equilíbrio, adaptado (Branco, 2002)	25
Figura 6 – Equilíbrio de forças em coluna isolada, (Silva, 2017).....	26
Figura 7 – Efeitos de segunda ordem, (Silva, 2022)	28
Figura 8 – Posições de equilíbrio estático, (Burgos, 2005)	32
Figura 9 – Discretização de um objeto real (a esquerda) e seu modelo discretizado (a direita), (Felippa,2001)	36
Figura 10 – Elemento de treliça, (Burgos, 2005).....	38
Figura 11 – Elemento de viga, (Burgos, 2005).....	42
Figura 12 – Elemento de Pórtico, (Burgos, 2005)	43
Figura 13 – Campo de deformação da viga, (Rodrigues, 2019).....	44
Figura 14 – Esforços resultantes iniciais, (Galvão, 2000)	47
Figura 15 – Elemento infinitesimal na configuração deformada, (Martha e Burgos, 2015)	49
Figura 16 – Viga engastada e livre, adaptada, (Silva, 2022).....	57
Figura 17 – Coluna biapoiada com momentos opostos nas extremidades, adaptado, (Silva, 2022).	58
Figura 18- Viga Engastada e Livre, (Silva, 2022)	60
Figura 19 – Curva de equilíbrio coluna engastada e livre pelo Matlab e Mastan2	61
Figura 20 -Coluna biapoiada com momentos opostos nas extremidades, adaptado, (Silva, 2022).	62
Figura 21 – Curva de equilíbrio coluna biapoiada pelo Matlab e Mastan2	63
Figura 22– Pórtico de Roorda, (Silva, 2022)	64
Figura 23- Curva de equilíbrio coluna pórtico de Roorda pelo Método dos dois Ciclos Iterativos - Matlab e Mastan2.	65

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Fluxograma aplicação Método dois Ciclos Iterativos.....	31
Tabela 2 – Comparação deslocamentos Euler Bernoulli - Timoshenko	57
Tabela 3 – Comparação rotação Euler Bernoulli - Timoshenko	58

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
NBR	Norma Brasileira

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área da seção transversal
A_c	Área cisalhante
d	Vetor de deslocamento das estruturas
E	Módulo de elasticidade
f	Vetor de forças
G	Módulo de cisalhamento do material
I	Momento de inércia
K	Matriz de rigidez da estrutura
K_{el}	Matriz de rigidez do elemento
K_e	Matriz de rigidez elástica da estrutura
K_g	Matriz de rigidez geométrica da estrutura
K_t	Matriz de rigidez tangente da estrutura
L	Comprimento do elemento
N_i	Funções de forma
N_θ	Funções de forma rotação
N_v	Funções de forma translação
P	Força axial
U	Energia interna de deformação
u	Vetor de deslocamentos axiais
V	Energia potencial das cargas externas
v	Vetor dos deslocamentos transversais
π	Energia potencial total
$\Delta\pi$	Variação da energia potencial total
ΔW_e	Trabalho realizado por forças externas
δ	Parâmetro de deslocamento
λ	Parâmetro de carga
ε	Módulo de deformação
γ	Módulo de deformação cisalhante
γ_c	Distorção por cisalhamento
χ	Fator de cisalhamento
θ	Vetor de rotação

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	14
1 ELEMENTO DE TIMOSHENKO	18
1.1 Introdução	18
1.2 Matriz de Rigidez Elemento de Viga – Euler Bernoulli	19
1.3 Matriz de Rigidez Elemento de Viga - Timoshenko	21
1.4 Fator de Cisalhamento	22
2 ANÁLISE NÃO LINEAR	24
2.1 Introdução	24
2.2 Análise não linear geométrica	25
2.2.1 Método $P\Delta$	26
2.2.2 Método Y_z	28
2.2.3 Método dos dois ciclos iterativos	29
2.3 Estabilidade estrutural	31
2.3.1 Critérios de estabilidade estrutural	32
2.3.1.1 Critério Estático	32
2.3.1.2 Critério Dinâmico	33
2.3.1.3 Critério Energético	33
3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	36
3.1 Introdução	36
3.2 Formulação do elemento de pórtico	37
3.3 Referenciais Lagrangeanos	43
3.4 Matriz de rigidez	44
3.4.1 Matriz de rigidez elástica	45
3.4.2 Matriz de rigidez geométrica	46
3.4.2 Matriz de rigidez tangente	48
3.4.2.1 Funções de Forma para o elemento infinitesimal considerando a configuração deformada.	49
3.5 Cargas nodais equivalentes	53
3.6 Carga crítica	54
4 EXEMPLOS NUMÉRICOS	56
4.1 Introdução	56

4.2 Comparativo da influência do cisalhamento Timoshenko e Euler Bernoulli.	56
4.2.1 Coluna engastada e livre	56
4.2.2 Coluna biengastada com momento nas extremidades.....	58
4.3 Comparativo método dois ciclos iterativos pelo <i>Matlab</i> e <i>Mastan2</i>.	59
4.3.1 Engastada e Livre	59
4.3.2 Biengastada com momentos nas extremidades	61
4.3.3 Pórtico de Roorda	63
5 CONCLUSÃO	66
5.1 Sugestões para futuros trabalhos.	67
REFERÊNCIAS.....	68

INTRODUÇÃO

Um dos importantes passos no dimensionamento estrutural é a escolha do modelo matemático a ser considerado para retratar o fenômeno que se espera. Dois desses modelos se destacam como teorias de maior utilização: Teoria da viga de Euler-Bernoulli e Teoria da Viga de Timoshenko.

A teoria de Euler-Bernoulli considera que, para pequenos deslocamentos, as seções transversais permanecem planas e formam um ângulo de 90° com a linha neutra da viga. Porém, essas considerações levam em conta algumas premissas, como pequenos deslocamentos e deformações.

A teoria de Timoshenko considera o efeito da distorção por cisalhamento no elemento. Segundo Silva (2019), quando a distorção é considerada, as seções transversais não ficam necessariamente planas a seção transversal. Ou seja, ocorre um empenamento da seção. Esse efeito fica acentuado em vigas com baixos valores na relação entre o vão e a seção, vigas altas. A Figura 1 mostra a diferença na consideração da distorção por cisalhamento entre as vigas de Bernoulli e de Timoshenko.

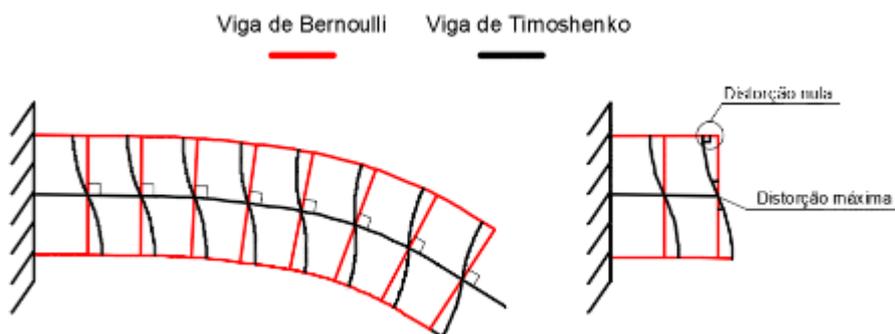


Figura 1 – Modelo de viga Bernoulli e Timoshenko, (Silva, 2019)

A utilização de softwares de análise não linear tem ganhado cada vez mais espaço no mercado. Os avanços computacionais permitiram que a análise de elementos finitos seja cada vez mais utilizada no dia a dia. Um dos pontos principais na consideração de uma análise é a utilização do método dos elementos finitos (MEF), que se baseia na discretização do elemento. De acordo com Filho (2002), a discretização trata-se da divisão da estrutura em partes menores, conectadas entre

si nos pontos discretos, funcionando como uma montagem dos elementos. Sendo assim, um dos importantes passos nesse tipo de análise é a correta escolha do refinamento da malha do modelo analisado.

Rodrigues (2019) diz em seu trabalho que a resposta de uma análise numérica está intimamente ligada a alguns fatores, como: teoria de flexão adotada; a descrição cinemática do problema, as funções de interpolação utilizadas e a metodologia de análise não linear adotada.

Neste trabalho, a teoria de flexão que será analisada é a de Timoshenko, que considera o efeito da distorção por cisalhamento no elemento, além da flexão. Diversos autores estudaram essa teoria, como Timoshenko & Gere (1963) e Friedman & Kosmatka (1993).

Considerando a descrição cinemática, para problemas de não linearidade geométrica, duas aplicações são destacadas: a Lagrangeana Total e a Lagrangeana Atualizada, se diferindo basicamente na referência adotada para a análise.

Em relação a ao tipo de análise adotada, segundo Fuina (2004), quando um modelo tem um ponto de instabilidade, diversos procedimentos podem ser utilizados para obtenção do caminho de equilíbrio, entre eles se destacam o método do Newton-Raphson e método do comprimento de arco. Outros métodos simplificados também são utilizados para esse fim, com a vantagem de utilizar menos custo computacional, como o método do coeficiente Y_z utilizado pela NBR 6118 (2023), método $P\Delta$ desenvolvido por Chen & Lui (1991), e o método dos dois ciclos iterativos desenvolvido por Chen & Lui (1991), que será utilizado nesse trabalho.

De acordo com Rodrigues (2019), as funções de interpolação cúbicas são as mais utilizadas e se trata da solução da equação diferencial do equilíbrio de um elemento infinitesimal na configuração indeformada. Porém, para casos de análise não linear geométrica, essa abordagem não é adequada, sendo necessário a discretização da estrutura. Sendo assim, muitos autores exploram alternativas para análises não lineares, buscando soluções exatas baseadas na configuração deformada da estrutura.

O trabalho de Davis et al. (1972) desenvolveu um elemento considerando a deformação por cisalhamento partindo do elemento na condição deformada. Já Zhaohua & Cook (1983) estudaram elementos finitos de vigas sob bases elásticas, porém sem considerar o efeito da distorção por cisalhamento. Shirima & Giger

(1992) obtiveram a matriz de rigidez e o vetor de cargas externas a partir da solução exata das equações diferenciais.

Onu (2008), de acordo com Burgos & Martha (2013), foi o primeiro autor a estudar a combinação dos efeitos de cargas axiais, carregamento transversal e distorção por cisalhamento. Burgos & Martha (2013) apresentaram o cálculo das soluções analíticas para as funções de forma. Rodrigues (2019) desenvolveu a matriz de rigidez tangente tridimensional considerando a deformação por cisalhamento e termos de ordem elevada do tensor de deformação. Já Silva (2017) estudou a aplicação do método dos dois ciclos iterativos no software Ftool. O trabalho de Silva (2022) estudou a aplicação do método dos dois ciclos iterativos como forma de análise não linear, sem a consideração da distorção por cisalhamento.

Percebe-se, portanto, que o estudo de métodos de análise não linear geométrica que independem da discretização é um campo bastante estudado e de imensa importância.

Objetivos

A proposta desse trabalho se deu através das motivações encontradas nos trabalhos de Silva (2022). Dentre alguns objetivos, podemos citar como principais:

- Comparar os resultados do comportamento desses elementos com a modelagem dos mesmos no software de elementos finitos *Mastan2*.
- Avaliar a utilização do método dos dois ciclos iterativos considerando a distorção por cisalhamento.

Estrutura da dissertação

O trabalho está dividido em cinco capítulos. O presente capítulo apresentou um pequeno resumo de alguns estudos relacionados ao tema, o objetivo e a estrutura da dissertação.

No capítulo um é estudado o elemento de Timoshenko, sendo desenvolvida a matriz de rigidez do elemento de viga de Euler- Bernoulli e de Timoshenko. Também é apresentado o fator de cisalhamento, coeficiente utilizado para determinar a área utilizada para a consideração da distorção por cisalhamento.

No capítulo dois é estudada a análise não linear geométrica, sendo abordado alguns métodos, como o método $P\Delta$, o método Y_z e o método dos dois ciclos iterativos. Também é estudado nesse capítulo os critérios de estabilidade estrutural.

O capítulo três trata, basicamente, de uma abordagem do método dos elementos finitos, sendo formulado o elemento de pórtico com a consideração da teoria de Timoshenko. Nesse capítulo é desenvolvida a matriz de rigidez elástica, geométrica e tangente do elemento de pórtico.

No capítulo quatro são apresentados os exemplos numéricos utilizados nesse trabalho, decorrentes dos objetivos propostos. E o capítulo cinco apresenta as conclusões e propostas para futuras pesquisas.

1.2 Matriz de Rigidez Elemento de Viga – Euler Bernoulli

O conceito de rigidez de um elemento se baseia na força ou momento necessário para se ter um deslocamento unitário. Sendo assim, segundo Filho (2002), a relação força x deslocamento em um elemento é expressa pela matriz de rigidez do elemento K_{el} , enquanto a relação força x deslocamento de uma estrutura é expressa pela matriz de rigidez da estrutura K .

De um modo geral, a relação entre as forças e deslocamentos nodais é melhor expressa pela notação matricial: $\{F\} = [K] \cdot \{u\}$, onde F representa as forças externas, K representa a matriz de rigidez e u representa os deslocamentos nodais.

A Figura 3 demonstra os graus de liberdade de uma viga submetida a flexão, sendo considerados quatro componentes de força (duas forças e dois momentos) e quatro componentes de deslocamentos (lineares e angulares).



Figura 3 – Graus de liberdade de viga à flexão, (Filho, 2002)

Sendo assim, tem-se a matriz de rigidez desse elemento, com quatro linhas e quatro colunas, conforme Equação (1).

$$\{f\}_{4 \times 1} = [K]_{4 \times 4} \cdot \{U\}_{4 \times 1} \quad (1)$$

Desenvolvendo a Equação (1), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ M_1 \\ f_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}_{4 \times 4} \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ v'_1 \\ v_2 \\ v'_2 \end{Bmatrix}_{4 \times 1} \quad (2)$$

Observando a matriz de rigidez K do elemento, percebe-se que cada coluna está ligada diretamente a condição de contorno que configura a rigidez do elemento.

A Figura 4 representa o deslocamento no grau de liberdade 1, que contém as componentes da matriz de rigidez relativas à coluna 1. Sendo assim, pode-se realizar, de forma análoga, as componentes no grau de liberdade 2, relativo à coluna 2, e assim em diante. Lembrando que o grau de liberdade 1 e 3 representa deslocamentos unitários lineares e os graus de liberdade 2 e 4 representam deslocamentos unitários angulares.

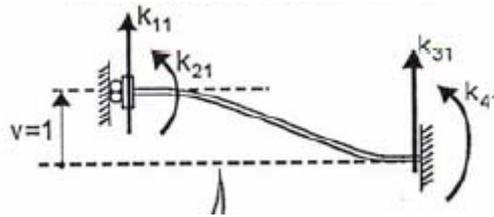


Figura 4 – Deslocamento unitário linear no grau de liberdade 1, (Filho, 2002).

Realizando os cálculos de equilíbrio de forças/momentos e equação da linha elástica para cada um dos graus de liberdade, é encontrada a matriz de rigidez elástica do elemento viga:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (3)$$

1.3 Matriz de Rigidez Elemento de Viga - Timoshenko

Observando a Figura 2, é possível perceber que a parcela relativa à distorção por cisalhamento é dada por:

$$\gamma^c(x) = \frac{dv_0(x)}{dx} - \theta(x) \quad (4)$$

Reescrevendo a Equação (4), é possível chegar a seguinte expressão:

$$\frac{dv(x)}{dx} = \frac{dv_b(x)}{dx} + \frac{dv_s(x)}{dx} = \theta(x) + \gamma^c \quad (5)$$

Ao se resolver a equação da viga de Euler-Bernoulli, é obtida a Equação (6) e (7).

$$EI \cdot \frac{d^4 v_b(x)}{dx^4} = 0 \quad (6)$$

$$v_b(x) = c_0 + c_1 x + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 \frac{x^3}{6} \quad (7)$$

Considerando que a rotação relativa à flexão da viga é igual a sua derivada, pode-se chegar à Equação (8):

$$EI \cdot \frac{d^2 \theta(x)}{dx^2} + GA_c \cdot \left(\frac{dv(x)}{dx} - \theta(x) \right) = 0 \rightarrow EI \cdot \frac{d^3 v_b(x)}{dx^3} + GA_c \cdot \gamma^c = 0 \quad (8)$$

Acha-se, portanto:

$$\gamma^c = -\frac{EI \cdot c_3}{GA_c} \quad (9)$$

O que leva a:

$$v(x) = c_0 + c_1x + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{EI}{GA_c} x \right) \quad (10)$$

Reescrevendo a Equação (10), é representada a Equação (11), que representa a equação da elástica do elemento de viga de Timoshenko:

$$v(x) = c_0 + c_1x + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 \left(\frac{x^3}{6} - \Omega L^2 x \right) \quad (11)$$

$$\Omega = \frac{EI}{GA_c} \cdot \frac{1}{L^2} \quad (12)$$

$$\theta(x) = c_1 + c_2x + c_3 \frac{x^2}{2} \quad (13)$$

É importante observar que, caso a deformação por cisalhamento não seja considerada ($\Omega=0$), a expressão da rotação passa a ser a derivada do deslocamento, conforme prevê a teoria de Euler Bernoulli.

1.4 Fator de Cisalhamento

O fato de cisalhamento trata-se de uma forma de conversão da distribuição de tensão de cisalhamento na seção transversal em um valor médio, segundo Souza (2008).

Diversos autores propuseram fórmulas para o cálculo do fator de cisalhamento. Cowper (1966) apresenta a Equação (14) para seções retangulares, utilizando como parâmetro o coeficiente de Poisson.

$$\chi = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu} \quad (14)$$

Observando a Equação (14) para seções retangulares e considerando o Coeficiente de Poisson como nulo, o valor encontrado é $\chi = 5/6$, valor amplamente utilizado.

2 ANÁLISE NÃO LINEAR

2.1 Introdução

O desenvolvimento da construção civil exige, cada vez mais, novas tecnologias e estruturas mais esbeltas. Com isso, a análise de um comportamento não linear dos elementos torna-se essencial. De acordo com Souza e Júnior (2017), quando se trabalha com grandes deformações ou deslocamentos a configuração deformada da estrutura se difere em muito da indeformada, não sendo mais apropriado uma análise com equações de equilíbrio lineares. A formulação $\{F\}=[K]\{u\}$, sendo $[K]$ a matriz de rigidez, $\{u\}$ o vetor de deslocamentos e $\{F\}$ o vetor de cargas externas, passa a não ser mais válido, pois a matriz de rigidez $[K]$ leva em consideração a geometria da estrutura, sendo esta modificada a cada instante.

Sendo assim, é necessário o emprego de métodos numéricos com processos incrementais ou iterativos para obter os deslocamentos do modelo. Segundo Silva (1996), na análise não linear, a resposta da estrutura a carregamentos não é linear, ou seja, incrementos iguais de carga não correspondem a incrementos iguais de deslocamentos. Esta resposta não linear tem como principais aspectos a não linearidade física e não linearidade geométrica.

A não linearidade física, segundo Silva (1996), está relacionada às características do material, afetando o comportamento mecânico, afetando, assim, a rigidez das seções transversais.

Já a não linearidade geométrica é associada ao aparecimento de momentos fletores adicionais, também conhecidos como de segunda ordem, quando submetidos a esforços normais. Esses efeitos de segunda ordem surgem a partir da consideração da posição deformada da estrutura como referência para aplicação do equilíbrio.

Segundo Branco (2002), o grau de precisão obtido para uma análise não linear geométrica depende das aproximações adotadas, podendo, assim, avaliar a perda de estabilidade em problemas de bifurcação de equilíbrio e ponto limite. Na Figura 5, pode ser observado a comparação entre a condição deformada e indeformada para análise de bifurcação.

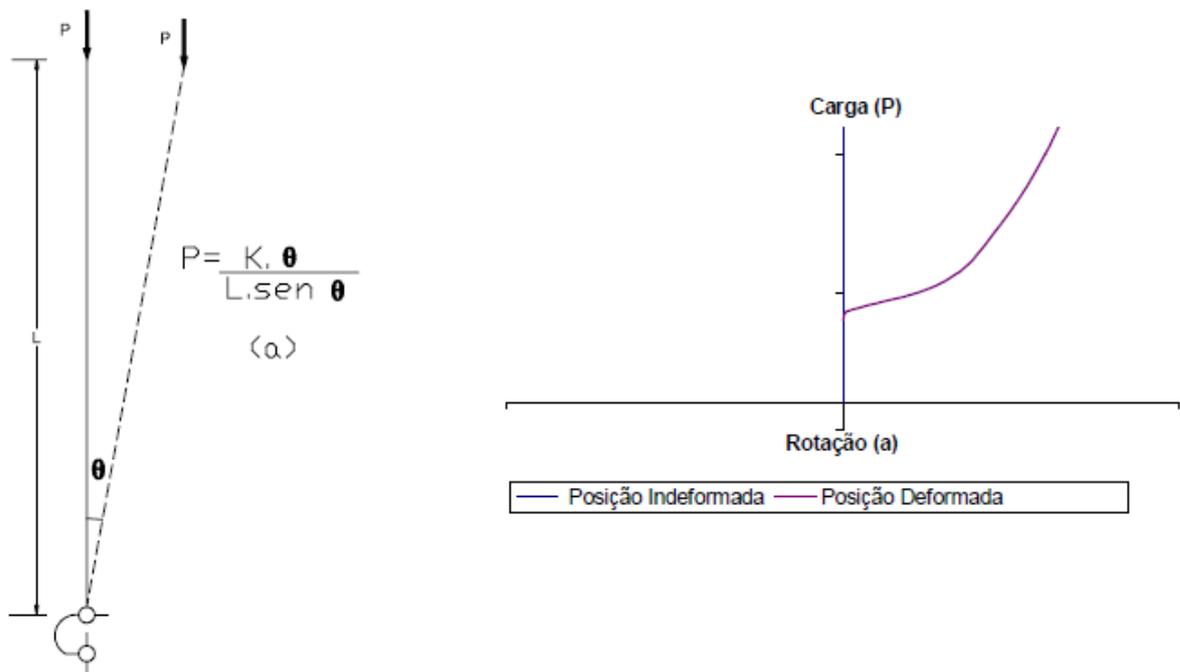


Figura 5 – Bifurcação de equilíbrio, adaptado (Branco, 2002)

De acordo com Rachid e Mori (1989), os problemas de bifurcação do equilíbrio são aqueles que, ao se atingir o carregamento crítico, o equilíbrio torna-se indiferente e qualquer modificação provoca a instabilidade.

O princípio dos trabalhos virtuais é utilizado para a formulação do equilíbrio, que, através de uma equação, consegue representar o equilíbrio desse corpo.

2.2 Análise não linear geométrica

A análise não linear geométrica tem sua origem ocasionada pelos efeitos causados pela deformação e deslocamento dos elementos estruturais, segundo Silva (2017). Essa não linearidade se torna especialmente importante quando observada em elementos esbeltos, que podem sofrer grandes deslocamentos transversais, alterando assim a forma como as cargas atuam na estrutura, segundo Silva (2023). Os dois métodos aproximados mais conhecidos de análise são os $P-\Delta$ e Y_z . O primeiro sendo causado pelo carregamento vertical vezes o deslocamento

horizontal no topo da estrutura. Já o segundo, de acordo com Silva (2022), trata-se de estimar os esforços através da majoração dos esforços de primeira ordem. O tipo de análise utilizado nesse trabalho será o método dos dois ciclos iterativos, proposto por Chen & Lui (1991).

2.2.1 Método $P\Delta$

O método do $P\Delta$ parte do princípio da obtenção dos esforços de segunda ordem por meio consideração de deslocamentos horizontais, gerando um braço de alavanca multiplicado pela carga vertical, criando um momento fletor adicional. Segundo Silva (2017), as forças horizontais, atuando na estrutura, causam deslocamentos horizontais de primeira ordem nos nós e as forças verticais aplicadas nesses nós geram momentos de segunda ordem, provocando novos deslocamentos horizontais e assim sucessivamente. Observando a Figura 6, é possível perceber o deslocamento gerado pela força V_i em conjunto com a carga vertical P .

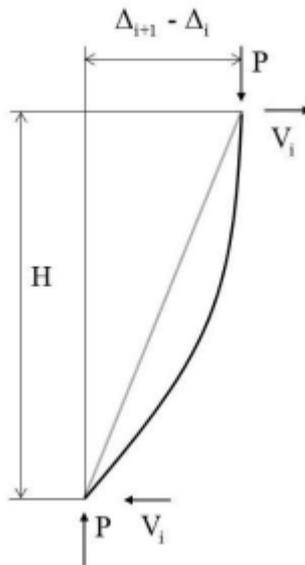


Figura 6 – Equilíbrio de forças em coluna isolada, (Silva, 2017)

Considerando os deslocamentos relativos entre os pavimentos, é possível calcular a força cortante fictícia, de acordo com a Equação (15).

$$V'_i = \frac{\sum P_i}{h_i} (\Delta_{i+1} - \Delta_i) \quad (15)$$

Sendo P_i as forças verticais, i os andares, h_i a altura dos andares e $(\Delta_{i+1} - \Delta_i)$ a diferença entre o deslocamento horizontal do andar de cima com o andar analisado.

De posse do valor de V'_i , é possível calcular a força lateral fictícia conforme Equação (16):

$$H'_i = V'_{i-1} - V'_i \quad (16)$$

De acordo com Silva (2022), a força fictícia H' é somada às outras cargas horizontais já existentes no andar, resultando em novas forças horizontais, criando, então, um processo iterativo que o deslocamento atual seja muito próximo ao do ciclo anterior. No fim do processo, o método converge e as forças e momentos atuantes incluem o efeito de 2ª ordem $P\Delta$.

Quando uma estrutura possui rigidez adequada, o método tende a convergir em um ou dois ciclos de aplicação, de acordo com Silva (2004). Caso a análise passe de cinco ciclos de iteração, a estrutura é considerada excessivamente flexível. Esse método é indicado para casos em que a relação entre os deslocamentos finais obtidos e os deslocamentos correspondentes decorrentes da análise em 1ª ordem não ultrapasse 1,4.

É importante destacar a existência do efeito $P\delta$, além do $P\Delta$ global. $P\delta$ se trata de um efeito local referente a deformações locais nos pilares, conforme Figura 7.

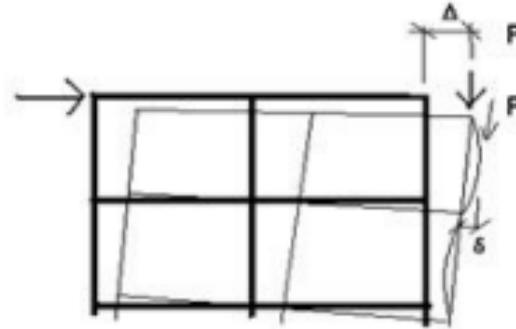


Figura 7 – Efeitos de segunda ordem, (Silva, 2022)

2.2.2 Método Y_z

O método do Y_z é utilizado pela NBR 6118 (2023) para avaliar os efeitos de segunda ordem, majorando os efeitos de primeira ordem, fornecendo uma estimativa dos esforços finais; e classificar a estrutura de acordo com a deslocabilidade dos seus nós. Sua utilização é indicada para estruturas reticuladas com, no mínimo, quatro andares.

Este parâmetro, criado por Vasconcelos e Franco (1997), foi introduzido a partir da observação que, em estruturas regulares submetidas a forças horizontais e verticais, as razões entre os acréscimos de deslocamentos a cada iteração do método $P\Delta$ são praticamente iguais. Podendo, assim, ser considerado como uma progressão geométrica, segundo Silva (2017).

O momento de segunda ordem pode ser dado como o somatório dos momentos obtidos a cada iteração, conforme equação (17).

$$M_{II} = M_I + \Delta M_1 + \Delta M_2 + \Delta M_3 + \dots + \Delta M_j \quad (17)$$

Sendo j o número de iterações, M_I o momento de primeira ordem e M_{II} o momento de segunda ordem.

A razão da progressão geométrica pode ser calculada por meio da divisão entre dois termos consecutivos, segundo Silva (2022).

$$r = \frac{\Delta M_1}{M_I} = \frac{\Delta M_2}{\Delta M_1} = \frac{\Delta M_3}{\Delta M_2} = \dots = \frac{\Delta M_j}{\Delta M_{j-1}} \quad (18)$$

Reescrevendo a Equação (17), tem-se:

$$M_{II} = M_I (1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^j) \quad (19)$$

Quando j tende ao infinito, o momento de segunda ordem pode ser escrito:

$$M_{II} = \frac{1}{1-r} M_I = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_1}{M_I}} \quad (20)$$

Segundo Silva (2017), tem-se que a soma da progressão geométrica, tendo como razão a divisão entre os acréscimos de momento e o momento de primeira ordem, é o parâmetro γ_z , conforme Equação (21):

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_{tot,d}}{M_I}} \quad (21)$$

2.2.3 Método dos dois ciclos iterativos

Este método é baseado na análise em dois ciclos, sendo o primeiro relativo a uma análise linear da estrutura e o segundo considerando a não linearidade.

Desenvolvido por Chen & Lui (1991), o método utiliza a equação básica do equilíbrio:

$$\{F\} = [K] \cdot \{u\} \quad (22)$$

Sendo $\{F\}$ o vetor de forças, $[K]$ a matriz de rigidez e $\{u\}$ o vetor de deslocamentos.

De acordo com Silva (2023), no primeiro ciclo, é realizada uma análise linear da estrutura, considerando a matriz de rigidez elástica da estrutura. Já no segundo ciclo a matriz utilizada é a matriz de rigidez tangente, que contempla a matriz de rigidez geométrica, responsável pela consideração das deformações da estrutura. Sendo assim, a partir da matriz de rigidez tangente, é possível obter uma análise considerando a não linearidade geométrica, recalculando os esforços nos elementos estruturais. Segundo Silva (2017), uma importante observação é frisar que o carregamento é aplicado de uma só vez sobre a estrutura.

Para se ter uma análise não linear geométrica de acordo com o método dos dois ciclos iterativos, deve-se seguir os passos: Realizar o primeiro ciclo com uma análise linear na estrutura, considerando a matriz de rigidez elástica K_e ; utilizando a matriz de rigidez K_t , que se trata da soma da matriz de rigidez geométrica K_g com a matriz de rigidez elástica K_e , realizar uma nova análise iterativa, tendo, dessa vez, a consideração das não linearidades geométricas.

A Tabela 1 apresenta um fluxograma para a utilização do método dos dois ciclos iterativos para uma análise de não linearidade geométrica.

Tabela 1 – Fluxograma aplicação Método dois Ciclos Iterativos



2.3 Estabilidade estrutural

Uma estrutura em equilíbrio estático está sucessível a deslocamentos decorrentes de perturbações externas. A resposta a esses distúrbios está intimamente ligada a natureza do equilíbrio na posição original.

Segundo Burgos (2005), a análise sob o ponto de vista dinâmico pode ser dividida em três estados. Se a posição original corresponder a um equilíbrio estável, a amplitude da vibração é limitada e diminuirá com a remoção do distúrbio devido a efeitos de atrito e amortecimento, conforme Figura 8a. No equilíbrio instável, a amplitude da vibração aumenta, conforme Figura 8b. E, no equilíbrio indiferente, não

surgem vibrações da estrutura próxima à configuração de equilíbrio, conforme Figura 8c.

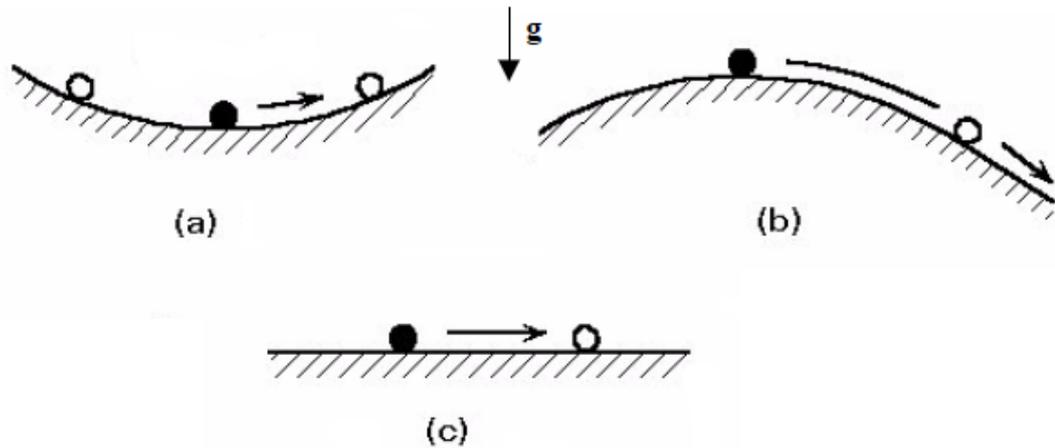


Figura 8 – Posições de equilíbrio estático, (Burgos, 2005)

Uma configuração de equilíbrio tem sua característica modificada a partir de uma certa carga crítica ou limite, responsável por alterar a forma como a energia potencial se comporta para pequenas perturbações.

2.3.1 Critérios de estabilidade estrutural

Segundo Burgos (2005), três critérios de estabilidade estática de um sistema conservativo são normalmente empregados, sendo eles o critério estático, critério dinâmico e o critério enérgico.

2.3.1.1 Critério Estático

Segundo Burgos (2005), este método baseia-se na verificação das forças resultantes após uma perturbação. Observando a Figura 8a, caso a força resultante

tenda a restaurar o sistema para a forma original, o equilíbrio é estável. Caso a força resultante afaste o sistema da sua forma original, diz-se que o equilíbrio é instável. E, por fim, caso a força resultante faça o sistema permanecer na posição perturbada, ou seja, a força peso e a força normal estejam equilibradas, o equilíbrio é dito como neutro. Este método é muito utilizado para a determinação da carga crítica e dos modos de flambagem.

2.3.1.2 Critério Dinâmico

Segundo Silva (2022), este critério analisa o sistema verificando o comportamento das oscilações no sistema perturbado, relacionando-se com a solução das equações diferenciais que governam o sistema. Segundo Burgos (2005), caso as frequências naturais de vibração sejam reais, o equilíbrio é dito como estável. Quando, pelo menos, uma frequência torna-se imaginária, o equilíbrio é instável. E quando alguma frequência se torna nula, tem-se um ponto crítico. Para os casos de sistemas não conservativos, ou seja, onde a energia não se conserva, esse critério é o único capaz de prever o comportamento da estrutura e seus pontos críticos.

2.3.1.3 Critério Energético

Segundo Silva (2022), esse sistema baseia-se no Teorema de Lagrange, este método é aplicado em sistemas conservativos, estabelecendo que, caso a energia potencial total tenha um mínimo relativo em determinada posição de equilíbrio, tem-se esse sistema como estável. E, caso corresponda a um máximo da energia potencial em determinada posição de equilíbrio, o sistema é instável. Essa análise permite encontrar os caminhos de equilíbrio do sistema.

Para sistemas estruturais elásticos e com ação de cargas conservativas, a energia potencial total pode ser definida como:

$$\Pi = U + V \quad (23)$$

Sendo π a energia potencial total, U a energia interna de deformação elástica e V o potencial das forças externas conservativas. Segundo Burgos (2005), a variação da energia potencial do sistema é causada pelos desvios em relação a uma determinada posição de equilíbrio, devido ao acúmulo de energia de deformação somado ao trabalho realizado pelas forças externas, conforme equação abaixo:

$$\Delta\Pi = \Delta U + \Delta V \quad (24)$$

A equação da energia potencial total pode ser reescrita considerando que o trabalho das forças é negativo, sendo:

$$\Delta\Pi = \Delta U - \Delta W_e \quad (25)$$

Sendo ΔW_e o trabalho realizado pelas forças externas.

O Princípio da Energia Potencial Estacionária diz que a energia potencial do sistema será sempre um ponto de máximo ou mínimo, desde que o sistema esteja em equilíbrio. Isto significa que a derivada de π deve ser nula, ou seja:

$$\delta\Pi = 0 \quad (26)$$

Esta imposição leva aos caminhos de equilíbrio da estrutura, ou seja, indica o percurso que o sistema estrutural segue relacionando as deformações e a carga externa aplicada.

De acordo com Silva (2022), para verificar se uma posição de equilíbrio é estável basta avaliar se a energia é mínima num ponto onde a derivada de primeira ordem é nula e a próxima derivada não nula é positiva. E é instável caso a energia

seja máxima num ponto onde a derivada de primeira ordem é nula e a próxima derivada não nula é negativa. Conforme equação abaixo:

$$\frac{\delta(\Delta\Pi)}{\delta q} = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta^2(\Delta\Pi)}{\delta q^2} < 0(\text{estavel}) \\ \frac{\delta^2(\Delta\Pi)}{\delta q^2} > 0(\text{instavel}) \end{array} \right\} \quad (27)$$

Sendo q uma posição de equilíbrio.

3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

3.1 Introdução

O método dos elementos finitos é um dos métodos aproximados de cálculo de sistemas contínuos. Este método baseia-se em subdividir (discretizar) a estrutura analisada em componentes menores, conhecidos como elementos, interligados por meio de nós. Segundo Filho (2002), a configuração do método dos elementos finitos é calcular a deformada da estrutura por intermédio dos deslocamentos nodais, independente da geometria da estrutura analisada. A partir daí, pode-se determinar os esforços internos e avaliar a resistência da estrutura em análise.

Uma análise por meio de MEF – Método dos elementos finitos depende, basicamente, de alguns fatores imprescindíveis, entre eles a escolha do elemento que vai ser utilizado e o grau de discretização da estrutura. A má escolha do elemento determina comportamentos fora da realidade e gasto computacional além do necessário e o erro na discretização da estrutura também fornece resultados equivocados, podendo ser catastrófico para uma análise. Uma das principais dificuldades encontradas nas análises por meio do MEF atualmente é a importância da experiência do analista para a escolha do elemento e o grau de refinamento da malha (discretização).

Um dos modelos discretizados do MEF são as estruturas reticuladas, como representado na Figura 9. Nesse modelo, a interação entre os elementos ocorre nos nós, sendo suficiente a aplicação das condições de compatibilidade de deslocamentos nesses pontos para conceber matematicamente esse modelo de cálculo.

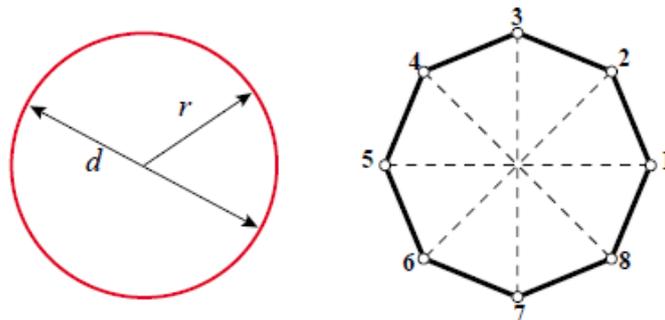


Figura 9 – Discretização de um objeto real (a esquerda) e seu modelo discretizado (a direita), (Felippa,2001)

Segundo Burgos (2005), quando aplicada a análise estrutural, o principal objetivo do MEF é obter soluções para a distribuição de tensões e deformações por toda a estrutura. Porém, os cálculos de deslocamentos são restritos aos nós dos elementos. É necessário, portanto, relacionar o deslocamento em qualquer ponto do elemento com seu deslocamento nodal e isso é realizado através das funções de interpolação, conhecidas, também, como função de forma, utilizando a Equação (28).

$$u(x) = \sum N_i(x) u_i \quad (28)$$

Sendo $u(x)$ uma função que descreve o deslocamento no interior do elemento, $N_i(x)$ as funções de interpolação e u_i os deslocamentos nodais.

A relação entre o campo de deslocamentos e o campo das forças é obtida através da matriz de rigidez gerando a Equação (30), funcionando de forma análoga ao coeficiente K vindo da Lei de Hooke segundo a Equação (29), sendo F a força, k a constante elástica da mola e x o deslocamento da mola.

$$F = K \cdot x \quad (29)$$

$$\{f\} = [K] \cdot \{d\} \quad (30)$$

Sendo f o vetor de carga nodais, k a matriz de rigidez e d os deslocamentos nodais. Neste trabalho, será utilizado o elemento de pórtico plano.

3.2 Formulação do elemento de pórtico

Este elemento é formulado através de uma combinação do elemento de viga com o elemento de treliça. Segundo Silva (2022), as componentes do deslocamento e rotações nodais são os graus de liberdade do elemento discretizado. Para realizar

a relação entre os deslocamentos nodais e o descolamento do elemento como um todo, é necessária a utilização de funções de interpolação.

De acordo com Martha (2018), as funções de interpolação que têm como referência as soluções homogêneas analíticas de vigas faz com que a solução discretizada do modelo global seja igual aos resultados da solução analítica do sistema, independentemente da discretização.

Em um elemento de pórtico plano, as deformadas são definidas no sistema de eixos locais pelo deslocamento axial $u(x)$ e transversal $v(x)$. Os deslocamentos axiais dentro do elemento, tendo como base a solução homogênea, são dados por:

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_4(x)u_2 \quad (31)$$

As equações (32) e (33) representam as funções de forma do elemento treliça. Observando a Figura 10 é possível identificar os deslocamentos axiais existentes no elemento treliça.

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad (32)$$

$$N_4(x) = \frac{x}{L} \quad (33)$$



Figura 10 – Elemento de treliça, (Burgos, 2005)

Analisando agora as funções de forma do elemento de viga, as soluções homogêneas vistas no capítulo 1 são:

$$v(x) = c_0 + c_1x + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 \left(\frac{x^3}{6} - \Omega L^2 x \right)$$

$$\Omega = \frac{EI}{GA_c} \cdot \frac{1}{L^2}$$

$$\theta(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \frac{x^2}{2}$$

Reescrevendo as equações na forma matricial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = [X] \cdot \{C\} \quad (34)$$

Sendo:

$$[X] = \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{3} - \Omega L^2 x \\ 0 & 1 & x & \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Aplicando as condições de contorno, tem-se:

$$\{d\} = \{d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4\}^T = \{v_0(0) \quad \theta(0) \quad v_0(L) \quad \theta(L)\}^T \quad (37)$$

$$[H] \cdot \{C\} = \{d\} \quad (38)$$

Sendo:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & \frac{L^2}{2} & \left(\frac{1}{6} - \Omega\right)L^3 \\ 0 & 1 & L & \frac{L^2}{2} \end{bmatrix} \quad (39)$$

As funções de interpolação realizam a interpolação do deslocamento transversal e a rotação em termo das condições de contorno.

$$\begin{Bmatrix} v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{d\} \quad (40)$$

Sendo $N(x)$:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_2^v & N_3^v & N_5^v & N_6^v \\ N_2^\theta & N_3^\theta & N_5^\theta & N_6^\theta \end{bmatrix} \quad (41)$$

Substituindo a Equação (40) na Equação (41), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = [X] \cdot [H]^{-1} \cdot \{d\} \quad (42)$$

Ou seja, as funções de interpolação para o elemento de viga, considerando a deformação por cisalhamento são:

$$[N] = [X] \cdot [H]^{-1} \quad (43)$$

Realizando as operações, é possível chegar nas Equações (44) a (51):

$$N_2^v = 1 + \frac{2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 12\Omega\frac{x}{L}}{(1+12\Omega)} \quad (44)$$

$$N_3^v = \frac{x\left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2(1+3\Omega)\frac{x}{L} + 1 + 6\Omega\right]}{(1+12\Omega)} \quad (45)$$

$$N_5^v = \frac{3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 12\Omega\frac{x}{L}}{(1+12\Omega)} \quad (46)$$

$$N_6^v = \frac{x\left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 - (1-6\Omega)\frac{x}{L} - 6\Omega\right]}{(1+12\Omega)} \quad (47)$$

$$N_2^\theta = \frac{6\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{x}{L}}{L(1+12\Omega)} \quad (48)$$

$$N_3^\theta = 1 + \frac{3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 4(1+3\Omega)\frac{x}{L}}{(1+12\Omega)} \quad (49)$$

$$N_5^\theta = \frac{6\left(\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right)}{L(1+12\Omega)} \quad (50)$$

$$N_6^\theta = \frac{3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2(1-6\Omega)\frac{x}{L}}{(1+12\Omega)} \quad (51)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_2^v & N_3^v & N_5^v & N_6^v \\ N_2^\theta & N_3^\theta & N_5^\theta & N_6^\theta \end{bmatrix}$$

Observando a Figura 11 é possível perceber os quatro graus de liberdade do elemento de viga.



Figura 11 – Elemento de viga, (Burgos, 2005)

Pode-se, portanto, descrever o deslocamento axial e transversal dentro do elemento de acordo com as equações (52) e (53):

$$u_o(x) = N_1(x)d_1' + N_4(x)d_4' \quad (52)$$

$$\begin{aligned} v(x) &= N_2^v(x)d_2' + N_3^v(x)d_3' + N_5^v(x)d_2' + N_6^v(x)d_6' \\ \theta(x) &= N_2^\theta(x)d_2' + N_3^\theta(x)d_3' + N_5^\theta(x)d_2' + N_6^\theta(x)d_6' \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{Bmatrix} v_o(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{d'\} \quad (54)$$

Segundo Burgos (2005), considerando como hipótese simplificadora não haver interação entre os efeitos axiais e transversais, pode-se “somar” as contribuições do elemento de treliça e de viga para formar o elemento de pórtico plano. A Figura 12 demonstra os deslocamentos (axiais e transversais) e a rotação nos nós do elemento de pórtico.



Figura 12 – Elemento de Pórtico, (Burgos, 2005)

Pode-se, portanto, ter a matriz que relaciona os campos de deslocamentos $u(x)$ e $v(x)$ com os deslocamentos nodais por meio da Equação (55):

$$\begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(x) & 0 & 0 & N_4(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_2(x) & N_3(x) & 0 & N_5(x) & N_6(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix} \quad (55)$$

Considerando as funções de forma do elemento de pórtico e pelo princípio da Energia Potencial Estacionária (PEPE), é possível obter as matrizes de rigidez elástica e geométrica.

3.3 Referenciais Lagrangeanos

Formulações que contam com a não linearidade geométrica geralmente se baseiam em referenciais Lagrangeanos, considerando que os deslocamentos de um sistema estrutural são medidos em relação a uma configuração inicial desse sistema. Segundo Silva et. al (2016), o tensor de deformação de Green-Lagrange é normalmente utilizado em problemas com elementos de barras, considerando grandes deslocamentos e rotações, mas pequenas deformações. Sendo apropriado para análises não lineares do tipo incremental, onde o maior interesse está na

deformação de cada ponto durante o processo de carregamento. Basicamente, em uma análise não linear, pode-se ter dois modos de referenciais Lagrangeano: o total e o atualizado.

De acordo com Rodrigues (2019), no referencial Lagrangeano total, a referência adotada para os deslocamentos é a configuração inicial de equilíbrio do sistema. Já no atualizado a referência é a última configuração de equilíbrio obtida no processo incremental.

3.4 Matriz de rigidez

Considerando as funções de interpolação desenvolvidas nesse capítulo, considerando a distorção por cisalhamento e a descrição Lagrangeana atualizada e os termos elevados do tensor de deformação, pode-se desenvolver a matriz de rigidez de um elemento considerando grandes deformações.

A Figura 13 representa o campo de deformação da viga, sendo possível obter as equações (56) e (57).

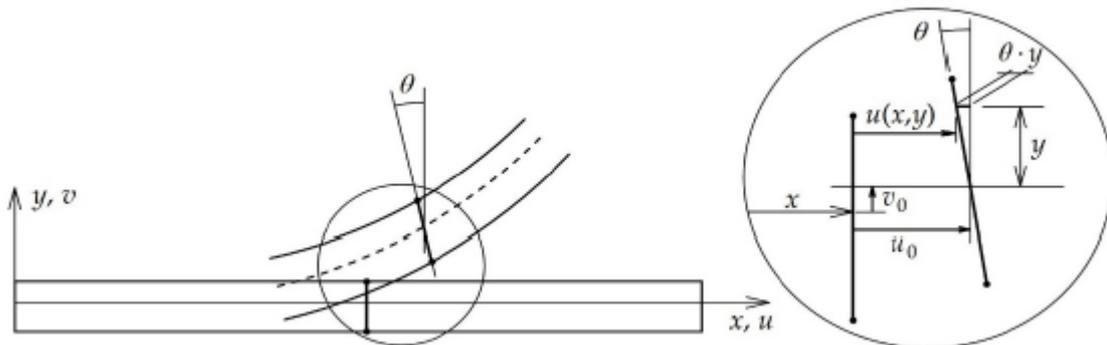


Figura 13 – Campo de deformação da viga, (Rodrigues, 2019)

$$u(x, y) = u_0(x) - \theta(x)y \quad (56)$$

$$v(x, y) = v_0(x) \quad (57)$$

Reescrevendo as equações (56) e (57), de acordo com Rodrigues (2019), considerando a parcela linear e não linear do tensor de Green Lagrange, tem-se as Equações (58) a (61).

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - y \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \quad (58)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial x} - \theta_z \quad (59)$$

$$\eta_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial x} + y^2 \frac{\partial \theta_z^2}{\partial x} \right) - y \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \quad (60)$$

$$\eta_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = y \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \theta_z - \theta_z \frac{\partial u}{\partial x} \quad (61)$$

3.4.1 Matriz de rigidez elástica

Segundo Rodrigues (2019), a matriz de rigidez elástica de um elemento é obtida considerando a parcela linear do tensor de deformação de Green Lagrange. Aplicando a equação dos trabalhos virtuais e dividindo a parcela linear em duas partes, Rodrigues (2019) mostra em seu trabalho o desenvolvimento das equações, chegando nas seguintes equações:

$$\delta U_1 = \{\delta u\}^T \int_0^L EA \{N_u'\} \{N_u'\}^T dx \{u\} + \{\delta v\}^T \int_0^L EI_z \{N_{\theta_z}'\} \{N_{\theta_z}'\}^T dx \{v\} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \delta U_2 = & \{\delta v\}^T \int_0^L GA \{N_v'\} \{N_v'\}^T dx \{v\} + \{\delta v\}^T \int_0^L GA \{N_{\theta_z}\} \{N_{\theta_z}\}^T dx \{v\} - \\ & \{\delta v\}^T \int_0^L GA \{N_{\theta_z}\} \{N_v'\}^T dx \{v\} - \{\delta v\}^T \int_0^L GA \{N_v'\} \{N_{\theta_z}\}^T dx \{v\} \end{aligned} \quad (63)$$

Substituindo as funções de forma e resolvendo as integrais do problema, tem-se a matriz de rigidez elástica de um pórtico plano.

$$K_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{(1+12\Omega)L^3} & \frac{6EI}{(1+12\Omega)L^2} & 0 & -\frac{12EI}{(1+12\Omega)L^3} & \frac{6EI}{(1+12\Omega)L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{(1+12\Omega)L^2} & \frac{4EI(1+3\Omega)}{(1+12\Omega)L} & 0 & -\frac{6EI}{(1+12\Omega)L^2} & \frac{2EI(1-6\Omega)}{(1+12\Omega)L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{(1+12\Omega)L^3} & -\frac{6EI}{(1+12\Omega)L^2} & 0 & \frac{12EI}{(1+12\Omega)L^3} & -\frac{6EI}{(1+12\Omega)L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{(1+12\Omega)L^2} & \frac{2EI(1-6\Omega)}{(1+12\Omega)L} & 0 & -\frac{6EI}{(1+12\Omega)L^2} & \frac{4EI(1+3\Omega)}{(1+12\Omega)L} \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$\text{Sendo } \Omega = \frac{EI}{(GA_c L^2)}$$

3.4.2 Matriz de rigidez geométrica

A matriz de rigidez geométrica é calculada considerando a parcela não linear do tensor de deformação de Green-Lagrange. Segundo Rodrigues (2019), a Equação (65) dos trabalhos virtuais fica:

$$\begin{aligned} \delta U_{NL} = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[P \delta \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) + P \frac{I_z}{A} \delta \left(\left(\frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right)^2 \right) \right] dx \\ & + \int_0^L \left[M_z \delta \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - Q \delta \left(\theta_z \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] dx \end{aligned} \quad (65)$$

Resolvendo as equações com a substituição das funções de forma consideradas, tem-se a matriz de rigidez geométrica, considerando a distorção por

cisalhamento e os termos de ordem elevada do tensor de deformação de Green-Lagrange.

$$K_g = -P \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & -\frac{M_1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 & -\frac{M_2}{L} \\ 0 & \frac{6(120\Omega^2 + 20\Omega + 1)}{(5L(12\Omega + 1))^2} & \frac{1}{10(12\Omega + 1)^2} & 0 & -\frac{6(120\Omega^2 + 20\Omega + 1)}{(5L(12\Omega + 1))^2} & \frac{1}{10(12\Omega + 1)^2} \\ -\frac{M_1}{L} & \frac{1}{10(12\Omega + 1)^2} & \frac{L}{12} + \frac{L}{20(12\Omega + 1)^2} & \frac{M_1}{L} & -\frac{1}{10(12\Omega + 1)^2} & -\left(\frac{L}{12} + \frac{L}{20(12\Omega + 1)^2}\right) \\ -\frac{1}{L} & 0 & \frac{M_1}{L} & \frac{1}{L} & 0 & \frac{M_2}{L} \\ 0 & -\frac{6(120\Omega^2 + 20\Omega + 1)}{(5L(12\Omega + 1))^2} & -\frac{1}{10(12\Omega + 1)^2} & 0 & \frac{6(120\Omega^2 + 20\Omega + 1)}{(5L(12\Omega + 1))^2} & -\frac{1}{10(12\Omega + 1)^2} \\ -\frac{M_2}{L} & \frac{1}{10(12\Omega + 1)^2} & -\left(\frac{L}{12} + \frac{L}{20(12\Omega + 1)^2}\right) & \frac{M_2}{L} & -\frac{1}{10(12\Omega + 1)^2} & \frac{L}{12} + \frac{L}{20(12\Omega + 1)^2} \end{bmatrix} \quad (66)$$

Observando a Figura 14, a qual representa um elemento de pórtico, e considerando uma força cisalhante constante, o momento fletor M e a força cortante Q podem ser calculados de acordo com as expressões.

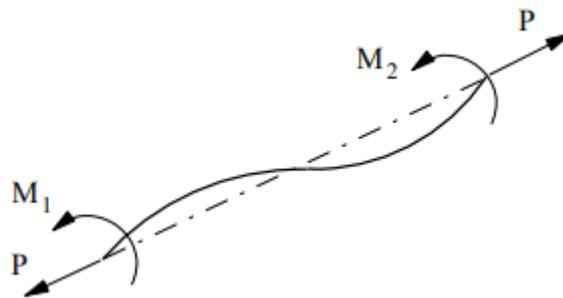


Figura 14 – Esforços resultantes iniciais,
(Galvão, 2000)

$$M = -M_1 + \frac{(M_1 + M_2)x}{L} \quad (67)$$

$$Q = -\frac{(M_1 + M_2)}{L} \quad (68)$$

Segundo Silva (2022), é comum desconsiderar os termos de ordem elevada no tensor de deformação na matriz de rigidez geométrica, resultando na seguinte matriz:

$$K_g = -P \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6(120\Omega^2 + 20\Omega + 1)}{(5L(12\Omega + 1))^2} & \frac{1}{10(12\Omega + 1)^2} & 0 & -\frac{6(120\Omega^2 + 20\Omega + 1)}{(5L(12\Omega + 1))^2} & \frac{1}{10(12\Omega + 1)^2} \\ 0 & \frac{1}{10(12\Omega + 1)^2} & \frac{L}{12} + \frac{L}{20(12\Omega + 1)^2} & 0 & -\frac{1}{10(12\Omega + 1)^2} & -\left(\frac{L}{12} + \frac{L}{20(12\Omega + 1)^2}\right) \\ -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6(120\Omega^2 + 20\Omega + 1)}{(5L(12\Omega + 1))^2} & -\frac{1}{10(12\Omega + 1)^2} & 0 & \frac{6(120\Omega^2 + 20\Omega + 1)}{(5L(12\Omega + 1))^2} & -\frac{1}{10(12\Omega + 1)^2} \\ 0 & \frac{1}{10(12\Omega + 1)^2} & -\left(\frac{L}{12} + \frac{L}{20(12\Omega + 1)^2}\right) & 0 & -\frac{1}{10(12\Omega + 1)^2} & \frac{L}{12} + \frac{L}{20(12\Omega + 1)^2} \\ \dots & & & & & \end{bmatrix} \quad (69)$$

3.4.2 Matriz de rigidez tangente

A matriz de rigidez tangente é dada pela soma dos efeitos da matriz elástica e da matriz geométrica ou, também, pode ser obtida utilizando as funções de interpolação “exatas”. A solução para o cálculo do deslocamento transversal e rotação da seção pode ser dado por meio de funções exponenciais. No caso de força axial de compressão, pode-se utilizar a formulação trigonométrica, conforme equações (70) e (71). Essas equações são deduzidas no trabalho de Rodrigues (2019).

$$\theta_h(x) = \Lambda [c_1 \cos(\Lambda x) - c_2 \text{sen}(\Lambda x) + c_3] \quad (70)$$

$$v_h(x) = (1 + \Omega L^2 \Lambda^2) [c_1 \text{sen}(\Lambda x) + c_2 \cos(\Lambda x)] + c_3 x + c_4 \quad (71)$$

3.4.2.1 Funções de Forma para o elemento infinitesimal considerando a configuração deformada.

Considerando a não linearidade, as funções de forma para a formação da matriz de rigidez tangente do elemento de pórtico devem ser consideradas na configuração deformada, conforme elemento demonstrado na Figura 15.

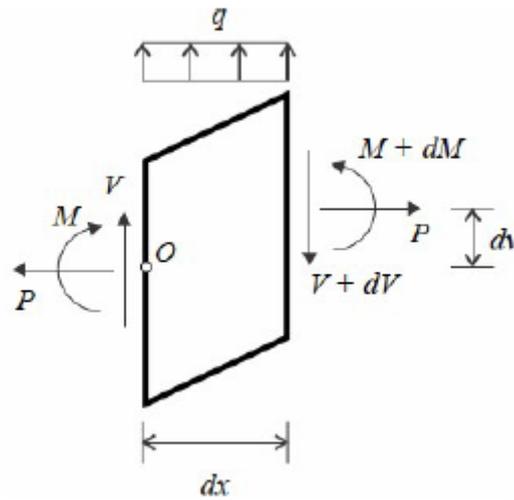


Figura 15 – Elemento infinitesimal na configuração deformada, (Martha e Burgos, 2015)

$$\begin{Bmatrix} v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = [X] \cdot \{C\} \quad (72)$$

$$[X] = \begin{bmatrix} (1 + \Omega L^2 \Lambda^2) \text{sen}(\Lambda x) & (1 + \Omega L^2 \Lambda^2) \text{cos}(\Lambda x) & x & 1 \\ \Lambda \text{cos}(\Lambda x) & -\Lambda \text{sen}(\Lambda x) & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (73)$$

$$\{C\} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} \quad (74)$$

Pode-se, então, obter as condições de contorno de acordo com as restrições dos nós da barra.

$$\{d'\} = \begin{Bmatrix} v_0(0) \\ \theta(0) \\ v_0(L) \\ \theta(L) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1 + \Omega L^2 \Lambda^2)c_2 + c_4 \\ c_1 \Lambda + c_3 \\ (1 + \Omega L^2 \Lambda^2)[c_1 \text{sen}(\Lambda L) + c_2 \cos(\Lambda L)] + c_3 L + c_4 \\ \Lambda [c_1 \cos(\Lambda L) - c_2 \text{sen}(\Lambda L)] + c_3 \end{Bmatrix} \quad (75)$$

Reescrevendo a matriz, de acordo com as condições de contorno, pode-se obter a matriz H , conforme Equação (76):

$$\{d'\} = [H] \cdot \{C\} \quad (76)$$

$$\{d'\} = \begin{bmatrix} 0 & (1 + \Omega L^2 \Lambda^2) & 0 & 1 \\ \Lambda & 0 & 1 & 0 \\ (1 + \Omega L^2 \Lambda^2) \text{sen}(\Lambda L) & (1 + \Omega L^2 \Lambda^2) \cos(\Lambda L) & L & 1 \\ \Lambda \cos(\Lambda L) & -\Lambda \text{sen}(\Lambda L) & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} \quad (77)$$

Tem-se, portanto:

$$\begin{Bmatrix} v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = [X] \cdot [H]^{-1} \cdot \{d\} \quad (78)$$

$$[N] = [X] \cdot [H]^{-1} \quad (79)$$

Com isso, tem-se as funções de forma apresentadas abaixo:

$$N_1^v = \frac{(1 + \Omega \Lambda^2 L^2) [\cos(\Lambda L) - \cos(\Lambda x) + \cos[\Lambda(L - x)] - 1] + \Lambda(L - x) \text{sen}(\Lambda L)}{(1 + \Omega \Lambda^2 L^2) [2 \cos(\Lambda L) - 2] + \Lambda L \text{sen}(\Lambda L)} \quad (80)$$

$$N_2^v = -\frac{(1+\Omega\Lambda^2L^2)\{(1+\Omega\Lambda^2L^2)[\text{sen}(\Lambda x) - \text{sen}(\Lambda L) + \text{sen}(\Lambda(L-x))]\}}{\Lambda\{(1+\Omega\Lambda^2L^2)[2\cos(\Lambda L) - 2] + \Lambda L\text{sen}(\Lambda L)} + \frac{\Lambda x + (\Lambda L - \Lambda x)\cos(\Lambda L) - \Lambda L\cos[\Lambda(L-x)]}{\Lambda\{(1+\Omega\Lambda^2L^2)[2\cos(\Lambda L) - 2] + \Lambda L\text{sen}(\Lambda L)} \quad (81)$$

$$N_3^v = \frac{(1+\Omega\Lambda^2L^2)[\cos(\Lambda L) + \cos(\Lambda x) - \cos[\Lambda(L-x)] - 1] + \Lambda x\text{sen}(\Lambda L)}{(1+\Omega\Lambda^2L^2)[2\cos(\Lambda L) - 2] + \Lambda L\text{sen}(\Lambda L)} \quad (82)$$

$$N_4^v = \frac{(1+\Omega\Lambda^2L^2)\{(1+\Omega\Lambda^2L^2)[\text{sen}(\Lambda x) - \text{sen}(\Lambda L) + \text{sen}[\Lambda(L-x)]]\}}{\Lambda\{(1+\Omega\Lambda^2L^2)[2\cos(\Lambda L) - 2] + \Lambda L\text{sen}(\Lambda L)\}} + \frac{\Lambda x[\cos(\Lambda L) - 1] + \Lambda L[1 - \cos(\Lambda x)]}{\Lambda\{(1+\Omega\Lambda^2L^2)[2\cos(\Lambda L) - 2] + \Lambda L\text{sen}(\Lambda L)\}} \quad (83)$$

$$N_1^\theta = \frac{\Lambda[\text{sen}(\Lambda x) - \text{sen}(\Lambda L) + \text{sen}[\Lambda(L-x)]]}{(1+\Omega\Lambda^2L^2)[2\cos(\Lambda L) - 2] + \Lambda L\text{sen}(\Lambda L)} \quad (84)$$

$$N_2^\theta = \frac{(1+\Omega\Lambda^2L^2)[\cos(\Lambda L) - \cos(\Lambda x) + \cos[\Lambda(L-x)] - 1] + \Lambda L\text{sen}[\Lambda(L-x)]}{(1+\Omega\Lambda^2L^2)[2\cos(\Lambda L) - 2] + \Lambda L\text{sen}(\Lambda L)} \quad (85)$$

$$N_3^\theta = \frac{\Lambda[\text{sen}(\Lambda x) - \text{sen}(\Lambda L) + \text{sen}[\Lambda(L-x)]]}{(1+\Omega\Lambda^2L^2)[2\cos(\Lambda L) - 2] + \Lambda L\text{sen}(\Lambda L)} \quad (86)$$

$$N_4^\theta = \frac{(1+\Omega\Lambda^2L^2)[\cos(\Lambda L) + \cos(\Lambda x) - \cos[\Lambda(L-x)] - 1] + \Lambda L\text{sen}(\Lambda x)}{(1+\Omega\Lambda^2L^2)[2\cos(\Lambda L) - 2] + \Lambda L\text{sen}(\Lambda L)} \quad (87)$$

Sendo assim, a partir das funções de forma e aplicando o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), é possível calcular os coeficientes da matriz de rigidez tangente de forma semelhante à descrita na seção 3.4.1.

$$k_1 = \frac{EI\Lambda^3 \sin(\Lambda L)}{(1 + \Omega\Lambda^2 L^2) \left\{ (1 + \Omega\Lambda^2 L^2) [2 - 2 \cos(\Lambda L)] - \Lambda L \sin(\Lambda L) \right\}} \quad (88)$$

$$k_2 = \frac{EI\Lambda^2 [1 - \cos(\Lambda L)]}{(1 + \Omega\Lambda^2 L^2) [2 - 2 \cos(\Lambda L)] - \Lambda L \sin(\Lambda L)} \quad (89)$$

$$k_3 = \frac{EI\Lambda [(1 + \Omega\Lambda^2 L^2) \sin(\Lambda L) - \Lambda L \cos(\Lambda L)]}{(1 + \Omega\Lambda^2 L^2) [2 - 2 \cos(\Lambda L)] - \Lambda L \sin(\Lambda L)} \quad (90)$$

$$k_4 = \frac{EI\Lambda [\Lambda L - (1 + \Omega\Lambda^2 L^2) \sin(\Lambda L)]}{(1 + \Omega\Lambda^2 L^2) [2 - 2 \cos(\Lambda L)] - \Lambda L \sin(\Lambda L)} \quad (91)$$

Sendo:

$$\Lambda = \frac{\mu}{\sqrt{(1 - \Omega L^2 \mu^2)}}, \mu^2 = \frac{P}{EI} \quad (92)$$

Reescrevendo as Equações (88) a (91) em função dos coeficientes da matriz elástica:

$$k_1 = \frac{12EI}{L^3} \frac{(\Lambda L)^3 \sin(\Lambda L)}{12(1 + \Omega\Lambda^2 L^2) D} \quad (93)$$

$$k_2 = \frac{6EI}{L^2} \frac{(\Lambda L)^2 [1 - \cos(\Lambda L)]}{6D} \quad (94)$$

$$k_3 = \frac{4EI}{L} \frac{\Lambda L \left[(1 + \Omega \Lambda^2 L^2) \sin(\Lambda L) - \Lambda L \cos(\Lambda L) \right]}{4D} \quad (95)$$

$$k_4 = \frac{2EI}{L} \frac{\Lambda L \left[\Lambda L - (1 + \Omega \Lambda^2 L^2) \sin(\Lambda L) \right]}{2D} \quad (96)$$

Sendo:

$$D = (1 + \Omega \Lambda^2 L^2) \left[2 - 2 \cos(\Lambda L) \right] - \Lambda L \sin(\Lambda L) \quad (97)$$

Tem-se, portanto a matriz de rigidez tangente do elemento:

$$K_t = \begin{bmatrix} \frac{EA-P}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA+P}{L} & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & k_2 & 0 & -k_1 & k_2 \\ 0 & k_2 & k_3 & 0 & -k_2 & k_4 \\ \frac{-EA+P}{L} & 0 & 0 & \frac{EA-P}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -k_1 & -k_2 & 0 & k_1 & -k_2 \\ 0 & k_2 & k_4 & 0 & -k_2 & k_3 \end{bmatrix} \quad (98)$$

3.5 Cargas nodais equivalentes

Segundo Vaz (2011), as cargas atuantes no interior dos elementos devem ser consideradas nos pontos nodais, sendo assim, as forças resultantes que atuam nesses nós são conhecidas como cargas nodais equivalentes. As cargas nodais são calculadas a partir das mesmas funções de interpolação utilizadas para a matriz de rigidez, de acordo com a Equação (99):

$$\{f\} = \int_s [N]^T \{q\} dS \quad (99)$$

Sendo $\{f\}$ o vetor de cargas nodais, $[N]$ a matriz com as funções de forma e $\{q\}$ o carregamento aplicado.

3.6 Carga crítica

Segundo Burgos (2005), a equação matricial de equilíbrio estático para um sistema pode ser obtida através da Equação (100):

$$K_e d = f \quad (100)$$

Sendo K_e a matriz de rigidez elástica, d o vetor de deslocamentos nodais e f o vetor de cargas.

Para problemas com cargas compressivas, ou seja, que levam a flambagem, as rotações que antecedem o estado crítico podem ser desconsideradas, modificando a expressão acima com a inclusão da matriz geométrica. Expressando de forma incremental, temos a Equação (101):

$$(K_e + K_g) \delta d = \delta f \quad (101)$$

De acordo com Burgos (2005), a carga crítica para problemas de flambagem irá corresponder a um ponto de bifurcação onde a configuração do equilíbrio original e uma outra configuração de equilíbrio adjacente poderão existir para um mesmo valor de carga. Sendo assim, pode-se dizer que existe um nível de carga, não significativo, que gere um incremento δd . Tendo, portanto:

$$(K_e + K_g) \delta d = 0 \quad (102)$$

A Equação (102) corresponde a formulação estática para determinação de carga crítica. De acordo com Silva (2022), a equação acima pode ser utilizada para determinação do fator de carga crítica λ , que representa a majoração necessária das cargas nodais f para produzir a flambagem elástica. Podendo, então, reescrever a Equação (102) na forma da Equação (103).

$$(K_e + \lambda K_g) \delta d = 0 \quad (103)$$

A Equação (103) leva a um problema de autovalor e autovetor, sendo o primeiro o parâmetro λ e o segundo os modos de flambagem da estrutura. Sendo assim, a carga crítica é obtida da determinação dos valores de carga para qual o determinante da matriz de rigidez tangente se anula.

4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

4.1 Introdução

Serão realizadas duas etapas de análise para efeitos comparativos. A primeira etapa trata-se de uma comparação utilizando o software de análise não linear *Mastan2* para comparar a influência do efeito da distorção por cisalhamento com alterações na relação vão/altura comparados com a teoria clássica de flexão de Euler-Bernoulli. Serão analisados dois modelos: coluna engastada e livre; coluna biengastada com momentos nas extremidades.

Na segunda etapa da análise, será realizada uma análise de segunda ordem por meio do software *Matlab*, utilizando o método dos dois ciclos iterativos para as curvas de equilíbrio, considerando a distorção por cisalhamento e comparado com o resultado dado pelo software *Mastan2*, utilizando o método do Preditor-corretor, com 1 e 5 elementos, sendo analisadas três estruturas: coluna engastada e livre; coluna biengastada com momentos nas extremidades e pórtico de Roorda.

4.2 Comparativo da influência do cisalhamento Timoshenko e Euler Bernoulli.

Estes exemplos de estruturas foram utilizados no trabalho de Silva (2022), sem a consideração do efeito de distorção por cisalhamento. Os parâmetros gerais utilizados são: $L=6$ metros, $E=10^8$ kN/m², $A=10^{-4}$ m², $\chi=5/6$, $I=10^{-5}$ m⁴, $\alpha=0,01$.

4.2.1 Coluna engastada e livre

A teoria de vigas de Euler-Bernoulli leva em conta, basicamente, o efeito da flexão da viga, desprezando os efeitos da distorção por cisalhamento, diferentemente da teoria de Timoshenko, que considera esse efeito adicional. Nesse

exemplo, será demonstrado a influência do efeito da distorção por cisalhamento na deformação de uma viga engastada e livre, conforme a Figura 16. A carga P aplicada possui valor de 10kN.

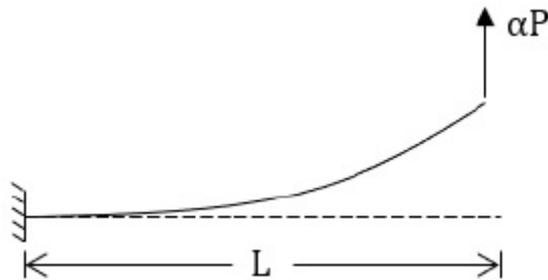


Figura 16 – Viga engastada e livre, adaptada, (Silva, 2022).

De acordo com a Tabela 2, pode-se perceber a variação desse efeito com a mudança de altura da seção transversal. Em todas as análises, o vão considerado foi de 6 metros e o fator de cisalhamento de 5/6.

Tabela 2 – Comparação deslocamentos Euler Bernoulli - Timoshenko

PARÂMETROS DA VIGA					DESLOCAMENTO EXTREMIDADE LIVRE (mm)		
ALTURA (m)	LARGURA (m)	ÁREA (m ²)	VÃO/ALTURA	ESBELTEZ (λ)	EULER	TIMOSHENKO	DIFERENÇA PERCENTUAL EULER-TIMOSHENKO
0,10	0,10	0,01	60,00	207,85	3,5610E+00	3,5620E+00	0,03%
0,50	0,10	0,05	12,00	41,57	4,5330E-04	4,5480E-04	0,33%
1,00	0,10	0,10	6,00	20,78	5,6220E-05	5,7440E-05	2,12%
2,00	0,10	0,20	3,00	10,39	7,0210E-06	7,6290E-06	7,97%
4,00	0,10	0,40	1,50	5,20	8,7750E-07	1,1820E-06	25,76%
6,00	0,10	0,60	1,00	3,46	2,6000E-07	4,6280E-07	43,82%

É possível perceber a influência da distorção por cisalhamento em vigas menos esbeltas. Ou seja, quanto mais esbelta a viga, menor a diferença entre as deformações pelas duas teorias. Quando se tem relações vãos/altura mais baixas, as diferenças passam a ser mais acentuadas. Em casos práticos, como vigas

paredes, a consideração da distorção por cisalhamento se torna crucial. No exemplo analisado, a viga com esbeltez de 3,46 apresentou diferenças percentuais na casa dos 43% entre os resultados pela teoria Euler e Timoshenko.

4.2.2 Coluna biengastada com momento nas extremidades.

Para este exemplo, foram considerados os mesmos parâmetros de viga já citados, sendo adotado momentos opostos nas extremidades de 1 kN.m, com apoio de 2° gênero a esquerda e apoio de 1° gênero a direita. A Tabela 3 apresenta os resultados dos deslocamentos no nó 2, localizado a direita na figura.

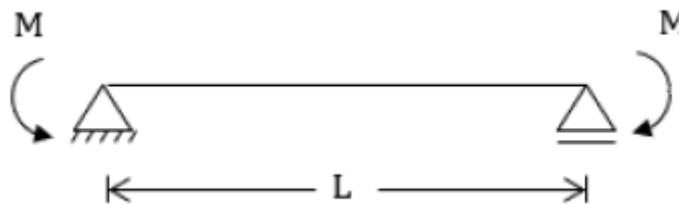


Figura 17 – Coluna biapoiada com momentos opostos nas extremidades, adaptado, (Silva, 2022).

Tabela 3 – Comparação rotação Euler Bernoulli - Timoshenko

PARÂMETROS DA COLUNA					ROTAÇÃO NÓ 2		
ALTURA (m)	LARGURA (m)	ÁREA (m ²)	VÃO/ALTURA	ESBELTEZ (λ)	EULER	TIMOSHENKO	DIFERENÇA PERCENTUAL EULER-TIMOSHENKO
0,10	0,10	0,01	60,00	207,85	1,3740E+00	1,3740E+00	0,00%
0,50	0,10	0,05	12,00	41,57	4,9580E-03	4,9830E-03	0,50%
1,00	0,10	0,10	6,00	20,78	6,1820E-04	6,3040E-04	1,94%
2,00	0,10	0,20	3,00	10,39	7,7250E-05	8,3360E-05	7,33%
4,00	0,10	0,40	1,50	5,20	9,6560E-06	1,2710E-05	24,03%
6,00	0,10	0,60	1,00	3,46	2,8610E-06	4,8980E-06	41,59%

Neste exemplo, é possível perceber a influência da distorção por cisalhamento, semelhante ao observado no exemplo anterior. Em colunas esbeltas, os resultados dos deslocamentos pelas teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko se mostraram basicamente idênticos. Porém, ao se considerar baixas relações vão altura, o efeito da distorção por cisalhamento fica nítido, como na viga de esbeltez 3,46, que apresentou diferenças percentuais de 41% entre os resultados.

4.3 Comparativo método dois ciclos iterativos pelo *Matlab* e *Mastan2*.

Nesse item, será comparado a curva de equilíbrio utilizando a formulação “exata” com o auxílio do software *Matlab* com a software de análise não linear *Mastan2*.

A análise no *Matlab* se baseia no método dos dois ciclos iterativos para análise não linear, utilizando os elementos “exatos”. Já a análise do *Mastan2* utiliza o método preditor-corretor para a análise não linear, utilizando o elemento finito oriundo das funções de interpolação Hermitianas. Esse programa não considera os termos de ordem elevada do tensor de deformação de Green-Lagrange. Sendo assim, a matriz de rigidez geométrica não tem alteração.

Segundo Rodrigues (2021), como consequência da utilização das funções de forma obtidas diretamente das equações diferenciais que consideram a configuração deformada da estrutura, as funções de interpolação dependem de uma força axial aplicada a estrutura. Sendo assim, nos exemplos abaixo foram adicionadas cargas axiais nos modelos.

4.3.1 Engastada e Livre

O modelo utilizado é representado na Figura 18. Foram extraídos os dados referentes ao deslocamento na extremidade livre da barra de acordo com o

carregamento aplicado. Nas análises do *Mastan2*, foram consideradas barras discretizadas em 1 elemento e em 5 elementos, tendo como objetivo a comparação da discretização mínima (1 elemento) com uma maior discretização. Já na análise pelo *Matlab* com o método dos dois ciclos iterativos, não foi considerada a discretização da estrutura. Foi aplicada a carga P de compressão no valor de 10kN.

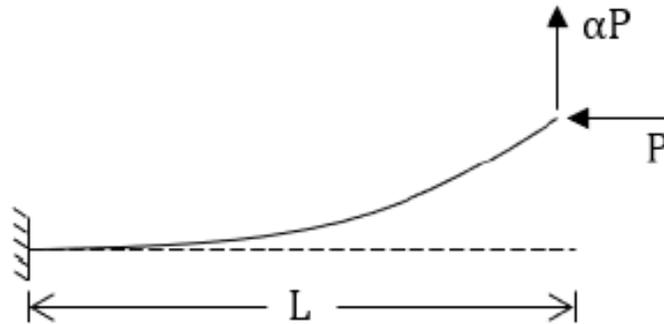


Figura 18- Viga Engastada e Livre, (Silva, 2022)

Observando a Figura 19, é possível perceber a proximidade entre os resultados obtidos pelo software *Matlab* utilizando a formulação exata pelo método dos dois ciclos iterativos em comparação com o *Mastan2* com 5 elementos.

A discretização do elemento, nesse modelo, no software *Mastan2*, influenciou de forma discreta os resultados, sendo praticamente idênticos para cargas baixas, abaixo de 40 kN, e com pequenas diferenças para cargas maiores, próximas às cargas críticas. Pode-se notar que a carga crítica fica bem abaixo da analítica, considerando a teoria de Euler-Bernoulli, que seria $\pi^2 EI / 4L^2 = 68,54$ kN.

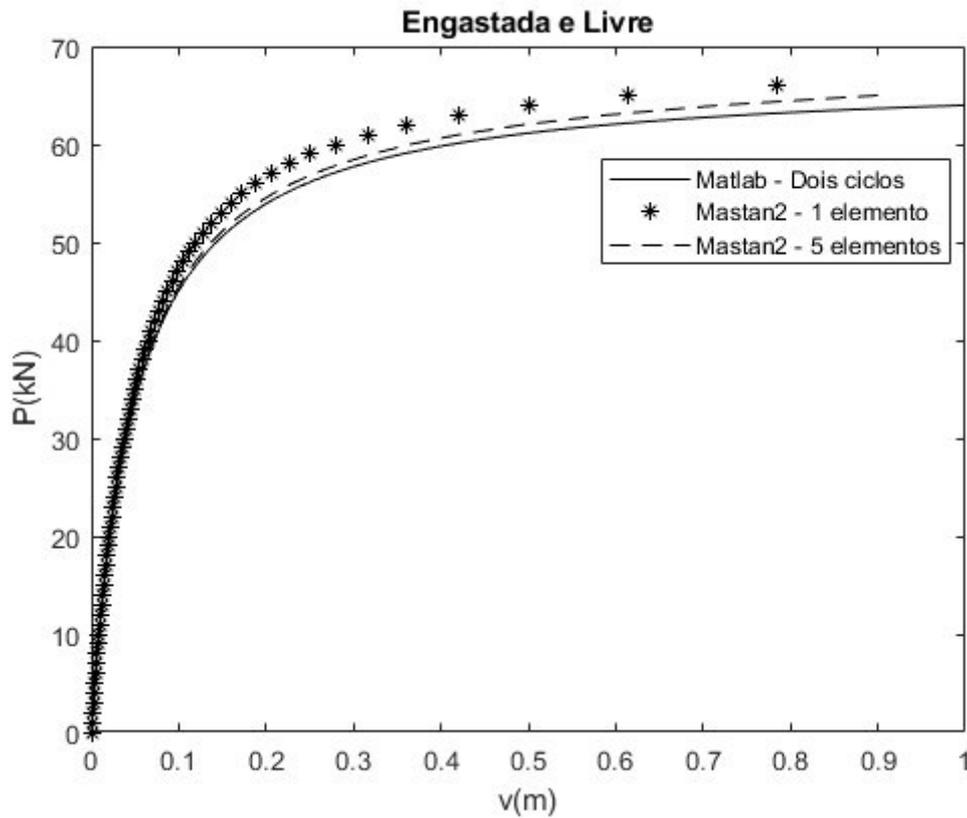


Figura 19 – Curva de equilíbrio coluna engastada e livre pelo Matlab e Mastan2

4.3.2 Biengastada com momentos nas extremidades

O segundo modelo analisado, conforme Figura 20, trata-se de uma coluna com base engastada e topo livre, com a aplicação de uma carga horizontal P (compressão) de 10 kN e dois momentos com sentidos opostos nas extremidades $M=0,01PL$.

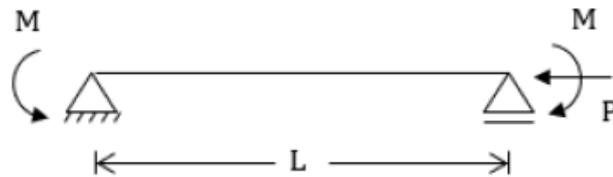


Figura 20 -Coluna biapoiada com momentos opostos nas extremidades, adaptado, (Silva, 2022).

Os parâmetros utilizados para essa análise foram: $L= 6$ metros; $E=10^8$ kN/m²; Área: 0,0001 m²; $\chi=5/6$; $I= 1 \times 10^{-5}$ m⁴; $\alpha= 0,01$. Foram realizadas análises para o software *Mastan2* com 1 e 5 elementos e, no *Matlab*, pelo método dos dois ciclos iterativos. Pode-se notar que a carga crítica fica bem abaixo da analítica considerando a teoria de Euler-Bernoulli, que seria $\pi^2 EI/L^2 = 274,16$ kN. Essa situação evidencia a necessidade de se considerar a teoria de Timoshenko em algumas condições.

Observando os resultados da Figura 19, é possível perceber a discrepância dos resultados referentes ao *Mastan2* discretizado com 1 elemento e o *Matlab* e *Mastan2* com 5 elementos. Quando discretizado em 1 elemento, a carga crítica pelo *Mastan2* chega ao valor de 350 kN. Já quando discretizado em 5 elementos passa a ter sua carga crítica próxima de 250 kN. O valor encontrado pelo método dos dois ciclos iterativos pelo *Matlab* foi de aproximadamente 247 kN. Quando comparada a carga crítica do *Mastan2* discretizado em 1 elemento com o resultado pelo método dos dois ciclos iterativos no *Matlab*, a diferença percentual fica em 40%. Essa análise demonstra a similaridade de resultados entre o *Mastan2* discretizado em 5 elementos e o *Matlab*, demonstrando a eficiência da análise pelos dois ciclos iterativos, com discretização mínima de 1 elemento, em comparação a um software de análise não linear com discretização.

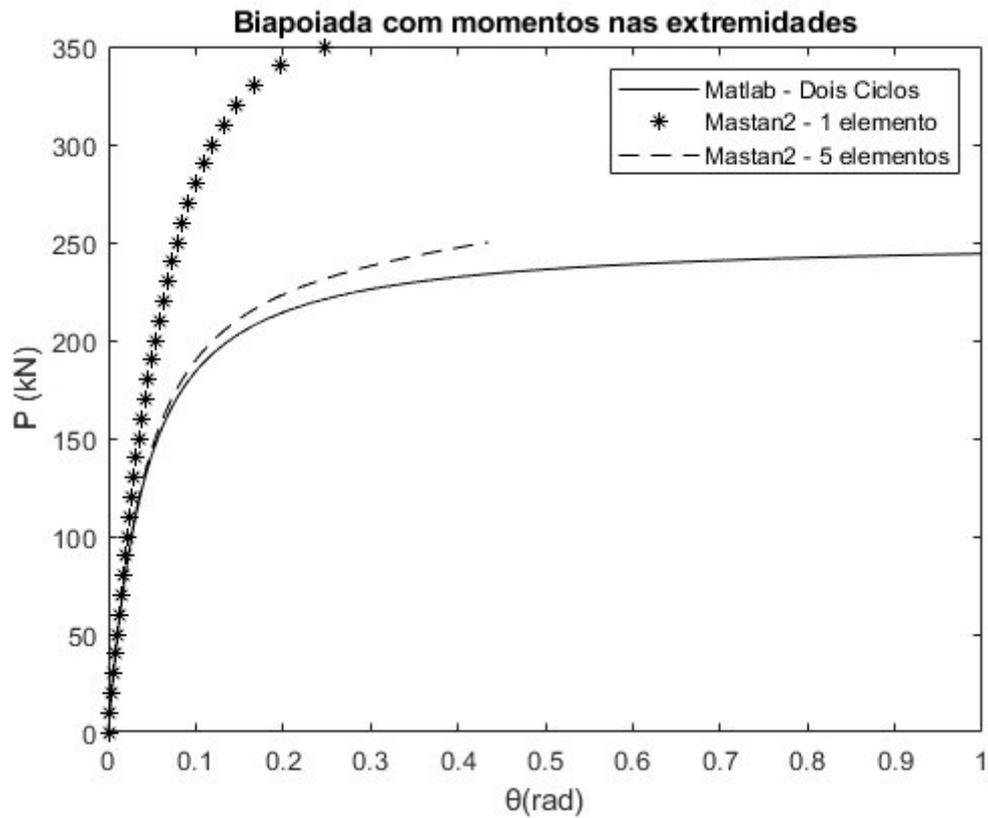


Figura 21 – Curva de equilíbrio coluna biapoiada pelo Matlab e Mastan2

4.3.3 Pórtico de Roorda

Nesse modelo, é analisado o pórtico de Roorda, conforme a Figura 22. Diferentemente do pórtico de Roorda original, nesse modelo, o apoio da direita (horizontal) trata-se de um apoio de primeiro gênero. As características continuam as mesmas dos exemplos anteriores.

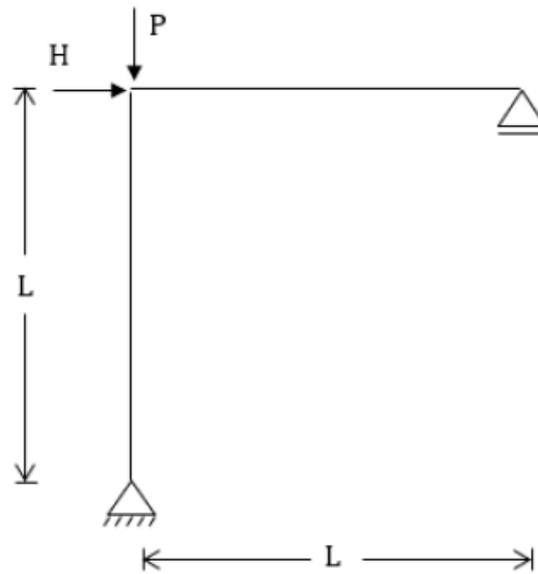


Figura 22– Pórtico de Roorda, (Silva, 2022)

Igualmente aos exemplos anteriores, foi utilizado o software *Mastan2* com 1 e 5 elementos e o *Matlab* utilizando o método dos dois ciclos, sendo observado o deslocamento horizontal na intersecção das barras, onde é aplicada a força $P=10$ kN e $H=0,01PL$.

Observando a Figura 23, é possível perceber a similaridade de resultados entre o *Mastan2* com 1 e 5 elementos e a diferença em relação ao modelo do *Matlab*. Nesse caso, o grau de discretização não melhorou os resultados do deslocamento. O resultado obtido pelo *Matlab* leva a uma carga crítica mais próxima da prevista analiticamente.

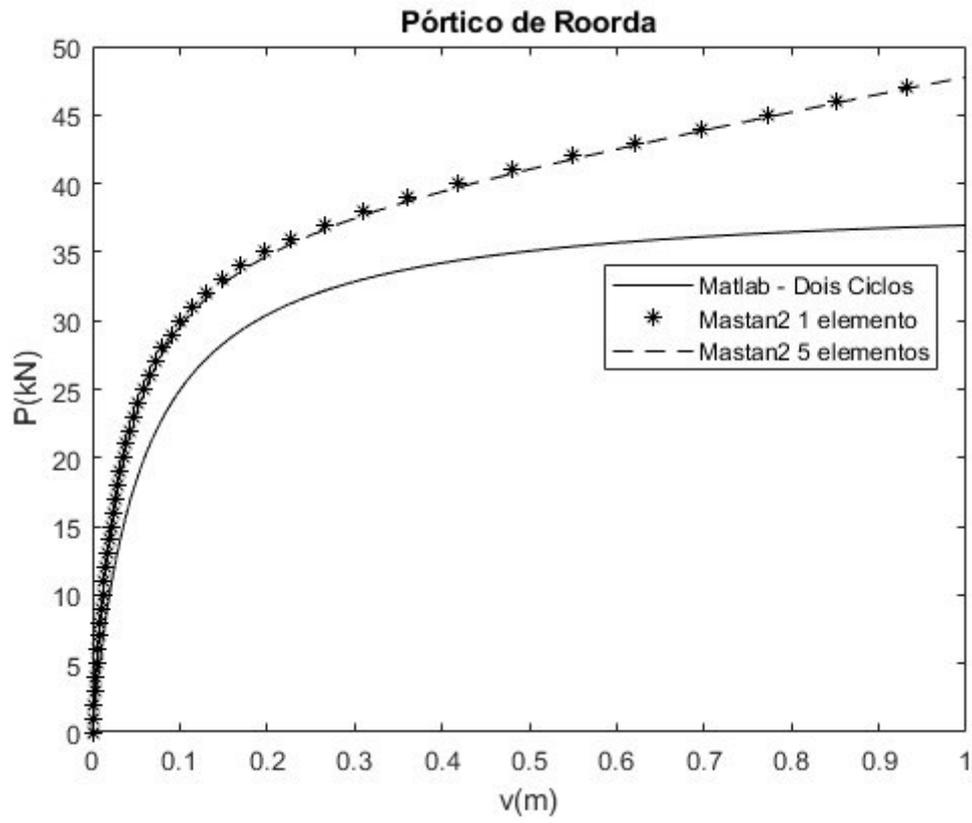


Figura 23- Curva de equilíbrio coluna pórtico de Roorda pelo Método dos dois Ciclos Iterativos - Matlab e Mastan2.

5 CONCLUSÃO

Um dos maiores desafios para os recém-formados na área de engenharia que trabalham com análises estruturais ou estudantes de graduação é a falta de experiência ao escolher parâmetros para uma análise de segunda ordem. A utilização de programas de análise estrutural, como *Mastan2*, se torna um dos principais aliados nesse momento, porém, a escolha errada de fatores, como a discretização da malha, torna o processo dependente de uma maturidade muitas vezes não atendida pelos iniciantes no assunto, além do gasto computacional elevado para malhas extremamente refinadas. Dessa forma, é de suma importância o desenvolvimento de metodologias que sejam independentes desses fatores.

A teoria de Timoshenko, a qual considera o efeito da distorção de cisalhamento, se mostra mais adequada a realidade quando comparada a teoria de Euler-Bernoulli quando utilizada em estruturas com baixa esbeltez. Os objetivos principais desses trabalhos foram analisar a magnitude do efeito de cisalhamento em dois modelos e analisar o caminho de equilíbrio de três modelos por meio de uma análise comparativa entre um software renomado de análise não linear (*Mastan2*) e o método dos dois ciclos iterativos utilizando o software *Matlab*.

No primeiro objetivo, foi possível observar nos dois modelos a influência que a distorção por cisalhamento possui, principalmente quando analisadas vigas com baixa relação vão/altura, com diferenças na casa dos 40% em ambos os modelos analisados. Ou seja, em situações em que as vigas e pilares não são esbeltos, como vigas-parede, a não consideração desse efeito pode ser prejudicial para a análise dessas estruturas, principalmente para baixos valores de relação vão/altura.

Na análise seguinte, comparando os modelos do *Matlab* com o *Mastan2*, pode-se observar que a utilização do método dos dois ciclos iterativos para uma análise não linear se mostra satisfatória quando comparada com o *Mastan2* com 5 elementos. Ou seja, nesse caso, uma análise pelo método dos dois ciclos iterativos utilizando o *Matlab* sem a discretização teria resultados muito próximos do *Mastan2* utilizando métodos tradicionais de análise, que necessita de uma discretização com 5 elementos. Sendo assim, se mostra bastante interessante para estudantes e engenheiros recém-formados, tendo em vista que não necessita de uma experiência com refinamento de malha para resultados satisfatórios.

Portanto, a análise não linear utilizando o método dos dois ciclos iterativos com a consideração da distorção por cisalhamento se mostra uma alternativa competitiva com os tradicionais métodos de análise que utilizam de refinamento de malha, tendo como principais vantagens a dispensa de experiência prévia do analista e o ganho de tempo computacional para essas análises, pois, quanto maior o refinamento da malha, maior o custo computacional.

5.1 Sugestões para futuros trabalhos.

Sugere-se, para futuros trabalhos, análises análogas às realizadas, porém com outros modelos, como pórticos simétricos e assimétricos, vigas com cargas distribuídas constantes e variáveis. É sugerido, também, o estudo da influência da teoria de Timoshenko aplicada em bases elásticas ou com seções variáveis.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: Projeto de Estruturas de Concreto. Rio de Janeiro: 2023.

BRANCO, A. L. L. V. Análise não-linear de pórticos planos, considerando os efeitos do cisalhamento no cálculo de esforços e deslocamentos. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, USP, 2002.

BURGOS, R. B. Avaliação de cargas críticas e comportamento pós-crítico inicial de pórticos planos. Dissertação de mestrado. Departamento de Engenharia Civil, PUC Rio, 2005.

BURGOS, R. B, MARTHA, L. F. Exact shape functions and tangent stiffness matrix for the buckling of beam-columns considering shear deformation. In: XXXIV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2013.

BURGOS, Rodrigo Bird.; SILVA, Lucas Encarnação. Evaluation of the P-D (P-Delta) effect in columns and frames using the two-cycle method based on the solution of the beam-column differential equations. METHODSX, v.11, p. 102248, 2023.

CHEN, W. F., LUI, E.M. Stability Design of Steel Frames. CRC Press, EUA, 1991.

COWPER, G.R. The shear coefficient in Timoshenko's beam theory, J. Appl. Mech., p. 335-340, 1966.

DAVIS, R.; HENSHELL, R. D.; WARBURTON, G. B. A Timoshenko beam element. Journal of Sound and Vibration. v. 22, n. 4, p. 475-487, 1972.

FELIPPA, C. A. Introduction to finite elements method. Department of Aerospace Engineering Sciences, University of Colorado, USA. 2001.

FILHO, Avelino Alves. *Elementos Finitos a Base da Tecnologia CAE*, ed Érica, 7ª edição, 2002.

FRIEDMAN, Z.; KOSMATKA, J. B. An improved two-node Timoshenko beam finite element. *Computers and Structures*, vol. 47, n. 3, p. 473-481, 1993.

FUINA, J.S. Métodos de Controle de Deformações para Análise Não-Linear de Estruturas. Dissertação de Mestrado, Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da UFMG, 2004.

GALVÃO, A.S. Formulações não-lineares de elementos finitos para análise de sistemas estruturais metálicos reticulados planos. Dissertação de Mestrado, UFOP, 2000.

MARTHA, L. F.; Burgos, R. B. Diferenças na consideração da distorção no modelo de Timoshenko de uma viga submetida a carregamento axial. XXXVI Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, Montevideu, Uruguai, 2014.

MARTHA, L. F. Análise matricial de estruturas com orientação a objetos. Rio de Janeiro, ed. Elsevier, 2018.

NASCIMENTO, Rangel Ferreira do. Análise dinâmica de vigas utilizando o elemento finito de Timoshenko com refinamento P-adaptativo. Dissertação de mestrado, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, UNESP, 2005.

ONU, G. Finite elements on generalized elastic foundation in Timoshenko beam theory. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 134, n. 9, p. 763-776, 2008.

RACHID, M; MORI, D. D. Instabilidade: conceito – aplicação na flambagem por flexão. São Carlos: EESC-USP. 1989.

RODRIGUES, Marcos Antonio Campos. Soluções Integradas para as formulações do problema de não linearidade geométrica. Tese de Doutorado,

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2019.

RODRIGUES, Marcos Antonio Campos.; BURGOS, Rodrigo Bird.; MARTHA, Luiz Fernando. A Unified Approach to the Timoshenko Geometric Stiffness Matrix Considering Higher-Order Terms in the Strain Tensor. Latin American Journal of Solids and Structures. 2019

RODRIGUES, Marcos Antonio Campos.; BURGOS, Rodrigo Bird.; MARTHA, Luiz Fernando. Avaliação de uma Matriz Rigidez Tangente Completa de Timoshenko considerando termos de ordem elevada do tensor deformação. XL CILAMCE Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering. 2019.

RODRIGUES, Marcos Antonio Campos; BURGOS, Rodrigo Bird.; MARTHA, Luiz Fernando. Complete tangent stiffness matrix considering higher-order terms in the strain tensor and large rotations for a Euler Bernoulli – Timoshenko space beam-column element. ed. Elsevier. 2021

SHRIMA, L. M.; GIGER M. W. Timoshenko beam element resting on two parameter elastic foundation, Journal of Engineering Mechanics, vol. 118, n. 2, p. 280-295, 1992.

SILVA, R. M. Análise não -linear de pórticos planos de concreto armado: modelagem numérica e avaliação dos métodos aproximados. Tese de doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos, USP. 1996.

SILVA, R. G. L. Avaliação dos efeitos de 2ª ordem em edifícios de aço utilizando métodos aproximados e análise rigorosa. Dissertação de mestrado. Departamento de Estruturas, UFMG. 2004.

SILVA, J. L.; LEMES, I. J. M.; SILVEIRA, R. A. M.; SILVA, A. R. D. Influência da teoria de viga na análise geometricamente não linear de estruturas reticuladas. In: XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2016.

SILVA, M. F. S. Ferramenta gráfico-interativa para o dimensionamento de pórticos planos de concreto armado considerando não linearidade geométrica. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2017.

SILVA, Thiago Cunha da. Estudo analítico das teorias de viga de Bernoulli e Timoshenko para condições de contorno variadas. *Revista de Engenharia Civil IMED.*, v6, n1, 2019.

SILVA, Lucas Encarnação. Análise de segunda ordem de elementos de pórtico baseados nas soluções exatas das equações diferenciais utilizando o método dos dois ciclos iterativos. Dissertação de Mestrado, Departamento de Estruturas e Fundações, Universidade do Estado do Rio de Janeiro. 2022.

SILVA, Lucas Encarnação.; BURGOS, Rodrigo Bird. Second-order two-cycle analysis of frames based on interpolation functions from the solution of the beam-column differential equation. *REM-International Engineering Journal*, v.76, p. 139-146. 2023.

SOUSA, W. C. A; JÚNIOR, I. I. Análise não linear de estruturas: Aplicação do método do comprimento de arco de Crisfield. *Revista de Engenharia e Tecnologia*. V. 9, nº 3. 2017.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. *Theory of Elastic Stability*. 2 ed. McGraw Hill, Singapura, 1963.

VASCONCELOS, A. C; FRANCO, M. Avaliação Prática dos Efeitos de 2ª Ordem em Edifícios Altos - Coletânea de Trabalhos sobre Estabilidade Global e Local das Estruturas de Edifícios. São Paulo, 1997.

VAZ, L. E. *Método dos elementos finitos em análise de estruturas*. Ed. Elsevier. 1ª ed. Rio de Janeiro, 2011.

ZHAOHUA, F.; COOK, R. D. Beam elements on two-parameter elastic foundations. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 109, n. 6, p. 1390-1402, 1983.