



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Amanda Patrícia Pereira do Vale

**Modelagem da Mecânica dos Tecidos Pulmonares Através das
Equações Diferenciais via Operador de Caputo-Fabrizio**

Rio de Janeiro

2020

Amanda Patrícia Pereira do Vale

**Modelagem da Mecânica dos Tecidos Pulmonares Através das Equações
Diferenciais via Operador de Caputo-Fabrizio**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Computacionais, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientadores: Prof. Dr. Carlos Frederico F. de Barros e Vasconcellos

Prof.^a Dra. Cristiane Oliveira de Faria

Rio de Janeiro

2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

V149 Vale, Amanda Patrícia Pereira do.
Modelagem da mecânica dos tecidos pulmonares através das equações diferenciais fracionárias via operador de Caputo-Fabrizio – 2020. -
80 f. : il.

Orientadores: Carlos Frederico F. de Barros e Vasconcellos, Cristiane Oliveira de Faria
Dissertação (Mestrado em Ciências Computacionais) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Equações diferenciais fracionárias - Teses. 2. Mecânica respiratória - Teses. 3. Pulmões – Teses. I. Vasconcellos, Carlos Frederico F. de Barros e. II. Faria, Cristiane Oliveira de. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.

CDU 517.9

Patricia Bello Meijinhos CRB7/5217 -Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte

Assinatura

Data

Amanda Patrícia Pereira do Vale

**Modelagem da Mecânica dos Tecidos Pulmonares Através das Equações
Diferenciais via Operador de Caputo-Fabrizio**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Computacionais, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 18 de Março de 2020.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Carlos Frederico F. de Barros e Vasconcellos (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof.^a Dra. Cristiane Oliveira de Faria (Orientadora)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof.^a Dra. Claudia Mazza Dias
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ

Prof.^a Dra. Renata Machado Brandão Costa
Faculdade Estácio de Sá

Rio de Janeiro

2020

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais, Vânia Cristina e Carlos Alberto, aos meus avós maternos, Ana Maria da Silva e Wanderley Galdeano (in memorian), a minha madrinha Tereza da Silva, aos meus avós paternos, Maria Alice e José Joaquim (in memorian) e dedico também a mim, por todo o meu esforço durante esta caminhada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me manter de pé em todas as minhas caminhadas e mesmo durante as tribulações enviou seu exército para me guardar e me manter firme.

Agradeço a minha mãe e amiga de sempre Vânia Cristina, por todo seu amor e paciência para comigo nos bons e maus momentos, por todo abraço e conselhos dados.

Agradeço ao meu pai Carlos Alberto por todo amor, dedicação, amizade e ombro amigo em todos os momentos.

Agradeço ao meu irmão Matheus do Vale por todo carinho, amizade e ombro amigo em todos os momentos.

Agradeço a minha avó Ana Maria por estar sempre por perto me fazendo rir com todo seu amor, carisma e alegria.

Agradeço ao Renan Correia, por todo apoio, amizade e paciência para comigo desde o início do mestrado.

Agradeço a minha muito mais que professora, uma grande amiga Carmen Espectti, por toda sua amizade, orientações e boas gargalhadas quando nos reunimos.

Agradeço ao meu mais que primo, um irmão para toda a vida Jorge Guedes, que sempre esteve muito presente em minha vida, por todo seu carinho, companherismo e por todo compartilhamento de sua sabedoria de vida e cristã.

Agradeço as minhas primas Caroline Torres e Jessica do Vale, por estarmos sempre juntas dando força uma para a outra.

Agradeço aos meus amigos, aos meus parentes e aos meus alunos que de modo direto ou indireto me ajudaram de alguma forma nesta caminhada.

Agradeço aos meus orientadores, Cristiane de Faria e Carlos Frederico por todo empenho, ajuda e dedicação durante todo o curso e principalmente na reta final deste trabalho.

DETERMINAÇÃO e OBJETIVO!!!

”Determine a razão que move seus objetivos, seus sonhos, ... sua **VIDA!!!**”

DESAFIOS!!! SUPERAÇÃO!!!

RESUMO

VALE, Amanda Patrícia Pereira do. *Modelagem da Mecânica dos Tecidos Pulmonares Através das Equações Diferenciais via Operador de Caputo-Fabrizio*. 2020. 80 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Computacionais) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

Nesta dissertação, analisamos um problema de viscoelasticidade que modela a mecânica dos tecidos pulmonares baseado em (IONESCU et al., 2017)), onde o modelo matemático utilizou Derivadas Fracionárias via Riemann-Liouville. Como proposta de novidade e originalidade neste trabalho, fizemos uma análise diferenciada sobre este problema utilizando as Derivadas Fracionárias via Operador de Caputo-Fabrizio ver (CAPUTO; FABRIZIO, 2015). Foi estudado como obter o valor ótimo para o grau da ordem da derivada fracionária em função das variáveis Elastância e Resistência e assim, em cada caso, encontrando a solução para o perfil da deformação. Como resultados, foi encontrado relações algébricas entre o grau da derivada e as propriedades físicas a partir das Equações Lineares Homogêneas de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes. Estudos de casos desta dependência das variáveis foram apresentados através de gráficos e tabelas eletrônicas.

Palavras-chave: Equações diferenciais fracionárias. Operador de Caputo-Fabrizio.
Modelagem pulmonar.

ABSTRACT

VALE, Amanda Patrícia Pereira do. *Lung Tissue Mechanics Modeling Through Differential Equations via Caputo-Fabrizio Operator*. 2020. 80 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Computacionais) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

In this dissertation, we analyze a viscoelasticity problem presented in (IONESCU et al., 2017), which models the mechanics of lung tissues. The development mathematical model presented it is given by Fractional Derivatives via Riemann-Liouville Operator. In the present work, we made a different analysis about this problem using Fractional Derivatives via Caputo-Fabrizio Operator (CAPUTO; FABRIZIO, 2015). It was studied how to obtain the optimal value for the degree of fractional derivative order as a function of the Elastance and Resistance variables and thus, in each case, the solution for the deformation profile was found. In this study, algebraic relationships were found between the degree of the derivative and the physical properties from the Second Order Homogeneous Linear Equations with Constant Coefficients. The study of the cases of this dependence on variables were presented through graphs and electronic tables.

Keywords: Fractional Derivatives Equations. Caputo-Fabrizio Operator. Lung Modeling.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Sistema respiratório	25
Figura 2 - Árvore brônquica	26
Figura 3 - Parede torácica	27
Figura 4 - Caixa Torácica - Tomografia Computadorizada	27
Figura 5 - Processo respiratório	28
Figura 6 - “Alça de balde” das costelas	29
Figura 7 - Elevação do esterno	29
Figura 8 - Músculos da respiração	30
Figura 9 - Pleura parietal (película em azul) e Pleura visceral (película em vermelho)	31
Figura 10 - Relação pressão-volume	33
Figura 11 - Capacidades e volumes pulmonares	34
Figura 12 - Relação entre volume e pressão transpulmonar	34
Figura 13 - Relação fluxo-pressão isovolumétricas	36
Figura 14 - Relação entre volume pulmonar e resistência ao fluxo aéreo	37
Figura 15 - Trabalho mecânico (W)	38
Figura 16 - Trabalho Elástico	42
Figura 17 - Trabalho de Resistência	43
Figura 18 - Enfisema	44
Figura 19 - Relação P-V em indivíduos com limitação ao fluxo aéreo	45
Figura 20 - Fibrose	46
Figura 21 - Relação P-V em indivíduos com doenças restritivas	47
Figura 22 - Modelo simplificado do sistema respiratório por meio de tubo e balão.	49
Figura 23 - Representação mecânica simplificada do modelo linear de compartimento único	50
Figura 24 - Gráfico da função $f(E, R, \Delta_\alpha)$	63
Figura 25 - Curva de Nível para $\Delta_\alpha = 0$	63
Figura 26 - Análise de três pontos, $(0, 4; 0, 6; 0)$, $(0, 5; 0, 5; 0)$ e $(0, 6; 0, 4; 0)$ de (E, R, Δ_α) para a obtenção de α	66
Figura 27 - Análise dos dados das variáveis E, R e α para $\Delta_\alpha = 0$	67
Figura 28 - Gráfico da função $\Delta_\alpha > 0$	68
Figura 29 - Gráfico de Curva de Nível para $\Delta_\alpha > 0$ em comparação a $\Delta_\alpha = 0$	68
Figura 30 - Análise dos dados das variáveis E, R e α para $\Delta_\alpha > 0$	69
Figura 31 - Análise dos dados das variáveis E, R e α para $\Delta_\alpha > 0$ com o nível de E elevado	70

Figura 32 - Análise dos dados das variáveis E , R e α para $\Delta_\alpha > 0$ com o nível de R elevado 71

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

P-V	Pressão - Volume
CPT	Capacidade Pulmonar Total
VR	Volume Residual
CV	Capacidade Vital
CRF	Capacidade Residual Funcional
VRI	Volume de Reserva Inspiratória
VC	Volume Corrente
CI	Capacidade Inspiratória
VRE	Volume de Reserva Expiratório
W	Trabalho
O_2	Oxigênio
CO_2	Dióxido de Carbono
mm	Milímetro
PVI	Problema de Valor Inicial
PVIF	Problema de Valor Inicial Fracionário
DPOC	Doença Pulmonar Obstrutiva Crônica
FOT	Técnicas de oscilações forçadas
VC	Variação de volume durante um Ciclo respiratório
ΔP	Pressão Transpulmonar
ΔV	Variação de Volume
ΔP_{ba}	Diferença de Pressão entre boca e alvéolo
C	Complacência
C_{din}	Complacência dinâmica
C_L	Complacência pulmonar
C_w	Complacência da parede torácica
E	Elastância do Sistema Respiratório
E_L	Elastância dos pulmões
E_w	Elastância da parede torácica
F	Fluxo aéreo
Gaw	Condutância de vias aéreas
$H(\omega)$	Reatância
P	Pressão
P_A	Pressão Alveolar
Pt	Pressão total
P_0	Pressão expiratória final
Pe	Pressão necessária para vencer a resistência elástica

P_f	Pressão necessária para vencer a resistência ao fluxo aéreo
P_{el}	Pressão de retração elástica
$P_{el,rs}$	Pressão de retração elástica do Sistema Respiratório
$P_{el,L}$	Pressão elástica dos pulmões
P_{ao}	Pressão na abertura das vias aéreas
P_{es}	Pressão intrapleural
$P_{el,w}$	Pressão de expansão elástica da parede torácica
$P_{res,rs}$	Pressão resistiva do Sistema Respiratório
R	Resistência pulmonar
R_L	Resistência dos tecidos pulmonares
R_w	Resistência da parede torácica
R_{aw}	Resistência das vias aéreas
R_{aw}	Resistência ao fluxo aéreo
Z_{rs}	Impedância do Sistema Respiratório
Z_{in}	Impedância de entrada
Z_{ti}	Impedância originada pelos tecidos
Z_{aw}	Impedância originada pelas vias aéreas
$Z(\omega)$	Impedância mecânica
$Z_s(\omega)$	Parte real da Impedância
$Z_D(\omega)$	Parte imaginária da Impedância
t	Tempo
α	Expoente fracionário
ε	Deformação
σ	Tensão
ω	Frequência angular
η	Histeresividade

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	14
1	CONTEÚDOS PRELIMINARES	17
1.1	Equação Diferencial Ordinária de Primeira Ordem	17
1.2	Equações Lineares Homogêneas de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes	17
1.3	Equações Diferenciais Fracionárias	20
1.3.1	<u>Equações Diferenciais Fracionárias de Riemann-Liouville</u>	21
1.3.2	<u>Equações Diferenciais Fracionárias via Operador de Caputo-Fabrizio</u>	23
2	FISIOLOGIA DO SISTEMA RESPIRATÓRIO	24
2.1	Principais Conceitos Fisiológicos	24
2.1.1	<u>Trato Pulmonar</u>	25
2.1.2	<u>Parede Torácica</u>	26
2.1.2.1	Músculos da Respiração	26
2.2	Inspiração e Expiração	30
2.3	Relação Pressão-Volume	32
2.4	Cálculo do Trabalho Respiratório	37
2.5	Mecânica Respiratória	38
2.5.1	<u>Propriedades Elásticas do Sistema Respiratório</u>	39
2.5.1.1	Propriedades Elásticas do Pulmão	39
2.5.1.2	Propriedades Elásticas da Parede Torácica	40
2.5.2	<u>Resistência</u>	40
2.5.2.1	Resistência Pulmonar	41
2.5.2.2	Resistência da Parede Torácica	41
2.6	Relação Fisiológica da Resistência com a Elastância ou Complacência	42
2.6.1	<u>Estado Normal</u>	42
2.6.2	<u>Estado Anormal</u>	43
2.6.2.1	Enfisema Pulmonar	43
2.6.2.2	Fibrose Pulmonar	45
3	MODELAGEM DA MECÂNICA DOS TECIDOS PULMONARES VIA OPERADOR DE CAPUTO-FABRIZIO	48
3.1	Modelos Matemáticos Lineares	48
3.1.1	<u>Modelo Linear de Compartimento Único</u>	49
3.1.2	<u>Modelo de Fase Constante</u>	51
3.2	Um Modelo para o Tecido Pulmonar	52
3.3	Aplicação do Operador de Caputo-Fabrizio ao Modelo	56

3.4	Análise do Discriminante da EDO	57
3.4.1	<u>Discriminante Igual a Zero ($\Delta = 0$)</u>	58
3.4.2	<u>Análise de Δ_α</u>	59
3.4.2.1	Análise de $\Delta_\alpha = 0$	59
3.4.2.2	Análise de $\Delta_\alpha > 0$	60
3.4.2.3	Análise de $\Delta_\alpha < 0$	60
4	REPRESENTAÇÃO E ANÁLISE DO MODELO	62
4.1	Análise Gráfica de Δ_α	62
4.2	Testes numéricos considerando $\Delta_\alpha = 0$	64
4.3	Representação Gráfica para $\Delta_\alpha > 0$	67
4.4	Testes numéricos considerando $\Delta_\alpha > 0$	67
4.5	Metodologia da Análise Matemática	74
	CONCLUSÃO	76
	REFERÊNCIAS	78

INTRODUÇÃO

O estudo de sistemas complexos como o sistema respiratório demandam o entendimento de vários aspectos vindos de áreas distintas como Biologia, Física e Matemática. A maior parte dessas discussões se encontram em torno dos fluxos aéreos, da elasticidade da parede torácica, da resistência das vias aéreas, termos que descrevem a *Mecânica Respiratória* que é apresentada por Saraiva (1996).

O estudo do funcionamento do sistema respiratório, de um amplo conhecimento das Doenças Pulmonares Obstrutivas Crônicas (DPOC), do mau funcionamento do mecanismo respiratório, se tornaram temas de pesquisa de suma importância neste ano de 2020. Este fato se deve ao surto causado pela disseminação do vírus da COVID-19 (*Coronavirus Disease 2019*) que tirou o mundo de suas rotinas e em março foi caracterizado pela Organização Mundial da Saúde (OMS) como uma pandemia, nos impondo viver em estado de isolamento social com o objetivo de reduzir a dispersão e contaminação do vírus. Já foi comprovado que os sintomas não são os mesmos para todos, a maioria se recupera sem precisar de tratamento hospitalar. No entanto, uma em cada seis pessoas infectadas fica gravemente doente e desenvolve dificuldade de respirar, segundo a Organização Pan-Americana da Saúde (OPAS)¹. As pessoas que possuem doenças respiratórias estão classificadas no chamado grupo de risco, os mais vulneráveis ao coronavírus.

Estes temas de pesquisa já eram necessários antes para um melhor entendimento de como o aumento da resistência das vias respiratórias ao fluxo de ar está associado a grande parte das complicações respiratórias mais comuns, como a bronquite crônica, a asma, a bronquiectasia e o enfisema pulmonar (o tabagismo excessivo é uma das causas do enfisema pulmonar). Logo, a partir do conhecimento fisiológico e mecânico do sistema respiratório teremos embasamento para a compreensão de como tornar os tratamentos destas doenças mais eficiente. Exemplos de estudos utilizando modelagem matemática para entender doenças epidemiológicas podem ser encontradas em (ROCHA, 2012; LUIZ, 2012; SOUZA, 2016; FARIAS, 2017; BRAUER; CASTILLO-CHAVEZ; FENG, 2019).

Nesta dissertação, o nosso objetivo é estudar a modelagem matemática da *Mecânica dos Tecidos Pulmonares*, e para tanto, iremos focar nos processos que envolvam este assunto. É importante ressaltar que faremos a explicação do processo físico e biológico da respiração, para que se entenda melhor os termos técnicos descritos e necessários no desenvolvimento deste trabalho. De modo geral, é usual encontrar modelos utilizando Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) de primeira ou segunda ordem, porém no caso da Mecânica dos Tecidos Pulmonares o uso destas EDOs não é suficiente para se ob-

¹ <https://www.paho.org/pt/covid19>

ter resultados que captem os efeitos viscoelásticos do sistema pulmonar. Desta forma, empregaremos o conceito da derivada fracionária como forma de modelar o problema gerando uma Equação Diferencial Fracionária (EDF). Exemplos da utilidade de derivadas fracionárias, suas definições e propriedades podem ser encontradas na literatura, por exemplo em, (KHALIL et al., 2014; LOSADA; NIETO, 2015; CAPUTO; FABRIZIO, 2015; XIAO-JUN; BALEANU; SRIVASTAVA, 2015; ORTIGUEIRA; MACHADO, 2015; IONESCU et al., 2017; ORTIGUEIRA; MACHADO, 2018).

Em Ionescu et al. (2017) foi feito um compêndio de vários artigos da literatura relacionados à fenômenos biológicos que utilizam as EDFs de Riemann-Liouville na sua modelagem. Como exemplo, podemos citar um modelo que foi desenvolvido empregando aproximação de diferenças finitas para a equação de difusão utilizando a derivada fracionária de Riemann-Liouville para a variável espacial. Este modelo teve o propósito de sanar as falhas do fenômeno de difusão anômala ² em meios porosos (CAPUTO, 1967; BERKOWITZ; SCHER, 1997), que modelos lineares não conseguem capturar com precisão as não linearidades. Para lidar com essa questão da não linearidade, operadores de ordem fracionária foram propostos e os resultados encontrados conseguiram descrever melhor os fenômenos estudados. A difusão em tecidos biológicos, caracterizada como anômala, e por isso, é demonstrada ser melhor descrita quando é usada a derivada fracionária.

Neste trabalho, escolheu-se fazer uso de um operador matemático mais recente, o Operador de Caputo-Fabrizio definido em Caputo e Fabrizio (2015) para a derivada fracionária. A escolha da utilização das EDFs via Operador de Caputo-Fabrizio, foi feita devido aos bons resultados encontrados em recentes trabalhos, como por exemplo, em problemas de eletromagnetismo, difusão, circuito RL em série e em modelos envolvendo o efeito de memória (TEODORO; OLIVEIRA; OLIVEIRA, 2018). Outro exemplo é o trabalho de Lino e Soares (2018), apresentado durante o XXXVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC 2018), realizado em Campinas - SP, que tinha como objetivo mostrar que o método analítico para resolver as equações diferenciais fracionárias lineares de primeira ordem não-homogêneas com operador de Caputo-Fabrizio é mais vantajoso em relação as técnicas das transformadas de Laplace. Isto acontece porque seu fator integrante resolve de forma sistemática algumas equações diferenciais fracionárias de coeficientes constantes ou variáveis, assim podemos encontrar estas aplicação em situações no campo da Física e das Engenharias. Outro fator importante é que sua formulação considera o núcleo da integral fracionária como uma função

² Difusão anômala: termo usado para descrever um processo de difusão com uma relação não linear ao tempo, em contraste ao típico processo de difusão, no qual o deslocamento quadrático médio (DQM) de uma partícula é uma função linear do tempo. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Difus%C3%A3o_an%C3%B4mala>. Acesso em: junho de 2020.

não singular (como será melhor descrito neste texto).

Desta forma, a presente dissertação terá a seguinte organização:

No Capítulo 1 apresentaremos os conceitos preliminares tais como a definição e metodologia de resolução de EDOs de primeira ordem e EDOs lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes, a definição e propriedades básicas das EDFs de Riemann-Liouville e EDFs via Operador de Caputo-Fabrizio.

No Capítulo 2 faremos uma revisão da fisiologia do sistema respiratório. Abordaremos principalmente a parte mecânica da fisiologia, visto que este é o nosso principal foco no trabalho, a modelagem matemática da mecânica dos tecidos pulmonares.

No Capítulo 3 mostraremos a modelagem matemática da mecânica dos tecidos pulmonares aplicada sobre um dos modelos matemáticos vistos. Aplicaremos o Operador de Caputo-Fabrizio no PVIF proposto para a deformação em função da elastância e resistência com o propósito de encontrar a ordem ótima para a derivada fracionária e analisaremos algebricamente o comportamento deste modelo a partir da EDO de segunda ordem associada resultante deste desenvolvimento.

No Capítulo 4 a partir da análise algébrica e do estudo de sinais da equação característica da EDO de segunda ordem associada, faremos teste computacionais com o intuito de encontrar o valor ótimo para a ordem da derivada fracionária analisando o comportamento dos principais parâmetros da mecânica dos tecidos pulmonares e assim, encontrando resultados mais condizentes com as situações reais para mecânica respiratória.

Por fim, apresentamos a conclusão com a análise dos resultados e objetivos alcançados e também com as perspectivas futuras deste trabalho no Capítulo 5.

1 CONTEÚDOS PRELIMINARES

Neste capítulo iremos abordar os principais conceitos básicos necessários para um bom entendimento da proposta do trabalho e principalmente para a modelagem matemática da mecânica dos tecidos pulmonares. Faremos uma revisão dos seguintes temas: Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) de primeira ordem, EDOs lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes, Equações Diferenciais Fracionárias (EDFs) de Riemann-Liouville e EDFs via Operador de Caputo-Fabrizio.

1.1 Equação Diferencial Ordinária de Primeira Ordem

Uma equação diferencial de primeira ordem é representada por

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad (1)$$

onde f é uma função de duas variáveis dadas, t e y . A equação (1) é dita linear se a função f tem a forma $f(t, y) = q(t) - p(t)y$, isto é, temos:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t).$$

Se a função $q(t) \equiv 0$, dizemos que é uma EDO de primeira ordem **linear homogênea**, caso contrário, é **linear não-homogênea**. Para maiores esclarecimentos sobre este assunto, como técnicas para obtenção da solução, consultar (BOYCE; DIPRIMA, 2010).

1.2 Equações Lineares Homogêneas de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes

Uma equação diferencial de segunda ordem é representada por

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right), \quad (2)$$

onde f é alguma função dada. Aqui, como no caso da EDO de 1ª ordem, denotaremos a variável independente por t , e usaremos y para denotar a variável dependente. A equação

(2) é dita linear se a função f tem a forma

$$f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) = g(t) - p(t)\frac{dy}{dt} - q(t)y, \quad (3)$$

isto é, se f é linear em y e $\frac{dy}{dt}$. Na equação (3), g , p e q são funções dependentes da variável independente t , mas não dependem de y . Neste caso, reescrevemos, em geral, a equação (2) como

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad (4)$$

onde $\frac{dy}{dt} \equiv y'$. Assim, define-se o Problema de Valor Inicial (PVI) que constitui em uma equação diferencial ordinária cuja solução $y(t)$ está definida em um intervalo fechado $[a, b]$ e restrita a assumir um valor específico no início do intervalo, (FILHO, 2016), ou seja,

PROBLEMA DE VALOR INICIAL (PVI):

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = F(t, u), \quad (\text{equação diferencial}) \\ a \leq t \leq b, \quad (\text{intervalo}) \\ y(a) = y_a, \quad (\text{valor inicial}). \end{array} \right. \quad (5)$$

Lembrando que, o PVI é considerado um problema bem-posto no sentido de Hadamard se:

1. A solução existe e é única;
2. Condições de contorno e iniciais insuficientes levam a soluções múltiplas e quando estão em excesso levam a soluções não físicas;
3. A solução depende continuamente das condições iniciais e de contorno. Isto implica que pequenas mudanças nas condições nas condições iniciais e de contorno causam pequenas mudanças na solução.

A partir da definição de um PVI, (5), (2) e (4) podem ser determinadas de acordo com suas condições iniciais. Desta forma temos,

- Para o caso de 1^o ordem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = f(t, y), \\ a \leq t \leq b, \\ y(t_0) = y_0. \end{array} \right. \quad (6)$$

- Para o caso de 2^o ordem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right), \\ a \leq t \leq b, \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_1. \end{array} \right. \quad (7)$$

Note que as condições iniciais para uma equação de segunda ordem não indicam, apenas, um ponto particular (t_0, y_0) pertencente ao gráfico da solução mas, também, o coeficiente angular y_1 da reta tangente ao gráfico naquele ponto. É razoável esperar que sejam necessárias duas condições iniciais para uma equação de segunda ordem, já que, a grosso modo, precisa-se de duas integrações para se encontrar a solução e cada integração introduz uma constante arbitrária. Presume-se que duas condições iniciais serão suficientes para a determinação dos valores dessas duas constantes.

De forma análoga à uma equação de 1^a ordem, uma equação linear de segunda ordem é dita **homogênea** se a função $g(t)$ na equação (4), for igual a zero para todo t . Caso contrário, a equação é dita **não-homogênea**. Sendo p e q funções constantes e $g(t) = 0$, a equação (4) torna-se

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (8)$$

onde a , b e c são constantes dadas. Na busca de uma solução para (8), suponhamos então que $y = e^{rt}$, onde r é um parâmetro a ser determinado. Segue que $y' = re^{rt}$ e $y'' = r^2e^{rt}$. Substituindo y , y' e y'' em (8) obtemos

$$(ar^2 + br + c) e^{rt} = 0,$$

como $e^{rt} \neq 0$,

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (9)$$

A equação (9) é chamada de **Equação Característica** de (8). Sendo r uma raiz da equação polinomial, (9), então $y = e^{rt}$ é solução de (8). Como (9) é uma equação algébrica do segundo grau, iremos analisar os três casos relacionados ao discriminante Δ , ou seja, analisaremos quando $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$.

Caso I - $\Delta > 0$: A equação (9) possui duas raízes reais e distintas. Iremos denotá-las por r_1 e r_2 , onde $r_1 \neq r_2$. Desta forma, $y_1(t) = e^{r_1t}$ e $y_2(t) = e^{r_2t}$ são duas

soluções de (8), logo segue que

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad (10)$$

é a solução geral de (8), onde c_1 e c_2 são constantes.

Caso II - $\Delta = 0$: A equação (9) possui duas raízes reais iguais. Iremos denotá-las por r . Desta forma, $y_1(t) = e^{rt}$ é uma das soluções de (8), logo segue que devemos determinar uma outra solução $y_2(t)$, de modo que o par $y_1(t)$ e $y_2(t)$ seja linearmente independente. Desta forma, a partir de (BOYCE; DIPRIMA, 2010), temos

$$y_2(t) = t e^{rt} \quad (11)$$

também é solução de (8). Logo segue que

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = (c_1 + c_2 t) e^{rt} \quad (12)$$

é a solução geral de (8), onde c_1 e c_2 são constantes.

Caso III - quando $\Delta < 0$, ou seja, (9) possui duas raízes complexas conjugadas. Iremos denotá-las por r_1 e r_2 , onde $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$. Desta forma, $y_1(t) = e^{r_1 t}$ e $y_2(t) = e^{r_2 t}$ são duas soluções de (8), assim buscando uma solução geral da forma

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} = c_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t} (c_1 e^{i\beta t} + c_2 e^{-i\beta t}).$$

Utilizando a fórmula de Euler (STILLWELL, 2010, p.315)

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$$

e também utilizando uma combinação linear a partir de (BOYCE; DIPRIMA, 2010), chegamos a funções linearmente independentes. Logo, segue que

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t) \quad (13)$$

é a solução geral de (8), onde c_1 e c_2 são constantes.

1.3 Equações Diferenciais Fracionárias

Cada vez mais o cálculo de ordem não inteira, conhecido como o Cálculo Fracionário (CF), têm sido empregado em diversos problemas da Matemática Aplicada, da

Física e da Biofísica, e em especial, na obtenção da solução de PVI. O conceito do Cálculo Fracionário existe a mais de 300 anos, o seu nome surgiu em uma correspondência entre L'Hôpital e Leibniz e nos últimos 30 anos sua popularidade aumentou devido a sua adequação em problemas físicos, como os problemas viscosos e elásticos. Teodoro (2019) na sua tese de doutorado, apresentou um compêndio de operadores encontrados na literatura, propostos como derivadas fracionárias, classificando-os em relação ao critério proposto por Ortigueira e Machado (2015). É interessante notar como cada proposta de definição de derivada fracionária dentre as analisadas é mais adequada à um certo contexto físico³. Neste trabalho, apresentamos a definição da derivada fracionária segundo Riemann-Liouville que foi uma das primeiras derivadas propostas (para uma revisão histórica veja (TEODORO; OLIVEIRA; OLIVEIRA, 2018)) e a derivada fracionária segundo Caputo-Fabrizio que será utilizada em nossas análises.

1.3.1 Equações Diferenciais Fracionárias de Riemann-Liouville

Nesta seção apresentamos a definição da derivada fracionária segundo Riemann-Liouville e suas propriedades (TEODORO; OLIVEIRA; OLIVEIRA, 2018).

Definição 1 *As derivadas fracionárias temporais de ordem $\alpha \in \mathbb{C}$ de Riemann-Liouville à esquerda e à direita são definidas, respectivamente, por*

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} D^n \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau \quad (t > 0) \quad (14)$$

³ Critério segundo Ortigueira e Machado (2015):

1. A derivada fracionária é um operador linear.
2. A derivada fracionária de ordem zero de uma função é a própria função, $D^0 f(x) = f(x)$.
3. A derivação fracionária, quando a ordem é um inteiro deve produzir o mesmo resultado da derivação ordinária.
4. A lei dos expoentes, $D^\alpha D^\beta f(x) = D^{\alpha + \beta} f(x)$, é satisfeita para $\alpha < 0$ e $\beta < 0$.
5. Vale a generalização da regra de Leibniz,

$$D^\alpha (f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\beta} D^k f(x) D^{\alpha - k} g(x),$$

$$\text{sendo } \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - k + 1)k!}$$

$${}_t D_b^\alpha f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} D^n \int_t^b \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (b > t) \quad (15)$$

com $n = [\text{Re}(\alpha)] + 1$, onde $\text{Re}(\alpha) > 0$ e D^n é uma derivada inteira de ordem n .

Seu núcleo é definido como

$$K(\alpha, t, \tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}},$$

onde este é singular⁴.

Por simplicidade, ao mencionarmos $D^\alpha f(t)$, estaremos fazendo uso do operador diferencial de Riemann-Liouville apenas à esquerda, com limite inferior de integração $a = 0$ e $n = 1$. Assim, a definição de Riemann-Liouville da derivada de ordem fracionária de uma função $f(t)$ é dada por:

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. \quad (16)$$

Definição 2 Definimos a função Gama pela seguinte integral imprópria

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

para os reais, exceto os inteiros negativos (ARFKEN, 1985).

Propriedades 1 (Relação Funcional). Uma propriedade muito interessante da função Gama é dada por:

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x),$$

com x diferente de um inteiro negativo ou nulo. Em particular, se $x = n$ um inteiro não negativo, então vale

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n!$$

já que $\Gamma(1) = 0! = 1$ (ARFKEN, 1985). Neste sentido, interpretamos a função Gama como uma generalização do conceito de fatorial.

⁴ Dizemos que uma função é singular quando ela não possui inversa. Se ela possui inversa é chamada de não-singular.

1.3.2 Equações Diferenciais Fracionárias via Operador de Caputo-Fabrizio

Definição 3 Para $0 < \alpha < 1$, o Operador de Caputo-Fabrizio de ordem α é definida por:

$$D^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t \exp\left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau)\right] f'(\tau) d\tau \quad (17)$$

onde $t \geq 0$ e $M(\alpha)$ é uma função de normalização em que $M(0) = M(1) = 1$.

Por simplicidade adotaremos $M(\alpha) \equiv 1$ e $a = 0$, e consideraremos a definição de Caputo-Fabrizio apresentada no artigo *A New Definition of Fractional Derivative without Singular Kernel* (CAPUTO; FABRIZIO, 2015).

Desenvolvendo a Definição 3, (17), podemos reescrever o Operador de Caputo-Fabrizio na forma:

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{1-\alpha} \exp\left(-\frac{\alpha t}{1-\alpha}\right) \int_0^t \exp\left(\frac{\alpha\tau}{1-\alpha}\right) f'(\tau) d\tau \quad (18)$$

onde seu núcleo é definido como

$$K(\alpha, t, \tau) = \exp\left(\frac{\alpha\tau}{1-\alpha}\right).$$

Observe que:

- (i) o núcleo é não-singular, sendo $K(\alpha, t, \tau)$ uma função exponencial que é definida em todos os reais;
- (ii) quando $\alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 0} D^\alpha f(t) = f(t) - f(a)$;
- (iii) quando $\alpha \rightarrow 1 \Rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 1} D^\alpha f(t) = f'(t)$.

Para maiores esclarecimentos das propriedades acima ver (CAPUTO; FABRIZIO, 2015; TEODORO, 2014; TEODORO, 2019).

A derivada fracionária via Operador de Caputo-Fabrizio tem sido utilizada em problemas de eletromagnetismo, difusão, circuito RL em série e em modelos envolvendo o efeito de memória (TEODORO; OLIVEIRA; OLIVEIRA, 2018). Por isso, propomos uma nova aplicação para a derivada de Caputo-Fabrizio, a aplicação desta derivada juntamente com o operador na equação de modelagem da mecânica dos tecidos pulmonares. Desta forma, no próximo capítulo iremos estudar a fisiologia pulmonar do corpo humano, onde daremos uma maior importância em sua parte mecânica, o processo mecânico do sistema respiratório e no Capítulo 3 iremos explicar a modelagem baseada na fisiologia pulmonar e na utilização do operador de Caputo-Fabrizio.

2 FISILOGIA DO SISTEMA RESPIRATÓRIO

Neste capítulo, estudaremos a partir de (ZIN, 1990; SILVA, 2011; WEST, 2013; PRESTON; WILSON, 2014) a fisiologia do Sistema Respiratório, ou seja, o funcionamento dos pulmões tanto à forma biológica quanto à forma física. Porém, como o objetivo do trabalho é associar a parte fisiológica à modelagem matemática da mecânica dos tecidos pulmonares, daremos um maior destaque a parte físico-mecânica do Sistema Respiratório.

2.1 Principais Conceitos Fisiológicos

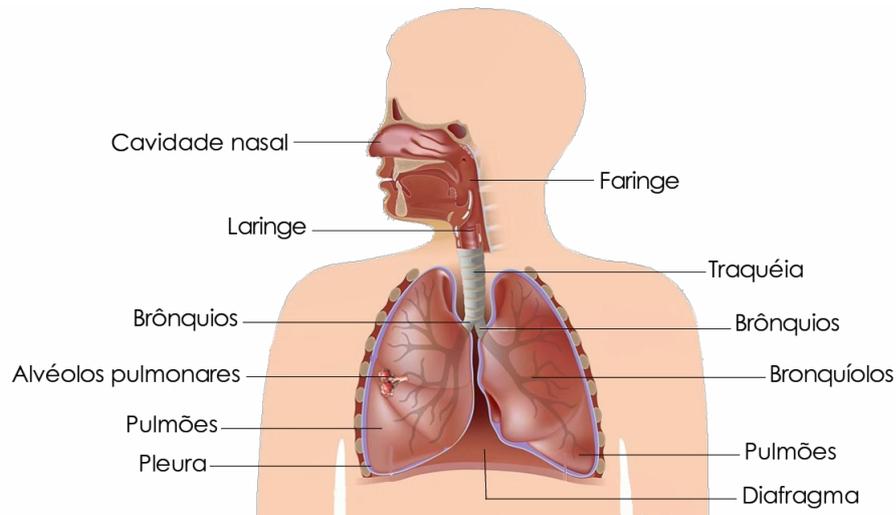
Em Silva (2011) é afirmado que a principal função fisiológica do Sistema Respiratório é a hematose. Esta função envolve o transporte de oxigênio (O_2) dos alvéolos para os vasos sanguíneos e de dióxido de carbono (CO_2) do sangue para o alvéolo. Nos vasos sanguíneos, as células vermelhas (hemácias) são formadas pelo pigmento respiratório (hemoglobina), que é capaz de transportar o oxigênio e o gás carbônico para todos os tecidos do corpo. A consequente integração entre os diferentes setores (pulmão, coração, circulação pulmonar e sistêmica⁵ e respiração celular) permite a manutenção de um adequado equilíbrio ácido-básico e a resposta eficiente a qualquer mudança do estado de repouso para o de movimento.

O Sistema Respiratório (Figura 1) consiste em um aparato mecânico responsável pela ventilação dos gases até os alvéolos, pelo setor alveolocapilar e por estruturas que regem o controle de todo o Sistema Respiratório, como os músculos e vértebras. Em artigo publicado no periódico *Jornal Brasileiro de Pneumologia*, Zin (1990) descreve o Sistema Respiratório sendo formado por dois componentes: os pulmões e a parede torácica. A parede torácica por sua vez, são todas as estruturas que se movem durante o ciclo respiratório, à exceção dos pulmões, e não se esquecendo que o diafragma, que separa o abdome do tórax também faz parte da parede torácica para fins mecânicos.

E em Silva (2011), a interação adequada entre o pulmão e a parede torácica dependem do fole respiratório. Sua função primordial é garantir uma diferença pressórica apropriada entre a atmosfera e o Sistema Respiratório. Na inspiração há uma menor pressão dentro do pulmão, garantindo a entrada do ar, ao passo que na expiração, a contração dos músculos (diafragma e intercostais) cria uma maior pressão dentro dos

⁵ Circulação sistêmica: o sangue oxigenado é levado do coração aos tecidos e, depois, é levado novamente ao coração. Disponível em: <<https://brasilescola.uol.com.br/biologia/circulacao-sistemica-pulmonar.htm>>. Acesso em: março de 2020.

Figura 1 - Sistema respiratório



Fonte: <https://enfermagemflorence.com.br/anatomia-do-sistema-respiratorio/>

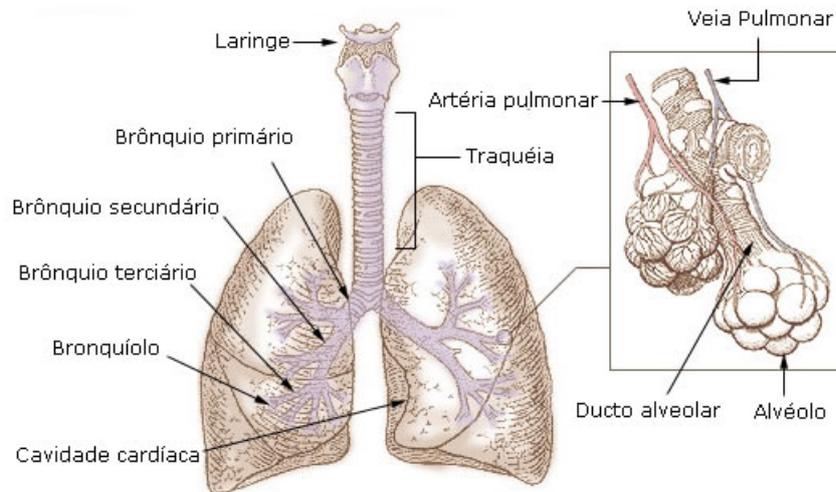
pulmões, permitindo a saída do ar para o meio externo.

2.1.1 Trato Pulmonar

Seguindo os estudos de Silva (2011), o trato pulmonar, também conhecido como tecido pulmonar, é constituído pelas vias aéreas superiores (fossas nasais e faringe), pela árvore brônquica (Figura 2) (vias aéreas), pelo setor alveoloductal (estruturas de troca gasosa) e pelos vasos pulmonares. O trato respiratório é formado basicamente por tecido conjuntivo e musculatura lisa.

A árvore brônquica apresenta uma divisão dos brônquios menores até os bronquíolos com diâmetros de 0,3 a 0,5 mm. As paredes dos bronquíolos, por definição, não têm suporte cartilaginoso e possuem fibras elásticas que evitam o colapso da parede bronquiolar quando ocorre o relaxamento muscular expiratório. Os bronquíolos dividem-se sucessivamente e, da sua última divisão, originam-se os bronquíolos terminais, onde por sua vez, da divisão dos bronquíolos terminais surgem os bronquíolos respiratórios, que servem como ligação entre as vias aéreas e as estruturas de troca gasosa (vasos sanguíneos) no pulmão. A árvore brônquica até os bronquíolos terminais têm função de conduzir o ar, sem acontecer nenhuma troca gasosa (que só ocorre a nível de alvéolos). Por esse motivo essa área que se estende até os bronquíolos terminais também é anatomicamente conhecida como espaço morto. A cobertura de tecido epitelial presente na árvore brônquica também possuem função de proteção dos órgãos internos e do Sistema Respiratório contra a invasão de microorganismos presentes no ar.

Figura 2 - Árvore brônquica



Fonte: <https://www.infoescola.com/sistema-respiratorio/arvore-bronquica/>

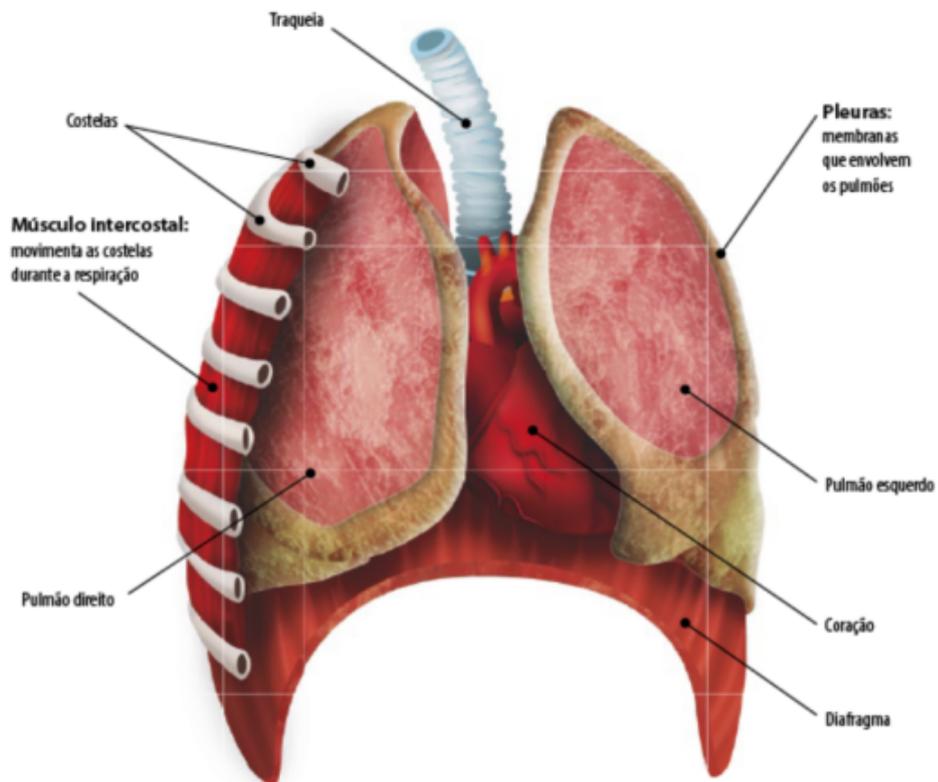
2.1.2 Parede Torácica

A parede torácica (Figura 3) é formada pelas costelas, por 12 vértebras torácicas e por sua musculatura como é explicado por Silva (2011). A caixa torácica (Figura 4) é constituída por tecido muscular que auxilia durante a respiração. Dentre os músculos que participam da respiração, destacamos os músculos intercostais internos e externos, os músculos subcostais, os músculos escalenos e o diafragma, (ver Figura 8). Estes são os principais músculos da respiração, pois elevam o primeiro e o segundo par de costelas e a parte superior do tórax. Sua ação é ampliada pela extensão do pescoço. O músculos escalenos movem a musculatura intercostal no sentido cranial.

2.1.2.1 Músculos da Respiração

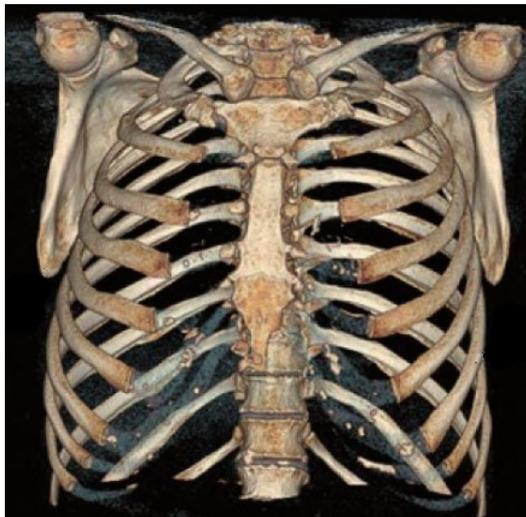
Segundo West (2013), na inspiração o músculo mais importante é o diafragma (Figura 3), o qual consiste em uma lâmina muscular fina, em forma de cúpula, inserida nas costelas inferiores. Quando se contrai, os conteúdos abdominais são forçados para baixo e para frente, aumentando a dimensão vertical da cavidade torácica. Além disso, as margens costais são elevadas e movimentadas para fora, promovendo aumento no diâmetro transversal do tórax, (ver Figura 5). Os músculos intercostais externos conectam as costelas adjacentes e inclinam-se para baixo e para frente. Quando se contraem, as costelas são tracionadas para cima e para frente, promovendo o aumento dos diâmetros lateral e anteroposterior do tórax. A dimensão lateral aumenta em função do movimento de “alça de balde” das costelas, ver Figura 6. Os músculos utilizados na inspiração incluem os

Figura 3 - Parede torácica



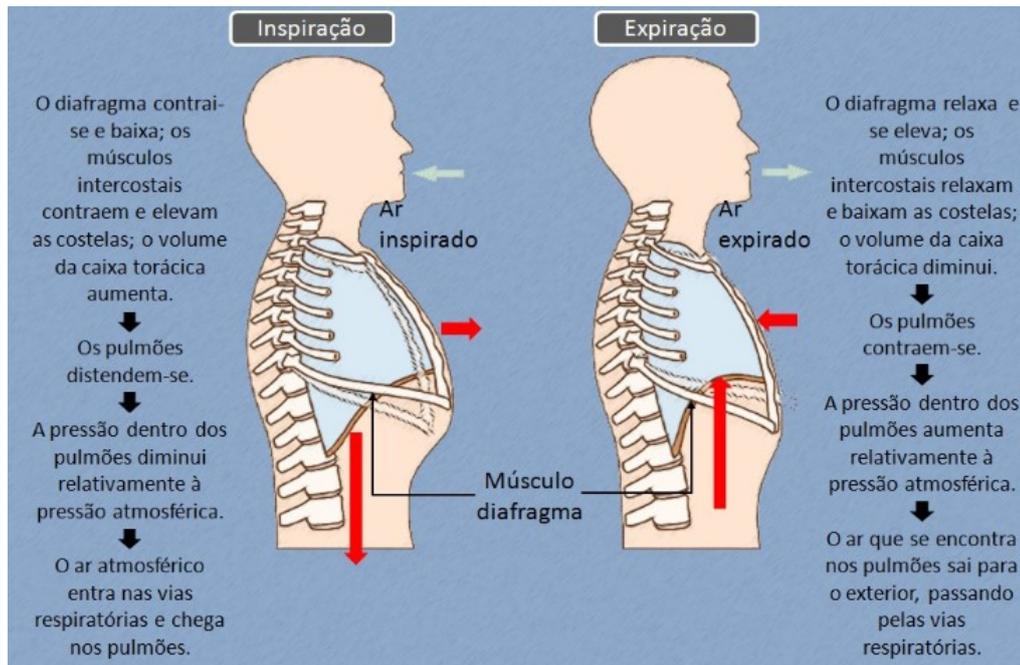
Fonte: <http://resumofisioterapia.blogspot.com/?view=snapshot>

Figura 4 - Caixa Torácica - Tomografia Computadorizada



Fonte: (SILVA, 2011)

Figura 5 - Processo respiratório



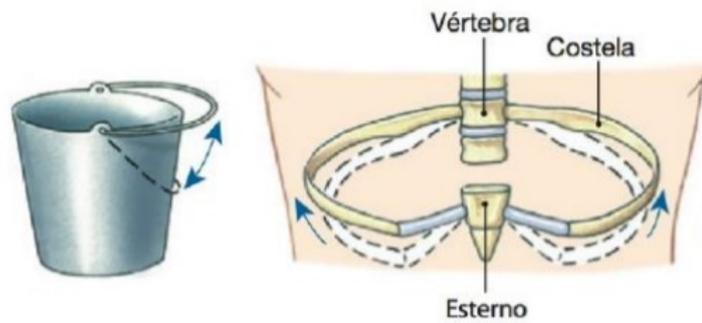
Fonte: <http://fazerbiologiaquelegal.blogspot.com/2013/01/video-como-funciona-inspiracao-e.html>

músculos escalenos, os quais elevam as duas primeiras costelas, e o esternomastóideo, que realiza a elevação do esterno, ver Figura 7.

Na expiração os músculos mais importantes da expiração são os da parede abdominal, englobando o reto abdominal, os oblíquos internos e externos e o transverso, ver Figura 8. Quando esses músculos se contraem, a pressão intra-abdominal se eleva e o diafragma é empurrado para cima. Ressaltamos que durante a respiração tranquila, a expiração é passiva. O pulmão e a parede torácica são elásticos e tendem a retornar às suas posições de equilíbrio após serem ativamente expandidos ao longo da inspiração. Durante o exercício e a hiperventilação voluntária, a expiração passa a ser ativa.

Os músculos intercostais internos auxiliam a expiração ativa tracionando as costelas para baixo e para dentro (em oposição à ação dos músculos intercostais externos), diminuindo, desse modo, o volume torácico. Além disso eles tensionam os espaços intercostais para evitar que se salientem para fora durante a expiração.

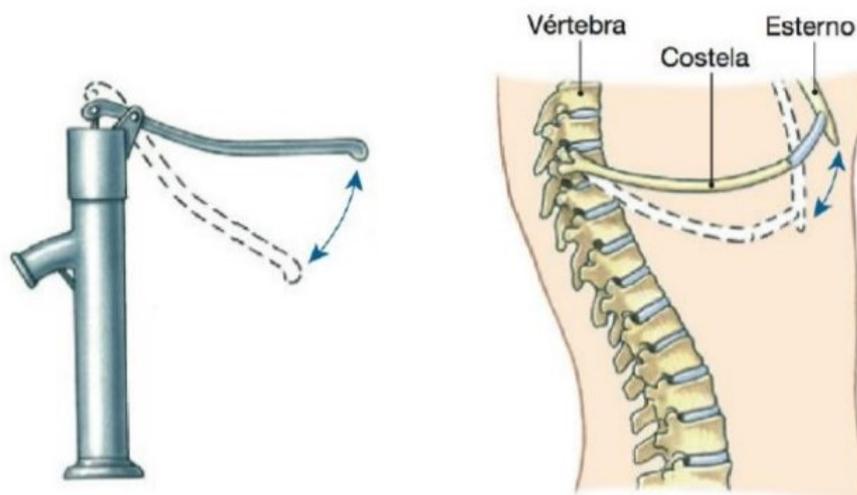
Figura 6 - “Alça de balde” das costelas



Um movimento similar ao da alça de um balde aumenta a dimensão lateral da caixa torácica.

Fonte: http://www.ufjf.br/laura_eite/files/2019/05/Sistema-respiratório-1.pdf

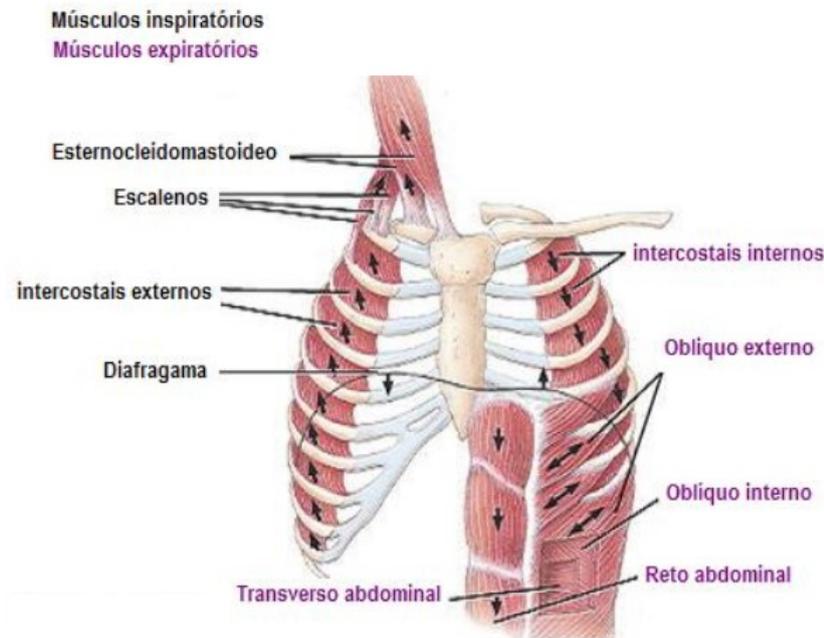
Figura 7 - Elevação do esterno



O movimento similar ao da alavanca de uma bomba manual de água aumenta a dimensão ântero-posterior da caixa torácica.

Fonte: http://www.ufjf.br/laura_eite/files/2019/05/Sistema-respiratório-1.pdf

Figura 8 - Músculos da respiração



Fonte: <https://momentofisioex.wordpress.com/tag/musculos-respiratorios/>

2.2 Inspiração e Expiração

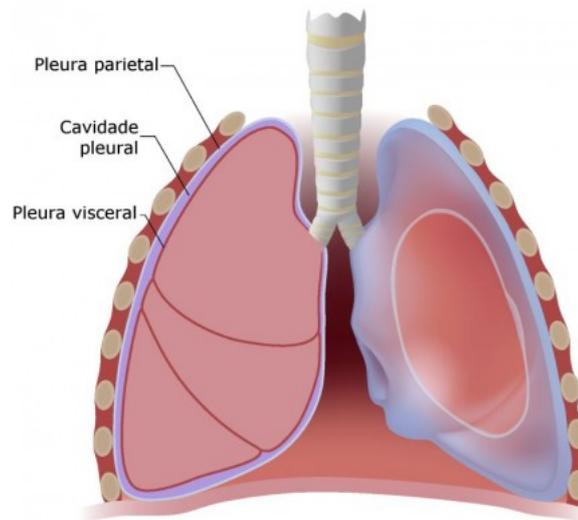
Na inspiração, a musculatura inspiratória gera uma tensão na parede torácica, que é diretamente transmitida para a cavidade pleural que é formada por uma fina camada líquida localizada entre as pleuras visceral e parietal⁶ (Figura 9). Essa tensão, por capilaridade⁷, exerce uma tração radial por todo o parênquima pulmonar⁸, transmitida para as paredes alveolares e as paredes das vias aéreas, o que provoca uma diferença de pressão entre essas estruturas e a atmosfera, determinando por sua vez a geração de fluxo aéreo. Em primeira instância, a magnitude necessária para a geração dessa pressão depende da complacência dos pulmões e da parede torácica (SILVA, 2011). Abaixo enumeramos

⁶ Pleura é uma membrana úmida formada por uma delgada camada de células epiteliais, apoiada sobre um fino tecido conjuntivo, que envolve o pulmão e é constituída por dois folhetos, o parietal e o visceral, que são contínuos na região do hilo do pulmão. Disponível em: <<https://www.infoescola.com/sistema-respiratorio/pleura/>>. Acesso em: março de 2020

⁷ Capilaridade ou ação capilar é a propriedade física que os fluidos têm de subir ou descer em tubos extremamente finos. Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/wiki/Capilaridade>>. Acesso em: março de 2020

⁸ Parênquima é o local onde é feita a troca de gases no pulmão, havendo alguns componentes que representam esse setor. A troca desses gases é feita, por exemplo, para levar oxigênio ao coração e distribuí-lo ao restante do corpo. Disponível em: <<https://guiamedicobrasileiro.com.br/parenquima-pulmonar/>>. Acesso em: março de 2020

Figura 9 - Pleura parietal (película em azul) e Pleura visceral (película em vermelho)



Fonte: Imagem encontrada em <https://www.infoescola.com/sistema-respiratorio/pleura/>

algumas definições pertinentes:

- * **Pressão Transpulmonar (ΔP):** é denominada a diferença entre a pressão da superfície pleural (medida, na prática clínica, pela pressão esofágica) e a pressão da boca.
- * **Complacência Pulmonar Estática:** é uma medida de distensibilidade do pulmão, é a variação de volume produzida por uma variação na pressão estática (quando não há fluxo aéreo por pelo menos 1,5 segundos) de $1\text{ cmH}_2\text{O}$ ⁹ ao longo do pulmão, ou seja, entre a superfície pleural e a boca.
- * **Complacência Estática da Parede Torácica** é a alteração do volume pulmonar gerada por uma variação da pressão estática ao longo da parede torácica, ou seja, entre a superfície pleural e a superfície externa da parede.
- * A **Complacência Total** do Sistema Respiratório é a variação de volume (ΔV) gerada por uma pressão de $1\text{ cmH}_2\text{O}$ ao longo da parede torácica e dos pulmões, ou seja, $C = \frac{\Delta V}{\Delta P}$. A unidade de medida é $L/\text{cmH}_2\text{O}$.
- * A complacência pulmonar também pode ser determinada durante a ventilação (quando há fluxo aéreo). Neste caso, é denominada **Complacência Dinâmica (C_{din})** e é

⁹ Centímetro de água (cmH_2O) é uma unidade de medida de pressão, definida como a pressão exercida por uma coluna de água de 1 centímetro de altura a 4°C (temperatura da densidade máxima) no valor normal da gravidade, o que equivale a $98,0368\text{ Pa}$.

definida como a variação de volume durante um ciclo respiratório (VC) dividida pela variação de pressão transpulmonar do final da expiração para o final da inspiração, ou seja, $C_{din} = \frac{VC}{\Delta P}$;

Podemos observar em Silva que, assim como a complacência estática, o valor da complacência dinâmica também depende do volume pulmonar no qual ocorre a ventilação.

“Além da resistência elástica dos pulmões e da parede torácica, durante a inspiração, a musculatura respiratória deve fornecer uma força suficiente para vencer a resistência ao fluxo de ar das vias aéreas superiores e da árvore traqueobrônquica. Uma terceira resistência envolve a inércia para o deslocamento (aceleração e desaceleração) dos gases e tecidos, mas ela geralmente é desprezível em condições normais e portanto esta terceira resistência será descartada (SILVA, 2011, p.34).”

Na expiração, a força necessária para vencer a resistência ao fluxo aéreo costuma ser fornecida pela própria retração elástica dos pulmões. Tanto em doenças pulmonares obstrutivas crônicas (DPOC)¹⁰ quanto na expiração forçada, a retração elástica não é suficiente para sobrepujar a resistência das vias aéreas.

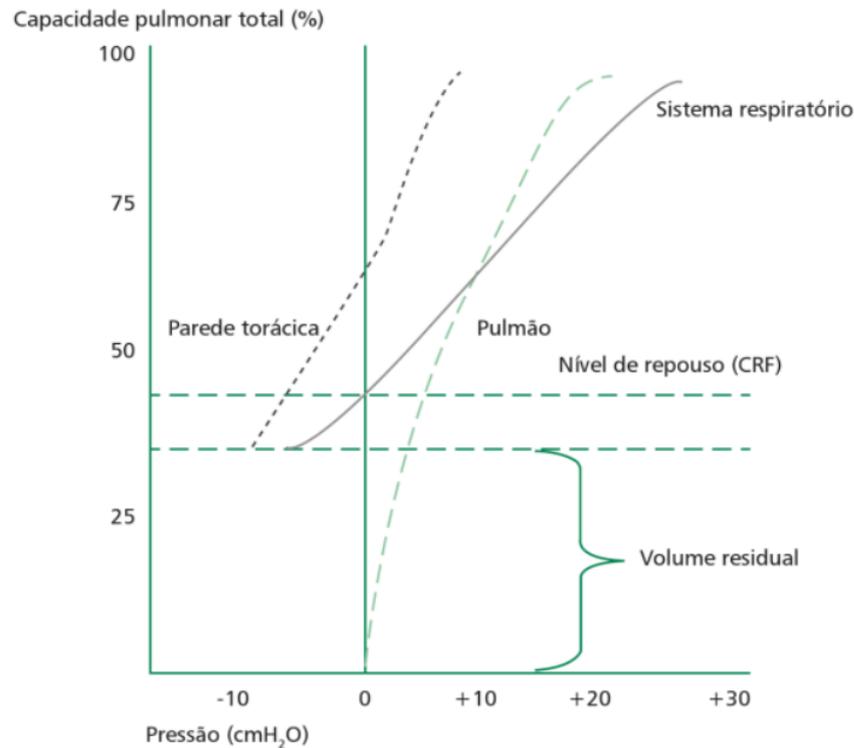
2.3 Relação Pressão-Volume

Em Silva (2011) foi observado a existência de curvas pressão-volume para o pulmão e a parede torácica e também a curva da resultante interação entre ambos no sistema respiratório (como pode ser analisado na Figura 10). Na **Capacidade Pulmonar Total** (CPT), a curva do pulmão demonstra um platô, o que não ocorre na curva da parede torácica. Neste caso, é a elasticidade do pulmão que determina a CPT. Na CPT, a musculatura inspiratória está em seu encurtamento máximo. Já no **Volume Residual** (VR), a curva da parede torácica não ultrapassa o valor de 25%, não sendo o caso da curva do pulmão, que se inicia na origem. Logo, é a limitação da parede torácica que determina o VR do sistema respiratório.

As duas variáveis mais importantes para a determinação de todos os volumes e capacidades pulmonares são a **Capacidade Vital** (CV) e a **Capacidade Residual Funcional** (CRF), onde CRF é o volume que representa o ponto de equilíbrio entre a

¹⁰ A doença pulmonar obstrutiva crônica (DPOC) é caracterizada por uma limitação do fluxo de ar (obstrução). Como exemplo, podemos citar a bronquite crônica e o enfisema. Disponível em: (PRESTON; WILSON, 2014)

Figura 10 - Relação pressão-volume

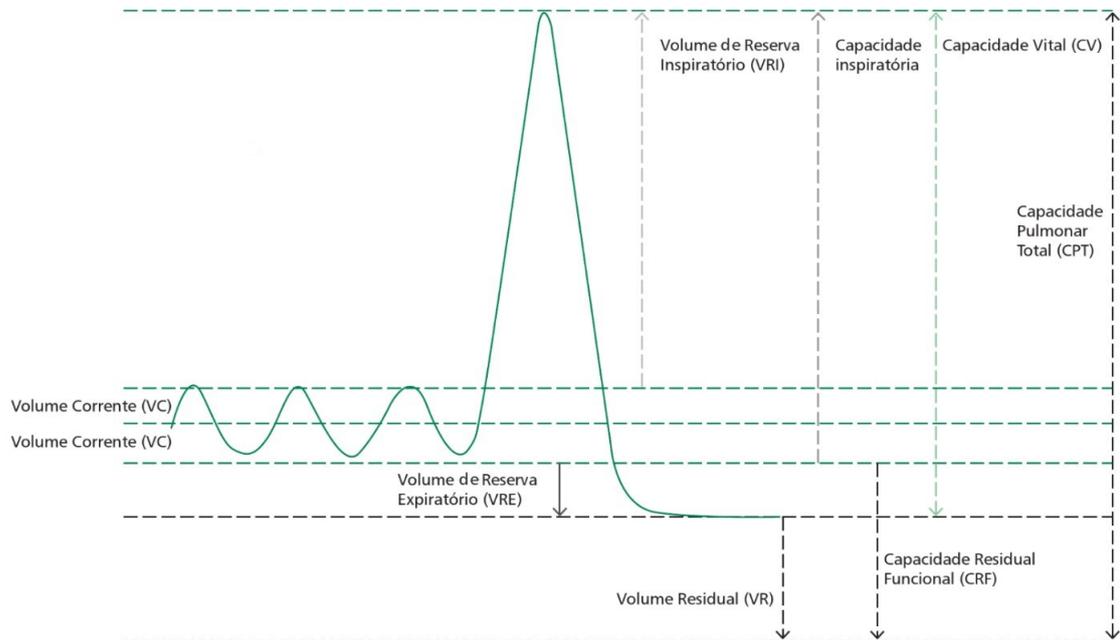


Fonte: (SILVA, 2011)

tendência de expansão da caixa torácica e de retração elástica pulmonar. A CV é o volume máximo expirado, partindo-se da CPT, ou o volume máximo inspirado, partindo-se do VR. O **Volume de Reserva Inspiratória (VRI)** é o volume máximo de ar inspirado, partindo-se do **Volume Corrente (VC)**. A **Capacidade Inspiratória (CI)** é o volume máximo de ar inspirado, partindo-se do **Repouso Expiratório (CRF)**. O **Volume de Reserva Expiratório (VRE)** é o volume máximo de ar expirado, partindo-se também, do repouso expiratório (CRF). Já o VR é o volume de ar presente nos pulmões após uma expiração forçada e completa. O VR nunca é determinado diretamente por qualquer método de função pulmonar. É válido ressaltarmos que para se obter o VR deve-se primeiro medir a CRF e após, subtrair a CRF pelo VRE. Na Figura 11 podemos observar as diferentes capacidades e volumes, onde a capacidade é sempre a soma de dois ou mais volumes.

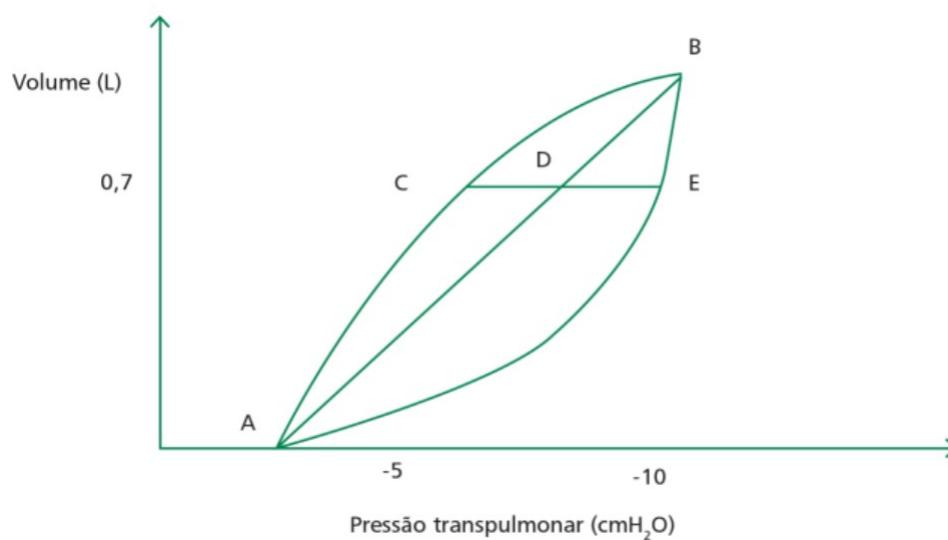
Relacionando-se as alterações simultâneas de volume e pressão (diferença de pressão pleura-boca) na inspiração e expiração, pode-se deduzir uma alça de pressão-volume. Seus limites definem a **Pressão total (P_t)** relacionada com qualquer volume no ciclo respiratório. Assim, a partir da análise da Figura 12, observamos a relação entre volume e variação pressórica ao longo dos pulmões em um ciclo respiratório. Na Figura 12 (retirada de (SILVA, 2011)) a reta que conecta os pontos A e B (AB) representa a pressão

Figura 11 - Capacidades e volumes pulmonares



Fonte: (SILVA, 2011)

Figura 12 - Relação entre volume e pressão transpulmonar



Fonte: (SILVA, 2011)

necessária para vencer a resistência elástica do Sistema Respiratório em qualquer volume. São demonstradas também as pressões necessárias para vencer a resistência ao fluxo aéreo durante a inspiração (DE) e a expiração (CD) em um volume $0,7L$ acima da CRF em um indivíduo saudável. Ou seja, dessa alça, podem ser calculadas a **Pressão necessária para vencer a resistência elástica** (P_e) e a **Pressão necessária para vencer a resistência ao fluxo aéreo** (P_f) que nos dá a pressão total:

$$P_t = P_e + P_f .$$

Nos extremos da alça (final da inspiração e final da expiração), não há fluxo aéreo. Nesses pontos, a P_t é igual à P_e . Durante um ciclo respiratório normal, pode-se admitir uma variação linear da pressão elástica ao longo do eixo do volume. Consequentemente, $P_f = P_t - P_e$ em qualquer ponto do gráfico representado na Figura 12. Considerando que a complacência seja

$$C = \frac{\Delta V}{\Delta P_e} \Rightarrow P_e = \frac{\Delta V}{C}, \quad (19)$$

a pressão necessária (P_f) para vencer a resistência ao fluxo em qualquer volume é:

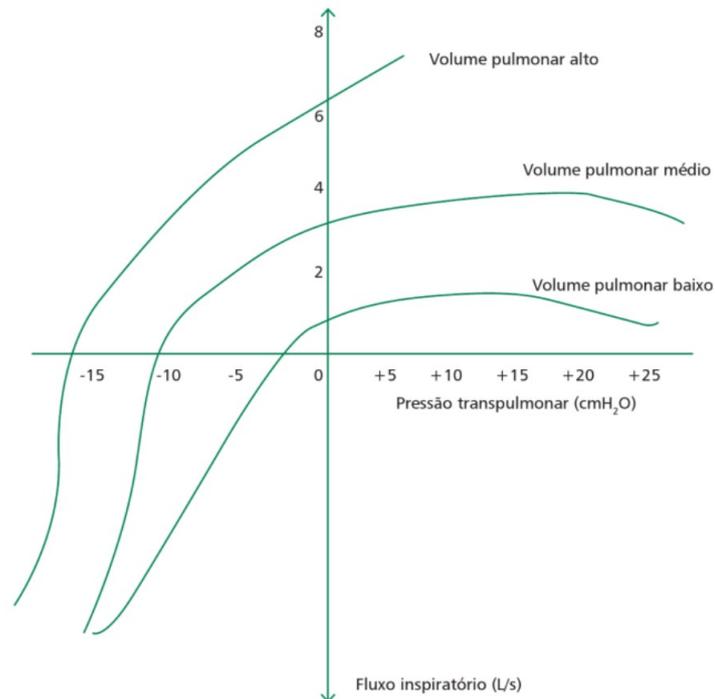
$$P_f = P_t - \frac{\Delta V}{C}.$$

A relação entre as medidas simultâneas da P_f e do fluxo aéreo (F) em diferentes graus de insuflação pulmonar produz uma relação pressão-volume que representa a **Resistência ao fluxo aéreo** (R_{aw}), representado na Figura 13, e é dado por:

$$R_{aw} = \frac{\Delta P_{ba}}{F} \quad (20)$$

onde ΔP_{ba} é a diferença de pressão entre boca e alvéolo, F é fluxo aéreo dado em ($cmH_2O/L/s$). Este dado é importante, pois sempre deve ser informado o volume pulmonar em que foi medida a resistência ao fluxo aéreo. A partir deste estudo, na Figura 13 mostra curvas fluxo-pressão isovolumétricas em um indivíduo normal em três níveis de insuflação pulmonar, permitindo a análise que em todos os volumes pulmonares, o fluxo inspiratório máximo aumenta com um esforço maior (pressão transpulmonar negativa maior), assim também como o fluxo expiratório máximo aumenta com maior esforço em um volume pulmonar maior. Em volumes pulmonares menores, um esforço maior (pressão transpulmonar mais positiva) aumenta o fluxo aéreo até um máximo, sendo que um esforço maior não produz maior fluxo e pode até mesmo levar a sua redução, provavelmente pela compressão excessiva das vias aéreas. Desta forma, podemos concluir que em volumes maiores, há menor resistência para a expiração e maior para a inspiração. Em volumes menores, o contrário acontece, há uma menor resistência para a inspiração e

Figura 13 - Relação fluxo-pressão isovolumétricas

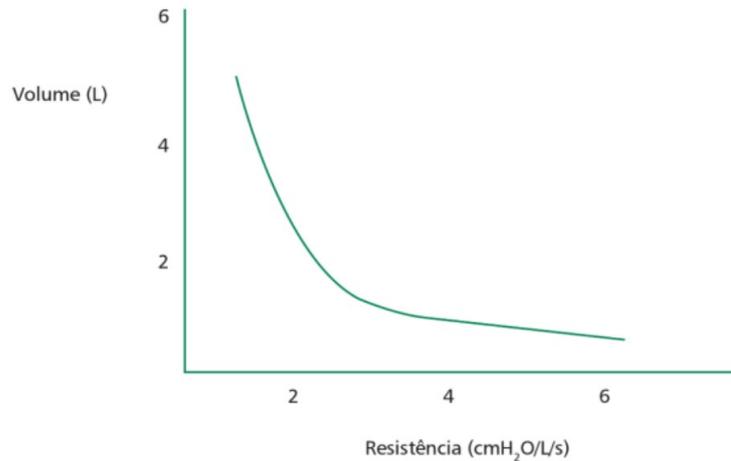


Fonte: (SILVA, 2011)

uma ainda maior para a expiração. Em indivíduos normais, a resistência ao fluxo aéreo varia de 1 a 3 $cmH_2O/L/s$.

É válido ressaltarmos que a partir de curvas fluxo-pressão isovolumétricas, é possível calcular a resistência em cada volume. A partir da relação entre volume pulmonar e resistência ao fluxo aéreo em um indivíduo normal, obtemos uma **relação hiperbólica** como resultado da relação volume-resistência. Observe na Figura 14 que em volumes maiores, devido à maior pressão transpulmonar, as vias aéreas estão mais distendidas, de modo que o fluxo aéreo é maior do que em volumes pulmonares menores. Já a **Condutância de vias aéreas** ($1/resistência$), (Gaw), está linearmente relacionada com volume.

Figura 14 - Relação entre volume pulmonar e resistência ao fluxo aéreo

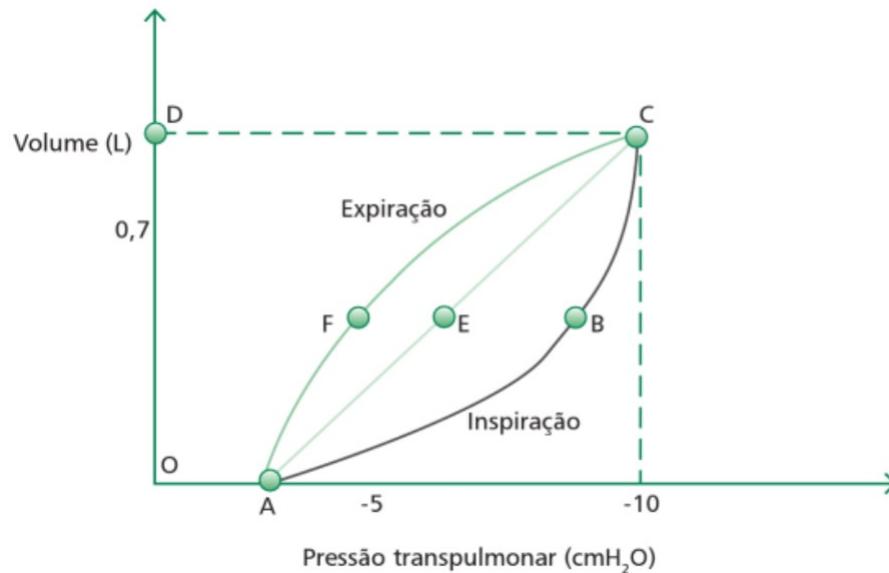


Fonte: (SILVA, 2011)

2.4 Cálculo do Trabalho Respiratório

Em Física, o trabalho (W) é definido como o produto da força pela distância. Em fisiologia respiratória, o análogo da força é a *pressão transpulmonar* e o da distância é o *volume*. Para o cálculo do W , basta calcular a área do gráfico correspondente ao momento respiratório, onde este representa o trabalho mecânico necessário para a ventilação em volume corrente em um indivíduo saudável, (ver Figura 15). Em um indivíduo normal, no qual a resistência das vias aéreas é baixa, a maior parte do W respiratório serve para vencer a resistência elástica do Sistema Respiratório (dois terços do total). Uma energia mínima é despendida para vencer a resistência das vias aéreas. Nessa situação, a maior parte do trabalho do Sistema Respiratório é gasta no ciclo respiratório. Na expiração espontânea, graças a essa energia potencial acumulada, há grande auxílio do processo de retração elástica pulmonar e o trabalho expiratório torna-se bem reduzido em relação ao trabalho total do sistema. Em um indivíduo normal, a energia potencial acumulada pelo parênquima pulmonar na inspiração é mais do que suficiente para vencer a resistência das vias aéreas.

A partir de agora, não é difícil entender como o trabalho respiratório pode influenciar no padrão ventilatório. Em geral, quando um indivíduo normal ventila mais profundamente (aumento do volume inspiratório e expiratório com frequência respiratória baixa), **a necessidade de trabalho elástico aumenta e a da resistência das vias aéreas se reduz**. Em frequências respiratórias maiores com um VC menor, **o trabalho elástico é minimizado, mas o da resistência das vias aéreas aumenta**. No entanto, o gasto energético total ainda é pequeno, pois a complacência dinâmica altera-se minimamente, mesmo em frequências respiratórias altas, e a resistência das vias aéreas

Figura 15 - Trabalho mecânico (W)

Fonte: (SILVA, 2011)

em indivíduos normais é considerada pequena.

2.5 Mecânica Respiratória

É comprovado que durante a inspiração, a energia gerada pelos músculos inspiratórios é dissipada para vencer forças elásticas e resistivas da parede torácica e dos pulmões (ZIN, 1990; CARVALHO; ZIN, 2011; AOKI, 2013). Conseqüentemente, há produção de fluxo aéreo e alteração do volume gasoso pulmonar, onde o componente acelerativo é praticamente desconsiderado.

Como mencionado anteriormente, em (ZIN, 1990), a decomposição do Sistema Respiratório em parede torácica e pulmões é importante, visto que não só têm propriedades mecânicas distintas como também há entidades mórbidas¹¹ capazes de comprometer a parede torácica ou os pulmões, ou mesmo os dois, gerando desta forma a disfunção do Sistema Respiratório.

¹¹ Entidade mórbida: Conjunto de manifestações patológicas caracterizadas pela sua composição e constância, constituindo uma situação ou doença individualizada. Disponível em: <<https://www.infopedia.pt/dicionarios/termos-medicos/entidade>>. Acesso em: junho 2020.

2.5.1 Propriedades Elásticas do Sistema Respiratório

Nesta seção seguiremos essencialmente o trabalho de Zin (1990). A elasticidade é uma propriedade da matéria, responsável por fazê-la retornar à sua forma de repouso após haver sido distorcida por uma força externa. Alguns tecidos da parede torácica e dos pulmões possuem propriedades elásticas, de modo que, quanto mais intensa for a pressão motriz do sistema, maior o volume gasoso inspirado. Como visto anteriormente a relação entre volume e pressão depende apenas da variação de volume medida em condições de fluxo nulo, e não da velocidade que tal volume é alcançado.

2.5.1.1 Propriedades Elásticas do Pulmão

Em todos os volumes pulmonares, a **Força de retração elástica dos Pulmões** ($P_{el,L}$) tende a trazê-los para seu volume mínimo, ou seja, os pulmões tendem sempre a se retrair e colabar¹². Todas as estruturas dos pulmões (vasos, bronquíolos, alvéolos,...) encontram-se interligadas pela trama de tecido conjuntivo pulmonar, pois, quando há insuflação¹³, todos esses componentes se dilatam. A este fenômeno se denomina **interdependência**, que contribui para manter abertos todos os alvéolos.

Além das propriedades elásticas dos tecidos pulmonares, os pulmões ainda apresentam um segundo, e importante, fator a contribuir para suas características elásticas: a tensão superficial do líquido que recobre a zona de trocas, chamado **Surfactante**. O surfactante, secretado pelas células alveolares denominadas pneumócitos II, tem características peculiares extremamente interessantes. Em primeiro lugar, sua tensão superficial aumenta à medida que cresce o raio do alvéolo, dessa forma podem coexistir cerca de 300 milhões de alvéolos com a mesma pressão em seu interior. Outra propriedade importante do surfactante reside no fato de que sua maior tensão superficial ainda é menor do que a da água ou da solução salina. Assim, caso não houvesse surfactante, a tensão superficial da parede dos alvéolos aumentaria, exigindo maior pressão motriz para enchê-los.

Dados os dois componentes da elasticidade pulmonar, serão estudadas as propriedades do pulmão como um todo. Relembrando que a Complacência Pulmonar (C_L)

¹² Provocar ou sofrer colapso nas paredes de um órgão ou de uma estrutura corporal. - <https://www.dicio.com.br/colabar/>

¹³ Insuflar: ação de introduzir um gás numa cavidade do corpo.- <https://www.dicio.com.br/insuflacao/>

é:

$$C_L = \frac{\Delta V}{P_{el,L}}$$

A pressão a ser utilizada para a determinação de $P_{el,L}$ é aquela através de todo pulmão, ou pressão transpulmonar (ΔP) definida como a diferença entre a pressão na abertura das vias aéreas (P_{ao}) e a pressão intrapleural (P_{es}). Fisiologicamente, CL é constante até volumes pulmonares elevados (0,75 da capacidade vital). Desta forma algumas regiões pulmonares já atingiram seu ponto, máximo de distensão elástica perfeita e os pulmões tornam-se menos complacentes.

2.5.1.2 Propriedades Elásticas da Parede Torácica

Assim como nos pulmões, a parede torácica também exibe propriedades próprias. Nesse caso, nota-se que a parede torácica tende sempre à expansão, exceto em volumes pulmonares superiores a 0,75 da capacidade vital, quando passa a tender à retração. Para o cálculo da Complacência da parede torácica (C_w), utiliza-se a pressão transtorácica, isto é, a diferença entre a pressão intrapleural (P_{es}) e a pressão do tórax, em geral a pressão barométrica:

$$C_w = \frac{\Delta V}{P_{el,w}}$$

onde $P_{el,w}$ é a Pressão de expansão elástica da parede torácica.

Seja a elastância (E) o inverso da complacência (C), e considerando que

$$E = E_L + E_w, \tag{21}$$

onde E é a elastância do sistema respiratório, E_L é a elastância dos pulmões e E_w é a elastância da parede torácica podemos dizer que:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_L} + \frac{1}{C_w}. \tag{22}$$

2.5.2 Resistência

As pressões passivas anteriormente descritas foram determinadas pelas propriedades elásticas dos pulmões e da parede torácica, dependendo apenas do volume gasoso e da complacência de cada componente do sistema. Durante a movimentação do Sistema Respiratório um elemento adicional ao elástico precisa ser superado pela pressão motriz:

sua resistência (R). De forma geral:

$$R = \frac{P_{res,rs}}{F} \quad (23)$$

onde $P_{res,rs}$ representa a **Pressão resistiva do sistema respiratório**, ou seja, a pressão oferecida por seus componentes resistivos. Desta forma, contribuem para R : a resistência das vias aéreas e a resistência à movimentação dos tecidos pulmonares. Da mesma forma como na medida da complacência, R pode ser subdividida em **Resistência pulmonar** (R_L) e **Resistência da parede torácica** (R_w). Assim,

$$R = R_L + R_w. \quad (24)$$

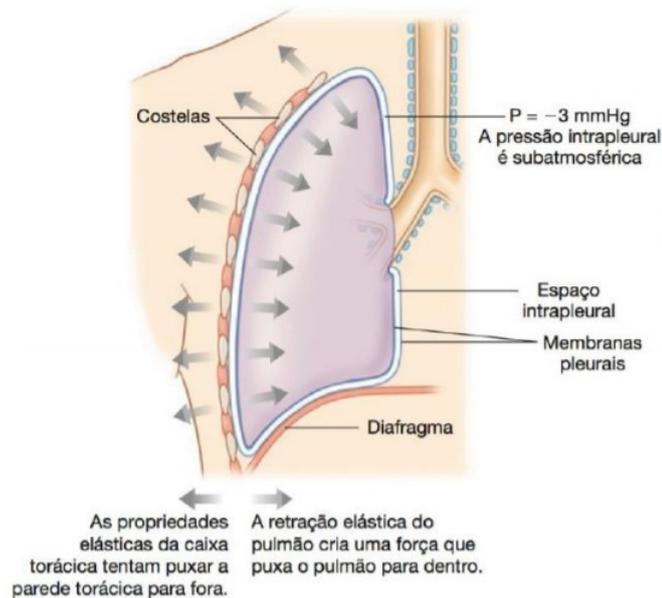
2.5.2.1 Resistência Pulmonar

Segundo Zin (1990), A resistência pulmonar pode ser desmembrada em dois sub-componentes: a **Resistência das vias aéreas** (R_{aw}) e a resistência tecidual, onde esta representa entorno de 0,05 a 0,1 de R_L . A resistência das vias aéreas pode ser definida como a razão entre o gradiente de pressão necessário para levar o ar do ambiente até os alvéolos e o fluxo aéreo. A resistência tecidual é determinada pelas perdas energéticas geradas pela viscosidade (isto é, atrito) pertinente à movimentação das moléculas que constituem os tecidos pulmonares. Vale ressaltar, que a energia perdida na deformação viscosa do pulmão é totalmente diferente daquela utilizada para sobrepujar a retração elástica. A resistência pulmonar varia com o fluxo aéreo e o volume pulmonar. Assim, com a progressiva elevação do fluxo, mantido constante o volume, ela se mostra inicialmente decrescente para voltar a se elevar. E com relação ao aumento do volume, ela se eleva gradualmente.

2.5.2.2 Resistência da Parede Torácica

A resistência da parede torácica aplica-se os mesmo conceitos da resistência tecidual pulmonar, porém com os tecidos constituintes da parede torácica. Nem sempre levada em consideração, a resistência da parede torácica pode chegar a 0,30 da resistência do Sistema Respiratório. A resistência do Sistema Respiratório diminui com a elevação de fluxo aéreo (medidas em isovolume) e se eleva com o aumento do volume pulmonar (manobras em isofluxo).

Figura 16 - Trabalho Elástico



Fonte: https://www.ufjf.br/laura_leite/files/2019/03/Mecânica-Respiratória2.pdf

2.6 Relação Fisiológica da Resistência com a Elastância ou Complacência

Nesta seção faremos um estudo verificando o comportamento da resistência com a elastância quando relacionadas a estados fisiológicos normais e anormais.

2.6.1 Estado Normal

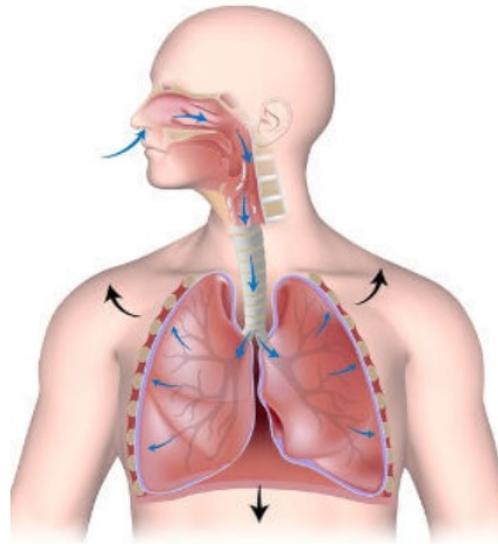
Muitos fatores contribuem para o trabalho da respiraçaõ. Os dois principais fatores sãõ o **trabalho elástico** (Figura 16) e o **trabalho de resistênci**a (Figura 17). Segundo Preston e Wilson (2014) o trabalho elástico inclui o trabalho necessário para contrapor a retração elástica pulmonar durante a inspiraçaõ, o qual é proporcional à sua complacência

Este trabalho também é necessário para deslocar a parede torácica para o exterior e os órgãos abdominais para baixo. O trabalho de resistênci

a envolve mover o ar das vias respiratórias contra a resistência dessas vias.

A inclinaçaõ da curva pressãõ-volume, ou a modificaçaõ de volume por unidade de pressãõ alterada, é conhecida como complacência. Na faixa normal (pressãõ de expansãõ de cerca de 5 a 10 cm de água), o pulmão é notavelmente distensível ou muito complacente. A complacência do pulmão humano é de cerca de $200 \text{ mL/cmH}_2\text{O}$ e sempre dependerá de seu tamanho (WEST, 2013).

Figura 17 - Trabalho de Resistência



Fonte: <https://brasilecola.uol.com.br/biologia/sistema-respiratorio.htm>

2.6.2 Estado Anormal

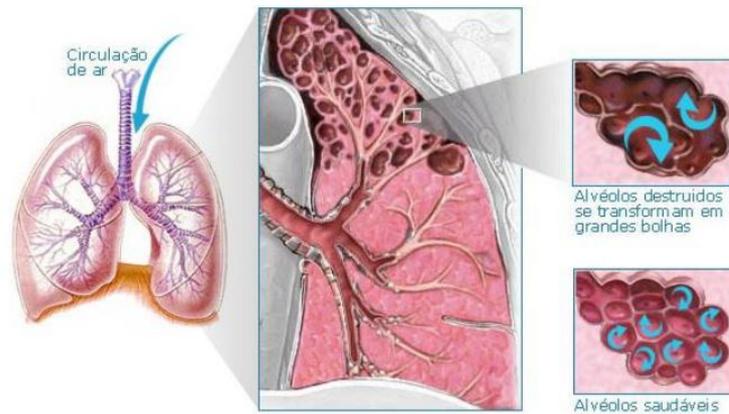
Dado que a complacência pulmonar estática varia de acordo com o volume pulmonar, ou seja, em volumes mais altos a complacência do pulmão costuma ser menor e em volumes mais baixos a complacência do pulmão costuma ser maior. Assim temos que a inclinação da curva P-V ao longo da CV é a variação da complacência estática de acordo com o tipo de doença ou alteração (obstrução de vias aéreas, enfisema, fibrose pulmonar, por exemplo).

2.6.2.1 Enfisema Pulmonar

O enfisema pulmonar é uma doença pulmonar obstrutiva que aumenta a resistência das vias respiratórias ao fluxo de ar. Existem três mecanismos obstrutivos gerais: oclusão das vias respiratórias, espessamento da parede e ao que se refere ao enfisema pulmonar e a perda do suporte mecânico. Todas as estruturas do pulmão estão ligadas mecanicamente. Em conjunto, formam uma rede dependente muito semelhante ao tecido de uma meia de náilon (interdependência). A interdependência mantém a desobstrução das vias respiratórias, quando as forças externas podem favorecer o colapso. Assim, o enfisema se desenvolve quando as paredes dos alvéolos (o tecido dos pulmões) se desgastam (veja Figura 18), permitindo que as vias respiratórias adjacentes colapsem e obstruam o fluxo de ar durante a respiração normal (PRESTON; WILSON, 2014).

Em casos como os de enfisema pulmonar e o envelhecimento normal do pulmão,

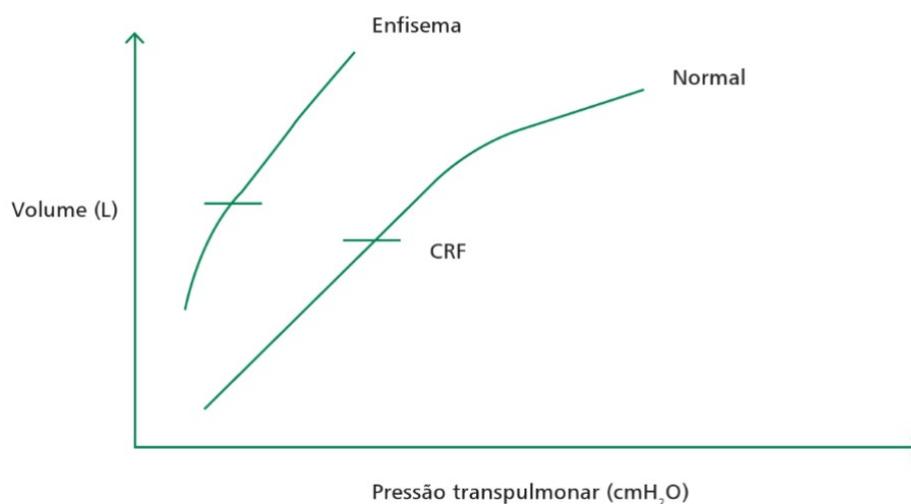
Figura 18 - Enfisema



Fonte: <https://eigierdiagnosticos.com.br/blog/doencas/o-que-e-dpoc-doenca-pulmonar-obstrutiva/>

ocorre o aumento da complacência. West (2013) alega que é provável que a alteração no tecido elástico do pulmão seja a responsável nestas duas situações. Desta forma, podemos concluir que o enfisema pulmonar denota a perda anatômica de tecido, e a perda alveolar reduz a retração elástica, aumenta a complacência pulmonar e reduz a área de superfície disponível para a captação de oxigênio, O_2 . Na Figura 19, podemos observar que a inclinação da curva está marcadamente inclinada para a esquerda e isto é devido a ocorrência do parênquima pulmonar ter complacência muito reduzida em um indivíduo com enfisema.

Figura 19 - Relação P-V em indivíduos com limitação ao fluxo aéreo



Fonte: (SILVA, 2011); Modificado

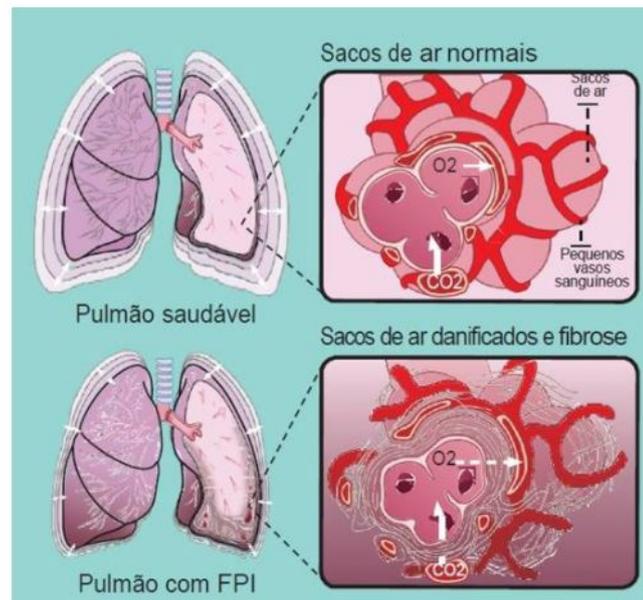
2.6.2.2 Fibrose Pulmonar

Em relação ao trabalho respiratório, a fibrose pulmonar o aumenta, pois ela enrijece o pulmão e requer que a pessoa gere pressões transpulmonares mais elevadas do que a normal para expandir os pulmões durante a inspiração (trabalho elástico aumentado) (PRESTON; WILSON, 2014). A fibrose pulmonar é uma doença pulmonar restritiva, ela é considerada como uma cicatrização. A cicatrização geralmente se inicia com um dano no epitélio alveolar, este dano inicial causa espessamento da parede alveolar e o preenchimento do espaço alveolar (veja Figura 20) com um exsudato¹⁴ que contém linfócitos, plaquetas e outras células efetoras do sistema imune. O tecido de cicatrização é relativamente não complacente, de forma que o pulmão se torne enrijecido e se expande com dificuldade durante a inspiração. Assim, com pulmões alterados, doentes, há uma diminuição da captação de O_2 .

Devido ao aumento de tecido fibroso no pulmão há uma redução da complacência, ou seja, temos uma fibrose pulmonar. Além disso, o edema alveolar, que não permite a insuflação de alguns alvéolos, diminui a complacência. A complacência também reduz se o pulmão permanecer não ventilado por um longo período especialmente se o volume for baixo. Em parte, isso pode ser causado por atelectasia (colapso) de algumas unidades,

¹⁴ Exsudato: é um fluido proveniente de uma ferida. É uma resposta do organismo aos danos causados nos tecidos, sendo considerada uma reação normal do processo de cicatrização. Disponível em: <<https://www.vuelopharma.com/exsudacao-oquee/>>. Acesso em: junho de 2020

Figura 20 - Fibrose

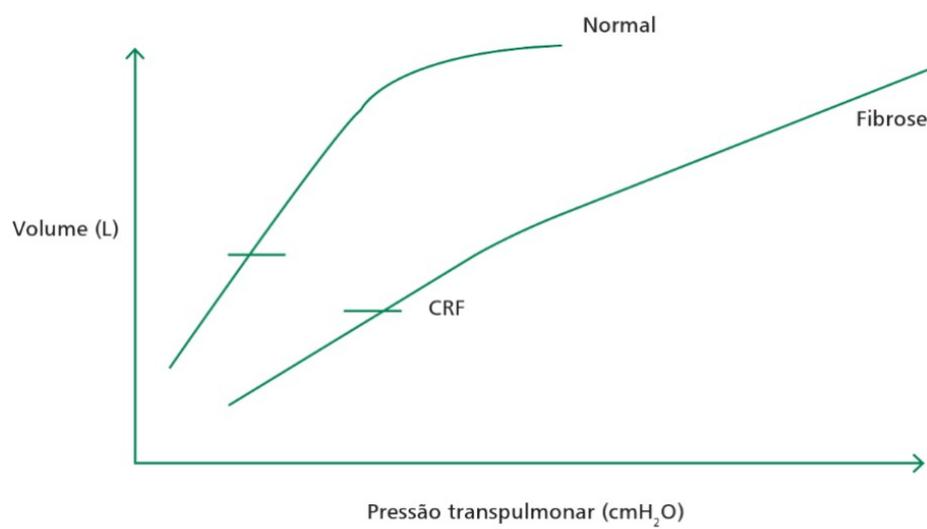


Fonte: <https://glorinhacohen.com.br/?p=27021>

porém aumentos na tensão superficial também ocorrem. Até certo ponto, a complacência também sofrerá redução se a pressão pulmonar venosa for elevada ou se o pulmão se tornar ingurgitado¹⁵ com sangue (WEST, 2013). Na Figura 21, podemos observar que a curva P-V está notadamente inclinada para baixo, ou seja, complacência menor e também redução da elasticidade em um indivíduo com fibrose.

¹⁵ Ingurgitação: retenção, entupimento, impedimento. Resultado da obstrução de um vaso, canal excretor, glândula, etc. Disponível em: <<https://www.infopedia.pt/dicionarios/lingua-portuguesa/ingurgitacao>> Acesso em: junho de 2020

Figura 21 - Relação P-V em indivíduos com doenças restritivas



Fonte: (SILVA, 2011); Modificado

3 MODELAGEM DA MECÂNICA DOS TECIDOS PULMONARES VIA OPERADOR DE CAPUTO-FABRIZIO

Neste capítulo, associaremos as propriedades físicas detalhadas no Capítulo 2 com as contidas no Problema de Valor Inicial (PVI) que modela matematicamente a mecânica dos tecidos pulmonares através da relação entre Elastância (E) e Resistência (R).

3.1 Modelos Matemáticos Lineares

Aoki (2013) em seu trabalho afirma que a avaliação da mecânica respiratória pode ser realizada analisando-se basicamente pressões, volumes e fluxos. Contudo, para poder explicar as transformações que ocorrem nestas variáveis, seria necessária uma observação direta dos tecidos pulmonares, o que nem sempre é possível. Portanto, muitas avaliações do sistema respiratório são, na verdade, inferências do que pode estar ocorrendo em seu interior. Com base em tais inferências, modelos teóricos são desenvolvidos para se analisar as variáveis envolvidas na mecânica respiratória. O modelo constitui uma representação, mesmo que limitada, da realidade, podendo ser usado para descrever, interpretar, prever, testar hipóteses e realizar simulações e melhorias em projetos experimentais.

O estudo destes modelos parte da simplificação do objeto em análise, seguindo a teoria da Navalha de Occam¹⁶, sendo que, à medida que forem necessários, são acrescentados novos componentes para que o modelo se aproxime da realidade. Para mais detalhes da teoria de Occam veja (MENGER, 1960). Desta forma, focaremos os nossos estudos em dois modelos matemáticos lineares: o **Modelo linear de compartimento único** e o **Modelo de fase constante**. Estes modelos são do tipo cinéticos, definidos a partir da equação da conservação do movimento, que nos diz que a taxa da variável que permanece no volume é igual da quantidade que entra menos a que sai (BIRD; STEWART; LIGHTFOOT, 2006). Vale ressaltar que, os parâmetros utilizados na modelagem de sistemas fisiológicos são bastantes dependentes das variáveis entre si, trazendo não linearidades para o modelo, porém, é possível fazer uso de modelos lineares respeitando determinadas condições na tentativa de uma melhor descrição da realidade na modelagem.

¹⁶ É um princípio científico e filosófico que propõe que, entre hipóteses formuladas sobre as mesmas evidências, é mais racional acreditar na mais simples. Ou seja: diante de várias explicações para um problema, a mais simples tende a ser a mais correta. Disponível em: <<https://super.abril.com.br/mundo-estranho/o-que-e-a-navalha-de-occam/>> Acesso em agosto de 2020.

3.1.1 Modelo Linear de Compartimento Único

Iremos iniciar os estudos sobre a modelagem a partir de um modelo bem simples visualmente em comparação à anatomia e fisiologia do sistema respiratório. Assim, analisando a Figura 22, podemos observar o sistema respiratório sendo simbolizado por um “tubo”, representando as vias aéreas, e um “balão” representando o tecido elástico pulmonar, e ressaltamos que as variáveis R e E representam, respectivamente, a resistência que o fluido sofre ao passar pelo tubo e a elastância do balão. Neste sistema, estamos considerando que ele seja independente do volume (V) e do fluxo (\dot{V}) e que as forças inerciais sejam desprezíveis para frequências abaixo de $2Hz$ (AOKI, 2013).

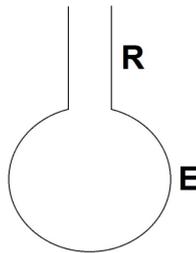
Como já mencionado, pode-se acrescentar novos elementos representativos, como a mola, que simboliza a elasticidade, e os cilindros sobrepostos, que retratam as variações de volume pulmonar. Seguindo esta linha de raciocínio, chegamos ao modelo linear de compartimento único, utilizada em modelagem matemática em primeiras abordagens, e que está representado na Figura 23. O termo “compartimento” é utilizado para indicar que toda a região estudada, no caso os pulmões, serão considerados como um volume finito mas com suas propriedades distribuídas totalmente homoganeamente.

A partir daqui, detalhamos o modelo apresentado em (AOKI, 2013). O modelo linear de compartimento único ou unicompartmental consiste na equação diferencial de primeira ordem, dada por:

$$P(t) = E \cdot V(t) + R \cdot \dot{V}(t) .$$

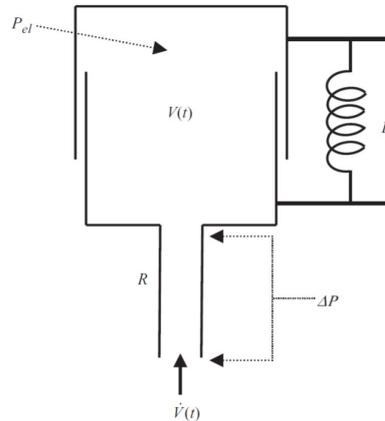
Assim, a partir da Figura 23, admitimos que a mola possui as características de

Figura 22 - Modelo simplificado do sistema respiratório por meio de tubo e balão.



Fonte: (AOKI, 2013)

Figura 23 - Representação mecânica simplificada do modelo linear de compartimento único



Fonte: (AOKI, 2013)

uma mola de Hook¹⁷, com isso a tensão aumenta linearmente com o comprimento, logo:

$$P_{el}(t) = E \cdot V(t)$$

onde P_{el} representa a pressão de recolhimento elástico do balão.

Neste caso, o volume é considerado zero após uma expiração normal passiva, ou seja, na Capacidade Residual Funcional (CRF). Desta forma, a elastância denota a dificuldade para insuflar o pulmão, portanto, quanto maior a E , maior é a dificuldade para inflá-lo. No entanto, em estudos clínicos a complacência (C) é mais utilizada, (relembrando que ela é o inverso da elastância, $C = \frac{1}{E}$). Na prática, a complacência é proporcional à facilidade para se insuflar o pulmão.

A diferença entre a pressão de entrada das vias aéreas (P_{ao}) e a pressão alveolar (P_A) indica a queda de pressão do ar ao passar pelos condutos aéreos e é igual a resistência (R) vezes o fluxo de ar (\dot{V}):

$$\Delta P(t) = R \dot{V}(t) .$$

O modelo linear de compartimento único, então, pode ser relacionado como a soma das pressões de recolhimento elástico e a diferença de pressão no tubo:

$$P = P_{el} + \Delta P . \tag{25}$$

¹⁷ O modelo de Hook consiste em representar o comportamento de uma mola elástica submetida a tensões de tração ou compressão. O comportamento da mola é linear e elástico neste caso. A equação reológica do modelo é representada por $\sigma = E \varepsilon$. O módulo de elastância (E) relaciona linearmente a tensão e a deformação (MALAVOGLIA, 2016).

Contudo, a pressão P não é zero na CRF e quando não há fluxo de ar. Isto é dado por causa da pressão pleural, que é levemente negativa para impedir o colapamento dos pulmões. Desta forma, acrescenta-se o parâmetro P_0 :

$$P(t) = E V(t) + R \dot{V}(t) + P_0 \quad (26)$$

onde P_0 é a pressão expiratória final.

3.1.2 Modelo de Fase Constante

Visto que o modelo de compartimento único é aplicado no domínio do tempo, a modelagem do sistema respiratório também pode ser realizada no domínio da frequência. Desta forma, o estudo das propriedades mecânicas do sistema respiratório no domínio da frequência investiga a função complexa que reúne propriedades conservativas e dissipativas do sistema, denominada impedância mecânica ($Z(\omega)$) (AOKI, 2013).

Segundo Carvalho e Zin (2011) a impedância de um sistema é caracterizada pelas forças que se opõem ao movimento. Logo, a impedância do sistema respiratório resulta de forças resistivas, elásticas e inertes que se opõem ao movimento durante a inspiração e a expiração. A impedância mecânica do sistema respiratório é normalmente obtida pela Técnica de Oscilação Forçada (em inglês, *Forced Oscillation Technique*, (FOT)), que é um método não invasivo para medir a mecânica respiratória (OOSTVEEN et al., 2003). Para que a FOT gere resultados adequados, é necessário que o sistema respiratório apresente comportamento linear. Esta técnica compreende o emprego de variações de pressão ou fluxo a frequências determinadas ao sistema respiratório e posterior investigação do conteúdo espectral do fluxo ou pressão resultante. Como verificado em (AOKI, 2013), a avaliação do conteúdo espectral é obtida pela impedância mecânica, que compreende em uma função complexa envolvendo as transformadas de Fourier da pressão e do fluxo:

$$Z(\omega) = \frac{P(\omega)}{\dot{V}(\omega)} \quad (27)$$

onde $P(\omega)$ e $F(\omega)$ são, respectivamente, a pressão e o fluxo no domínio da frequência.

Uma forma de se calcular a impedância mecânica é adaptando-se a equação dos modelos compartimentais ao domínio da frequência. Deste modo,

$$Z(\omega) = R(\omega) + iH(\omega), \quad (28)$$

onde a resistência $R(\omega)$ é a parte real, que é relacionada às perdas de calor das vias aéreas e do tecido pulmonar, e a reatância $H(\omega)$, a parte imaginária, que é relacionada ao armazenamento de energia e a unidade imaginária i . Aoki em (AOKI, 2013) conclui que

o modelo unicompartimental adaptado ao domínio da frequência é capaz de apresentar a dependência da resistência e da elastância em relação à frequência.

Uma constante importante neste modelo é a **histeresividade** (η), que avalia a dependência entre a resistência do tecido pulmonar (R_t) e a elastância do pulmão (E_L) em diferentes frequências, ou seja, os dados reais e imaginários da impedância mantêm uma relação quase que constante em um grande intervalo de frequência,

$$\eta = \frac{\omega R_t}{E_L}.$$

Podemos destacar duas vertentes desse parâmetro: a primeira é que, considerando pulmões de um mesmo grupo experimental, verifica-se que esse parâmetro se mantém aproximadamente constante dentro do grupo. Isso indica que os parâmetros E e R não são independentes, ou seja, um aumento da resistência tecidual está geralmente associado a um aumento na mesma proporção do parâmetro E , associado às características elásticas do tecido. E a segunda, mais pelo ponto de vista fisiológico, é que por ser um parâmetro calculado a partir da relação entre os parâmetros E e R , onde seu valor cresce à medida que o pulmão se torna mecanicamente heterogêneo, ou seja, com a distribuição ventilatória irregular (SANTOS et al., 2017) a histeresividade pode ser usada como um indicativo dessas heterogeneidades.

Segundo Aoki (2013), a partir de um modelo desenvolvido por Hantos e colaboradores no ano de 1987 (HANTOS Z.; CSENDES, 1986), é apresentada uma razão entre as propriedades elásticas e dissipativas, onde estas possuem uma relação de independência da frequência. Este modelo, denominado de modelo de fase constante, é utilizado no ajuste dos dados da impedância de entrada Z_{in} (obtida quando o fluxo é aplicado na abertura das vias aéreas e a pressão resultante é medida neste mesmo local) para baixas frequências, por ser considerado superior aos modelos compartimentais.

A equação do modelo de fase constante separa os componentes da impedância originada pelas vias aéreas (Z_{aw}) e da impedância originada pelos tecidos (Z_{ti}). Assim,

$$Z_{rs} = Z_{aw} + Z_{ti}$$

onde Z_{rs} é a impedância do sistema respiratório.

3.2 Um Modelo para o Tecido Pulmonar

Em Ionescu e coautores (IONESCU et al., 2017), vemos a afirmação de que as aplicações do cálculo fracionário na modelagem e controle de vários sistemas de engenharia, tem aumentado significativamente nas últimas décadas. No entanto, apenas recen-

temente, foi reconhecida a utilidade dos cálculos fracionários para o desenvolvimento de problemas de viscoelasticidade, o qual, a dinâmica dos tecidos pulmonares é um exemplo.

Há estudos de dois aspectos aparentemente distintos da fisiologia pulmonar, um funcional e outro estrutural, onde o aspecto funcional diz respeito ao complexo comportamento mecânico dinâmico do tecido pulmonar, já o aspecto estrutural é motivado pela natureza aparentemente fractal da árvore das vias aéreas pulmonares evidente em sua geometria recursiva auto-similar. Em (IONESCU et al., 2017) é afirmado que trabalhos recentes sugerem, a partir de revisões utilizando cálculos fracionários nas últimas três décadas na modelagem de áreas biomédicas: tecido e estrutura respiratória; bioimpedância; difusão de drogas; e neurociência, que esses dois aspectos não são distintos, no entanto, o cálculo fracionário pode ter um papel importante a desempenhar na construção da ligação entre a fisiologia estrutural e a funcional. Nesta dissertação nosso foco principal é o estudo da mecânica dos tecidos pulmonares e examinaremos como o cálculo fracionário permite propor um modelo matemático próximo da realidade no contexto da fisiologia funcional pulmonar.

Segundo Ionesco e coautores (IONESCU et al., 2017), a mecânica dos tecidos pulmonares em sua visão mais básica, ou seja, a visão estática expressa em termos de complacência pulmonar, é definida como a razão da mudança no volume pulmonar para a mudança correspondente à pressão aplicada. A complacência pulmonar por sua vez é dependente do volume pulmonar, onde a relação quase estática pressão-volume do pulmão é frequentemente expressa em termos de uma função exponencial que capta a rigidez observada experimentalmente. Os tecidos pulmonares, no entanto, são altamente viscoelásticos, o que significa que a pressão pulmonar é dependente do volume pulmonar.

A complexa impedância mecânica de vários tipos de tecidos moles biológicos é descrita em dois termos, uma parte real, também chamada módulo de armazenamento, que representa as propriedades elásticas do tecido, e uma parte imaginária, também chamada de módulo de perda, que representa a captura de suas propriedades dissipativas como descrita em (29).

$$Z(\omega) = \frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon(\omega)} = Z_s(\omega) + iZ_D(\omega). \quad (29)$$

$Z(\omega)$ representa a impedância mecânica, σ a tensão, ε a deformação, $Z_s(\omega)$ a parte real da impedância (módulo de armazenamento da propriedade elástica - em inglês "*storage modulus*"), $Z_D(\omega)$ a parte imaginária da impedância (módulo de perda - "*dissipative properties*"), ω é a frequência angular e $i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1$ é o número imaginário.

Um dos modelos mais simples, onde os parâmetros estão reduzidos e que possui

uma impedância desta forma é o corpo de Kelvin-Voigt¹⁸ que consiste em um elemento elástico (elastância (E)) em paralelo com um elemento viscoso (resistência (R)), sendo representado pela equação diferencial ordinária:

$$\sigma(t) = E \varepsilon(t) + R \dot{\varepsilon}(t) \quad (30)$$

que possui impedância

$$Z(\omega) = E + iR. \quad (31)$$

Podemos ressaltar também sobre a importância do modelo de fase constante, que representa uma alternativa de simplificar sistemas complexos em equações diferenciais ordinárias, onde os compartimentos são tratados separadamente e um número limitado de parâmetros livres é usado para descrever as propriedades mecânicas gerais. Curiosamente, a parte real da impedância do tecido tem uma relação quase fixa com a parte imaginária em uma ampla gama de frequências através da histeresividade (CARVALHO; ZIN, 2011). Além da possibilidade de separar as contribuições de vias aéreas e tecidos.

Assim, não parece possível manipular independentemente a resistência e a elastância do tecido pulmonar, uma vez que um é afetado pelo outro. Esse fenômeno se opõe ao uso de um modelo de parâmetros agrupados e sugere que as estruturas nos tecidos que armazenam energia elástica são de fato acopladas às que a dissipam. O modelo de fase constante de impedância é uma abordagem diferente para interpretar as propriedades mecânicas do tecido, uma vez que compreende vários parâmetros em apenas dois parâmetros livres que caracterizam o comportamento mecânico geral do tecido pulmonar (CARVALHO; ZIN, 2011).

Desta forma, Ionescu e coautores (IONESCU et al., 2017) concluíram que os conceitos de derivadas e integrais fracionárias são aplicados à impedância do tecido pulmonar, pois esta demonstra um comportamento dependente da frequência elevada a um expoente fracionário, como definido na Subseção 1.3.2. Visto o conceito de histeresividade, onde observa-se que seu valor cresce, ou seja, assume variações devido a distribuição ventilatória irregular, e como nosso trabalho avaliará as propriedades dentro dos parâmetros normais, consideraremos que η é constante, e por simplicidade $\eta \equiv 1$.

A partir desta consideração

$$\sigma(t) = \eta \frac{d^\alpha \varepsilon}{dt^\alpha} = \frac{d^\alpha \varepsilon}{dt^\alpha}. \quad (32)$$

¹⁸ O modelo é representado pela combinação em paralelo da mola de Hook com o pistão de Newton. A equação constitutiva do modelo é representada por $\sigma(t) = E \varepsilon(t) + \eta \dot{\varepsilon}(t)$ (MALAVOGLIA, 2016).

Substituindo (32) em (30), encontramos a EDOF para deformação (ε):

$$\frac{d^\alpha \varepsilon}{dt^\alpha} = E \varepsilon(t) + R \varepsilon'(t). \quad (33)$$

E assim, podemos definir o seguinte Problema de Valor Inicial Fracionário (PVIF):

$$\begin{cases} D^\alpha \varepsilon(t) - E\varepsilon(t) = R\varepsilon'(t), \\ \varepsilon(0) = \varepsilon_0. \end{cases} \quad (34)$$

A partir do PVIF, (34), com valores dados para a Elastância (E) e a Resistência (R), determinaremos a deformação (ε) para $\varepsilon \in C^1$, onde ε_0 é a deformação inicial quando o tempo (t) é igual a zero, ou seja, $t = 0$.

Note que o valor de α determina se o modelo é puramente elástico ($\alpha = 0$), puramente viscoso ($\alpha = 1$), ou algo entre os dois casos. Com relação a variação da Elastância (E) e da Resistência (R) supomos que:

- Quando $\alpha \rightarrow 0$, aplicando as propriedades de cálculo fracionário, temos que (34) torna-se

$$\begin{cases} R\varepsilon'(t) - (1 - E)\varepsilon(t) = 0 \\ \varepsilon(0) = \varepsilon_0 \end{cases} \quad (35)$$

um PVI formado por uma EDO de 1ª ordem e sua solução exata é

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{\frac{1-E}{R}t}. \quad (36)$$

- Para o caso de $\alpha \rightarrow 1$ temos que (34) se transformará no seguinte PVI:

$$\begin{cases} (1 - R)\varepsilon'(t) - E\varepsilon(t) = 0 \\ \varepsilon(0) = \varepsilon_0, \end{cases} \quad (37)$$

recaindo também em uma EDO de 1ª ordem, e a sua solução exata é

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{\frac{E}{1-R}t}. \quad (38)$$

No entanto, como já foi discutido nas seções anteriores o sistema pulmonar não é puramente elástico ou puramente viscoso. Estas propriedades possuem uma dependência entre si, comprovando a necessidade de encontrarmos um valor ótimo para α e assim chegarmos a uma solução mais condizente com a realidade. Neste trabalho aplicaremos o Operador de Caputo-Fabrizio (CAPUTO; FABRIZIO, 2015) no PVIF (34) e o comportamento do coeficiente α em relação a Elastância (E) e Resistência (R) será analisado.

3.3 Aplicação do Operador de Caputo-Fabrizio ao Modelo

Tendo conhecimento dos dados obtidos a respeito do modelo matemático da mecânica dos tecidos pulmonares adotado por (IONESCU et al., 2017), ou seja, com base em uma EDO de primeira ordem, nesta seção objetivamos através das EDF via Operador de Caputo-Fabrizio determinar uma EDO de segunda ordem em função do tempo. Desta forma, a partir de estudos aplicados no PVIF, buscaremos soluções de acordo com a variação de seus parâmetros.

Aplicando o Operador de Caputo-Fabrizio (18) em (34) e com $0 < \alpha < 1$, temos que

$$\frac{1}{1-\alpha} e^{\left(-\frac{\alpha t}{1-\alpha}\right)} \int_0^t e^{\left(\frac{\alpha \tau}{1-\alpha}\right)} \varepsilon'(\tau) d\tau - E\varepsilon(t) = R\varepsilon'(t).$$

Reescrevendo, chegamos que

$$\int_0^t e^{\left(\frac{\alpha \tau}{1-\alpha}\right)} \varepsilon'(\tau) d\tau = [E\varepsilon(t) + R\varepsilon'(t)] (1-\alpha) e^{\left(\frac{\alpha t}{1-\alpha}\right)}. \quad (39)$$

Derivando (39) em função de t e aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo (ver por exemplo (LIMA, 1989)) no lado esquerdo, temos:

$$e^{\left(\frac{\alpha t}{1-\alpha}\right)} \varepsilon'(t) = [E\varepsilon'(t) + R\varepsilon''(t)] (1-\alpha) e^{\left(\frac{\alpha t}{1-\alpha}\right)} + [E\varepsilon(t) + R\varepsilon'(t)] (1-\alpha) \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) e^{\left(\frac{\alpha t}{1-\alpha}\right)}.$$

Simplificando e organizando os termos, obtemos a expressão:

$$e^{\left(\frac{\alpha t}{1-\alpha}\right)} \left[\alpha E\varepsilon(t) + (1-\alpha)E\varepsilon'(t) + \alpha R\varepsilon'(t) + (1-\alpha)R\varepsilon''(t) - \varepsilon'(t) \right] = 0,$$

Como $e^{\left(\frac{\alpha t}{1-\alpha}\right)} \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}_+$ e $\alpha \in (0, 1)$,

$$[(1-\alpha)R]\varepsilon''(t) + [\alpha R + (1-\alpha)E - 1]\varepsilon'(t) + [\alpha E]\varepsilon(t) = 0,$$

ou

$$\varepsilon''(t) + \frac{[\alpha R + (1-\alpha)E - 1]}{(1-\alpha)R} \varepsilon'(t) + \frac{\alpha E}{(1-\alpha)R} \varepsilon(t) = 0. \quad (40)$$

A equação (40) é uma EDO de segunda ordem linear homogênea para a deformação (ε) e os seus coeficientes são dependentes das propriedades elastância (E) e resistência (R) e do parâmetro da ordem da derivada fracionária (α).

Observações:

1. Com o propósito de encontrarmos o valor de α ótimo pra ser utilizado na derivada fracionária de Caputo-Fabrizio, o problema (PVIF) que era uma equação diferencial-integral se transformou em um PVI de 2ª ordem, permitindo uma análise algébrica.
2. Quando consideramos o caso onde as propriedades são constantes e o valor de α é fixo podemos resolver (40) seguindo a metodologia de resolução de EDO de segunda ordem com coeficientes constantes.
3. Para obtermos a solução da EDO de 2ª ordem é necessário duas condições iniciais. Para este caso elas serão:

$$\begin{aligned}\varepsilon(0) &= \varepsilon_0, \\ \dot{\varepsilon}(0) &= 0,\end{aligned}\tag{41}$$

condizendo com o problema físico.

3.4 Análise do Discriminante da EDO

Nesta seção, iremos solucionar a equação (40) pelo método de desenvolvimento das equações diferenciais ordinárias de segunda ordem lineares com coeficientes constantes. Assim, supondo que a solução seja da forma

$$\varepsilon(t) = e^{\lambda t}\tag{42}$$

e substituindo-a em (40) chegamos a equação característica associada

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0\tag{43}$$

onde, (veja Seção 1.2)

$$A = 1, \quad B = \frac{[\alpha R + (1 - \alpha)E - 1]}{(1 - \alpha)R}, \quad C = \frac{\alpha E}{(1 - \alpha)R}$$

e

$$\begin{aligned}
\Delta &= B^2 - 4AC \\
&= \frac{[\alpha R + (1 - \alpha)E - 1]^2}{(1 - \alpha)^2 R^2} - 4 \cdot 1 \cdot \frac{\alpha E}{(1 - \alpha)R} \\
&= \frac{\alpha^2 (E^2 + 2ER + R^2) + \alpha (-2E^2 - 2ER + 2E - 2R) + (E^2 - 2E + 1)}{(1 - \alpha)^2 R^2}.
\end{aligned}$$

Desenvolvendo e simplificando os termos obtemos que

$$\Delta = \frac{(E + R)^2 \alpha^2 + [-2E^2 - 2ER + 2E - 2R] \alpha + (E - 1)^2}{(1 - \alpha)^2 R^2}. \quad (44)$$

Como $[(1 - \alpha)R]^2 > 0$, basta apenas avaliar o sinal do numerador para encontrarmos as regiões onde o Δ será positivo, negativo e igual a zero. A partir deste momento, iremos analisar o discriminante para o caso $\Delta = 0$.

3.4.1 Discriminante Igual a Zero ($\Delta = 0$)

Quando consideramos $\Delta = 0$, em (44), chegamos a um polinômio $P(\alpha(E, R))$ de grau 2 para α , tal que,

$$(E + R)^2 \alpha^2 + [-2E^2 - 2ER + 2E - 2R] \alpha + (E - 1)^2 = 0. \quad (45)$$

Aplicando a fórmula de Báskara encontramos que

$$\alpha = \frac{-[-2E^2 - 2ER + 2E - 2R] \pm \sqrt{[-2E^2 - 2ER + 2E - 2R]^2 - 4(E + R)^2 (E - 1)^2}}{2(E + R)^2}, \quad (46)$$

onde representaremos $[-2E^2 - 2ER + 2E - 2R]^2 - 4(E + R)^2 (E - 1)^2 = \Delta_\alpha$. Note que α pode ser visto como uma função de 2 variáveis, a Elastância e a Resistência.

Desenvolvendo Δ_α separadamente temos:

$$\begin{aligned}
\Delta_\alpha &= (-2E^2 - 2ER + 2E - 2R)^2 - 4(E + R)^2 (E - 1)^2 \\
&= (-2E^2 - 2ER + 2E - 2R)(-2E^2 - 2ER + 2E - 2R) - 4(E^2 + ER + R^2)(E^2 - 2E + 1)
\end{aligned}$$

Após o desenvolvimento e simplificação dos cálculos, chegamos que

$$\Delta_\alpha = 16(E^2 R + ER^2 - ER). \quad (47)$$

3.4.2 Análise de Δ_α

A seguir, analisaremos Δ_α em três situações diferentes com o objetivo de chegarmos a uma relação matemática entre as variáveis E (Elastância) e R (Resistência) com o intuito de obtermos valores que possam ser associados e até mesmo atribuídos a (α) .

3.4.2.1 Análise de $\Delta_\alpha = 0$

Para $\Delta_\alpha = 0$, obtemos por (47) a seguinte situação:

$$\Delta_\alpha = 0 \Leftrightarrow 16(E^2R + ER^2 - ER) = 0 \Leftrightarrow 16ER(E + R - 1) = 0.$$

Dado que $E, R \neq 0$, a expressão será válida se

$$E + R = 1,$$

nos permitindo expressar uma relação complementar de dependência linear entre R e E :

$$E = 1 - R,$$

ou da mesma forma,

$$R = 1 - E.$$

Assim, verificamos desta forma quais valores podem ser associados a (α) . Aplicamos as relações $E = 1 - R$ e $\Delta_\alpha = 0$ em (46).

Desta forma temos que,

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-[-2E^2 - 2ER + 2E - 2R] \pm \sqrt{0}}{2(E + R)^2} \\ &= \frac{E^2 + ER - E + R}{(E + R)^2} \\ &= \frac{(1 - R)^2 + (1 - R)R - (1 - R) + R}{(1)^2}, \quad \text{para } E = 1 - R \\ &= 1 - 2R + R^2 + R - R^2 - 1 + R + R \\ &= 1 - 1 - 2R + 2R + R^2 - R^2 + R \\ &= R. \end{aligned} \tag{48}$$

A partir desta conclusão onde $\alpha = R$ e como $0 < \alpha < 1$, podemos concluir que tanto α quanto R possuem a mesma variação, ou seja, $0 < R < 1$.

Sendo $0 < R < 1$, matematicamente, temos que a elastância (E) também pertence

a variação $0 < E < 1$, pois $E + R = 1$. Concluindo, chegamos aos seguintes resultados:

$$0 < \alpha < 1,$$

$$0 < R < 1,$$

$$0 < E < 1.$$

Observação: Outra forma de analisarmos, já que R , E e α pertencem ao intervalo aberto $]0, 1[$ é associá-las a termos porcentuais, onde 0 equivale à uma porcentagem nula e 1 representa 100 por cento da propriedade, condizendo melhor com testes fisiológicos.

3.4.2.2 Análise de $\Delta_\alpha > 0$

Analogamente faremos a análise para $\Delta_\alpha > 0$. A partir de (47)

$$16(E^2R + ER^2 - ER) > 0$$

$$E^2R + ER^2 - ER > 0$$

$$E^2R + ER^2 > ER$$

$$E(ER + R^2) > ER, \quad \forall E \neq 0$$

$$ER + R^2 > R$$

$$R(E + R) > R, \quad \forall R \neq 0$$

desta forma, temos que

$$E + R > 1.$$

Analisando Δ_α a partir desta desigualdade, quando $\Delta_\alpha > 0$ e $E + R > 1$, ou seja, podemos concluir que a relação entre E (Elastância) e R (Resistência) irá fazer com que os valores de α estejam em seu intervalo ($0 < \alpha < 1$), mas também serão encontrados valores abaixo de zero e valores que extrapolarão o limite de intervalo.

3.4.2.3 Análise de $\Delta_\alpha < 0$

Analogamente faremos a análise para $\Delta_\alpha < 0$. A partir de (47)

$$16(E^2R + ER^2 - ER) < 0$$

$$E^2R + ER^2 - ER < 0$$

$$E^2R + ER^2 < ER$$

$$E(ER + R^2) < ER, \quad \forall E \neq 0$$

$$ER + R^2 < R$$

$$R(E + R) < R, \quad \forall R \neq 0$$

desta forma, temos que

$$E + R < 1.$$

A partir da análise de $\Delta_\alpha < 0$, é preciso avaliar, em qual momento no processo do sistema respiratório conseguiremos valores que satisfaçam a conclusão da análise, $E + R < 1$.

4 REPRESENTAÇÃO E ANÁLISE DO MODELO

Com base nas conclusões adquiridas com a análise matemática dos discriminantes (Δ_α (discriminante de α) e Δ (discriminante da equação característica da EDO de segunda ordem)) feitos na Seção 3.4, neste capítulo apresentamos um estudo geométrico e numérico do comportamento das variáveis, de forma isolada e em conjunto, em todo o intervalo proposto, através de gráficos e tabelas. Com esta generalização, o nosso principal objetivo é obter valores e/ou relações para a ordem da derivada fracionária, α , a partir de elastância (E) e resistência (R), e assim obtermos a deformação, ε , que possam reproduzir casos reais para a mecânica respiratória.

4.1 Análise Gráfica de Δ_α

Nesta seção faremos o estudo dos sinais da função Δ_α utilizando análise gráfica. Estaremos focados em conhecer o comportamento desta função quando for igual a zero e também maior que zero. Por isso, esses dois casos serão analisados separadamente. Todos os gráficos foram desenvolvidos utilizando o *software* GEOGEBRA. Na Figura 24 apresentamos o gráfico de Δ_α em função das variáveis E e R e podemos observar que não há encontro entre a superfície e os eixos representados por E e R , mas apenas há encontro entre os pontos quando analisamos seus intervalos aqui trabalhados, ou seja, a parte positiva dos eixos no intervalo $[0, 1]$.

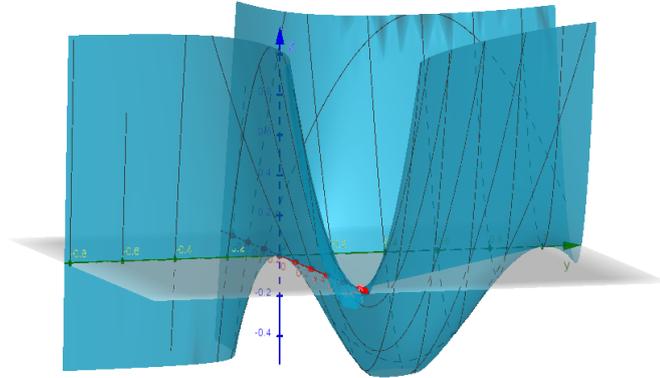
Ao considerarmos $\Delta_\alpha = 0$, vimos que foi possível avaliar o comportamento das variáveis E e R encontrando algebricamente uma relação entre estas, dada pela reta

$$E + R = 1.$$

Para uma melhor aproximação dos valores de α dentro do seu intervalo $0 < \alpha < 1$, buscamos, através da curva de nível de $\Delta_\alpha = 0$, os pontos que estão satisfazendo as condições impostas. A partir da Figura 25, observamos que curva de nível resultante é a reta $E + R = 1$ e os eixos de E e R . No entanto, lembrando dos resultados obtidos no Capítulo 3, não faz sentido que E ou R sejam igual à zero, já que esses valores não representam a realidade da mecânica do sistema respiratório.

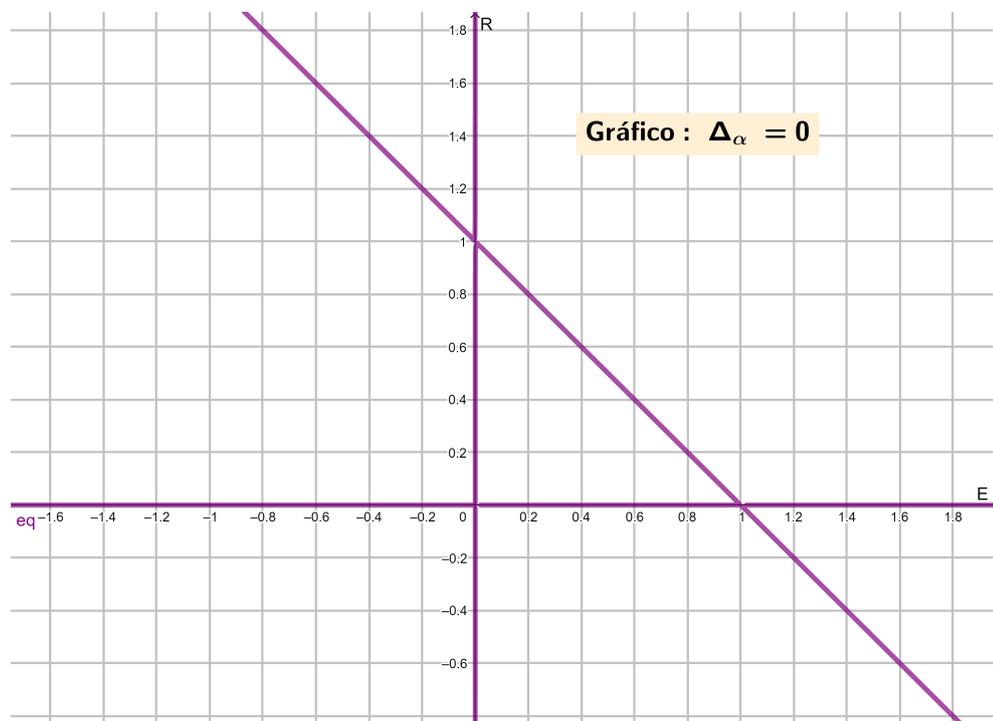
Observe o desenvolvimento do Δ (discriminante da equação característica da EDO de segunda ordem (45)) com a escolha aleatória das variáveis de acordo com seus intervalos. Esta escolha aleatória por sua vez busca trabalhar com os valores próximos a seus extremos e também com os valores em torno do valor médio do intervalo. Observando os desenvolvimentos é possível concluir que independentemente dos valores escolhidos para

Figura 24 - Gráfico da função $f(E, R, \Delta_\alpha)$



Fonte: Desenvolvido no GEOGEBRA 3D pelo próprio autor.

Figura 25 - Curva de Nível para $\Delta_\alpha = 0$



Fonte: Desenvolvido no *GeoGebra 3D* pelo próprio autor.

as variáveis, sempre nos retornará um mesmo valor para Δ_α , ou seja, $\Delta_\alpha = 0$, onde este é um de nossos estudos e resultados estimados.

4.2 Testes numéricos considerando $\Delta_\alpha = 0$

Antes de apresentarmos os resultados dos testes numéricos, vamos resumir aqui a metodologia utilizada em cada teste para encontrar a solução do PVI.

1. Considerando o caso quando $\Delta_\alpha = 0$, a partir da análise gráfica feita na Seção 4.1, escolhemos alguns valores para E e R que satisfazem as seguintes condições: $E + R = 1$, $0 < E < 1$ e $0 < R < 1$.
2. Dado o ponto $P(E, R, \Delta_\alpha = 0)$ escolhido, substituímos em (45) e encontramos o valor de α .
3. Verificamos se α satisfaz as suas condições naturais, ou seja, como α é a ordem da derivada fracionária, por definição, deve ser um valor em $]0, 1[$.
4. Considerando o ponto $P(E, R, \Delta_\alpha = 0)$, o valor de α encontrado no item 3. e $\Delta = 0$ obtemos o valor de λ através de (43).
5. Para este caso, a solução geral é dada por (12). Aplicando as condições iniciais (41) chegamos que

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0(1 - t) e^{\lambda t}. \quad (49)$$

Com o intuito de exemplificar, apresentamos três testes que foram feitos seguindo a Metodologia descrita acima para a obtenção do valor de α e a solução da deformação.

1. Ponto $(E, R, \Delta_\alpha) = (0, 4; 0, 6; 0)$:

Substituindo o ponto $(0, 4; 0, 6; 0)$ em (45), chegamos que

$$\alpha^2 - 1,2\alpha + 0,36 = 0.$$

Para $\Delta_\alpha = 0$, temos:

$$\alpha = \frac{-(-1,2)}{2 \cdot (1)} = \frac{1,2}{2} = 0,6.$$

Tomando $\alpha = 0,6$ em (43) e $\Delta = 0$:

$$\lambda = \frac{-B}{2A} = \frac{-[\alpha R + (1 - \alpha)E - 1]}{2(1 - \alpha)R} = \frac{0,48}{0,48} = 1.$$

E assim,

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0(1 - t) e^t. \quad (50)$$

2. **Ponto** $(E, R, \Delta_\alpha) = (0, 5; 0, 5; 0)$:

Substituindo o ponto $(0, 5; 0, 5; 0)$ em (45), chegamos a

$$\alpha^2 - \alpha + 0,25 = 0,$$

para $\Delta_\alpha = 0$, temos:

$$\alpha = \frac{-(-1)}{2 \cdot (1)} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Tomando $\alpha = 0,5$ em (40) e $\Delta = 0$, temos

$$\lambda = \frac{-B}{2A} = \frac{-[\alpha R + (1 - \alpha)E - 1]}{2(1 - \alpha)R} = \frac{0,5}{0,5} = 1$$

ou seja,

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0(1 - t) e^t. \quad (51)$$

3. **Ponto** $(E, R, \Delta_\alpha) = (0, 6; 0, 4; 0)$:

Substituindo o ponto $(0, 6; 0, 4; 0)$ em (45), chegamos a

$$\alpha^2 - 0,8\alpha + 0,16 = 0$$

para $\Delta_\alpha = 0$, temos:

$$\alpha = \frac{-(-0,8)}{2 \cdot (1)} = \frac{0,8}{2} = 0,4.$$

Tomando $\alpha = 0,4$ em (40) e $\Delta = 0$, temos

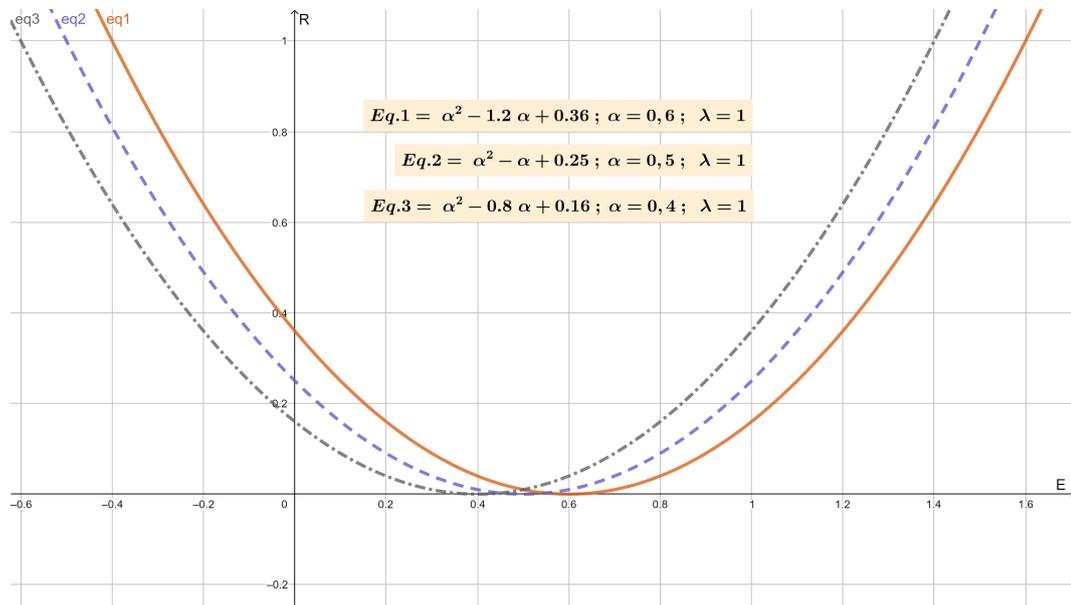
$$\lambda = \frac{-B}{2A} = \frac{-[\alpha R + (1 - \alpha)E - 1]}{2(1 - \alpha)R} = \frac{0,48}{0,48} = 1$$

ou seja,

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0(1 - t) e^t. \quad (52)$$

Na Figura 26 temos a comparação das três equações de 2º grau encontradas com a aplicação dos três pontos escolhidos nos testes iniciais. Percebemos que quando as

Figura 26 - Análise de três pontos, $(0, 4; 0, 6; 0)$, $(0, 5; 0, 5; 0)$ e $(0, 6; 0, 4; 0)$ de (E, R, Δ_α) para a obtenção de α



Fonte: Desenvolvido em planilha eletrônica pelo próprio autor.

variáveis E e R satisfazem as condições especificadas, $E + R = 1$, os valores ótimos de α são diferentes em cada caso, no entanto o perfil da solução da deformação em função do tempo é o mesmo para todas. Um dos fatores que nos leva à essa conclusão é que quando $\Delta_\alpha = 0$, a equação de 2º grau de α possui uma única raiz de multiplicidade 2, ou seja, $\alpha_1 = \alpha_2$.

Na tabela mostrada na Figura 27, apresentamos uma continuação dos testes iniciais detalhados algebricamente nesta seção. As variáveis E e R foram variadas dentro do intervalo $]0, 1[$ com incremento de 0,01. Estes testes nos permitem concluir que para qualquer par de valor de E e R que satisfaz a condição $E + R = 1$ encontraremos o mesmo perfil para a solução da deformação. Com o objetivo de avaliarmos casos que estejam o mais próximo possível da realidade da mecânica dos tecidos pulmonares, predizemos que um tecido pulmonar normal terá os valores para Elastância (E) e Resistência (R) intermediários, nem totalmente elástico ($E = 1$) e nem totalmente resistente ($R = 1$). Desta forma, observamos pela tabela que os valores que assumem este papel estão entre $0,4 < E, R < 0,6$, nos mostrando uma variação proporcional.

Figura 27 - Análise dos dados das variáveis E , R e α para $\Delta_\alpha = 0$.

E	R	E + R	$\Delta_\alpha = 0$	$\alpha = R$	λ
0,001	0,999	1	0,000	0,999	1,000
0,05	0,95	1	0,000	0,95	1,000
0,1	0,9	1	0,000	0,9	1,000
0,2	0,8	1	0,000	0,8	1,000
0,3	0,7	1	0,000	0,7	1,000
0,4	0,6	1	0,000	0,6	1,000
0,5	0,5	1	0,000	0,5	1,000
0,6	0,4	1	0,000	0,4	1,000
0,7	0,3	1	0,000	0,3	1,000
0,8	0,2	1	0,000	0,2	1,000
0,9	0,1	1	0,000	0,1	1,000
0,91	0,09	1	0,000	0,09	1,000

Fonte: Desenvolvido em planilha eletrônica pelo próprio autor.

4.3 Representação Gráfica para $\Delta_\alpha > 0$

Ao considerarmos $\Delta_\alpha > 0$, observamos que é possível graficamente avaliar o comportamento das variáveis E e R e encontrar uma relação ou valores para as mesmas que devem satisfazer a desigualdade $E + R > 1$ (como foi encontrado no capítulo anterior).

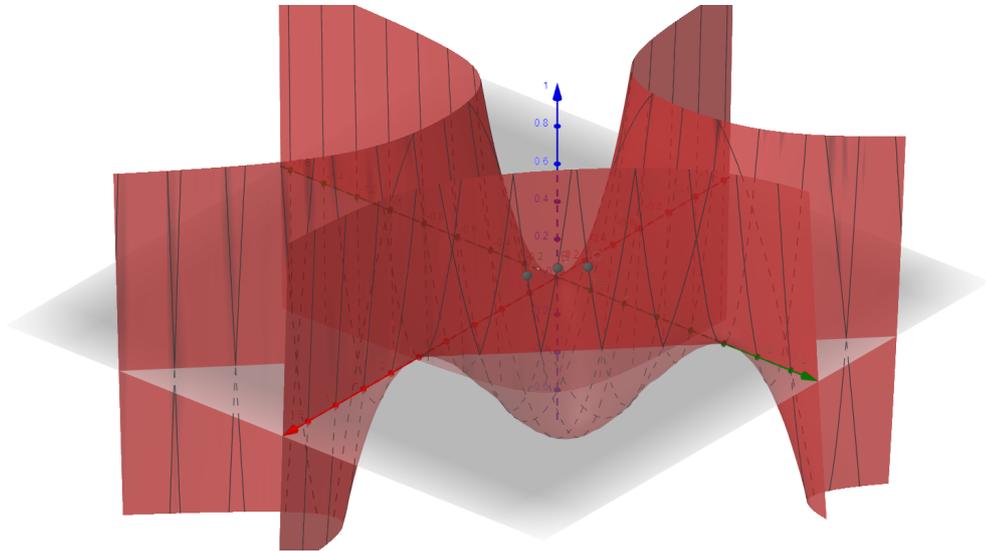
Na Figura 28 vemos a superfície de Δ_α , e um corte no plano quando $\Delta_\alpha = 0$ é mostrado, enfatizando a parte positiva da superfície. Queremos encontrar valores que satisfaçam as condições impostas: $E + R > 1$ e $\Delta_\alpha > 0$ dentro do intervalo de interesse para as variáveis $0 < E, R < 1$. Na Figura 29 apresentamos algumas curvas de nível quando $\Delta_\alpha = 0, 1, 2, 5, 10, 20$ e que permitem vermos como a superfície está se comportando quando o valor de Δ_α aumenta.

4.4 Testes numéricos considerando $\Delta_\alpha > 0$

Para o melhor desenvolvimento desta análise de dados, quando $\Delta_\alpha > 0$, faremos uso de uma planilha eletrônica mostrando o comportamento de α em dois momentos, o primeiro onde obtemos a raiz positiva do discriminante de α , ou seja, α_1 e o segundo a raiz negativa, α_2 . A obtenção desses dois valores distintos para α , só é possível pois $\Delta_\alpha > 0$. Os resultados obtidos foram coletados e apresentados nas tabelas mostradas nas Figuras 30-32. É importante ressaltarmos que o estudo feito sobre α é desenvolvido com base na variação $0 < \alpha < 1$, ou seja, apenas os resultados que satisfazem esta condição serão considerados como aplicáveis em situações reais.

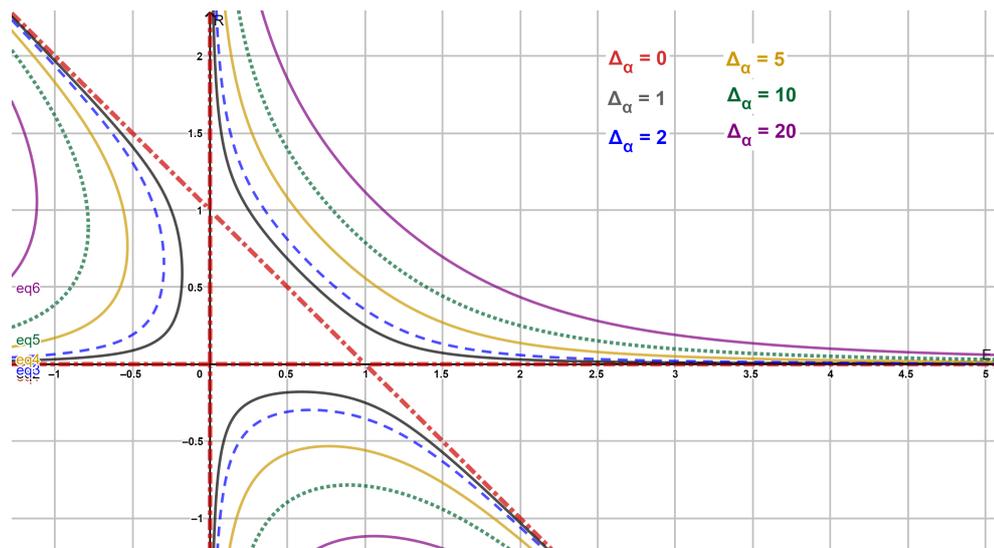
Observe que no desenvolvimento destas tabelas a relação entre E (Elastância) e R (Resistência) fazem com que os valores de α estejam em seu intervalo ($0 < \alpha < 1$),

Figura 28 - Gráfico da função $\Delta_\alpha > 0$



Fonte: Desenvolvido no *GeoGebra 3D* pelo próprio autor.

Figura 29 - Gráfico de Curva de Nível para $\Delta_\alpha > 0$ em comparação a $\Delta_\alpha = 0$



Fonte: Desenvolvido no *GeoGebra 3D* pelo próprio autor.

Figura 30 - Análise dos dados das variáveis E, R e α para $\Delta_\alpha > 0$.

E	R	E+R > 1	Δ_α	α_1	λ_1	α_2	λ_2
0.999	0.099	1.098	0.155	0.327	2.212	0.000	0.005
0.999	0.100	1.099	0.158	0.329	2.215	0.000	0.005
0.999	0.101	1.100	0.161	0.332	2.218	0.000	0.005
0.998	0.102	1.100	0.163	0.334	2.213	0.000	0.010
0.997	0.103	1.100	0.164	0.335	2.208	0.000	0.015
0.996	0.104	1.100	0.166	0.336	2.204	0.000	0.019
0.995	0.105	1.100	0.167	0.338	2.199	0.000	0.024
0.994	0.106	1.100	0.169	0.339	2.195	0.000	0.029
0.993	0.107	1.100	0.170	0.341	2.191	0.000	0.033
0.992	0.108	1.100	0.171	0.342	2.187	0.000	0.038
0.991	0.109	1.100	0.173	0.344	2.182	0.000	0.042
0.990	0.110	1.100	0.174	0.345	2.178	0.000	0.046
0.980	0.120	1.100	0.188	0.359	2.141	0.001	0.087
0.970	0.130	1.100	0.202	0.373	2.108	0.002	0.122
0.960	0.140	1.100	0.215	0.387	2.079	0.003	0.153
0.950	0.150	1.100	0.228	0.400	2.054	0.005	0.181
0.940	0.160	1.100	0.241	0.413	2.032	0.007	0.207
0.930	0.170	1.100	0.253	0.425	2.012	0.010	0.229
0.920	0.180	1.100	0.265	0.437	1.994	0.012	0.250
0.910	0.190	1.100	0.277	0.450	1.978	0.015	0.269
0.900	0.200	1.100	0.288	0.461	1.964	0.018	0.286
0.890	0.210	1.100	0.299	0.473	1.951	0.021	0.303
0.880	0.220	1.100	0.310	0.485	1.939	0.025	0.317
0.870	0.230	1.100	0.320	0.496	1.929	0.028	0.331
0.860	0.240	1.100	0.330	0.507	1.919	0.032	0.344
0.850	0.250	1.100	0.340	0.518	1.911	0.036	0.356
0.840	0.260	1.100	0.349	0.529	1.903	0.040	0.367
0.830	0.270	1.100	0.359	0.539	1.896	0.044	0.377
0.820	0.280	1.100	0.367	0.550	1.891	0.049	0.387
0.810	0.290	1.100	0.376	0.560	1.885	0.053	0.396
0.800	0.300	1.100	0.384	0.570	1.881	0.058	0.405
0.790	0.310	1.100	0.392	0.580	1.877	0.063	0.413
0.780	0.320	1.100	0.399	0.590	1.873	0.068	0.421
0.770	0.330	1.100	0.407	0.600	1.870	0.073	0.428
0.760	0.340	1.100	0.413	0.610	1.868	0.078	0.435
0.750	0.350	1.100	0.420	0.619	1.866	0.083	0.442
0.740	0.360	1.100	0.426	0.628	1.865	0.089	0.448
0.730	0.370	1.100	0.432	0.638	1.864	0.094	0.454
0.720	0.380	1.100	0.438	0.647	1.863	0.100	0.459
0.710	0.390	1.100	0.443	0.656	1.863	0.106	0.464
0.700	0.400	1.100	0.448	0.665	1.864	0.112	0.469
0.690	0.410	1.100	0.453	0.674	1.865	0.118	0.474
0.680	0.420	1.100	0.457	0.683	1.866	0.124	0.479
0.670	0.430	1.100	0.461	0.691	1.868	0.130	0.483
0.660	0.440	1.100	0.465	0.700	1.870	0.137	0.487
0.650	0.450	1.100	0.468	0.708	1.873	0.143	0.491
0.640	0.460	1.100	0.471	0.717	1.876	0.149	0.494
0.630	0.470	1.100	0.474	0.725	1.879	0.156	0.498
0.620	0.480	1.100	0.476	0.733	1.883	0.163	0.501
0.610	0.490	1.100	0.478	0.741	1.888	0.170	0.504
0.600	0.500	1.100	0.480	0.749	1.893	0.177	0.507
0.500	0.600	1.100	0.480	0.823	1.972	0.251	0.528
0.400	0.700	1.100	0.448	0.888	2.130	0.335	0.537
0.300	0.800	1.100	0.384	0.942	2.468	0.430	0.532
0.290	0.810	1.100	0.376	0.947	2.522	0.440	0.530
0.280	0.820	1.100	0.367	0.951	2.582	0.450	0.529
0.270	0.830	1.100	0.359	0.956	2.649	0.461	0.527
0.260	0.840	1.100	0.349	0.960	2.725	0.471	0.525
0.250	0.850	1.100	0.340	0.964	2.810	0.482	0.523
0.240	0.860	1.100	0.330	0.968	2.908	0.493	0.521
0.230	0.870	1.100	0.320	0.972	3.020	0.504	0.519
0.220	0.880	1.100	0.310	0.975	3.151	0.515	0.516
0.210	0.890	1.100	0.299	0.979	3.306	0.527	0.513
0.200	0.900	1.100	0.288	0.982	3.491	0.539	0.509
0.190	0.910	1.100	0.277	0.985	3.717	0.550	0.506
0.180	0.920	1.100	0.265	0.988	3.998	0.563	0.502
0.170	0.930	1.100	0.253	0.990	4.360	0.575	0.497
0.160	0.940	1.100	0.241	0.993	4.841	0.587	0.492
0.150	0.950	1.100	0.228	0.995	5.513	0.600	0.487
0.140	0.960	1.100	0.215	0.997	6.519	0.613	0.481
0.130	0.970	1.100	0.202	0.998	8.192	0.627	0.474
0.120	0.980	1.100	0.188	0.999	11.533	0.641	0.467
0.110	0.990	1.100	0.174	1.000	21.541	0.655	0.459
0.100	0.996	1.096	0.153	1.000	49.544	0.674	0.456
0.090	0.999	1.089	0.128	1.000	179.543	0.698	0.457
0.080	0.999	1.079	0.101	1.000	159.538	0.727	0.462
0.070	0.999	1.069	0.077	1.000	139.533	0.757	0.467
0.060	0.999	1.059	0.057	1.000	119.528	0.788	0.472
0.050	0.999	1.049	0.039	1.000	99.522	0.820	0.478
0.040	0.999	1.039	0.025	1.000	79.517	0.854	0.483
0.030	0.999	1.029	0.014	1.000	59.511	0.889	0.489
0.020	0.999	1.019	0.006	1.000	39.503	0.925	0.497
0.010	0.999	1.009	0.001	1.000	19.492	0.963	0.508

VALOR INTERMEDIÁRIO DE ALPHA
 ALPHA NÃO PODE SER IGUAL A 1
 ALPHA NÃO PODE SER IGUAL A 0

Fonte: Desenvolvido em planilha eletrônica pelo próprio autor.

Figura 31 - Análise dos dados das variáveis E , R e α para $\Delta\alpha > 0$ com o nível de E elevado

E	R	$E+R > 1$	$\Delta\alpha$	α_1	λ_1	α_2	λ_2
0,900	0,101	1,001	0,001	0,121	1,106	0,083	0,896
0,900	0,200	1,100	0,288	0,461	1,964	0,018	0,286
0,900	0,300	1,200	0,864	0,656	2,392	0,011	0,179
0,900	0,400	1,300	1,728	0,785	2,869	0,008	0,131
0,900	0,500	1,400	2,880	0,872	3,497	0,006	0,103
0,900	0,600	1,500	4,320	0,929	4,415	0,005	0,085
0,900	0,700	1,600	6,048	0,965	5,928	0,004	0,072
0,900	0,800	1,700	8,064	0,986	8,937	0,004	0,063
0,900	0,900	1,800	10,368	0,997	17,944	0,003	0,056
0,900	0,999	1,899	12,933	1,000	1799,950	0,003	0,050
0,999	0,099	1,098	0,155	0,327	2,212	0,000	0,005
0,999	0,100	1,099	0,158	0,329	2,215	0,000	0,005
0,999	0,200	1,199	0,636	0,555	2,495	0,000	0,003
0,999	0,300	1,299	1,434	0,710	2,853	0,000	0,002
0,999	0,400	1,399	2,551	0,816	3,329	0,000	0,001
0,999	0,500	1,499	3,988	0,889	3,995	0,000	0,001
0,999	0,600	1,599	5,745	0,937	4,994	0,000	0,001
0,999	0,700	1,699	7,821	0,969	6,659	0,000	0,001
0,999	0,800	1,799	10,217	0,988	9,989	0,000	0,001

Fonte: Desenvolvido em planilha eletrônica pelo próprio autor.

Figura 32 - Análise dos dados das variáveis E , R e α para $\Delta\alpha > 0$ com o nível de R elevado

E	R	E+R >0	$\Delta\alpha$	α_1	λ_1	α_2	λ_2
0,300	0,900	1,200	0,864	0,989	5,582	0,344	0,418
0,400	0,900	1,300	1,728	0,992	7,651	0,215	0,349
0,500	0,900	1,400	2,880	0,994	9,714	0,128	0,286
0,600	0,900	1,500	4,320	0,995	11,774	0,071	0,226
0,700	0,900	1,600	6,048	0,996	13,831	0,035	0,169
0,800	0,900	1,700	8,064	0,996	15,888	0,014	0,112
0,900	0,900	1,800	10,368	0,997	17,944	0,003	0,056
0,900	0,999	1,899	12,933	1,000	1799,950	0,003	0,050
0,800	0,999	1,799	10,217	1,000	1599,900	0,012	0,100
0,700	0,999	1,699	7,821	1,000	1399,850	0,031	0,150
0,600	0,999	1,599	5,745	1,000	1199,800	0,063	0,200
0,500	0,999	1,499	3,988	1,000	999,750	0,111	0,250
0,400	0,999	1,399	2,551	1,000	799,700	0,184	0,300
0,399	0,999	1,398	2,538	1,000	797,699	0,185	0,301
0,398	0,999	1,397	2,526	1,000	795,699	0,186	0,301
0,395	0,999	1,394	2,488	1,000	789,697	0,188	0,303
0,390	0,999	1,389	2,425	1,000	779,695	0,193	0,305
0,380	0,999	1,379	2,302	1,000	759,690	0,202	0,310
0,370	0,999	1,369	2,182	1,000	739,685	0,212	0,315
0,360	0,999	1,359	2,066	1,000	719,680	0,222	0,320
0,350	0,999	1,349	1,952	1,000	699,675	0,232	0,325
0,310	0,999	1,309	1,531	1,000	619,654	0,278	0,346
0,305	0,999	1,304	1,482	1,000	609,652	0,284	0,348
0,304	0,999	1,303	1,472	1,000	607,651	0,285	0,349
0,303	0,999	1,302	1,463	1,000	605,651	0,287	0,349
0,302	0,999	1,301	1,453	1,000	603,650	0,288	0,350
0,301	0,999	1,300	1,443	1,000	601,650	0,289	0,350
0,300	0,999	1,299	1,434	1,000	599,649	0,290	0,351

Fonte: Desenvolvido em planilha eletrônica pelo próprio autor.

mas também são encontrados valores que extrapolaram o "limite" deste intervalo. Assim, como nosso objetivo é fazer o estudo das variáveis dentro de seus respectivos intervalos, iremos descartar estas opções (que estão coloridas de bege e verde), fazendo desta forma uma triagem na tabela mostrada na Figura 30. Após feita a triagem chegamos aos casos particulares relevantes ao nosso trabalho, ou seja, quando α encontra-se na variação $0 < \alpha < 1$. Desta forma, os valores usuais (considerados como os mais próximos da realidade do modelo, ou seja, estão próximos do termo central do intervalo de α) foram destacados em amarelo, pois esses estão ao redor do valor central no intervalo, mostrando que ele não é totalmente resistente nem totalmente viscoso como já estudado anteriormente.

Para os valores que α se aproxima dos extremos de seu intervalo, inferior ou superior, percebemos que eles nos desviam da realidade do modelo e logo o excluimos. Nas tabelas mostradas nas Figuras 31 e 32, tivemos também o objetivo de determinar numericamente os valores para as soluções da EDO de segunda ordem (40) através de sua equação característica associada ($A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$) de acordo com os parâmetros $\Delta = 0$ e $\Delta_\alpha > 0$, E e R .

A partir dos estudos feitos nesta seção, escolhemos alguns pontos para determinar a solução da deformação e em cada caso a metodologia utilizada na resolução será:

1. Considerando o caso quando $\Delta_\alpha > 0$, a partir da análise gráfica feita na Seção 4.3, escolhemos E e R satisfazendo as seguintes condições: $E + R > 1$, $0 < E < 1$ e $0 < R < 1$.
2. Dado o ponto $P(E, R, \Delta_\alpha > 0)$ escolhido, substituímos em (45) e encontramos os valores de α_1 e α_2 .
3. Verificamos se α_1 e α_2 satisfazem as suas condições naturais, ou seja, como α é a ordem da derivada fracionária, por definição, deve ser um valor em $]0, 1[$.
4. Considerando o ponto $P(E, R, \Delta_\alpha > 0)$, os valores de α_1 e α_2 encontrado no item 2. e $\Delta = 0$ obtemos os valores de λ_1 e λ_2 através de (43).
5. Para este caso, a solução geral é dada por (12). Aplicando as condições iniciais (41) chegamos que:

$$\varepsilon_1(t) = \varepsilon_0(1 - t) e^{\lambda_1 t}, \quad (53)$$

$$\varepsilon_2(t) = \varepsilon_0(1 - t) e^{\lambda_2 t}. \quad (54)$$

Para o ponto $(E, R, \Delta_\alpha) = (0, 7; 0, 4; 0, 448)$

Substituindo o ponto $(0, 7; 0, 4; 0, 448)$ em (45), chegamos a

$$1,21 \alpha^2 - 0,94 \alpha + 0,09 = 0$$

onde $\Delta_\alpha = 0,448$ logo

$$\alpha_1 = \frac{-(-0,94) + \sqrt{0,448}}{2 \cdot (1,21)} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1,609}{2,42} \cong 0,665 .$$

$$\alpha_2 = \frac{-(-0,94) - \sqrt{0,448}}{2 \cdot (1,21)} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{0,270}{2,42} \cong 0,112 .$$

Tomando $\alpha = 0,665$ em (40) e $\Delta = 0$, temos

$$\lambda = \frac{-B}{2A} = \frac{-[\alpha R + (1 - \alpha)E - 1]}{2(1 - \alpha)R} = \frac{0,4995}{0,268} \cong 1,864$$

ou seja, $\varepsilon(t) = \varepsilon_0(1 - t) e^{1,864 t}$.

Para o ponto $(E, R, \Delta_\alpha) = (0,6; 0,5; 0,48)$

Substituindo o ponto $(0,6; 0,5; 0,48)$ em (45), chegamos a

$$1,21 \alpha^2 - 1,12 \alpha + 0,16 = 0$$

onde $\Delta_\alpha = 0,48$ e por (46) temos:

$$\alpha_1 \cong 0,749 .$$

$$\alpha_2 \cong 0,177 .$$

Tomando $\alpha = 0,749$ em (40) e $\Delta = 0$, temos

$$\lambda = \frac{-B}{2A} = \frac{-[\alpha R + (1 - \alpha)E - 1]}{2(1 - \alpha)R} \cong 1,893$$

ou seja, $\varepsilon(t) = \varepsilon_0(1 - t) e^{1,893 t}$.

Com a aplicação destes desenvolvimentos matemáticos sobre (45) quando $\Delta_\alpha > 0$ e a análise das tabelas, pela definição de PVIF chegamos a resultados com valores ao qual estimamos ser reais ou próximos da realidade da fisiologia do Sistema Respiratório. Com o objetivo de chegarmos a uma realidade concreta tanto fisiologicamente quanto matematicamente, em um trabalho futuro desenvolveremos uma análise comparativa dos valores resultantes contidos na tabela em parceria com os resultados de uma pesquisa feita em pacientes saudáveis. Desta forma, poderemos estudar o comportamento real do PVIF em torno da elastância (E) e da resistência (R), encontrando assim condições iniciais fiéis

ao modelo.

Com o objetivo de chegarmos o mais próximo possível da realidade da mecânica dos tecidos pulmonares, tanto física quanto fisiologicamente, observamos e concluímos a partir da Tabela 27 que os valores que assumem este papel estão entre 0,4 e 0,6, pois eles nos mostram uma variação proporcionalmente matemática, nem totalmente elástico ($E = 1$) nem totalmente resistente ($R = 1$), determinando assim a viscoelasticidade mais próxima da realidade de um tecido pulmonar.

4.5 Metodologia da Análise Matemática

Para finalizar este capítulo descrevemos a metodologia (o passo a passo) que foi utilizada na análise matemática em todo o desenvolvimento deste trabalho.

Etapas do trabalho:

- 1°. Estudo sobre os principais conteúdos necessários para o entendimento sobre os conceitos fisiológicos da mecânica respiratória.
- 2°. Escolha das variáveis e parâmetros que serão consideradas na modelagem da mecânica dos tecidos pulmonares.
- 3°. Modelagem do problema utilizando uma derivada fracionária de ordem α (PVIF).

$$\begin{cases} D^\alpha \varepsilon(t) - E\varepsilon(t) = R\varepsilon'(t), \\ \varepsilon(0) = \varepsilon_0. \end{cases}$$

- 4°. Escolha do operador via Caputo-Fabrizio para calcular a derivada fracionária.

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{1-\alpha} \exp\left(-\frac{\alpha t}{1-\alpha}\right) \int_0^t \exp\left(\frac{\alpha \tau}{1-\alpha}\right) f'(\tau) d\tau$$

- 5°. Cálculo para obtenção do valor de α ótimo derivando o PVIF em função de t , tornando o problema uma EDO de segunda ordem homogênea com os coeficientes dependentes de α , E e R .

$$\varepsilon''(t) + \frac{[\alpha R + (1-\alpha)E - 1]}{(1-\alpha)R} \varepsilon'(t) + \frac{\alpha E}{(1-\alpha)R} \varepsilon(t) = 0.$$

- 6°. Considerando que os coeficientes serão fixos para cada resolução, resolver a EDO de segunda ordem utilizando o método dos coeficientes constantes que considera que a solução é da forma $\varepsilon(t) = e^{\lambda t}$.

7°. A partir da equação característica associada $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$, onde $A = 1$, $B = \frac{[\alpha R + (1-\alpha)E-1]}{(1-\alpha)R}$ e $C = \frac{\alpha E}{(1-\alpha)R}$, analisar os três casos possíveis de solução a partir do estudo do discriminante

$$\Delta = \frac{(E+R)^2 \alpha^2 + [-2E^2 - 2ER + 2E - 2R] \alpha + (E-1)^2}{(1-\alpha)^2 R^2} = \frac{P(\alpha(E, R))}{(1-\alpha)^2 R^2} .$$

8°. Considerar o caso que $P(\alpha(E, R)) = 0$, e assim resolvermos a equação de 2º grau para α

$$(E+R)^2 \alpha^2 + [-2E^2 - 2ER + 2E - 2R] \alpha + (E-1)^2 = 0 .$$

9°. Fazer a análise do sinal do discriminante

$$\Delta_\alpha = [-2E^2 - 2ER + 2E - 2R]^2 - 4(E+R)^2 (E-1)^2 .$$

10°. Encontrar uma relação matemática entre E e R e α , algebricamente e geometricamente, chegando aos intervalos que permitem encontrarmos uma solução.

$$0 < E < 1, \quad 0 < R < 1, \quad 0 < \alpha < 1.$$

11°. A partir dos intervalos obtidos, encontrar os pontos (E, R, α) que levam a soluções de uma modelagem da mecânica dos sistema respiratório mais condizente com situações reais através de planilhas eletrônicas.

CONCLUSÃO

Em conjunto ao crescente desenvolvimento das derivadas fracionárias no campo das ciências, apresentamos neste trabalho a aplicação do Operador de Caputo-Fabrizio no estudo matemático da modelagem da mecânica dos tecidos pulmonares.

Abordamos os principais conceitos, tanto matemáticos quanto fisiológicos, com o intuito de desenvolvermos e enfatizarmos de maneira clara os assuntos que rodeiam o tema do trabalho. Em um primeiro momento, demos foco aos conteúdos matemáticos e após, por não ser de nossa área de estudo, elaboramos um capítulo específico de fisiologia voltado à parte mecânica do sistema respiratório para o entendimento da montagem do modelo.

Como motivação para o desenvolvimento do trabalho, nos apoiamos sobre o artigo (IONESCU et al., 2017) onde foi descrito a modelagem da mecânica dos tecidos pulmonares através de uma derivada fracionária utilizando o operador de Riemann Liouville. Porém, com o intuito de tornarmos a modelagem um pouco mais atual, aplicamos o operador de Caputo-Fabrizio, que nos permitiu encontrar relações matemáticas entre elastância, resistência e o fator α (a partir de uma equação característica polinomial do segundo grau). Também foi feito um estudo para encontrarmos o valor ótimo de α para a deformação, ao considerarmos valores específicos de R e E.

Antes de nos permitir encontrar novas relações matemáticas, em (IONESCU et al., 2017) foi aplicado no desenvolvimento de sua modelagem, a utilização de uma EDO de primeira ordem, modelando de maneira simples o processo mecânico dos tecidos pulmonares. Logo, com a aplicação do operador de Caputo-Fabrizio e desenvolvimento, determinamos uma EDO de segunda ordem em função de condições iniciais impostas.

É importante ressaltarmos mais uma vez, que deve-se levar em consideração, que o modelo linear de compartimento único utilizado para se chegar a EDO de primeira ordem é um modelo idealizado e não aborda uma série de fatores que acontecem na realidade (AOKI, 2013).

Como trabalhos futuros sugerimos os próximos passos:

1. Inclusão de fatores mais realistas na EDO desta análise.
2. Realizar um estudo comparativo dos dados administrados por esta dissertação com

os adquiridos por uma pesquisa de análise clínica (testes de capacidade pulmonar).

3. Validar os dados encontrados nesta dissertação mostrando o quão próxima a modelagem seria de uma situação real da mecânica do sistema respiratório, ou seja, analisaríamos nossos valores obtidos com os valores vistos a partir de uma análise clínica (testes da capacidade pulmonar) feita em um paciente saudável e pacientes doentes, como os que possuem **Enfisema Pulmonar** ou **Fibrose Pulmonar**.

REFERÊNCIAS

- AOKI, F. G. *Modelos matemáticos aplicados na avaliação da mecânica respiratória em camundongos com desafios de agonista da musculatura lisa*. 2013. 124 f. Dissertação (Mestrado em Ciências) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.
- ARFKEN, G. *Mathematical Methods for Physicists*. Third. San Diego: Academic Press, Inc., 1985.
- BERKOWITZ, B.; SCHER, H. Anomalous transport in random fracture networks. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 79, p. 4038–4041, Nov 1997. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.79.4038>.
- BIRD, R.; STEWART, W.; LIGHTFOOT, E. *Transport Phenomena*. Wiley, 2006. (Wiley International edition). ISBN 9780470115398. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=L5FnNIIaGfcC>.
- BOYCE, W.; DIPRIMA, R. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. LTC, 2010. ISBN 9788521617563. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=NYpXewAACAAJ>.
- BRAUER, F.; CASTILLO-CHAVEZ, C.; FENG, Z. *Mathematical Models in Epidemiology*. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 2019.
- CAPUTO, M. Linear Models of Dissipation whose Q is almost Frequency Independent—II. *Geophysical Journal International*, v. 13, n. 5, p. 529–539, 11 1967. ISSN 0956-540X. Disponível em: <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x>.
- CAPUTO, M.; FABRIZIO, M. A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Prog Fract Differ Appl*, v. 1, p. 73–85, 04 2015.
- CARVALHO, A. R.; ZIN, W. A. Respiratory system dynamical mechanical properties: modeling in time and frequency domain. *Biophys Rev*, v. 3, p. 71–84, 2011.
- FARIAS, A. V. *Um estudo da modelagem epidemiológica SIR usando conceitos de derivadas de ordem inteira e fracionária*. 2017. 77 p. Dissertação (Bacharelado em Matemática Aplicada) — Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2017.
- FILHO, A. A. D. *Fundamentos de Cálculo Numérico*. Bookman Editora, 2016. ISBN 9788582603857. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=xS1fDAAAQBAJ>.
- HANTOS Z.; CSENDES, T. D. B. Identification of models of respiratory mechanics by a global optimization technique. *Bulletin Europeen de Physiopathologie Respiratoire-Clinical Respiratory Physiology*, v. 22, p. S108–S108, 1986.
- IONESCU, C. et al. The role of fractional calculus in modelling biological phenomena: A review. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 51, 04 2017.
- KHALIL, R. et al. A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 264, p. 65–70, 07 2014.

LIMA, E. *Análise real*. IMPA, 1989. (Análise real, v. 1). ISBN 9788524400483. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=U6NAPwAACAAJ>).

LINO, P. S. C.; SOARES, J. C. A. Uma classe de equações diferenciais fracionárias via operador de Caputo-Fabrizio. In: *CNMAC 2018*. [S.l.]: Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, 2018. v. 6, n. 2.

LOSADA, J.; NIETO, J. Properties of a new fractional derivative without singular Kernel. *Prog Fract Differ Appl*, v. 1, p. 87–92, 04 2015.

LUIZ, M. H. R. *Modelos Matemáticos em Epidemiologia*. 2012. 77 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Departamento de Matemática, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2012.

MALAVOGLIA, G. C. *Modelos Viscoelásticos Aplicados à Previsão da Compressão de Resíduos Sólidos Urbanos*. 2016. 109 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) — Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

MENGER, K. A counterpart of Occam's razor in pure and applied mathematics ontological uses. *Synthese*, v. 12, p. 415–428, 1960.

OOSTVEEN, E. et al. The forced oscillation technique in clinical practice: methodology, recommendations and future developments. *European Respiratory Journal*, European Respiratory Society, v. 22, n. 6, p. 1026–1041, 2003. ISSN 0903-1936. Disponível em: <https://erj.ersjournals.com/content/22/6/1026>).

ORTIGUEIRA, M. D.; MACHADO, J. T. What is a fractional derivative? *Journal of Computational Physics*, v. 293, p. 4 – 13, 2015. ISSN 0021-9991. Fractional PDEs. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999114005129>).

ORTIGUEIRA, M. D.; MACHADO, J. T. A critical analysis of the Caputo–Fabrizio operator. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 59, p. 608 – 611, 2018. ISSN 1007-5704. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570417304239>).

PRESTON, R.; WILSON, T. *Fisiologia Ilustrada*. Artmed Editora, 2014. ISBN 9788582710937. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=u-JtDgAAQBAJ>).

ROCHA, D. I. C. *Modelos Matemáticos Aplicados à Epidemiologia*. 2012. 124 p. Dissertação (Mestrado em Métodos Quantitativos em Economia e Gestão) — Faculdade de Economia, Universidade do Porto, Porto, 2012.

SANTOS, F. F. U. et al. Análise da função pulmonar e estrutura micromecânica após 14 dias de restrição de movimento em ratas. *Fisioterapia e Pesquisa*, scielo, v. 24, p. 205 – 210, 06 2017. ISSN 1809-2950. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1809-29502017000200205&nrm=iso).

SARAIVA, R. Ângelo. Mecânica respiratória e controle da ventilação. *Rev Bras Anesthesiol*, v. 46, n. 3, p. 164–174, 1996.

SILVA, L. C. C. da. *Pneumologia: Princípios e Prática*: Cap. 6 – fisiologia respiratória. Porto Alegre: Artmed, 2011. 31–47 p.

SOUZA, P. A. C. de Araujo e. *Modelagem Matemática de Controle Ótimo para Vacinação contra a Gripe H1N1*. 2016. 63 p. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional) — Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2016.

STILLWELL, J. *Mathematics and Its History*. Springer New York, 2010. (Undergraduate Texts in Mathematics). ISBN 9781441960528. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=V7mxZqjs5yUC>.

TEODORO, G. S. *Cálculo Fracionário e as Funções de Mittag-Leffler*. 2014. 89 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) — Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.

TEODORO, G. S. *Derivadas Fracionárias: tipos e critérios de validade*. 2019. 182 f. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) — Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2019.

TEODORO, G. S.; OLIVEIRA, D. S.; OLIVEIRA, E. C. d. Sobre derivadas fracionárias. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, scielo, v. 40, 00 2018. ISSN 1806-1117. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172018000200407&nrm=iso.

WEST, J. *Fisiologia respiratória - 9.ed.: Princípios básicos*. Artmed Editora, 2013. ISBN 9788565852791. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=5FwGBwAAQBAJ>.

XIAO-JUN, Y.; BALEANU, D.; SRIVASTAVA, H. *Local Fractional Integral Transforms And Their Applications*. [S.l.: s.n.], 2015. ISBN 978-0-12-804002-7.

ZIN, W. A. Métodos e técnicas para a monitorização das propriedades elásticas e resistivas dos pulmões e da parede torácica na insuficiência respiratória aguda. *Jornal de Pneumologia*, v. 16, n. 2, p. 91 – 96, junho 1990.