



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Centro de Tecnologia e Ciência

Instituto Politécnico

Eduardo Cunha Classe

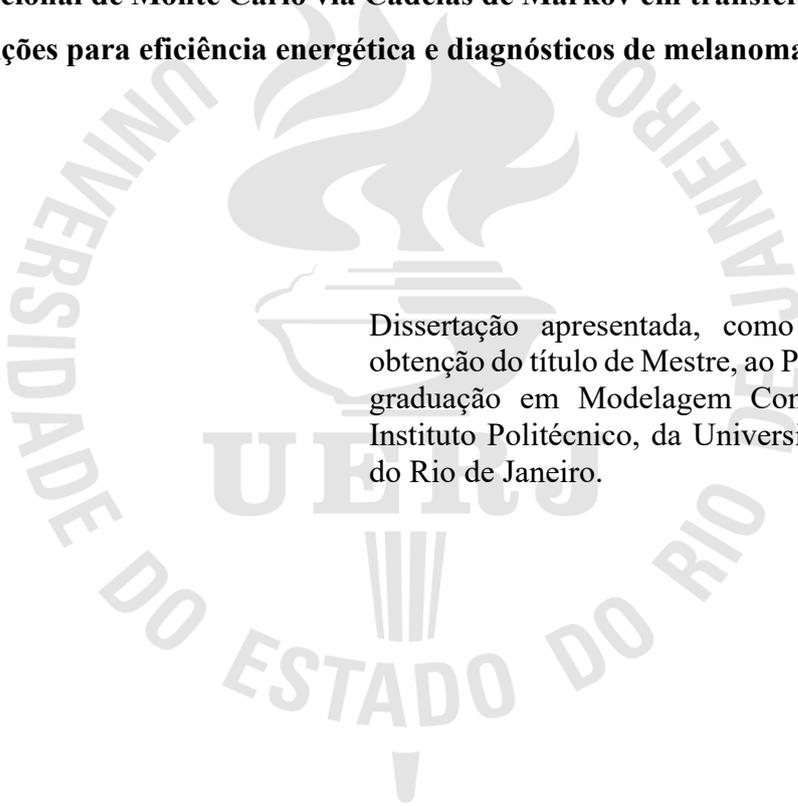
**Método Transicional de Monte Carlo via Cadeias de Markov em  
transferência de calor: contribuições para eficiência energética e  
diagnósticos de melanoma cutâneo**

Nova Friburgo

2024

Eduardo Cunha Classe

**Método Transicional de Monte Carlo via Cadeias de Markov em transferência de calor:  
contribuições para eficiência energética e diagnósticos de melanoma cutâneo**



Dissertação apresentada, como requisito para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional, do Instituto Politécnico, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientadores: Prof. Dr. Luiz Alberto da Silva Abreu

Prof. Dr. Diego Campos Knupp

Nova Friburgo

2024

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/E

C614 Classe, Eduardo Cunha.  
Método Transicional de Monte Carlo via Cadeias de Markov em transferência de calor : contribuições para eficiência energética e diagnósticos de melanoma cutâneo / Eduardo Cunha Classe. - 2024. 77 f. : il.

Orientadores: Luiz Alberto da Silva Abreu e Diego Campos Knupp.

Dissertação (mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico.

1. Monte Carlo, Método de – Teses. 2. Markov, Processos de – Teses. 3. Problemas inversos (Equações diferenciais) – Teses. 4. Calor – Transferência – Teses. 5. Melanoma – Teses. I. Abreu, Luiz Alberto da Silva. II. Knupp, Diego Campos. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto Politécnico. IV. Título.

CDU 519.245:536.2

Bibliotecária Fernanda Souza Cruz CRB7/7361

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Eduardo Cunha Classe

**Método Transicional de Monte Carlo via Cadeias de Markov em transferência de calor:  
contribuições para eficiência energética e diagnósticos de melanoma cutâneo**

Dissertação apresentada, como requisito para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional, do Instituto Politécnico, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovado em 20 de dezembro de 2024.

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Luiz Alberto da Silva Abreu (Orientador)  
Instituto Politécnico – UERJ

---

Prof. Dr. Diego Campos Knupp (Orientador)  
Instituto Politécnico – UERJ

---

Prof. Dr. Leonardo Tavares Stutz  
Instituto Politécnico – UERJ

---

Prof.<sup>a</sup> Dra. Bruna Rafaella Loiola  
Instituto Militar de Engenharia – IME

Nova Friburgo

2024

## DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha amada família, cujo amor, apoio incondicional e compreensão tornaram possível esta jornada acadêmica. Vocês foram minha fonte constante de inspiração e força. Agradeço por estarem ao meu lado em todos os momentos, celebrando minhas conquistas e me incentivando nos desafios. Este mestrado é dedicado a vocês com todo o meu amor e gratidão.

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos a todas as pessoas e instituições que tornaram possível a realização deste mestrado:

Primeiramente, meu profundo reconhecimento vai para meu orientador, Luiz Alberto da Silva Abreu, cujo apoio inabalável, orientação sábia e motivação constante foram fundamentais em todas as etapas deste percurso acadêmico. Sua dedicação em me orientar não apenas em aspectos acadêmicos, mas também pessoais e profissionais, é inestimável. Sou imensamente grato por sua orientação e incentivo contínuo a permanecer no caminho da pesquisa e do aprendizado.

À minha família, especialmente aos meus pais, Benedita do Socorro Cunha Cruz Classe e Ronaldo Classe, e aos meus irmãos, France Jones Cunha Cruz e Rafael Cunha Classe, meu profundo agradecimento pelo apoio incondicional desde o início deste curso. Seu amor, encorajamento e compreensão foram meu alicerce durante toda essa jornada. Sem vocês, nada disso teria sido possível.

Ao meu coorientador, Diego Campos Knupp, e aos professores do Instituto Politécnico, cujo comprometimento e dedicação em proporcionar uma educação de qualidade foram inspiradores. Sua presença constante e apoio aos alunos são inestimáveis e dignos de admiração.

Aos meus colegas de curso e amigos, em particular ao Lucas Asth, Lucas Lopes e Adson Braga, agradeço pelas valiosas conversas, momentos compartilhados e pela colaboração em equipe. Sua amizade e apoio tornaram essa jornada ainda mais gratificante.

À CAPES, pela bolsa concedida, que não apenas me proporcionou meios financeiros para me manter durante este período, mas também me incentivou a perseverar em meus estudos. O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Por fim, agradeço a todos aqueles que, de alguma forma, estiveram presentes em minha vida durante este período. Seja com palavras de encorajamento, gestos de apoio ou simplesmente compartilhando momentos especiais, cada um de vocês contribuiu para minha jornada acadêmica.

Minha sincera gratidão a todos vocês.

Modelar é transformar a complexidade em simplicidade.

*Bruno de Finetti*

## RESUMO

CLASSE, Eduardo Cunha. *Método Transicional de Monte Carlo via Cadeias de Markov em transferência de calor: contribuições para eficiência energética e diagnósticos de melanoma cutâneo*. 2024. 77 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional) – Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2024.

O presente trabalho explora a aplicabilidade do método bayesiano Transicional de Monte Carlo via Cadeias de Markov (TMCMC) em três problemas dentro de transferência de calor. Este método utiliza o teorema de Bayes de forma que exista uma transição suave entre a distribuição de probabilidade *a priori* e *a posteriori*, tornando possível a estimativa de *posteriors* mais estreitas ou multimodais a partir de *prioris* pouco informativas, assim como o método também é capaz de realizar a análise e seleção de modelos como um subproduto. A primeira abordagem trata-se de um problema clássico de transferência de calor que possui aplicação em diversos problemas atuais onde são empregados os métodos bayesianos TMCMC juntamente com o método clássico de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC), por meio do algoritmo de Metropolis-Hastings (MH) para estimar o perfil de temperatura de entrada em um duto de placas paralelas por meio de medições de temperatura a jusante do escoamento, o segundo método é empregado de modo a verificar os resultados estimados pelo TMCMC. No segundo problema é empregado o método TMCMC para estimar a condutância térmica de contato com variação temporal entre placas de modo a identificar falhas resultantes de variações de forças indesejadas no sistema. São consideradas placas finas de modo que é utilizado o Método da Capacitância Global, e além disso é realizado uma análise de seleção de modelos para o perfil da falha. E por fim o último problema aborda a detecção de melanoma cutâneo por meio de medições por termografia dinâmica na superfície da pele por meio do método TMCMC assim como também é explorado a análise e seleção de modelos mais simples para o diagnóstico do tecido cutâneo.

Palavras-chave: TMCMC; problemas inversos; melanoma; sustentabilidade; interdisciplinar.

A análise das falhas em sistemas compósitos, bem como a análise e estimativa do perfil de temperatura na entrada de dutos com placas paralelas, está relacionada à eficiência energética de sistemas industriais, tipicamente associada à eficiência energética e resfriamento de sistemas fotovoltaicos, contribuindo para o ODS 7 (Energia Acessível e Limpa) e ODS 9 (Indústria, Inovação e Infraestrutura). Já a aplicação no diagnóstico de melanoma cutâneo demonstra como a técnica pode apoiar a saúde pública, promovendo avanços no diagnóstico precoce e alinhando-se ao ODS 3 – Saúde e Bem-Estar.



## ABSTRACT

CLASSE, Eduardo Cunha. *Transitional Markov chain Monte Carlo method in heat transfer: contributions to energy efficiency and cutaneous melanoma diagnostics*. 2024. 77 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional) – Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2024.

The present work explores the applicability of the Transitional Markov Chain Monte Carlo (TMCMC) Bayesian method to three problems in heat transfer. This method employs Bayes' theorem to enable a smooth transition between prior and posterior probability distributions, allowing the estimation of narrower or multimodal posteriors from weakly informative priors. Additionally, the method facilitates model analysis and selection as a byproduct. The first approach addresses a classical heat transfer problem with applications in various contemporary issues, employing the TMCMC Bayesian method alongside the classical Markov Chain Monte Carlo (MCMC) method using the Metropolis-Hastings (MH) algorithm. These methods estimate the inlet temperature profile in a parallel-plate duct based on downstream temperature measurements, with the second method verification the results obtained by TMCMC. In the second problem, the TMCMC method is used to estimate the time-varying thermal contact conductance between plates, aiming to identify failures resulting from undesired force variations in the system. Thin plates are considered, and the Lumped Capacitance Method is applied. Furthermore, a model selection analysis is performed to determine the failure profile. Finally, the last problem focuses on detecting cutaneous melanoma through dynamic thermography measurements on the skin surface using the TMCMC method. Additionally, simpler models for skin tissue diagnosis are analyzed and selected as part of the study.

Keywords: TMCMC; inverse problems; melanoma; sustainability; interdisciplinary.

The analysis of failures in composite systems, as well as the analysis and estimation of the temperature profile at the inlet of ducts with parallel plates, is related to the energy efficiency of industrial systems. This is typically associated with the energy efficiency and cooling of photovoltaic systems, contributing to SDG 7 (Affordable and Clean Energy) and SDG 9 (Industry, Innovation, and Infrastructure). On the other hand, the application in the diagnosis of cutaneous melanoma demonstrates how the technique can support public health, promoting advances in early diagnosis and aligning with SDG 3 – Good Health and Well-Being.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Representação esquemática do problema direto e inverso.....	13
Figura 2 –	Representação esquemática para o problema 1.....	23
Figura 3 –	Representação esquemática do problema 2.....	26
Figura 4 –	Representação esquemática para as diferentes camadas da pele.....	29
Figura 5 –	Perfil de entrada $f_1(t)$ , caso 1.....	41
Figura 6 –	Perfil de entrada $f_2(t)$ , caso 2.....	42
Figura 7 –	Perfil de entrada $f_3(t)$ , caso 3.....	42
Figura 8 –	Medições de temperatura caso 1.....	43
Figura 9 –	Medições de temperatura caso 2.....	43
Figura 10 –	Medições de temperatura caso 3.....	43
Figura 11 –	Curvas estimadas para o caso 1.....	44
Figura 12 –	Intervalo de 95% de credibilidade para o caso 1.....	45
Figura 13 –	Curvas estimadas para o caso 2.....	45
Figura 14 –	Intervalo de 95% de credibilidade para o caso 2.....	46
Figura 15 –	Curvas estimadas para o caso 3.....	46
Figura 16 –	Intervalo de 95% de credibilidade para o caso 3.....	47
Figura 17 –	Histogramas de parâmetros estimados para $f_1(t)$ .....	47
Figura 18 –	Histogramas de parâmetros estimados para $f_2(t)$ .....	48
Figura 19 –	Histogramas de parâmetros estimados para $f_3(t)$ .....	48
Figura 20 –	Primeiro caso para o perfil de $h_c(t)$ .....	49
Figura 21 –	Segundo caso para o perfil de $h_c(t)$ .....	50
Figura 22 –	Terceiro caso para o perfil de $h_c(t)$ .....	50
Figura 23 –	Medições realizadas para o primeiro caso.....	51
Figura 24 –	Medições realizadas para o segundo caso.....	51
Figura 25 –	Medições realizadas para o terceiro caso.....	51
Figura 26 –	Resultados estimados com o Modelo 1 para o primeiro caso.....	53
Figura 27 –	Resultados estimados com o Modelo 2 para o primeiro caso.....	53
Figura 28 –	Resultados estimados com o Modelo 3 para o primeiro caso.....	54
Figura 29 –	Resultados estimados com o Modelo 1 para o segundo caso.....	55
Figura 30 –	Resultados estimados com o Modelo 2 para o segundo caso.....	55
Figura 31 –	Resultados estimados com o Modelo 3 para o segundo caso.....	56

Figura 32 –	Resultados estimados com o Modelo 1 para o terceiro caso.....	57
Figura 33 –	Resultados estimados com o Modelo 2 para o terceiro caso.....	57
Figura 34 –	Resultados estimados com o Modelo 3 para o terceiro caso.....	57
	Perfis de perfusão sanguínea utilizados na resolução do problema direto	
Figura 35 –	para os casos saudável e tumoral.....	61
Figura 36 –	Medições do problema direto.....	62
Figura 37 –	Histograma dos parâmetros estimados para o caso saudável.....	64
Figura 38 –	Histograma dos parâmetros estimados para o caso tumoral.....	64
Figura 39 –	Intervalo de 95% de credibilidade para medições a partir dos resultados estimados para o caso saudável.....	65
Figura 40 –	Intervalo de 95% de credibilidade para medições a partir dos resultados estimados para o caso tumoral.....	65
Figura 41 –	Histogramas do parâmetro $q_m$ para ambos os casos.....	66
Figura 42 –	Perfusão sanguínea estimada $\omega(T)$ .....	67
	Intervalo de 95% de credibilidade para medições a partir dos resultados	
Figura 43 –	estimados para o caso saudável.....	68
	Intervalo de 95% de credibilidade para medições a partir dos resultados	
Figura 44 –	estimados para o caso tumoral.....	68
Figura 45 –	Análise comparativa do caso 1 do Problema 1.....	75
Figura 46 –	Análise comparativa do caso 2 do Problema 1.....	75
Figura 47 –	Análise comparativa do caso 3 do Problema 1.....	76
Figura 48 –	Análise comparativa do caso 1 do Problema 2.....	76
Figura 49 –	Análise comparativa do caso 2 do Problema 2.....	77
Figura 50 –	Análise comparativa do caso 3 do Problema 2.....	77

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores dos parâmetros utilizados.....	40
Tabela 2 – Erro médio quadrático para função de entrada obtida no primeiro caso e medições de temperatura simuladas por meio da curva estimada.....	45
Tabela 3 – Erro médio quadrático para função de entrada obtida no segundo caso e medições de temperatura simuladas por meio da curva estimada.....	46
Tabela 4 – Erro médio quadrático para função de entrada obtida no terceiro caso e medições de temperatura simuladas por meio da curva estimada.....	47
Tabela 5 – Modelos adotados para identificação de falhas.....	52
Tabela 6 – Análise dos resultados obtidos.....	58
Tabela 7 – Problemas gerais para resolução do problema direto.....	59
Tabela 8 – Propriedade das camadas.....	60
Tabela 9 – Parâmetros de perfusão sanguínea para tecido saudável.....	60
Tabela 10 – Parâmetros de perfusão sanguínea para tecido tumoral.....	61
Tabela 11 – Valores estimados para o modelo de perfusão constante.....	63
Tabela 12 – Valores estimados para o modelo de perfusão linear.....	68

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AMH	Metropolis-Hastings Adaptativo
EDP	Equação Diferencial Parcial
MCMC	Método de Monte Carlo via Cadeias de Markov
MH	Metropolis-Hastings
ODS	Objetivo de Desenvolvimento Sustentável
ONU	Organização das Nações Unidas
PI	Problema Inverso
PD	Problema Direto
SDI	Sustainable Development Initiatives
TMCMC	Método Transicional de Monte Carlo via Cadeias de Markov

## SUMÁRIO

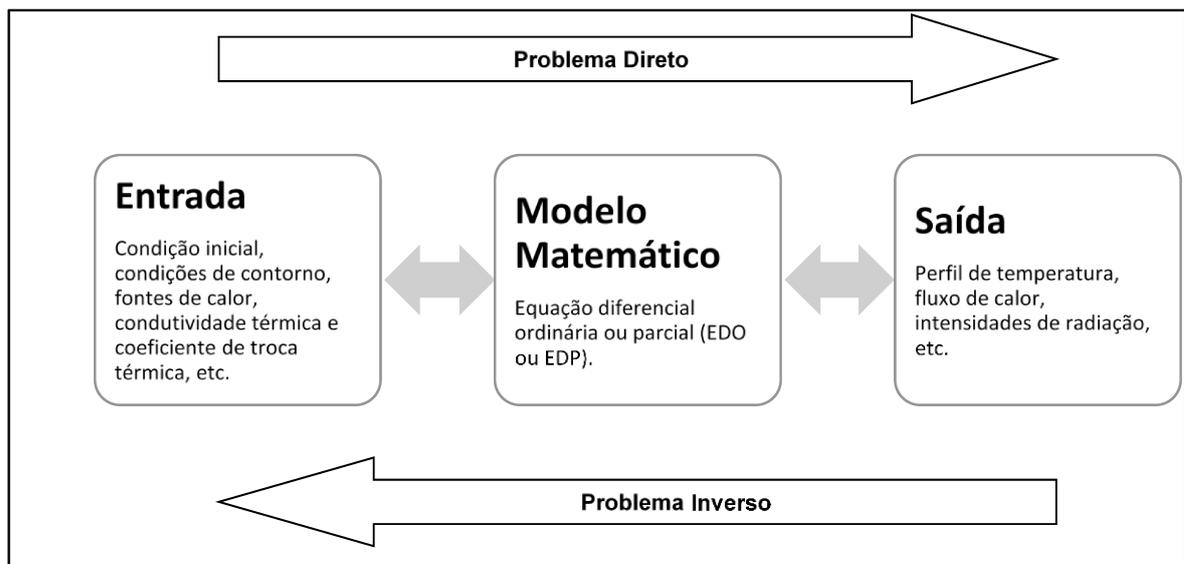
	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>13</b>
<b>1</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>17</b>
1.1	<b>Problemas difusivos e advectivos em transferência de calor.....</b>	<b>17</b>
1.2	<b>Problemas inversos.....</b>	<b>18</b>
1.3	<b>Método Transicional de Monte Carlo via Cadeias de Markov – TMCMC.....</b>	<b>20</b>
<b>2</b>	<b>PROBLEMAS ABORDADOS.....</b>	<b>22</b>
2.1	<b>Estimativa do perfil de temperatura de entrada com escoamento em duto de placas paralelas com convecção forçada via inferência bayesiana.....</b>	<b>22</b>
2.2	<b>Identificação de condutância térmica de contato em placas termicamente finas por meio do método TMCMC.....</b>	<b>24</b>
2.3	<b>Identificação de parâmetros em modelos de biotransferência de calor utilizando o método TMCMC.....</b>	<b>28</b>
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO DE ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS E SELEÇÃO DE CLASSE DE MODELOS.....</b>	<b>33</b>
3.1	<b>Metropolis-Hastings.....</b>	<b>34</b>
3.2	<b>Atualização de modelo e seleção de classes de modelo.....</b>	<b>35</b>
3.3	<b>Método TMCMC.....</b>	<b>36</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS OBTIDOS.....</b>	<b>39</b>
4.1	<b>Estimativa do perfil de temperatura de entrada em duto de placas paralelas.....</b>	<b>40</b>
4.2	<b>Estimativa de condutância térmica de contato com variação temporal.....</b>	<b>49</b>
4.2.1	<u>Primeiro Caso.....</u>	<b>53</b>
4.2.2	<u>Segundo Caso.....</u>	<b>55</b>
4.2.3	<u>Terceiro Caso.....</u>	<b>56</b>
4.3	<b>Identificação de parâmetros em modelos de biotransferência de calor.....</b>	<b>59</b>
4.3.1	<u>Modelo de perfusão constante.....</u>	<b>63</b>
4.3.2	<u>Modelo de perfusão linear.....</u>	<b>66</b>
	<b>CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS.....</b>	<b>69</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>70</b>
	<b>APÊNDICE.....</b>	<b>75</b>

## INTRODUÇÃO

A estimativa de parâmetros em transferência de calor é um tema de crescente relevância na literatura, frequentemente associada ao uso de métodos de resolução de problemas inversos. Essa abordagem torna-se necessária devido à inviabilidade de medições diretas e/ou à necessidade de preservar o sistema ou a amostra.

Antes de abordar o problema inverso, é fundamental definir o problema direto. Este se caracteriza por ter como entrada parâmetros como condição inicial, condições de contorno, fontes de calor, condutividade térmica, coeficiente de troca térmica, entre outros. Sua saída consiste em grandezas como o perfil de temperatura, fluxo de calor e intensidades de radiação, conforme ilustrado na Fig. 1 (Orlande, 2012; Silva Neto, 2012; Woodbury et al., 2023).

Figura 1 – Representação esquemática do problema direto e inverso.



Fonte: O autor, 2024.

Os problemas diretos, em geral, são estáveis e classificados como bem postos segundo os critérios de Hadamard (Jacques Hadamard, 1923). Isso significa que a solução existe, é única e depende continuamente dos dados de entrada. A saída é obtida por meio da resolução do problema de valor inicial e de contorno modelada por uma equação diferencial ordinária ou parcial (EDO ou EDP).

Já a resolução do problema inverso se dá no sentido da direita para a esquerda na Fig. 1, ou seja, o perfil de temperatura do sistema em análise está disponível e deseja-se estimar a condição inicial e/ou a condutividade térmica, por exemplo. Em aplicações práticas apenas uma pequena parte desse perfil de temperatura está disponível por meio de medições, e estas medições ainda introduzem ruídos intrínsecos ao dispositivo de medição utilizado.

A resolução de problemas inversos é instável, e essa grau de instabilidade aumenta à medida que o grau de estabilidade do problema direto correspondente aumenta (Kaipio; Fox, 2011). Por ser instável, o problema inverso também é classificado como mal posto (Orlande, 2012), já que não atende um ou mais critérios de Hadamard sendo necessário algum método de regularização ou abordagem bayesiana para sua solução.

Estruturas de resolução de problemas inversos baseadas na abordagem bayesiana, como o TMCMC explorado neste trabalho, oferecem vantagens significativas. Elas não se limitam a estimar um único ponto, mas fornecem estimativas estatísticas dos parâmetros desejados, modelando o problema por meio de distribuições de probabilidade. Diferentemente dos métodos determinísticos, essas estruturas podem ser aplicadas mesmo em situações com poucas medições e muitos parâmetros desconhecidos, além de permitir a incorporação sistemática de informações prévias na resolução do problema (Kaipio; Fox, 2011).

No entanto, a resolução de problemas inversos com abordagens bayesianas exige a solução iterativa da equação diferencial parcial (EDP) utilizada na modelagem do problema. Dessa forma, a escolha e análise do modelo são indispensáveis para otimizar o custo computacional sem comprometer a acurácia dos resultados. Nesse contexto, o método TMCMC destaca-se por possibilitar, como um subproduto, a análise de seleção de modelos, aspecto que será também investigado neste trabalho.

## **Objetivos**

O presente trabalho se concentra em explorar e analisar a capacidade do método bayesiano Transicional de Monte Carlo via Cadeias de Markov (TMCMC) na resolução de problemas inversos dentro da transferência de calor.

Esse objetivo será alcançado por meio de três objetivos específicos aplicados a três problemas distintos em caráter interdisciplinar. O primeiro problema trata-se de um problema clássico de transferência de calor que possui aplicação em diversos problemas atuais onde são empregados os métodos bayesianos TMCMC juntamente com o método clássico de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC), por meio do algoritmo de Metropolis-Hastings (MH)

para estimar o perfil de temperatura de entrada em um duto de placas paralelas por meio de medições de temperatura a jusante do escoamento, o segundo método é empregado de modo a verificar os resultados estimados pelo TMCMC.

No segundo problema é empregado o método TMCMC para estimar a condutância térmica de contato com variação temporal entre placas de modo a identificar falhas resultantes de variações de forças indesejadas no sistema. São consideradas placas finas de modo que é utilizado o Método da Capacitância Global, e além disso é realizado uma análise de seleção de modelos para o perfil da falha.

Por fim, o terceiro problema aborda a detecção de melanoma cutâneo por meio de medições de temperatura realizadas via termografia dinâmica na superfície da pele. Neste caso, a pele é submetida a uma fonte fria por um período definido, e as medições são realizadas durante a fase de aquecimento. O diagnóstico e a análise são realizados utilizando o TMCMC, que também permite selecionar modelos mais simples e eficientes para descrever o comportamento observado.

## **Organização do Trabalho**

No Capítulo 1, é apresentada uma revisão bibliográfica sobre o tema de estudo deste trabalho. Primeiramente, discutem-se problemas difusivos e advectivos em transferência de calor, bem como técnicas para resolução desses problemas. Em seguida, abordam-se métodos inversos com um foco especial em métodos bayesianos e suas características. Por fim, discute-se o método TMCMC, incluindo sua história, características e melhorias em relação a outros métodos.

No capítulo 2, são apresentados os três problemas abordados neste trabalho, com uma revisão bibliográfica antes da formulação matemática de cada um. O primeiro problema trata da estimativa do perfil de temperatura de entrada em um duto de placas paralelas em um cenário transiente, comparando os resultados do método TMCMC com os obtidos pelo Metropolis-Hastings (MH). O segundo problema envolve a identificação de falhas de contato temporais na interface entre materiais, avaliando três perfis de falhas diferentes e três modelos distintos. O último problema utiliza o TMCMC para a identificação de tecidos tumorais, avaliando a utilização de dois modelos distintos e menos complexos.

No capítulo 3, é apresentada toda a metodologia utilizada para a resolução dos problemas inversos discutidos no capítulo 2. A primeira parte aborda o método MH, seguida

pela atualização e seleção de modelos em problemas inversos, e finalmente a explicação detalhada do método TMCMC e suas vantagens.

No capítulo 4, são apresentados os resultados obtidos para cada um dos problemas abordados, destacando os principais desafios e o comportamento do TMCMC em cada caso. Finalmente, no capítulo 5, são expostas as conclusões e comentários sobre possíveis trabalhos futuros.

## 1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

É apresentada neste capítulo uma revisão dos temas abordados nesta dissertação de modo a fazer uma interseção entre problemas de transferência de calor, os métodos de solução de problemas inversos e os desafios encontrados em cada uma das áreas atualmente.

### 1.1 Problemas difusivos e advectivos em transferência de calor

A solução de problemas difusivos e advectivos é uma área fundamental na modelagem de processos físicos e químicos que envolvem transporte de massa, energia ou quantidade de movimento em meios fluidos ou sólidos. Esses problemas são comumente encontrados em uma variedade de campos, incluindo engenharia (Mahmoudinezhad et al., 2023; Zhao et al., 2023), geofísica (Tian et al., 2020), ciências ambientais (Yu; Zhan; Xu, 2024) e meteorologia (Huang et al., 2022).

A difusão de calor é o processo pelo qual o calor é transferido através de um material como resultado das interações microscópicas entre as partículas, que transferem energia de regiões de alta temperatura para regiões de baixa temperatura até que um equilíbrio seja alcançado (Bergman; Levine, 2019). Em fluidos, a difusão é um fenômeno de transporte passivo e ocorre mesmo na ausência de movimento macroscópico do fluido.

A advecção refere-se especificamente ao transporte devido ao movimento em massa do fluido. Nesse caso, apenas o movimento em massa do fluido contribui para o transporte de energia, enquanto que a convecção refere-se ao transporte cumulativo de energia devido tanto à movimentação aleatória quanto em massa do fluido (Incropera et al., 2007), em outras palavras a convecção é o conjunto dos dois outros processos.

A solução de problemas que envolvem difusão e advecção geralmente requer o uso de equações diferenciais parciais (EDPs), que descrevem a evolução temporal e espacial das propriedades do sistema. A solução dessas equações pode ser realizada de várias maneiras, dependendo da complexidade do sistema e das condições de contorno. Métodos analíticos podem ser aplicados em casos simples e bem definidos, enquanto métodos numéricos são frequentemente empregados para problemas mais complexos ou com geometrias irregulares (Anderson et al., 2020).

Os métodos numéricos mais comuns para resolver problemas de difusão e advecção incluem o Método das Diferenças Finitas, o Método dos Elementos Finitos e o Método dos Volumes Finitos. Esses métodos discretizam o domínio do problema em uma grade ou malha e

aproximam as derivadas espaciais e temporais das equações diferenciais usando diferenças finitas, elementos finitos ou volumes finitos (Patankar, 1980).

## 1.2 Problemas inversos

Os trabalhos em transferência de calor não se limitam apenas à resolução do problema direto de como o calor se comporta no interior de materiais ou sistemas. Uma área crucial que tem recebido crescente atenção é a resolução de problemas inversos em transferência de calor. Enquanto os problemas diretos lidam com a determinação do perfil de temperatura, fluxo de calor, intensidades de radiação, etc. em um sistema conhecido (Silva Neto, 2012), o problema inverso aborda a questão de forma diferente, este pode ser definido, de acordo com (Orlande, 2012) como a estimativa indireta de parâmetros que aparecem na formulação matemática por meio de medições de temperatura, fluxo de calor, intensidade de radiação, etc.

Esses parâmetros a serem estimados podem ser uma condição inicial, condições de contorno, fontes de calor (posição e/ou potência), condutividade térmica, coeficiente de troca térmica na interface, entre outros (Kaipio; Fox, 2011), assim como também pode ser uma combinação desses, que dependerá do problema abordado.

Os problemas inversos tem aplicações significativas em uma variedade de campos, desde a monitoração e controle de processos térmicos até o diagnóstico médico (Yadan et al., 2023) e o projeto de ligas (Larsen et al., 2017). Por exemplo, em processos industriais, entender as causas de como o calor é distribuído dentro de um sistema pode levar a melhorias de eficiência e detecção precoce de falhas. Da mesma forma, na medicina, a capacidade de inferir distribuições térmicas internas pode ser crucial para diagnósticos precisos e não invasivos para intervenções médicas adequadas.

No entanto, resolver problemas inversos em transferência de calor não é uma tarefa simples, e sim uma tarefa ainda muito desafiadora (Trilok et al., 2022). Uma das distinções fundamentais na formulação desses problemas é entre aqueles que são bem-postos e mal postos. Problemas bem postos possuem uma solução, está é única e estável (Jacques Hadamard, 1923), enquanto problemas mal postos podem ter nenhuma ou múltiplas soluções ou ser extremamente sensíveis a pequenas variações nos dados experimentais, como é o caso dos problemas inversos, que estes são matematicamente classificados como mal postos (Orlande, 2012).

Para abordar esses desafios, uma variedade de métodos foi desenvolvida ao longo do tempo, e hoje muitos trabalhos concentram-se na utilização de métodos estocásticos, devido à

sua fundamentação probabilística capaz, não apenas de conseguir estimar um único ponto para o(s) parâmetro(s) de interesse de um determinado modelo, mas também de conseguir estimar a distribuição de probabilidade do(s) valor(es) para esse(s) parâmetro(s), e poucos métodos, como o TMCMC, são capazes de avaliar os modelos mais prováveis para o problema em análise.

Neste trabalho serão utilizados métodos com abordagem bayesiana para resolução de problemas inversos. A abordagem bayesiana não é definida com um método, mas sim como uma estrutura capaz de modelar o problema inteiro estatisticamente por meio da probabilidade *a posteriori* do problema (Kaipio; Fox, 2011).

Ao incorporar informações *a priori* sobre os parâmetros desconhecidos e a incerteza nos dados experimentais, os métodos bayesianos oferecem uma abordagem mais robusta para resolver problemas inversos em transferência de calor (Antunes Guedes et al., 2022). Ao estimar distribuições de probabilidade das soluções, eles permitem uma avaliação mais completa sobre a incerteza e uma melhor tomada de decisão.

Apesar de suas vantagens, os métodos bayesianos também têm suas limitações. Eles podem ser computacionalmente intensivos e exigir uma quantidade significativa de dados para estimar distribuições de probabilidade precisas. Além disso, a escolha apropriada de distribuições *a priori* e a interpretação dos resultados podem ser desafiadoras (Kaipio; Fox, 2011).

A inferência bayesiana é implementada usando uma variedade de técnicas computacionais, a mais conhecida é o método de Monte Carlo via cadeias de Markov (MCMC), que gera uma cadeia de Markov de modo que a proposição de um novo candidato dependa apenas do candidato atual, e com isso é gerada a distribuição probabilísticas dos resultados aceitos, combinando a distribuição *a priori* com a verossimilhança para obter a distribuição *a posteriori* (Orlande, 2012), conforme será detalhado mais adiante.

### 1.3 Método Transicional de Monte Carlo via Cadeias de Markov – TMCMC

Apesar de todos os aspectos positivos dos métodos estocásticos, a maioria deles possuem limitações quando as variáveis são altamente correlacionadas nos dados de entrada, quando a distribuição a ser estimada está em uma faixa muito estreita de valores ou quando a distribuição é multimodal (Ching; Wang, 2016).

É altamente desejável ter uma abordagem de simulação estocástica que seja eficaz em todos os casos (por exemplo, distribuições com muitas variáveis, multimodais, com baixo desvio padrão, regiões planas etc.), uma vez que as propriedades da distribuição a ser estimada são desconhecidas. Por isso, foi proposto o método Adaptativo Metropolis-Hastings (AMH) por Beck e Au (2002), na tentativa de evitar a amostragem direta da distribuição a ser estimada, obtendo amostras de uma série de distribuições intermediárias mais simples que convergem para a distribuição desejada. No entanto, esse método continua ineficiente para problemas com muitos parâmetros a serem estimados. Além disso, o AMH utiliza um núcleo de transição entre distribuições intermediárias que não é muito claro (Ching; Chen, 2007).

Apesar de suas limitações, o AMH motivou a elaboração do método *Transitional Markov Chain Monte Carlo* (TMCMC), proposto por Ching e Chen (2007). Este método segue a mesma ideia de transição entre distribuições intermediárias, mas não requer uma função de distribuição auxiliar tão complexa quando o AMH. O TMCMC começa com amostras independentes de uma distribuição *a priori*. Nos passos seguintes, a distribuição de amostragem é gradualmente transformada para se aproximar da distribuição *a posteriori*.

Além disso, é importante destacar que poucos métodos são capazes de fornecer a evidência de modelo como um subproduto, de modo que permita a análise de probabilidades e a seleção dos modelos propostos de forma mais eficiente. A seleção de classe de modelos bayesiana seleciona o(s) modelo(s) mais plausíveis de acordo com a probabilidade *a posteriori* de cada modelo considerado. Essa probabilidade *a posteriori* depende da evidência ou verossimilhança marginal (Faria; Stutz; Castello, 2024).

O diferencial do TMCMC é que ele fornece uma estimativa para a evidência dos modelos considerados e, a partir daí, pode ser feita a seleção da classe de modelos. O MH, por si só, não fornece uma estimativa da evidência dos modelos, mas suas amostras podem ser utilizadas para tal e, com isso, pode ser feita a seleção de classe de modelo da forma feita com o TMCMC.

No mesmo estudo em que apresentaram o método, Ching e Chen (2007) também o aplicaram em três exemplos de sistemas de cisalhamento em edificações com diferentes graus

de liberdade, comparando-o com os métodos MH e AMH. Essa comparação demonstrou a eficiência do método TMCMC. Desde então, diversos estudos têm explorado o TMCMC.

Ching e Wang (2016) aplicaram o método para caracterizar incertezas estatísticas nos parâmetros de variabilidade espacial a partir de dados de teste de penetração de cone. No trabalho de Jin et al. (2019) foi utilizado uma versão do TMCMC para identificação de parâmetros em modelos avançados de solos. Já Zhou et al. (2022), o método foi eficaz na detecção de danos em uma ponte real e contribuiu para aprimorar a precisão na atualização dos modelos estruturais.

Rangel (2020) e Andrade (2023) abordaram a identificação de danos estruturais em uma viga de Euler-Bernoulli simplesmente apoiada com a utilização do método TMCMC. A modelagem do dano foi dada por diferentes classes de modelos, de modo que também foi avaliado qual a classe de modelo se adequa ao perfil de dano a ser estimado.

Asth (2024) mostra que o método TMCMC é capaz de estimar parâmetros e realizar a seleção de classe de modelos em problemas de convecção-difusão em microcanais. O autor aborda dois sistemas físicos, o primeiro trata-se do resfriamento de uma fonte de calor simulando um processador por meio de um dissipador térmico com microcanal, e no segundo problema ele realiza a modelagem de um microcanal, levando em consideração o escorregamento de velocidade (*slip flow*) e o salto de temperatura nas paredes.

Costa et al. (2024) e Costa (2024) empregaram o TMCMC juntamente com transformadas integrais para estimar coeficientes espacialmente dependentes em meios heterogêneos para problemas de transferência de calor.

Porém, apesar do crescente destaque do TMCMC, a sua aplicação em problemas de transferência de calor ainda é limitada. Neste trabalho, o método será empregado e avaliado especificamente para problemas de transferência de calor.

## 2 PROBLEMAS ABORDADOS

Este capítulo apresenta os problemas que serão utilizados para explorar a capacidade de estimação de parâmetros e seleção de classe de modelos do método TMCMC. Cada problema é descrito com sua formulação matemática e a definição dos parâmetros a serem estimados.

### 2.1 Estimativa do perfil de temperatura de entrada com escoamento em duto de placas paralelas com convecção forçada

O problema foi adaptado de (Bokar; Özisik, 1995), onde os autores abordaram o problema da estimativa do perfil de temperatura de entrada com variação temporal em um duto com placas paralelas, considerando um fluxo laminar completamente desenvolvido termicamente e hidrodinamicamente. Eles utilizaram medições de temperaturas transiente obtidas em um único ponto localizado a jusante da entrada do duto e empregaram o método de minimização do gradiente conjugado com problema adjunto para diferentes funções de entrada. No entanto, eles enfrentaram dificuldades na estimativa de funções com descontinuidades, especialmente do tipo degrau.

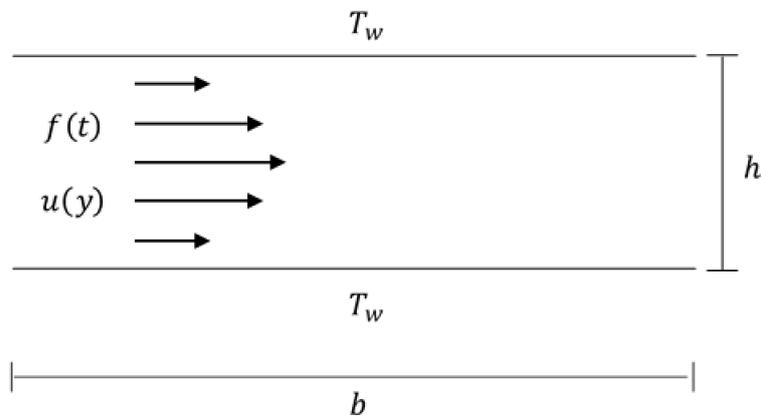
Desde então, poucos estudos abordaram o desafio da estimativa do perfil de temperatura de entrada em escoamentos forçados. A maioria dessas pesquisas empregou o método do gradiente conjugado, como demonstrado por (Colaço; Orlande, 2000), que alcançou uma precisão satisfatória ao utilizar 18 pontos de medição, e por (Parwani; Talukdar; Subbarao, 2012), que investigou o impacto da quantidade e do posicionamento dos sensores na precisão da estimativa do perfil de entrada. Embora o método do gradiente conjugado possa produzir resultados satisfatórios em alguns casos, sua eficácia é limitada quando se dispõe de poucos pontos de medição, visto que a colocação de numerosos sensores pode ser impraticável.

Além disso, o método tem dificuldades em estimar descontinuidades quando presentes nas curvas a serem estimadas, e nesse contexto os métodos de solução de problema inverso baseados na inferência bayesiana se destacam como uma alternativa robusta para contornar os desafios apontados. Na revisão de literatura realizada não foi encontrado nenhum trabalho que utilizou métodos bayesianos para o tipo de problema em análise, e no presente trabalho serão utilizados dois deles, o MCMC por meio do algoritmo de Metropolis-Hastings (MH), que já é bem conhecido e adotado na literatura, e o TMCMC.

O problema físico em estudo envolve a determinação do perfil de temperatura na entrada do duto com o escoamento descrito. A distância entre as placas é  $h$ , e inicialmente todo o fluido

em seu interior está a uma temperatura inicial  $T_i$ . O perfil de temperatura na entrada do duto  $f(t)$ , é função exclusivamente do tempo, e as paredes ao longo deste duto têm uma temperatura prescrita  $T_w$  que é constante ao longo de seu comprimento  $b$ . Supõe-se que o problema é transiente e não possui termo fonte dentro do duto, conforme é mostrado na Fig. 2 abaixo.

Figura 2 – Representação esquemática do escoamento forçado de um fluido em um duto de placas paralelas.



Fonte: O autor, 2024.

O conjunto de equações que descrevem o fenômeno é representado por (Bokar; Özisik, 1995; Liu; Ozisik, 1996):

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \rho c_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + u(y) \frac{\partial T}{\partial x} \right] \quad (1)$$

$$T(t, x, y) = T_i, \quad \text{para } t = 0 \quad (2)$$

$$T(t, x, y) = f(t), \quad \text{para } x = 0 \quad (3)$$

$$T(t, x, y) = T_w, \quad \text{para } y = 0 \mid y = h \quad (4)$$

Onde a equação que modela o problema é representada pela Eq. (1), enquanto a Eq. (2) é a condição inicial e as Eq. (3) e Eq. (4) são as condições de contorno. Além disso, a condutividade térmica, a massa específica e o calor específico são representados respectivamente por  $k$ ,  $\rho$  e  $c_p$ . Destaca-se ainda que o escoamento é hidrodinamicamente desenvolvido ao longo do duto de modo que a velocidade do fluido  $u(y)$  depende exclusivamente da posição  $y$ .

A primeira parte consiste em resolver o problema direto para simular a medição de temperatura no local desejado, e a segunda parte envolve a estimativa do perfil de temperatura através da resolução do problema inverso, onde serão comparados os resultados dos métodos empregados. O perfil de temperatura para esta aplicação será obtido por meio da interpolação linear de 11 pontos discretos de temperatura (parâmetros) estimados e espaçados de forma uniforme durante todo o domínio do problema, de forma que seja possível a utilização de um método capaz de estimar perfis de entrada dos mais variados tipos e formatos.

Será utilizado também uma adaptação do método de regularização de Variação Total (*Total Variation Denoising*) (Condat, 2013) para os parâmetros estimados pelo método TMCMC de modo que a o perfil de temperatura não apresente tantos ruídos nas regiões planas.

Destaca-se ainda que este problema, ao explorar a capacidade do método TMCMC em estimar perfis de temperatura de entrada, pode contribuir diretamente para o aprimoramento da eficiência energética em sistemas de transferência de calor, um aspecto fundamental para alcançar os objetivos do ODS 7 (Energia Limpa e Acessível). Alternativamente, as inovações metodológicas apresentadas aqui também têm implicações para o desenvolvimento de soluções tecnológicas robustas, alinhadas ao ODS 9 (Indústria, Inovação e Infraestrutura), ao otimizar processos industriais que dependem de monitoramento térmico preciso.

## 2.2 Identificação de condutância térmica de contato em placas termicamente finas

Na engenharia, a eficiência na troca térmica de contato é um tópico de grande interesse, pois pode ser aplicada na otimização de novos dispositivos ou equipamentos (Huang; Wang; Chen, 1999), no controle de qualidade de adesão para novos materiais compósitos multicamadas (Abreu et al., 2014), ou na maximização/minimização da transferência de calor por contato.

A eficiência desse processo está diretamente ligada à condutância térmica de contato, o inverso da resistência térmica (Costa et al., 2024; Madhusudana, 2014), sendo influenciada por

fatores como rugosidade da superfície, pressão, temperatura na interface de contato, condutividades térmicas dos sólidos em contato e natureza do fluido que envolve esses componentes (Parikh et al., 2022).

Apesar de ser um problema inverso clássico (Özisik; Orlande, 2021), nos últimos anos, a identificação de falhas na interface de materiais compostos tem sido abordada através da aplicação de técnicas de resolução de problemas inversos para determinar a condutância térmica de contato. Em estudos como o de Huang, Wang e Chen (1999), o método do gradiente conjugado foi empregado com sucesso para estimar a condutância térmica de contato variando com o tempo e o ângulo de circunferência de um trocador de calor de placa com tubo aletado, a partir de dados de medição de temperatura, para uma variação bem suave.

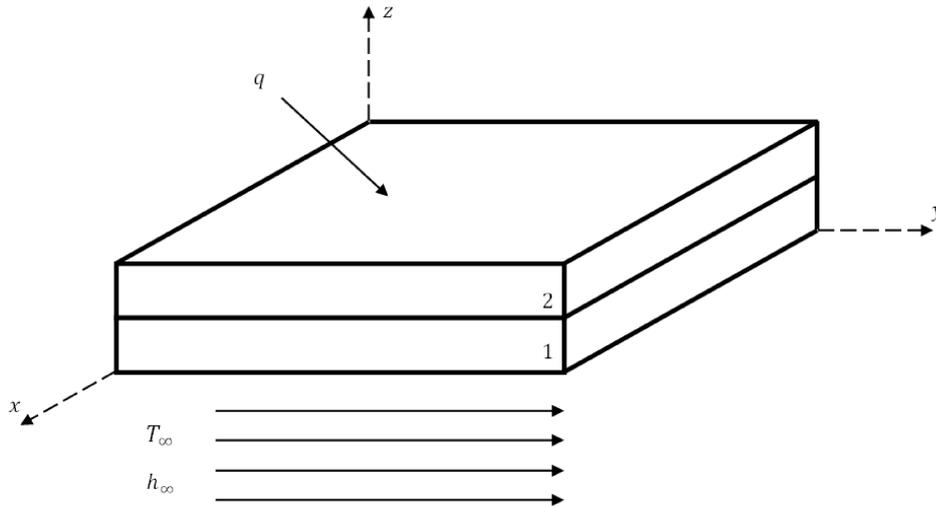
Resultados promissores para a estimativa dessa propriedade com variações mais abruptas foram obtidos ao se utilizar a estrutura bayesiana para esse tipo de problema. O trabalho de Abreu et al. (2014) também estimou falhas espaciais por meio da condutância térmica de contato para uma placa multicamada onde era aquecida por um fluxo de calor na superfície superior ao mesmo tempo que esta superfície e a inferior trocavam calor por convecção com o ar utilizando a técnica da Transformada Integral Clássica (CITT) junto com o método de Monte Carlo via Cadeias de Markov para o problema inverso, por meio do algoritmo de Metropolis-Hastings e, posteriormente em (Abreu et al., 2018) foi feito um experimento físico onde foram utilizados o MCMC junto com o filtro de Kalman para dois diferentes tipos de falhas nas superfícies de contato.

Além disso, (Watanabe et al., 2022) identificou, com precisão e acurácia, falhas de contato que variam com o tempo para matérias compósitos com duas camadas ao empregar uma estrutura bayesiana juntamente com o método da Capacitância Global.

Neste contexto, o objetivo desta aplicação é investigar a identificação de falhas de contato na interface entre duas placas finas, como mostrado na Fig. 3, e para isso, é considerado a estimativa das funções de condutância térmica de contato em regime transiente assim como as evidências do modelo no processo a ser estimado.

O problema é adaptado de (Abreu et al., 2014), e o cenário em questão envolve a transferência de calor tridimensional transiente em um sistema composto por duas placas finas, onde um fluxo de calor é aplicado à superfície superior, enquanto a superfície inferior troca calor por convecção térmica com o ambiente a uma temperatura  $T_{\infty}$ . A interface entre as camadas leva em consideração a condutância térmica de contato  $h_c$ .

Figura 3 – Representação esquemática do problema 2



Fonte: O autor, 2024.

No problema proposto, é considerada uma falha que surge com o tempo decorrente de possíveis trincas iniciadas por forças indesejadas sobre o material/equipamento ou simulando até mesmo a perda de qualidade de aderência em materiais compósitos multicamadas devido a processos ou substâncias adversas.

Considera-se  $\alpha$  como a difusividade térmica do material, de modo que o perfil de temperatura de ambas as placas pode ser modelado pela seguinte equação:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = \alpha_i \left[ \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} \right] \quad (5)$$

Onde o subíndice  $i$  representa uma das duas placas podendo ser 1 para a placa inferior ou 2 para a placa superior, e  $\alpha = k/\rho c_p$  é a razão entre a condutividade térmica  $k$  pelo produto da massa específica  $\rho$  com o calor específico  $c_p$  do material em análise.

É considerado também que a placa inferior troca calor por convecção em sua parte inferior  $z = 0$  a uma temperatura  $T_\infty$  com um coeficiente de troca térmica  $h_\infty$ , a placa superior é aquecida apenas por um fluxo de calor  $q$  na parte de cima  $z = L_{z_1} + L_{z_2}$ , as laterais das duas placas são isoladas termicamente e inicialmente as placas estão na temperatura  $T_0$ :

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} = h_\infty (T_1 - T_\infty), \quad \text{para } z = 0 \quad (6)$$

$$k_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} = q, \quad \text{para } z = L_{z_1} + L_{z_2} \quad (7)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = \frac{\partial T_2}{\partial x} = \frac{\partial T_1}{\partial y} = \frac{\partial T_2}{\partial y} = 0, \quad \text{para } x = 0|L_x \text{ e } y = 0|L_y \quad (8)$$

$$T_1 = T_2 = T_0, \quad \text{para } t = 0 \quad (9)$$

Aqui,  $L_z$  é a espessura da placa,  $L_x$  é o comprimento na direção  $x$  e  $L_y$  é a largura na direção  $y$ . Para esse problema específico, o número de Biot, definido como  $Bi = h_\infty L_c / k$  onde  $L_c$  é o tamanho característico sendo calculado pela razão entre o volume do sólido pela área de troca de calor por convecção, é considerado pequeno, de modo que é possível adotar o método da Capacitância Global da seguinte forma (Cotta; Mikhailov, 1997; Sphaier; Su; Cotta, 2018; Watanabe et al., 2022):

$$T_{m_1}(x, y, t) = \frac{1}{L_{z_1}} \int_0^{L_{z_1}} T_1(x, y, z, t) dz \quad (10)$$

$$T_{m_2}(x, y, t) = \frac{1}{L_{z_2}} \int_{L_{z_2}}^{L_{z_1}+L_{z_2}} T_2(x, y, z, t) dz \quad (11)$$

E as equações que modelam o problema se tornam:

$$\frac{\partial T_{m_1}}{\partial t} = \frac{\alpha_1}{k_1 L_{z_1}} \left[ h_c(x, y, t)(T_{m_2} - T_{m_1}) - h_\infty(T_{m_1} - T_\infty) + \frac{\partial^2 T_{m_1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{m_1}}{\partial y^2} \right] \quad (12)$$

$$\frac{\partial T_{m_2}}{\partial t} = \frac{\alpha_2}{k_2 L_{z_2}} \left[ q - h_c(x, y, t)(T_{m_2} - T_{m_1}) + \frac{\partial^2 T_{m_2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{m_2}}{\partial y^2} \right] \quad (13)$$

$$\frac{\partial T_{m_1}}{\partial x} = \frac{\partial T_{m_2}}{\partial x} = 0, \quad \text{para } x = 0 \text{ e } x = L_x \quad (14)$$

$$\frac{\partial T_{m_1}}{\partial y} = \frac{\partial T_{m_2}}{\partial y} = 0, \quad \text{para } y = 0 \text{ e } y = L_x \quad (15)$$

O problema inverso consiste em estimar o perfil da falha de contato na interface entre duas placas finas a partir das medições de temperatura realizadas na superfície da placa superior. A fim de testar a abrangência do método TMCMC serão avaliados três perfis de falhas distintos, com diferentes números de falhas, amplitude de falhas e duração de cada falha, conforme será detalhado mais adiante.

Também serão avaliados três modelos matemáticos distintos. O primeiro deles permite a estimativa de apenas uma única falha por meio da estimativa de três parâmetros, tempo inicial da falha, amplitude da falha e duração da falha. O segundo modelo permite a estimativa de duas falhas utilizando três parâmetros por falha (semelhante ao primeiro modelo). E o terceiro modelo permite a estimativa de inúmeras falhas por meio da estimativa de 31 pontos do perfil da falha espaçados igualmente no domínio de tempo analisado. Quando interpolados esses 31 pontos/parâmetros, obtém-se o perfil da falha estimado.

Além disso, o problema abordado alinha-se ao ODS 7 (Energia Limpa e Acessível), uma vez que a maior eficiência na troca térmica de contato contribui diretamente para o desenvolvimento de dispositivos energeticamente mais eficazes, reduzindo perdas térmicas e otimizando o uso de energia em processos industriais e domésticos. Simultaneamente, ao investigar novas metodologias para identificar falhas e melhorar a precisão de sistemas termicamente otimizados, os avanços apresentados também reforçam o cumprimento do ODS 9 (Indústria, Inovação e Infraestrutura), promovendo inovação tecnológica e confiabilidade em materiais e processos industriais modernos.

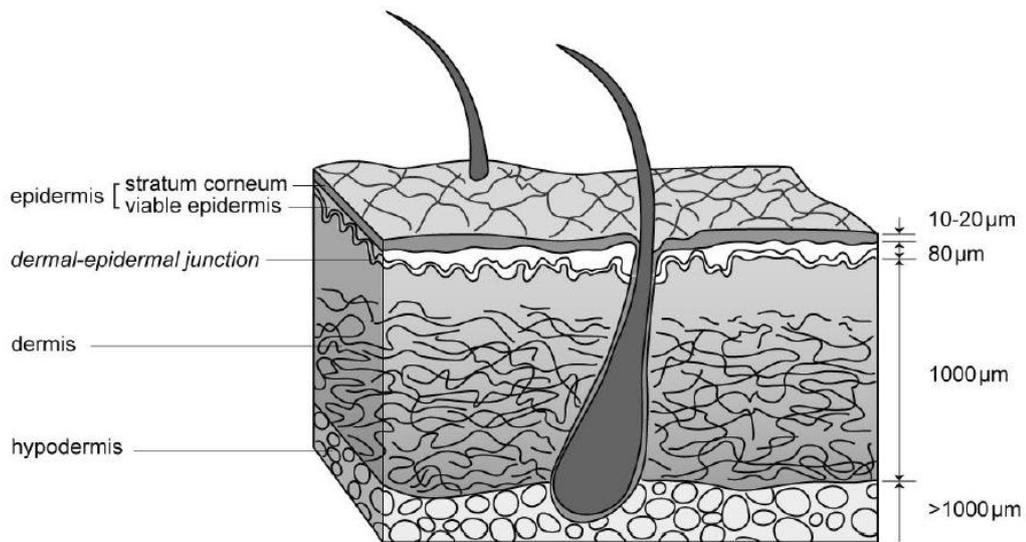
### 2.3 Identificação de melanoma cutâneo por termografia dinâmica

Um dos temas de grande relevância em problemas inversos é a biotransferência de calor, especialmente no monitoramento da temperatura em tecidos internos durante terapias ou tratamentos por ablação térmica, principalmente em áreas sensíveis às variações térmicas. Este campo tem sido objeto de intensa investigação (Habash et al., 2006, 2007). Além disso, a estimativa das propriedades físicas do corpo humano para diagnóstico de tecidos saudáveis ou tumorais (Rojczyk et al., 2017) é outro aspecto crucial, que será o foco deste problema.

Antes de mergulharmos na estimativa das propriedades, é fundamental discutir a modelagem da pele. Sendo o maior órgão do corpo humano, a modelagem matemática da pele não é uma tarefa trivial; na verdade, é bastante desafiadora (Geerligts, 2010). Nos últimos anos, tem sido objeto de intensa pesquisa e debate, dada sua vasta extensão e as variações nas camadas em diferentes regiões, bem como a presença de pelos, glândulas e células específicas (Randall et al., 2018).

A densidade, direção e tamanho das arteríolas, responsáveis pela regulação térmica, também variam significativamente (Becker, 2015; Chato, 1992). A literatura apresenta diversos modelos, cada um aplicável a regiões específicas do corpo. Uma representação esquemática para os diferentes tecidos da pele, que também variam para cada região específica do corpo, é mostrada na Fig. 4.

Figura 4 – Representação esquemática para as diferentes camadas da pele



Fonte: Geerligts, 2010.

Neste problema, o modelo de Pennes (Pennes, 1948) foi adotado devido à sua simplicidade e ampla aceitação na literatura. O modelo de Pennes encapsula toda a complexidade do transporte sanguíneo pelas veias, artérias e arteríolas, bem como a transferência de calor associada, através do termo de perfusão sanguínea  $\omega$  (Xu et al., 2009), o qual está diretamente ligado ao fluxo sanguíneo.

A presença de tumores na região reduz o fluxo sanguíneo, impactando a perfusão sanguínea e dificultando a dissipação de calor, e isso, por sua vez, aumenta a taxa de geração de calor metabólica no local, representada por  $q_m$  (Rossmanna; Haemerich, 2014). Portanto,

esses dois parâmetros tornam-se altamente sensíveis à presença de tumores, sendo cruciais para identificar sua presença ou ausência.

Logo, nesta aplicação o problema inverso consiste em diferenciar um tecido tumoral de um tecido saudável, por meio da estimativa do perfil da perfusão sanguínea e o valor da taxa de geração de calor metabólica a partir das medições de temperatura simuladas na superfície da pele, via termografia dinâmica, onde a superfície é submetida a uma fonte fria, e então é removida para registrar a temperatura no reaquecimento (Ohashi; Uchida, 2000). As Eqs. 16 a 19 modelam o problema, onde os parâmetros variam espacialmente apenas com a profundidade do tecido:

$$\rho(x)c_p(x)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial T}{\partial x}\right] + \omega(x,T)\rho_b c_b(T_a - T) + q_m \quad (16)$$

$$T(x,t) = T_E(x), \quad \text{para } t = 0 \quad (17)$$

$$-k(x)\frac{\partial T}{\partial x} = h(T_\infty - T), \quad \text{para } x = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \text{para } x = L \quad (19)$$

Os termos  $\rho(x)$ ,  $c_p(x)$  e  $k(x)$  representam a massa específica, calor específico e condutividade térmica do tecido,  $\rho_b$  a massa específica do sangue,  $c_b$  o calor específico do sangue e  $T_a$  a temperatura arterial. Para a condição inicial tem-se o perfil de temperatura em equilíbrio da pele  $T_E(x)$ , que é o perfil de temperatura desde a superfície até a camada mais interna em uma condição que a pele está trocando calor com o meio externo com uma temperatura fixa  $T_\infty$ , uma taxa de geração de calor metabólica e uma temperatura arterial sem variações, para um longo tempo.

Destaca-se aqui que a variável  $x$  representa a profundidade da pele a partir da superfície. A perfusão sanguínea  $\omega(x,T)$ , neste modelo, varia tanto com a temperatura quanto com as camadas da pele. São adotadas quatro camadas para esta aplicação: epiderme, derme, tecido subcutâneo e tecido interno (Fig. 4).

A configuração e profundidade de cada camada variam de acordo com a região específica do corpo e as suas propriedades termofísicas podem ser alteradas de acordo com a

idade, gênero, estilo de vida, saúde, etc. de cada pessoa (Geerligts, 2010). Os valores adotados neste trabalho foram retirados de (Barros, 2022) e que serão apresentados mais adiante. De forma a se ter uma equação contínua ao longo de todas as camadas para cada propriedade termofísica foi utilizado uma função de suavização da seguinte forma:

$$\theta(x) = \sum_{n=1}^{N_s} \theta_{n-1} + (\theta_{n-1} - \theta_{n-1})\delta_n(x) \quad (20)$$

$$\delta_n(x) = \frac{1}{1 + e^{-200(x-x_m)/L}} \quad (21)$$

Onde  $N_s$  é o número de funções de suavização, que para este problema é o número de interfaces entre cada camada, ou seja  $N_s = 3$ , o termo  $x_m \in [0, L]$  é a  $m$ -ésima posição de transição entre duas camadas de tecido adjacentes,  $n$  é o  $n$ -ésimo parâmetro de ajuste das propriedades térmicas e  $L$  é a espessura total do tecido.

Outro aspecto crucial a ser considerado na modelagem desta aplicação é o custo computacional envolvido na resolução desse problema. A escolha de uma curva de perfusão sanguínea mais precisa, embora possa resultar em uma melhor adaptação à realidade, também aumenta significativamente o custo computacional do problema inverso. Portanto, a seleção cuidadosa dos modelos é essencial neste contexto.

As medições para o tecido tumoral serão simuladas utilizando um modelo de perfusão sanguínea mais fiel ao comportamento real, devido à complexidade que a presença da célula maligna exige, de acordo com a Eq. (22). Já para o tecido saudável será utilizado um modelo de perfusão sanguínea linear que utiliza valores médios para todas as camadas, isto é, não varia com a profundidade, conforme descrito pela Eq. (23).

$$\omega(x, T) = a_T(x)T^2 + b_T(x)T + c_T(x) \quad \text{para} \quad 0 < x < L \quad (22)$$

$$\omega(x, T) = a_S T + b_S \quad \text{para} \quad 0 < x < L \quad (23)$$

Embora os modelos adotados para os tecidos saudável e tumoral sejam mais fiéis ao comportamento físico, apresentam um alto custo computacional. Além disso, não é possível

determinar de antemão qual modelo deve ser utilizado para resolver o problema inverso. Caso essa informação fosse conhecida, a solução do problema inverso seria desnecessária, já que seu objetivo é justamente identificar os tecidos tumoral e saudável.

Dessa forma, serão avaliados dois modelos simplificados de perfusão sanguínea para reduzir o custo computacional durante a resolução do problema inverso, e destaca-se que, apenas um modelo será utilizado para distinguir os dois tecidos. O primeiro modelo considera a perfusão sanguínea constante,  $\omega(x, T) = \omega$  independente da profundidade e da temperatura. O segundo modelo adota uma perfusão sanguínea linear,  $\omega(x, T) = aT + b$ , que depende apenas da temperatura, mas não da profundidade.

Essa abordagem permitirá analisar a evidência de modelo e realizar sua seleção de forma eficiente, utilizando o método TMCMC.

Além disso será adotado um tumor em sua fase inicial, um melanoma cutâneo denominado Clark II, que é a classificação de acordo com a invasão/penetração anatômica do melanoma nas camadas da epiderme e da derme (Barros, 2022; Clark Jr et al., 1969).

A pesquisa apresentada está fortemente alinhada ao ODS 3 (Saúde e Bem-Estar), pois busca aprimorar métodos de diagnóstico precoce de condições graves, como melanoma cutâneo, por meio da análise termofísica da pele. Este avanço pode melhorar significativamente as chances de tratamento bem-sucedido e aumentar a qualidade de vida, ao mesmo tempo que promove abordagens mais precisas e menos invasivas para o monitoramento e detecção de tumores.

### 3 METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO DE ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS E SELEÇÃO DE CLASSE DE MODELOS

O objetivo principal deste trabalho é explorar a aplicação do método TMCMC para resolver problemas inversos em transferência de calor. Para todos os problemas abordados neste estudo, a solução do problema direto foi obtida utilizando a função `NDSolveValue` do software profissional Wolfram Mathematica.

No Apêndice A, no final deste trabalho, é mostrado a verificação dos dados obtidos por meio deste software com outro software profissional, o COMSOL Multiphysics, assim como a análise de convergência dele.

A inferência bayesiana recorre ao teorema de Bayes Eq. (24) (Lindley, 1974) e frequentemente o termo bayesiano é utilizado para se referir à uma abordagem de inversão estatística, baseada nos seguintes princípios (Orlande; Colaço; Dulikravich, 2008):

1. Todas as variáveis do modelo probabilístico  $\mathcal{M}$  são modeladas como aleatórias;
2. A aleatoriedade descreve o grau de informação relativa às suas realizações;
3. O grau de informação relativo a estes valores está codificado em distribuições de probabilidade;
4. A solução do problema inverso é a distribuição de probabilidade *a posteriori*  $\pi(\mathbf{P}|\mathbf{Y}, \mathcal{M})$ .

$$\pi(\mathbf{P}|\mathbf{Y}, \mathcal{M}) = \frac{\pi(\mathbf{P}|\mathcal{M}) \pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P}, \mathcal{M})}{\pi(\mathbf{Y}|\mathcal{M})} \quad (24)$$

No teorema de Bayes, a distribuição de probabilidades a priori  $\pi(\mathbf{P}|\mathcal{M})$ , de um modelo  $\mathcal{M}$ , é a crença inicial sobre os parâmetros  $\mathbf{P}$  antes de considerar as medições  $\mathbf{Y}$ , baseada em informações anteriores ou conhecimento prévio. Na ausência de informações prévias, *a priori* pode ser assumida como uniforme (todas as hipóteses igualmente prováveis).

A distribuição de verossimilhança  $\pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P}, \mathcal{M})$ , mede o quão bem os parâmetros  $\mathbf{P}$  explicam os dados observados  $\mathbf{Y}$ , é um termo essencial para ajustar nossas crenças sobre os parâmetros de interesse  $\mathbf{P}$ . E  $\pi(\mathbf{Y}|\mathcal{M})$  é a probabilidade de observar a evidência do modelo, considerando todas as hipóteses possíveis, este atua como um fator de normalização para garantir que as probabilidades somem uma unidade (Kaipio; Somersalo, 2005).

É importante notar que neste caso a resolução do problema inverso é um processo iterativo, e a função de densidade *a posteriori*, que se deseja estimar, pode não assumir o formato de uma distribuição padrão como Gaussiana ou de Poisson, por isso essa função será representada por meio da frequência de amostras obtidas pela utilização dos métodos, que são estruturas gerais para obtenção de amostras a partir de uma função objetivo (Ching; Chen, 2007).

No presente trabalho será utilizado o método TMCMC na resolução dos problemas abordados, será utilizado também o método clássico de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC), pelo algoritmo de Metropolis-Hastings (MH), apenas para fins de comparação das estimativas obtidas pelo TMCMC no primeiro problema abordado, visto que o MCMC é um método já bastante aceito na literatura. Para ambos os métodos em todos os três problemas abordados, a distribuição de verossimilhança é representada por uma distribuição Gaussiana enquanto a distribuição *a priori* é representada por uma distribuição uniforme, ou seja, há pouco conhecimento sobre os parâmetros no primeiro momento.

### 3.1 Metropolis-Hastings

O algoritmo MH propõe novas amostras a partir de uma distribuição auxiliar  $q$ , ou núcleo de proposição de candidatos, e é aceito ou rejeitado de forma sistemática. Este mecanismo de correção garante a convergência da cadeia para a distribuição de equilíbrio (Kaipio; Fox, 2011). A implementação do algoritmo segue os seguintes passos (Orlande, 2012):

1. Fazer  $t = 1$  e começar a cadeia de Markov com um candidato inicial  $\mathbf{P}^{t=1}$ ;
2. Extrair um candidato  $\mathbf{P}^*$  de um núcleo de proposição de candidatos  $q(\mathbf{P}^*|\mathbf{P}^t)$ ;
3. Calcular a probabilidade  $\alpha(\mathbf{P}^*|\mathbf{P}^t)$  pela Eq. (25);
4. Gerar um valor aleatório  $U$ , que esteja uniformemente distribuído entre 0 e 1;
5. Se  $U \leq \alpha(\mathbf{P}^*|\mathbf{P}^t)$  faça  $\mathbf{P}^{t+1} = \mathbf{P}^*$ . Caso contrário, faça  $\mathbf{P}^{t+1} = \mathbf{P}^t$ ;
6. Faça  $t = t + 1$  e retorne ao passo 2, de forma a gerar a sequência  $\{\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2, \dots, \mathbf{P}^n\}$ .

Dessa forma, uma sequência (ou cadeia de Markov) é gerada para representar a distribuição *a posteriori*, e a inferência sobre essa distribuição é obtida a partir da inferência da sequência. Notamos que os valores de  $\mathbf{P}^t$  devem ser ignorados até que a cadeia tenha

convergiu para o equilíbrio, chama-se isso de período de queima, ou *burn in period* (Orlande, 2012).

$$\alpha(\mathbf{P}^*|\mathbf{P}^t) = \min \left[ 1, \frac{\pi(\mathbf{P}^*|\mathbf{Y}, \mathcal{M}) q(\mathbf{P}^t|\mathbf{P}^*)}{\pi(\mathbf{P}^t|\mathbf{Y}, \mathcal{M}) q(\mathbf{P}^*|\mathbf{P}^t)} \right] \quad (25)$$

Destaca-se que se a função de distribuição auxiliar  $q$ , para as aplicações adotadas nesse trabalho, possui a forma de uma distribuição Gaussiana com média nula e desvio padrão constante, e *a priori* é assumida como uniforme, logo, a razão de Hastings, Eq. (25), pode ser reescrita como (Robert; Casella, 2004):

$$\alpha(\mathbf{P}^*|\mathbf{P}^t) = \min \left[ 1, \frac{\pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P}^*, \mathcal{M})}{\pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P}^t, \mathcal{M})} \right] \quad (26)$$

### 3.2 Atualização de modelo e seleção de classes de modelo

Outro aspecto fundamental durante a resolução de problemas inversos, e até mesmo na resolução de problemas diretos, é se o modelo, dentre os modelos utilizados, é o mais adequado para descrever os dados observados. Para o mesmo problema, podem existir diversas abordagens com formulações matemáticas ou modelos diferentes. Geralmente, avaliam-se o custo computacional e a acurácia dos resultados obtidos. Portanto, é importante selecionar adequadamente a classe de modelos a ser utilizada. Perceba que o teorema de Bayes pode relacionar dados do modelo  $\mathcal{M}$  em análise da seguinte forma:

$$\pi(\mathbf{P}|\mathbf{Y}, \mathcal{M}) = \frac{\pi(\mathbf{P}|\mathcal{M}) \pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P}, \mathcal{M})}{\pi(\mathbf{Y}|\mathcal{M})} = \frac{\pi(\mathbf{P}|\mathcal{M}) \pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P}, \mathcal{M})}{\int \pi(\mathbf{P}|\mathcal{M}) \pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P}, \mathcal{M}) d\mathbf{P}} \quad (27)$$

Onde a distribuição *a posteriori*, pode ser interpretada como a probabilidade dos parâmetros  $\mathbf{P}$  dados as medições  $\mathbf{Y}$  juntamente com o modelo  $\mathcal{M}$ . Outro termo de grande importância no teorema de Bayes é a evidência de modelo  $\pi(\mathbf{Y}|\mathcal{M})$ , que é calculada como um subproduto do método TMCMC. Uma vez que a evidência de modelo é conhecida a probabilidade *a posteriori* do modelo em análise é definida como (Ching; Chen, 2007):

$$\pi(\mathcal{M}_i|\mathbf{Y}) = \frac{\pi(\mathcal{M}_i) \pi(\mathbf{Y}|\mathcal{M}_i)}{\sum_{i=1}^{N_{model}} \pi(\mathcal{M}_i) \pi(\mathbf{Y}|\mathcal{M}_i)} \quad (28)$$

Aqui,  $N_{model}$  é o número total de modelos avaliados e o subíndice  $i$  varia de 1 até  $N_{model}$ . Embora o cálculo da evidência de modelo seja complexo, o TMCMC é capaz de calculá-la como um subproduto.

### 3.3 Método TMCMC

Como dito anteriormente o método TMCMC foi proposto por Ching e Chen (2007) e foi inspirado pelo método AMH de Beck e Au (2002). O método começa com amostras independentes de uma distribuição *a priori*.

Nos passos seguintes, de forma a evitar funções de probabilidade difíceis de serem exploradas diretamente, a distribuição de amostragem é gradualmente transformada de forma que se aproxime da distribuição *a posteriori*, possibilitando a abordagem de funções de probabilidades mais complexas, como multimodais e/ou com regiões pontiagudas, da seguinte forma:

$$\pi_j(\mathbf{P}|\mathbf{Y}, \mathcal{M}) \propto \pi(\mathbf{P}|\mathcal{M}) \pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P}, \mathcal{M})^{p_j} \quad (29)$$

Onde  $j = 0, 1, \dots, m$  denota o estágio da transição, e  $p_j \in [0,1]$  é escolhido de maneira que  $p_0 = 0 < p_1 < \dots < p_m = 1$ . Consequentemente,  $\pi_0(\mathbf{P}|\mathbf{Y}, \mathcal{M})$  é a distribuição *a priori*  $\pi(\mathbf{P}|\mathcal{M})$  e  $\pi_m(\mathbf{P}|\mathbf{Y}, \mathcal{M})$  se torna a distribuição *a posteriori*  $\pi(\mathbf{P}|\mathbf{Y}, \mathcal{M})$ . Assim, o método TMCMC gradualmente transforma as amostras da priori para a posteriori a partir de uma transição de distribuições.

No primeiro estágio, as amostras são diretamente obtidas da priori. Nos estágios subsequentes, o método utiliza os passos de ponderação, reamostragem e perturbação das amostras do estágio anterior para a obtenção das amostras do estágio atual. Os passos para o algoritmo TMCMC são descritos a seguir (Ching; Chen, 2007; Ching; Wang, 2016):

1. Obtenha  $N$  amostras  $\{\mathbf{P}_{0,1}, \mathbf{P}_{0,2}, \dots, \mathbf{P}_{0,N}\}$  a partir da *priori*. Faça  $p_0 = 0$ . Repita os passos 2 e 3 para  $j = 0, 1, 2, \dots, m$ ;
2. Calcule as distribuições de verossimilhança  $\{\pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P}_{j,1}, \mathcal{M}), \dots, \pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P}_{j,N}, \mathcal{M})\}$  e calcule os pesos de plausabilidade  $w_{j,k} = \pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P}_{j,k}, \mathcal{M})^{p_{j+1}-p_j}$  para  $k = 1, 2, \dots, N$ . Note que  $p_{j+1}$  deve ser escolhido de modo que o coeficiente de variação COV desses pesos  $\{w_{j,1}, \dots, w_{j,N}\}$  sejam iguais a 100%. Calcule também os pesos de plausabilidade normalizados  $\{\bar{w}_{j,1}, \dots, \bar{w}_{j,N}\}$  por meio da Eq. (30);

$$\bar{w}_{j,k} = \frac{w_{j,k}}{\sum_{l=1}^N w_{j,l}} \quad (30)$$

3. De acordo com os pesos normalizados  $\{\bar{w}_{j,1}, \dots, \bar{w}_{j,N}\}$ , escolha candidatos aleatoriamente de  $\{\mathbf{P}_{j,1}, \mathbf{P}_{j,2}, \dots, \mathbf{P}_{j,N}\}$ , proponha um novo candidato de acordo com a distribuição multinomial  $N(\mathbf{P}_{j,k}, \Sigma_j)$  e forme a sequência  $\{\mathbf{P}_{j+1,1}, \mathbf{P}_{j+1,2}, \dots, \mathbf{P}_{j+1,N}\}$ . A matriz de covariância  $\Sigma_j$  é descrita pela Eq. (31).

$$\Sigma_j = \beta^2 \sum_{k=1}^N \bar{w}_{j,k} \left( \mathbf{P}_{j,k} - \sum_{l=1}^N \bar{w}_{j,l} \mathbf{P}_{j,l} \right) \times \left( \mathbf{P}_{j,k} - \sum_{l=1}^N \bar{w}_{j,l} \mathbf{P}_{j,l} \right)^T \quad (31)$$

Observe que nesse método existem  $N$  amostras que trabalham em conjunto para estimar os parâmetros de interesse. Note também que só é possível calcular os pesos de plausabilidade  $w_{j,k} = \pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P}_{j,k}, \mathcal{M})^{p_{j+1}-p_j}$  mediante conhecimento de  $p_{j+1}$ , que também é desconhecido, por isso é definido o coeficiente de variação COV, que é a razão entre o desvio padrão e a média de todos os pesos de plausabilidade daquele estágio  $j$ , utiliza-se um método numérico para encontrar raízes, como o método da bisseção, neste cálculo.

Esse coeficiente é escolhido como 100% de modo que o grau de uniformidade dos pesos de plausabilidade sejam favoráveis para aproximar  $\pi_j(\mathbf{P}|\mathbf{Y}, \mathcal{M})$  e  $\pi_{j+1}(\mathbf{P}|\mathbf{Y}, \mathcal{M})$  (CHING; CHEN, 2007), de modo que a escolha de  $p_{j+1}$  torna-se iterativa.

Além disso, durante o passo 2, é conveniente calcular  $S_j = \sum_{k=1}^N w_{j,k} / N$  de modo que ao final do algoritmo  $S$ , na Eq. (32), representará a evidência de modelo (Ching; Chen, 2007).

$$S = \prod_{j=0}^{m-1} S_j \quad (32)$$

Além de fornecer uma estimativa da evidência do modelo como um subproduto do algoritmo, uma das principais vantagens do TMCMC é que o mesmo é capaz de calcular sistematicamente a covariância amostral dos estados em cada estágio (Ching; Wang, 2016). Ainda assim, o fator de escala  $\beta$  deve ser ajustado de forma adaptativa para manter uma taxa de aceitação adequada nas etapas do algoritmo, Ching e Chen (2007) recomendam  $\beta = 0,2$ .

#### 4 RESULTADOS OBTIDOS

Neste capítulo, são apresentados os resultados obtidos para cada um dos problemas discutidos anteriormente. A resolução do problema direto foi realizada utilizando a função `NDSolveValue` do software Wolfram Mathematica, a fim de determinar o perfil de temperatura  $T(\mathbf{P})$  do problema em análise. Frequências de medições  $\psi$  foram definidas ao longo de um período específico, assim como localizações específicas, permitindo a obtenção de pontos discretos de temperatura  $\mathbf{Y}$  a partir dos resultados fornecidos pela função `NDSolveValue`. Finalmente, foram adicionados ruídos pseudoaleatórios  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , gerados por uma distribuição gaussiana com média nula e desvio padrão específico  $N(0, \sigma)$  para cada problema, conforme a Eq. (33), a fim de simular as medições.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T}(\mathbf{P}) + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (33)$$

O problema inverso foi resolvido utilizando a metodologia descrita anteriormente e o erro médio quadrático RMS (*root mean square*) foi empregado para a comparação dos resultados encontrados. Percebe-se que esse erro pode ser calculado tanto para os parâmetros de interesse estimados  $\mathbf{P}$ , conforme Eq. (34), quanto para os resultados obtidos por meio da resolução do problema direto a partir dos parâmetros estimados  $T(\mathbf{P})$ , Eq. (35).

$$RMS_P = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [P_{i,exato} - P_{i,estimado}]^2} \quad (34)$$

$$RMS_T = \sqrt{\frac{1}{N_{med}} \sum_{i=1}^{N_{med}} [Y_i - T(\mathbf{P})_i]^2} \quad (35)$$

#### 4.1 Estimativa do perfil de temperatura de entrada em duto de placas paralelas

Os valores utilizados para resolver o problema direto são mostrados na Tab. 1. Esses valores foram escolhidos de modo a similar o escoamento do ar com pré aquecimento, como descrito em (Parwani; Talukdar; Subbarao, 2012, 2015). E os valores das propriedades térmicas do ar foram retirados de (Incropera et al., 2007).

Tabela 1 – Valores dos parâmetros utilizados

Parâmetros	Valores
Calor específico ( $c_p$ )	1021 J/kg K
Comprimento do duto ( $b$ )	0,635 m
Capacidade Térmica ( $k$ )	0,0373 W/mK
Densidade ( $\rho$ )	0,7740 kg/m <sup>3</sup>
Distância entre as paredes ( $h$ )	0,128 m
Temperatura inicial ( $T_i$ )	300 K
Temperatura da parede ( $T_w$ )	300 K
Tempo final ( $t_f$ )	30 s
Média da velocidade do fluido ( $u_m$ )	0,024 m/s

Fonte: Incropera et al., 2007; Parwani; Talukdar; Subbarao, 2012, 2015.

Também foi adotado um comportamento laminar e hidrodinamicamente desenvolvido longe da entrada do duto, de modo que o perfil de velocidade do fluido pode ser descrito pela Eq. (31) (Fox; Pritchard; McDonald, 2011):

$$u(y) = 1,5 u_m \frac{y}{h} \left[ 1 - \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right] \quad (36)$$

Como dito anteriormente, foi adotada uma adaptação do método de regularização de Variação Total (Condat, 2013) para os parâmetros estimados pelo método TMCMC de modo que o perfil de temperatura estimado fosse mais suave. Para isso foi utilizado o seguinte termo em conjunto com a distribuição *a priori*:

$$\exp \left[ -\lambda \sum_{i=1}^{N-1} |P_{i+1} - P_i| \right] \quad (37)$$

Onde  $\lambda = 0,6$  é a constante de regularização escolhida empiricamente e  $P_i$  é o parâmetro a ser estimado. Destaca-se ainda que a priori utilizada aqui é pouco informativa, ou seja, é uma distribuição uniforme.

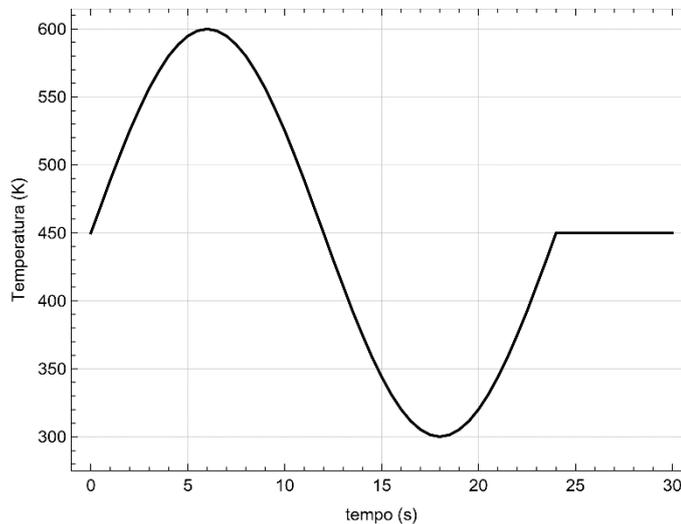
Três casos distintos foram analisados, cada um deles com uma diferente condição de contorno  $f(t)$  na entrada do duto, conforme descrito nas Eqs. (38), (39) e (40) com suas respectivas curvas traçadas nas Figs. 4, 5 e 6.

$$f_1(t) = \begin{cases} 150[3 + \text{sen}(\pi t/12)] K & \text{para } 0s \leq t < 24s \\ 450 K & \text{para } 24s \leq t \leq 30s \end{cases} \quad (38)$$

$$f_2(t) = \begin{cases} 600 K & \text{para } 0s \leq t < 13,5s \\ 300 K & \text{para } 13,5s \leq t \leq 30s \end{cases} \quad (39)$$

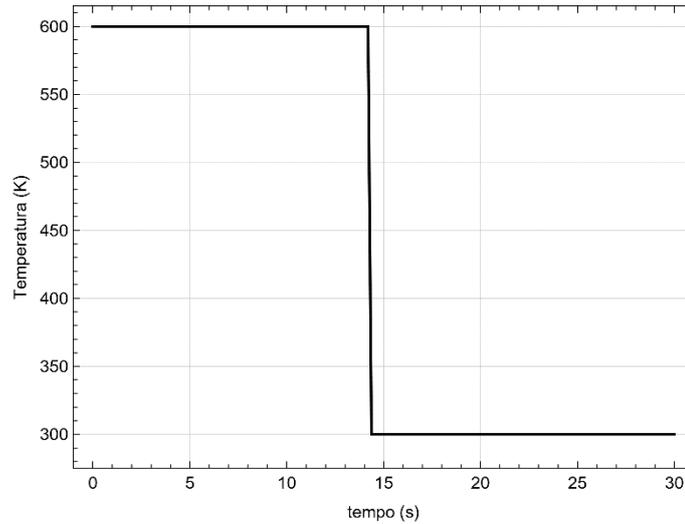
$$f_3(t) = \begin{cases} 300 + 20t K & \text{para } 0s \leq t < 15s \\ 900 - 20t K & \text{para } 15s \leq t \leq 30s \end{cases} \quad (40)$$

Figura 5 – Perfil de entrada  $f_1(t)$ , caso 1.



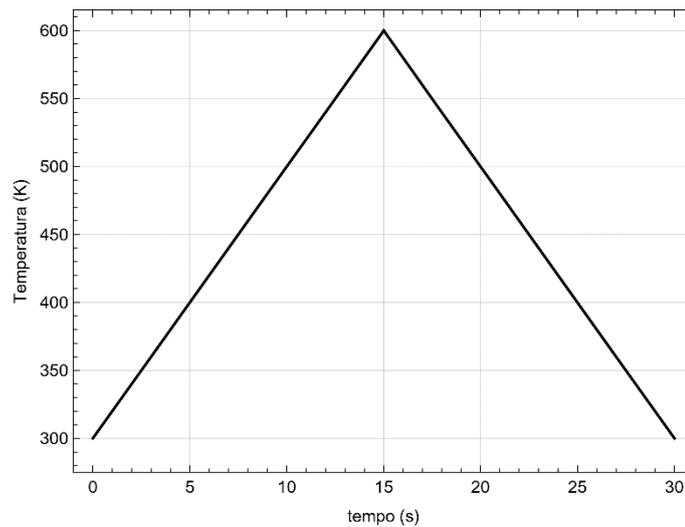
Fonte: O autor, 2024.

Figura 6 – Perfil de entrada  $f_2(t)$ , caso 2.



Fonte: O autor, 2024.

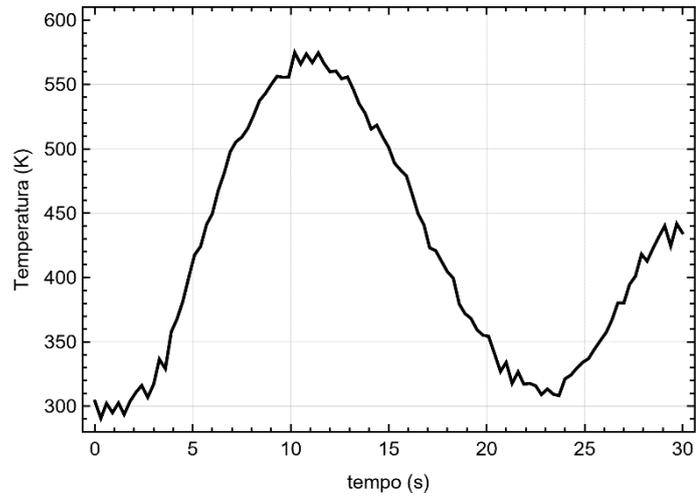
Figura 7 – Perfil de entrada  $f_3(t)$ , caso 3.



Fonte: O autor, 2024.

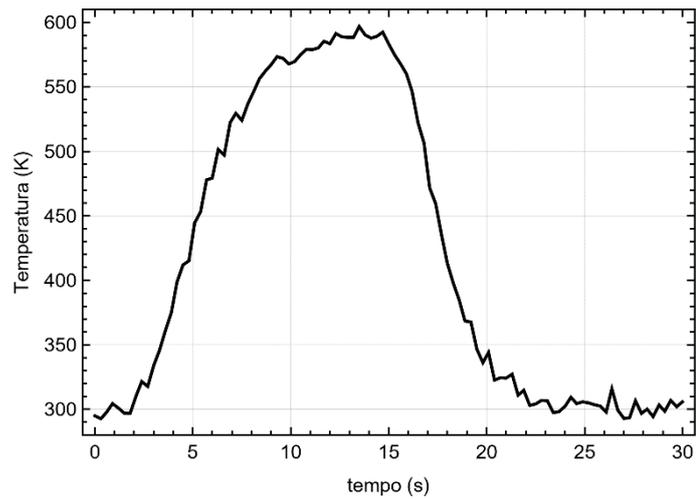
A partir das curvas de entrada apresentadas, o problema direto foi resolvido em cada caso e as medições de temperatura foram simuladas para  $x = b/5$  e  $y = h/2$  pela função `NDSolveValue`, do software `Wolfram Mathematica`, após, foi acrescido de um erro Gaussiano pseudorrandômico com média nula e desvio padrão igual a  $\sigma = 0,5^\circ\text{C}$ . Foram registradas 101 medições (1 medição a cada 0,3s) obtendo assim o vetor de medições  $\mathbf{Y}$  que será utilizado na resolução do problema inverso. As medições de temperatura são mostradas nas Figs. 8, 9 e 10.

Figura 8 – Medições de temperatura caso 1.



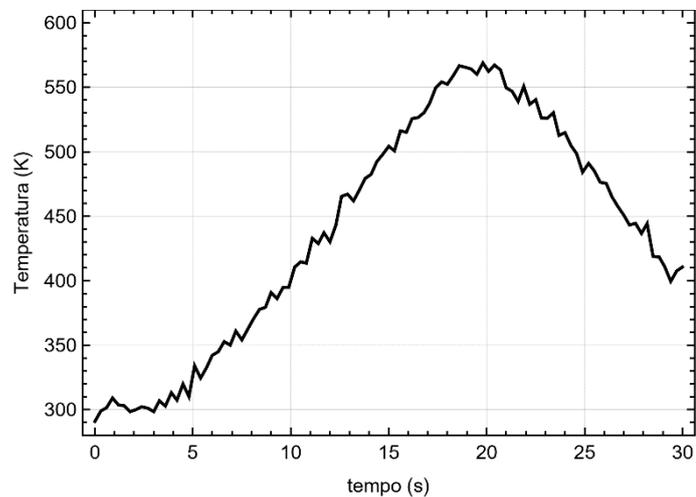
Fonte: O autor, 2024.

Figura 9 – Medições de temperatura caso 2.



Fonte: O autor, 2024.

Figura 10 – Medições de temperatura caso 3.

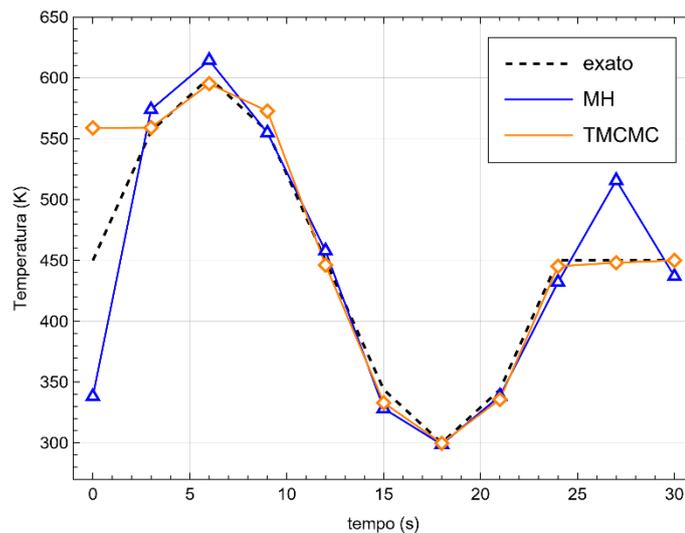


Fonte: O autor, 2024.

Em ambos os métodos foi utilizado uma distribuição *a priori* uniforme que varia entre 250 K a 650 K para todos os 11 parâmetros. Cada vez que o método MH foi empregado, foram utilizados um total de 5.000 estados na cadeia de Markov com um *burn in period* de 4.000 estados, incorporando um desvio padrão de 0,5°C para a geração de novos candidatos. Além disso, ao empregar o método TMCMC, foram iniciadas 200 amostras independentes e utilizado  $\beta = 0,7$  escolhido empiricamente.

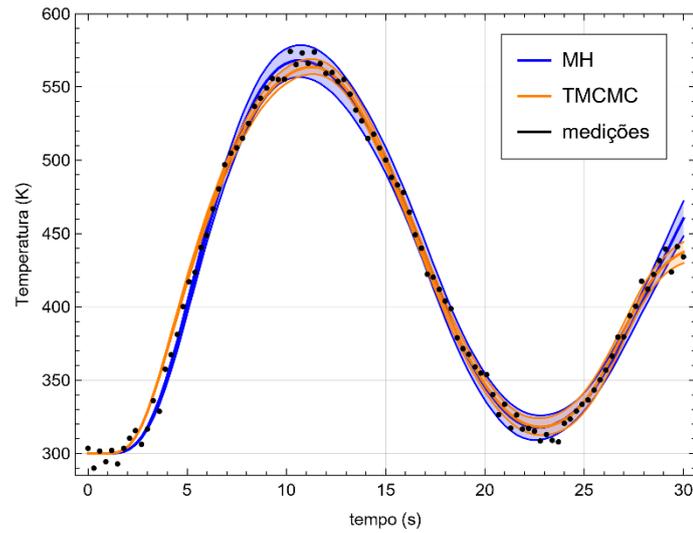
Para o primeiro caso, onde foi utilizado  $f_1(t)$ , foram necessários 23 estágios no método TMCMC. As curvas estimadas são representadas graficamente na Fig. 11 e o intervalo correspondente de 95% de credibilidade para as medições simuladas são representados na Fig. 12 com seus respectivos dados de erros médio quadrático dos parâmetros estimados e das medições simuladas por meio desses parâmetros estimados, representados na Tab. 2.

Figura 11 – Curvas estimadas para o caso 1.



Fonte: O autor, 2024.

Figura 12 – Intervalo de 95% de credibilidade para o caso 1.



Fonte: O autor, 2024.

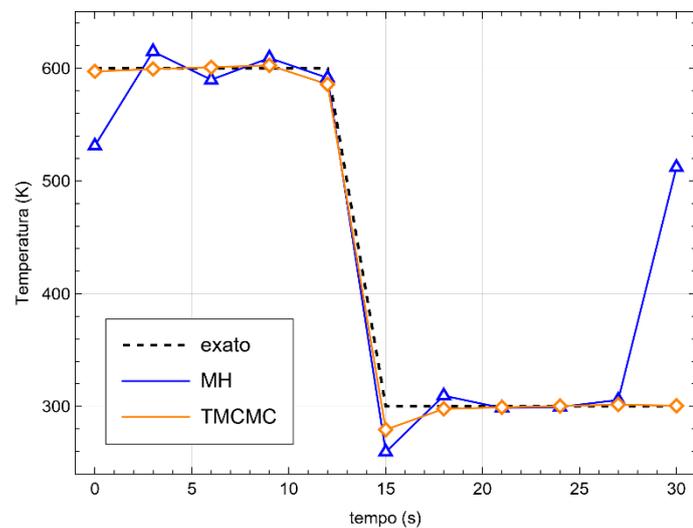
Tabela 2 – Erro médio quadrático para função de entrada obtida no caso 1.

	MH	TMCMC
$RMS_{f_1}$ [ $^{\circ}C$ ]	40,63	33,55
$RMS_{T_1}$ [ $^{\circ}C$ ]	6,67	6,47

Fonte: O autor, 2024.

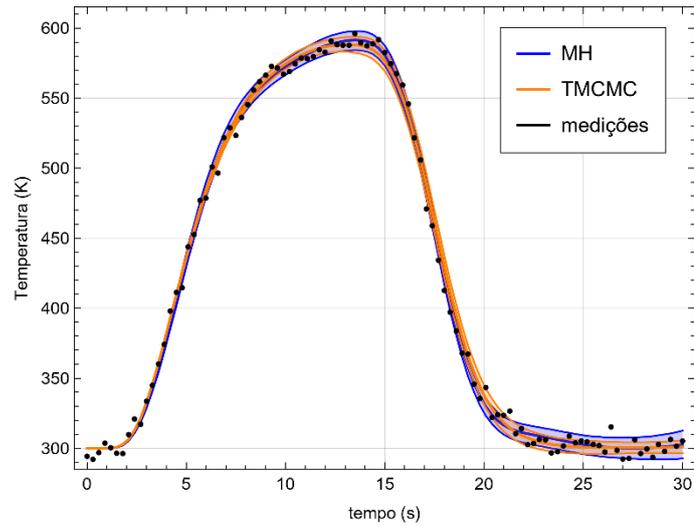
O problema inverso também foi resolvido para o caso 2, e os resultados são apresentados nas Figs. 13 e 14 e na Tab. 3. Para o caso 2 foram necessários 27 estágios no método TMCMC.

Figura 13 – Curvas estimadas para o caso 2.



Fonte: O autor, 2024.

Figura 14 – Intervalo de 95% de credibilidade para o caso 2.



Fonte: O autor, 2024.

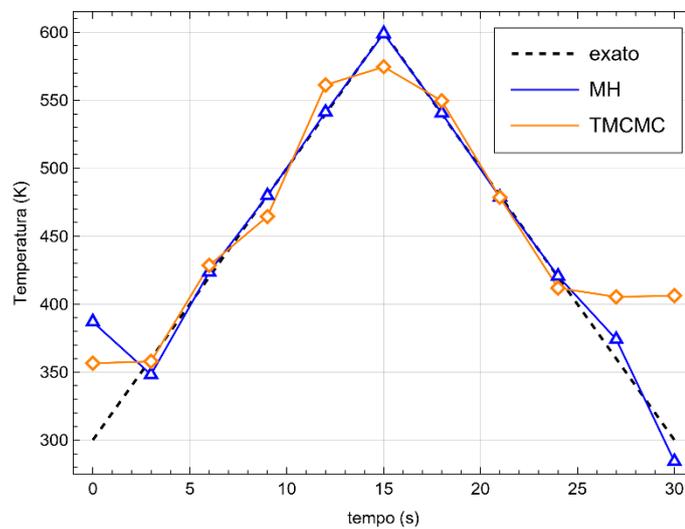
Tabela 3 – Erro médio quadrático para função de entrada obtida no caso 2.

	MH	TMCMC
$RMS_{f_2}$ [°C]	68,78	7,70
$RMS_{T_2}$ [°C]	5,65	6,28

Fonte: O autor, 2024.

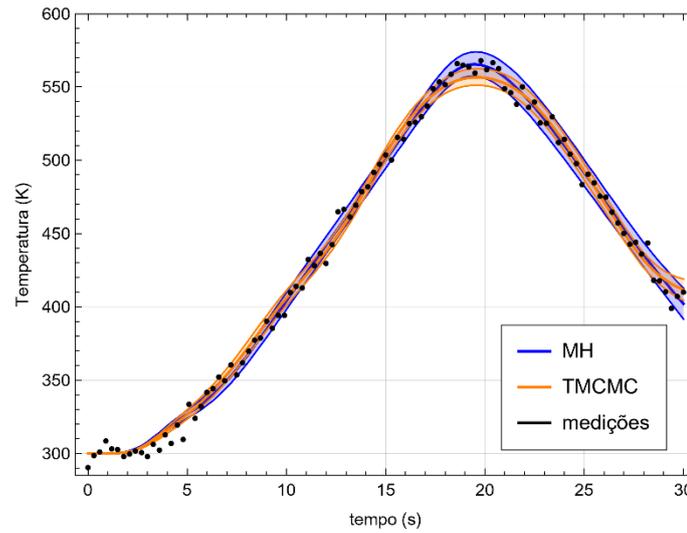
Nas Figs. 15 e 16 e Tab. 4 tem-se os resultados para o caso 3, que foram necessários 25 estágios no método TMCMC.

Figura 15 – Curvas estimadas para o caso 3.



Fonte: O autor, 2024.

Figura 16 – Intervalo de 95% de credibilidade para o caso 3.



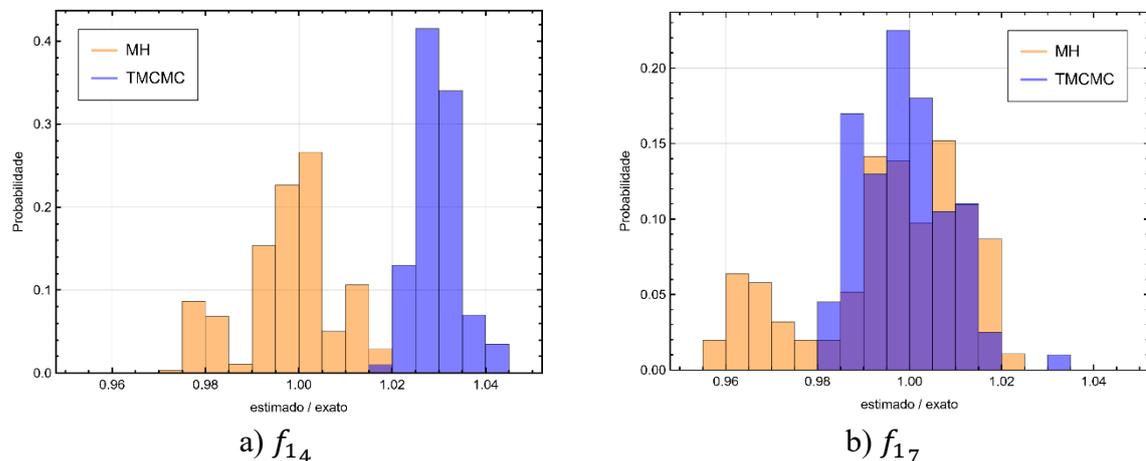
Fonte: O autor, 2024.

Tabela 4 – Erro médio quadrático para função de entrada obtida no caso 3.

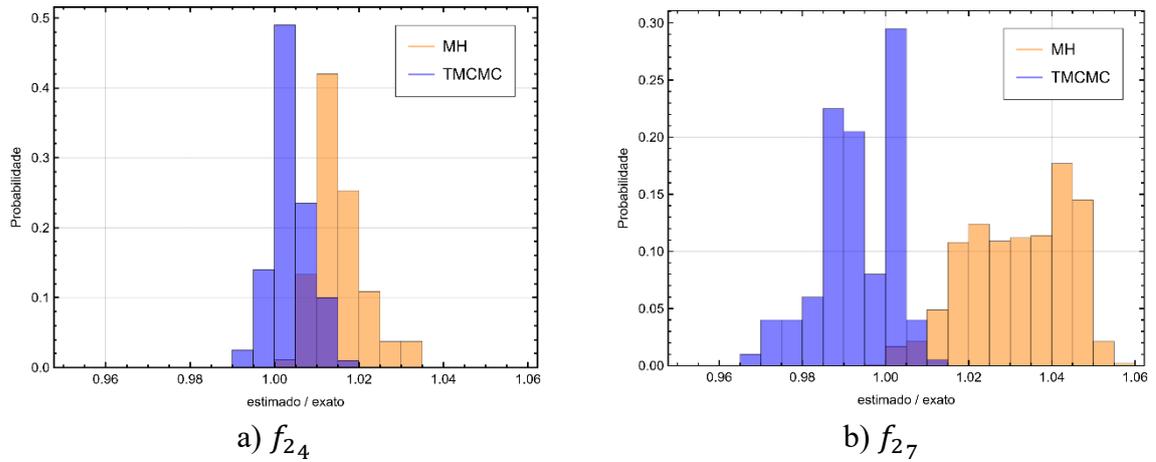
	MH	TMCMC
$RMS_{f_3} [^{\circ}C]$	27,25	40,58
$RMS_{T_3} [^{\circ}C]$	5,50	6,31

Fonte: O autor, 2024.

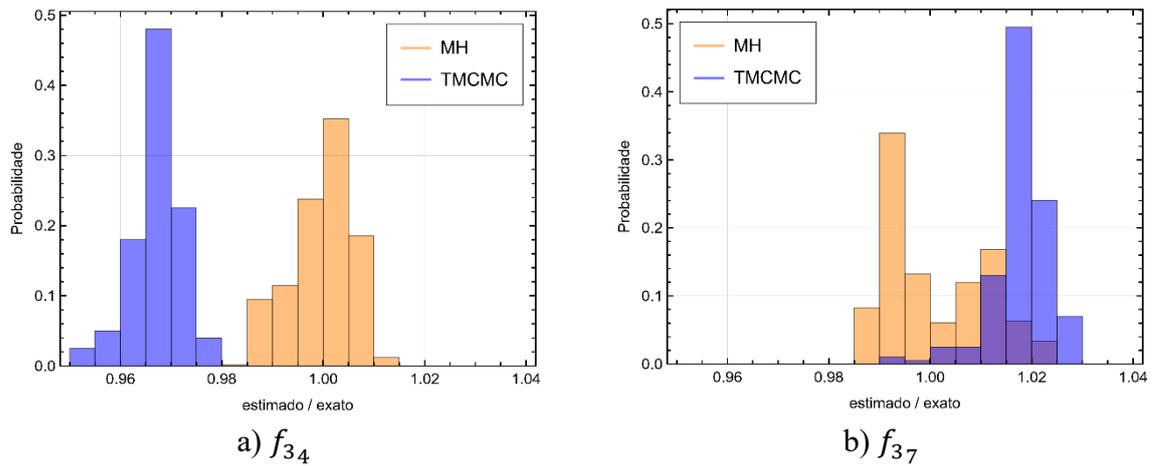
Por fim, as figuras a seguir mostram os histogramas das estimativas obtidas por cada um dos métodos utilizados para cada função. Vale ressaltar que os valores foram divididos pelo valor exato, de forma que quanto mais próximo da unidade, mais próximos os dados do histograma estão do valor exato.

Figura 17 – Histogramas de parâmetros estimados para  $f_1(t)$ 

Fonte: O autor, 2024.

Figura 18 – Histogramas de parâmetros estimados para  $f_2(t)$ 

Fonte: O autor, 2024.

Figura 19 – Histogramas de parâmetros estimados para  $f_3(t)$ 

Fonte: O autor, 2024.

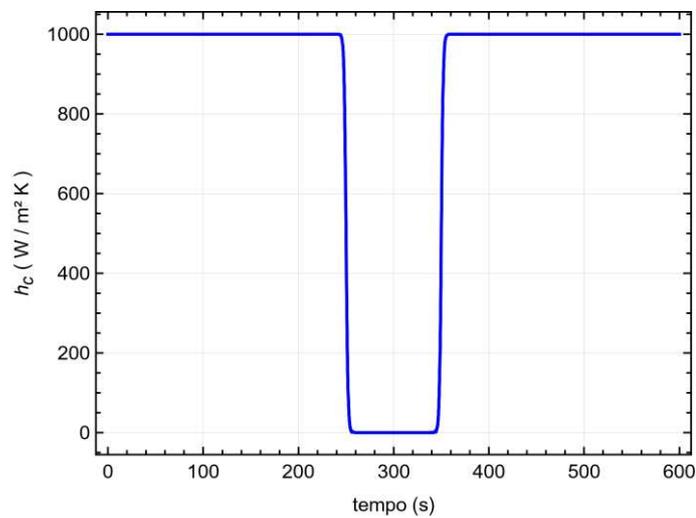
Pela análise dos histogramas apresentados é possível perceber menores incertezas para os resultados estimados pelo método TMCMC e para os dois primeiros casos este método obteve erros menores em relação ao valor exato, enquanto para a terceira os cenários foram invertidos e o algoritmo Metropolis-Hastings conseguiu estimar com maior precisão, devido à regularização utilizada no TMCMC que encontrou problemas principalmente na descontinuidade desta função.

## 4.2 Estimativa da condutância térmica de contato com variação temporal

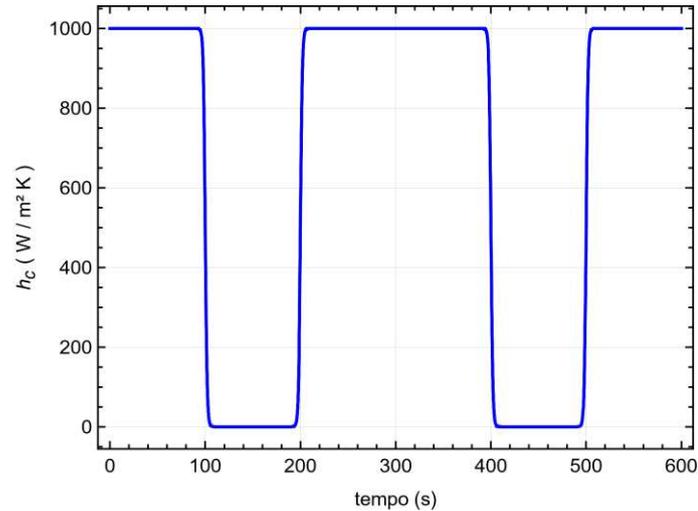
Para a resolução do problema direto, assumiu-se que ambas as placas eram feitas do mesmo material, aço AISI 1050, com propriedades e espessuras idênticas, com uma difusividade térmica  $\alpha = 1,474 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ , condutividade térmica  $k = 54,0 \text{ W/mK}$ , espessura da placa  $L_z = 1,00 \text{ mm}$ , temperatura ambiente  $T_\infty = 23,0 \text{ }^\circ\text{C}$ , coeficiente de transferência de calor  $h_\infty = 15,0 \text{ W/m}^2\text{K}$ , fluxo de calor  $q = 10.000 \text{ W/m}^2$ , com um tempo final de duração de  $t_f = 600\text{s}$ .

Foram realizadas simulações numéricas de medições de temperatura na segunda camada (aquela em contato com o fluxo de calor), adicionando um erro de medição aleatório com distribuição gaussiana de média zero e desvio padrão de  $0,05 \text{ }^\circ\text{C}$ . A frequência de medição foi de 1 medição por segundo, totalizando 600 medições de temperatura ao longo do domínio do problema. Além disso, foram considerados três casos distintos de falha para a condutância térmica de contato  $h_c(t)$ . A Figs. 20 a 22 exibem o perfil de  $h_c(t)$  ao longo do tempo.

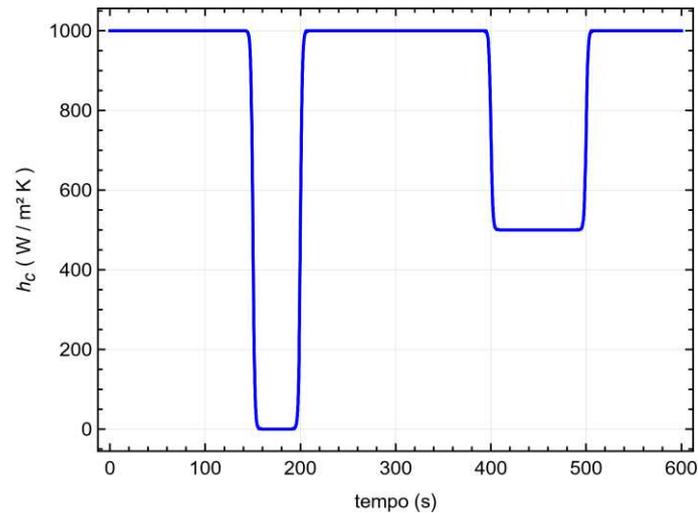
Figura 20 – Primeiro caso para o perfil de  $h_c(t)$



Fonte: O autor, 2024.

Figura 21 – Segundo caso para o perfil de  $h_c(t)$ 

Fonte: O autor, 2024.

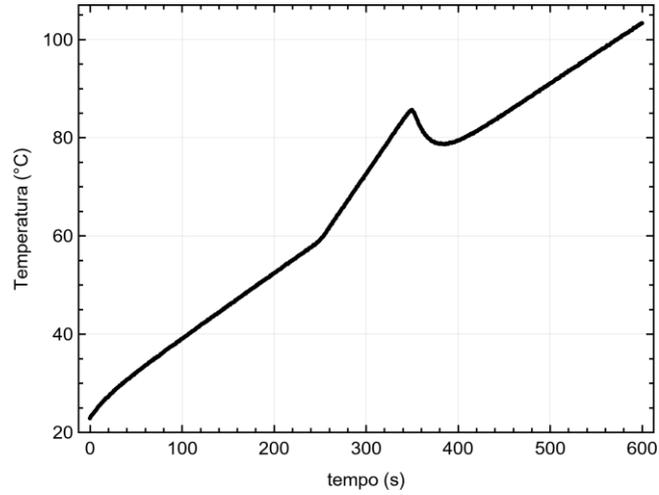
Figura 22 – Terceiro caso para o perfil de  $h_c(t)$ 

Fonte: O autor, 2024.

O primeiro caso para o perfil de  $h_c(t)$  possui apenas uma falha, que começa em 250s com duração de 100s. O segundo caso existe duas falhas com a mesma magnitude e tempos de duração, já para o terceiro caso, a primeira falha possui um tempo de duração menor enquanto a segunda falha possui uma duração maior, assim como magnitudes diferentes.

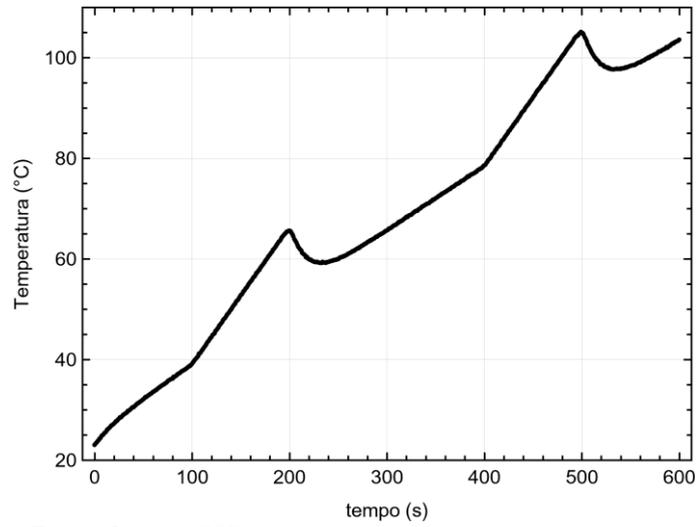
Nota-se que o valor normal da condutância térmica de contato é de 1000  $\text{W/m}^2\text{K}$  e quando ocorre uma falha esse valor cai para zero, ou se reduz pela metade, como na segunda falha do terceiro caso. As Figs. 23 a 25 abaixo mostram as respectivas medições de temperatura obtidas pela resolução do problema direto, acrescidas do erro de medição, para cada um dos casos.

Figura 23 – Medições realizadas para o primeiro caso



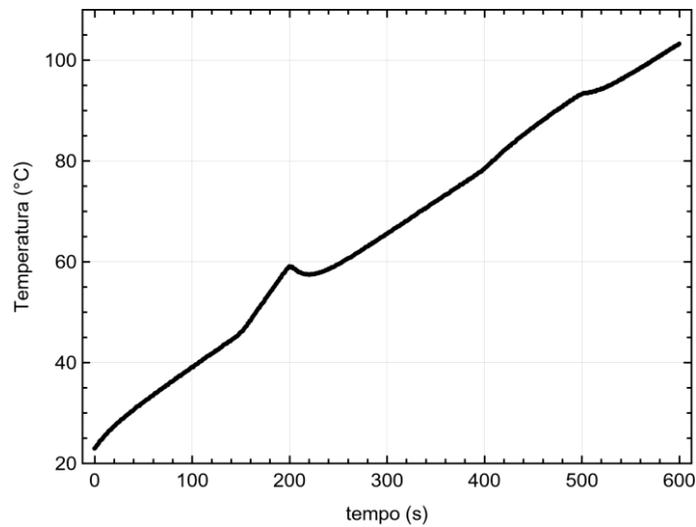
Fonte: O autor, 2024.

Figura 24 – Medições realizadas para o segundo caso



Fonte: O autor, 2024.

Figura 25 – Medições realizadas para o terceiro caso



Fonte: O autor, 2024.

Três modelos foram escolhidos para analisar cada um dos três casos adotados. O primeiro é um modelo simples que permite a estimativa de apenas uma única região de falha em todo o domínio do problema analisado. Neste modelo, três parâmetros são estimados: o tempo inicial da falha, a duração da falha e a magnitude da falha. O segundo modelo permite a estimativa de duas regiões de falha no domínio e envolve a estimativa de seis parâmetros (três para cada falha como descrito para o primeiro modelo). O último modelo envolve a estimativa de trinta e um parâmetros, onde cada parâmetro é um ponto discreto na curva de condutância térmica de contato.

A Tab. 5 mostra os modelos usados no processo de seleção do modelo, bem como o vetor de parâmetros  $\mathbf{P}$  a ser estimado. No vetor de parâmetros,  $t_i$  representa tanto o tempo no qual a falha se inicia, assim como a duração de cada falha e  $h_i$  a intensidade de cada falha. Por exemplo, no Modelo 1,  $t_1$  é o tempo em que a primeira falha começa,  $t_2$  é o tempo de duração dessa falha e  $h$  é a intensidade da falha.

Tabela 5 – Modelos adotados para identificação de falhas

	Característica	Vetor de parâmetros a serem estimados
Modelo 1	Falha única	$\mathbf{P} = \{t_1, t_2, h\}^T$
Modelo 2	Falha dupla	$\mathbf{P} = \{t_1, t_2, h_1, t_3, t_4, h_2\}^T$
Modelo 3	31 pontos discretos	$\mathbf{P} = \{h_1, h_2, \dots, h_{31}\}^T$

Fonte: O autor, 2024.

Para a resolução do problema direto foi adotado  $\beta = 0,2$  e iniciadas 10.000 amostras, para cada parâmetro a ser estimado no modelo nos três casos. Para os casos que utilizaram o modelo 1, essas 10.000 amostras foram iniciadas por meio de uma distribuição uniforme entre 0 e 600s para o primeiro parâmetro, mais 10.000 distribuídas uniformemente entre 0 e 600s para o segundo parâmetro e mais 10.000 distribuídas entre 0 e 1.000W/m<sup>2</sup> para o terceiro.

Para aqueles casos que utilizaram o modelo 2, as amostras foram distribuídas uniformemente entre 0 e 600s para os parâmetros que representavam tempo e entre 0 e 1.000W/m<sup>2</sup> para os outros dois que representavam a intensidade da falha.

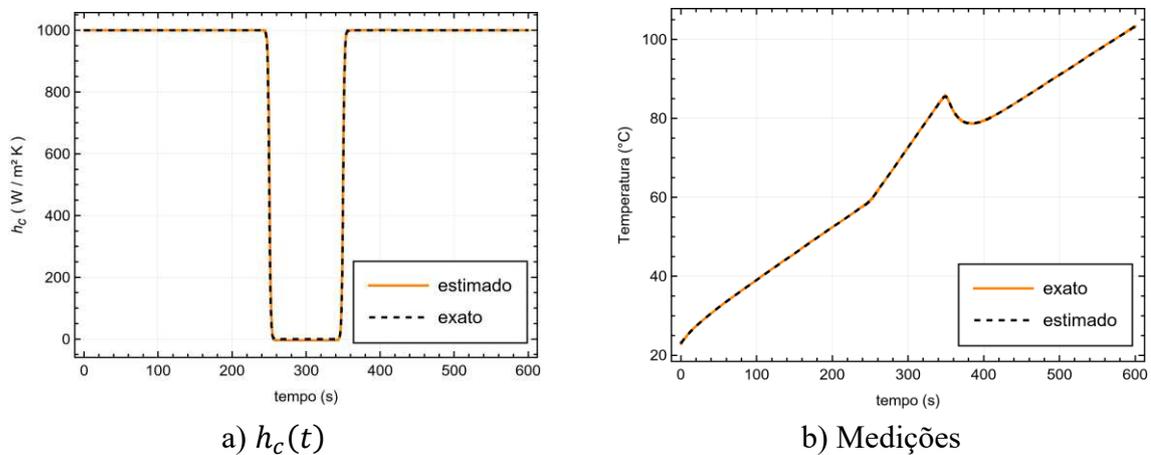
E os outros que utilizaram o modelo 3 foram iniciadas 10.000 amostras para cada um dos 31 parâmetros distribuídas uniformemente entre 900 W/m<sup>2</sup> e 1.100 W/m<sup>2</sup>.

#### 4.2.1 Primeiro Caso

As funções estimadas para a condutância térmica de contato são comparadas com a função exata para o primeiro caso e mostradas nas Figs. 26 a 28, assim como as comparações entre as medições do problema direto e as medições estimadas através das funções encontradas.

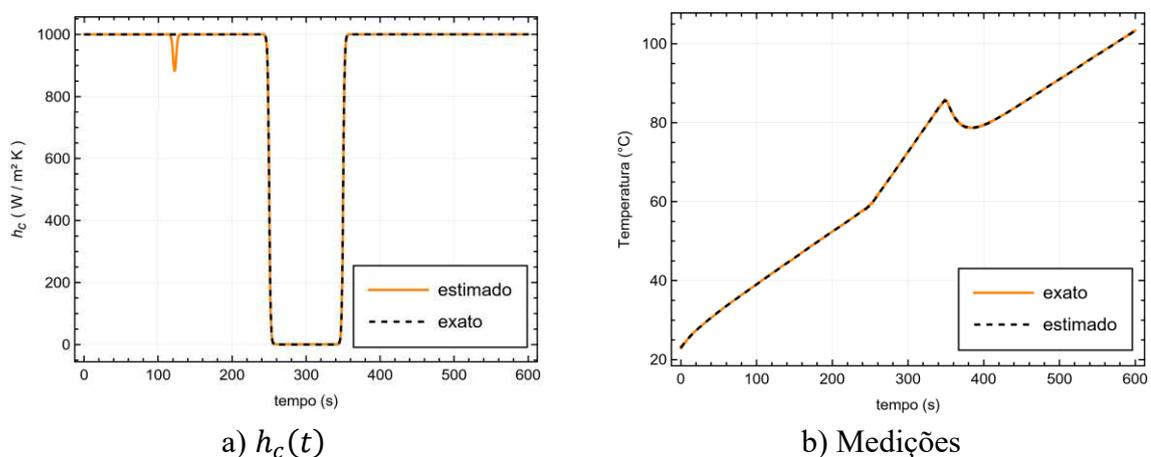
Destaca-se que para o primeiro modelo foram necessários 18 estágios para a convergência do método TCMC, e para o segundo e terceiro modelo foram necessários respectivamente 20 e 35 estágios.

Figura 26 – Resultados estimados com o Modelo 1 para o primeiro caso



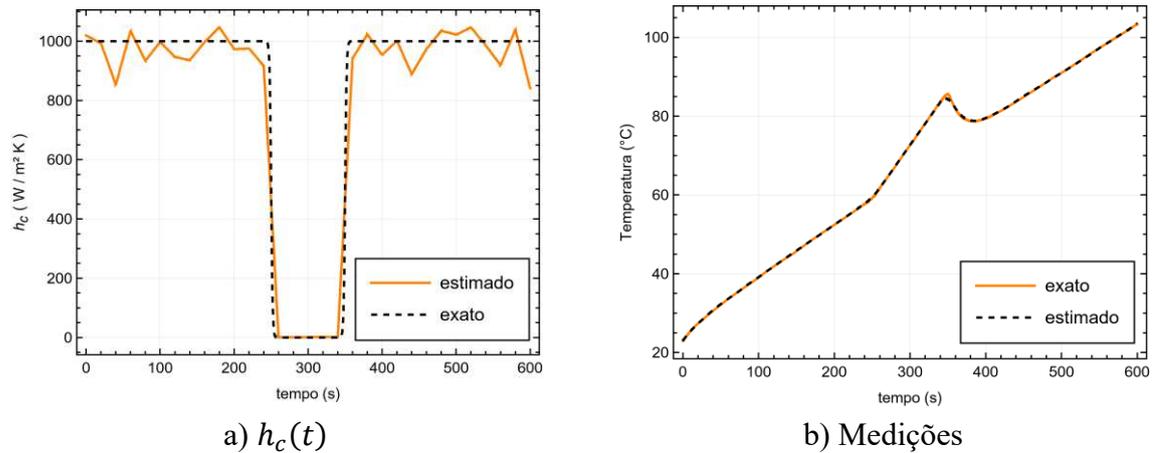
Fonte: O autor, 2024.

Figura 27 – Resultados estimados com o Modelo 2 para o primeiro caso



Fonte: O autor, 2024.

Figura 28 – Resultados estimados com o Modelo 3 para o primeiro caso



Fonte: O autor, 2024.

A partir da análise gráfica, observa-se que o primeiro modelo se aproxima mais da função exata. O segundo modelo estima eficientemente a forma da falha original, mas introduz uma pequena falha fictícia. Por sua vez, o terceiro modelo também identifica a falha existente e introduzir ruído em regiões planas.

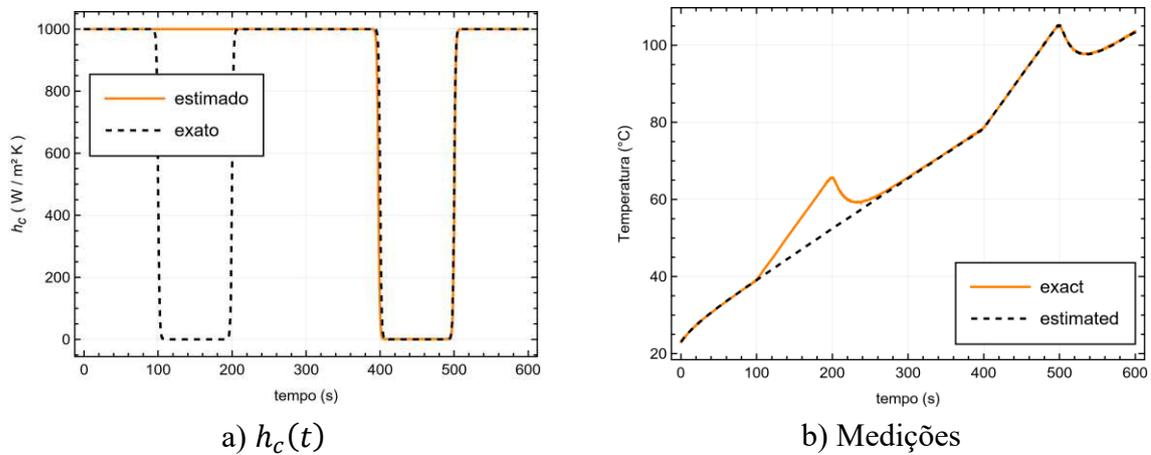
Além disso, um bom ajuste de curva é observado para as medições acima, para todos os modelos. O segundo modelo usado no problema inverso permitiria a identificação de até duas regiões de falha, envolvendo assim a estimativa de seis parâmetros (três para cada falha). Neste segundo modelo hiperparametrizado, para o caso estudado, uma variação na condutância poderia ocorrer potencialmente em cenários onde não há falhas.

Pela análise dos resultados, observa-se que o Modelo 1 seria o mais adequado para representar os dados experimentais, ver Tab. 6. No entanto, mesmo no Modelo 2, o pico mostrado ainda reflete um valor alto (isto é, baixa magnitude) de condutância de contato, o que não representaria bem uma falha, e sim um ruído.

#### 4.2.2 Segundo Caso

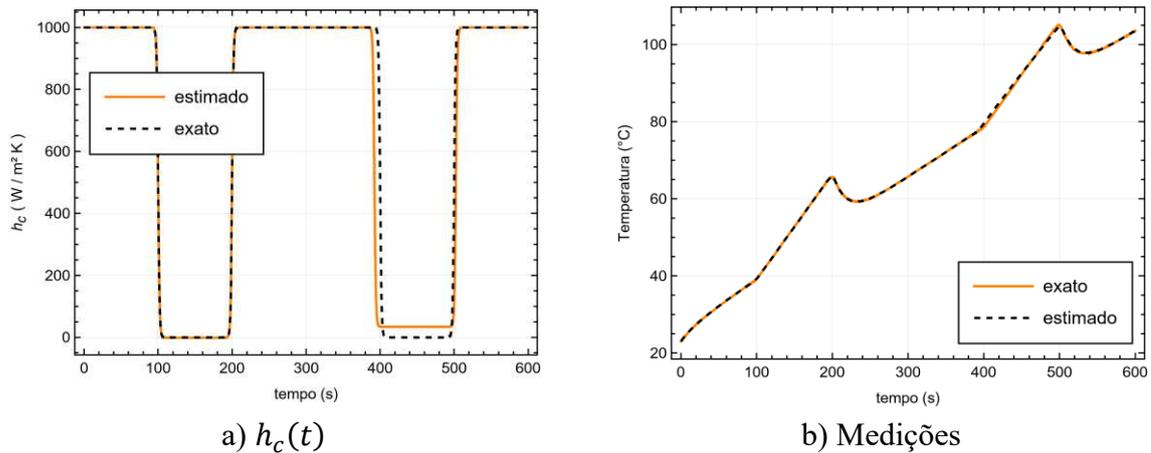
Similar ao primeiro caso, a comparação entre a função exata de condutância térmica de contato e as funções estimadas para cada modelo são apresentadas nas Figs. 29 a 31, junto com suas respectivas comparações entre as medições. No segundo caso, para o primeiro modelo utilizado foram necessários 18 estágios para o método TMCMC, e para o segundo e terceiro modelo foram necessários 40 estágios.

Figura 29 – Resultados estimados com o Modelo 1 para o segundo caso



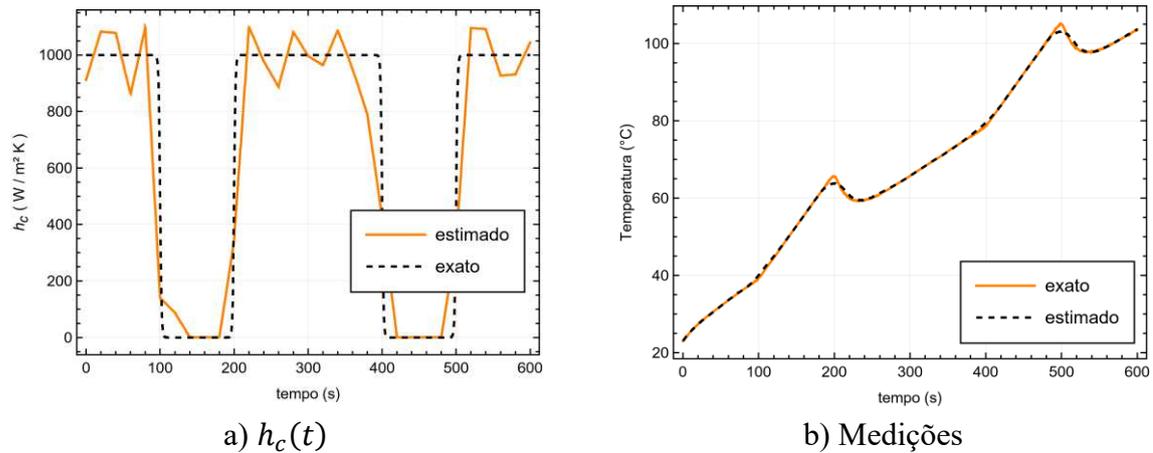
Fonte: O autor, 2024.

Figura 30 – Resultados estimados com o Modelo 2 para o segundo caso



Fonte: O autor, 2024.

Figura 31 – Resultados estimados com o Modelo 3 para o segundo caso



Fonte: O autor, 2024.

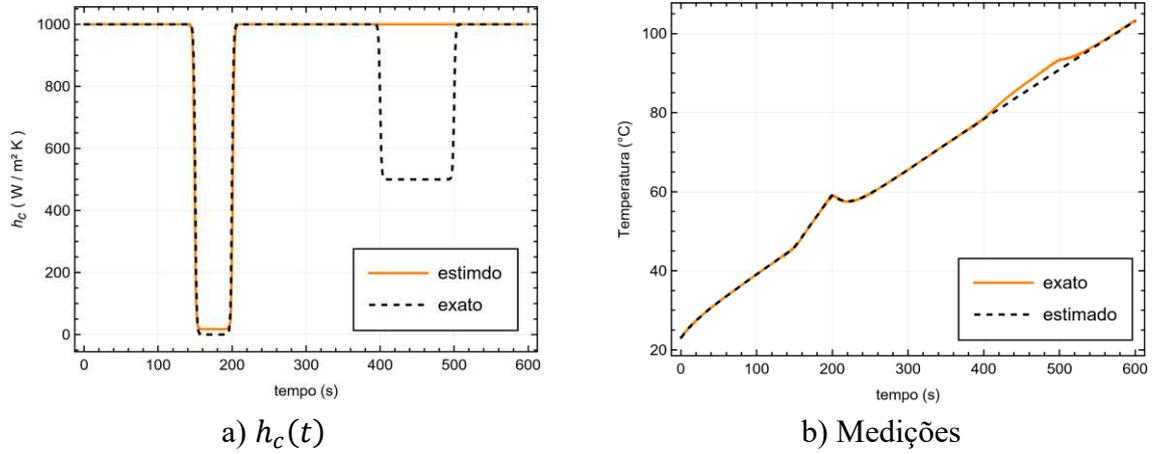
Observa-se que, embora o Modelo 1 não consiga estimar ambas as falhas, ele pode estimar com precisão a forma de pelo menos um deles. O Modelo 2 é o mais próximo da função exata, e o Modelo 3 também consegue identificar ambas as falhas presentes, bem como suas formas individuais. No entanto, assim como no primeiro caso, o Modelo 3 introduz oscilações nas regiões planas.

Através da análise gráfica, nota-se que as medições calculadas pelas curvas estimadas de condutância térmica de contato apresentam um bom ajuste apenas para os Modelos 2 e 3. No caso do Modelo 1, essa curva de medição alcança um bom ajuste apenas para o defeito estimado, como esperado.

#### 4.2.3 Terceiro Caso

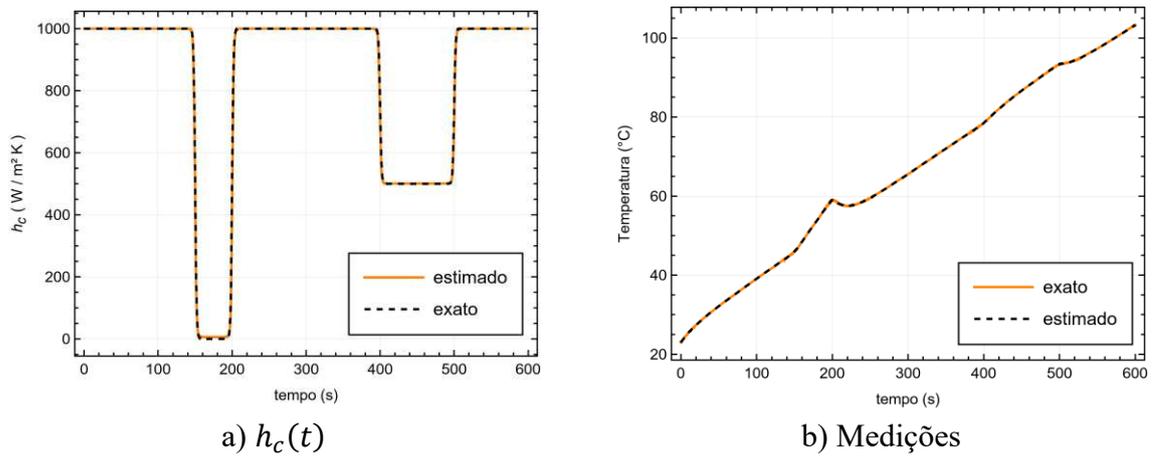
Finalmente, as funções estimadas para o parâmetro  $h_c(t)$  para o terceiro caso são apresentadas juntamente com suas respectivas medições calculadas nas Figs. 32 a 34. Neste caso, para o primeiro modelo utilizado foram necessários 23 estágios para o método TMCMC, 20 estágios para o segundo modelo e 31 estágios para o terceiro.

Figura 32 – Resultados estimados com o Modelo 1 para o terceiro caso



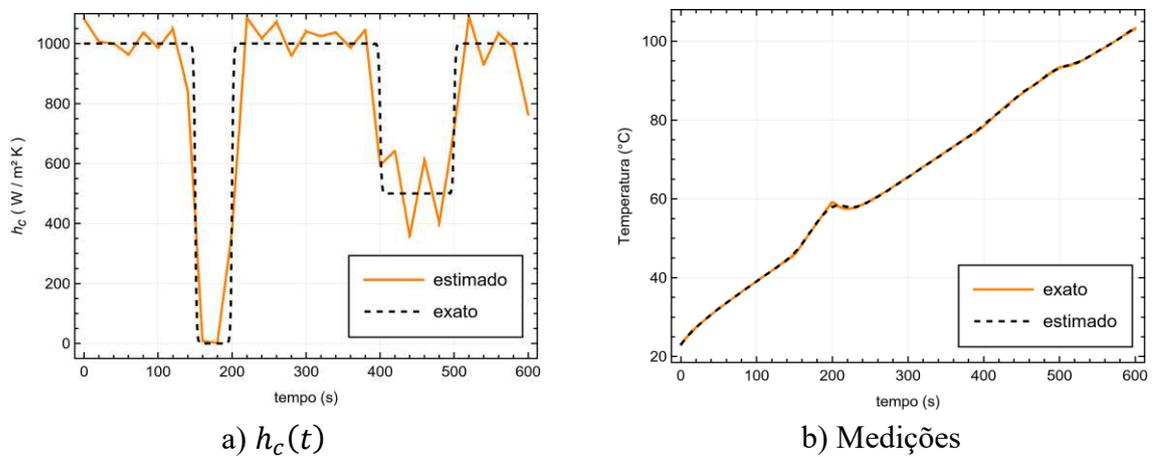
Fonte: O autor, 2024.

Figura 33 – Resultados estimados com o Modelo 2 para o terceiro caso



Fonte: O autor, 2024.

Figura 34 – Resultados estimados com o Modelo 3 para o terceiro caso



Fonte: O autor, 2024.

Similar ao segundo caso, nota-se que o Modelo 1 não consegue estimar ambos os defeitos simultaneamente, mas pode identificar e estimar com precisão a forma do primeiro defeito. O Modelo 2 alcança um ajuste perfeito para ambos os defeitos, e o Modelo 3 também consegue identificar bem os defeitos e estimar seus tempos de início e durações. No entanto, mais uma vez, são introduzidas oscilações nas regiões constantes.

Através da análise das figuras, observa-se um alinhamento adequado das medições calculadas para os Modelos 1 e 2. No entanto, para o Modelo 1, uma correspondência satisfatória é evidente apenas em relação ao defeito estimado, semelhante ao caso anterior. Outros dados relevantes obtidos para cada caso e modelo são apresentados na Tab. 6 abaixo. A tabela inclui o erro RMS, associado às medições discretas simuladas a partir das funções estimadas, calculado em comparação com os dados medidos inicialmente. Além disso, destaca-se a probabilidade do modelo mencionada anteriormente, que avalia não apenas o ajuste das curvas, mas também o custo computacional necessário para a execução do código.

Tabela 6 – Análise dos resultados obtidos

	<b>Caso 1</b>		<b>Caso 2</b>		<b>Caso 3</b>	
	Probabilidade do Modelo	$RMS_T$	Probabilidade do Modelo	$RMS_T$	Probabilidade do Modelo	$RMS_T$
Modelo 1	70,7%	0,051 °C	0,0%	3,728 °C	0,0%	0,84 °C
Modelo 2	29,3%	0,053 °C	100,0%	0,255 °C	100,0%	0,05 °C
Modelo 3	0,0%	0,129 °C	0,0%	0,311 °C	0,0%	0,13 °C

Fonte: O autor, 2024.

Vale destacar que o custo computacional foi avaliado pelo tempo total de execução do problema inverso em três casos distintos, considerando diferentes modelos. Os tempos médios de execução foram de 1 hora e 38 minutos para o Modelo 1, 2 horas e 32 minutos para o Modelo 2 e 3 horas e 42 minutos para o Modelo 3. A relação direta entre o custo computacional e o número de parâmetros a serem estimados é evidente, com o Modelo 1 sendo o mais rápido, possuindo apenas três parâmetros, enquanto o Modelo 3, com 31 parâmetros, teve o maior custo.

A análise das resoluções do problema direto nas Fig. 32 a 34 pode antecipar falhas decorrentes de forças indesejadas no sistema físico, permitindo a pré-seleção de um modelo adequado para o número de anomalias. Embora a presença de falhas possa ser identificada por meio da análise dos dados de medição, a complexidade surge da variedade de fatores que

influenciam diferentes formas de falhas. Nesse contexto, o uso de modelos capazes de estimar várias formas de falhas torna-se crucial para uma identificação mais precisa da causa.

Os resultados indicam que os Modelos 1 e 2 foram eficazes na estimativa das falhas consideradas, apesar de sua limitação no número de falhas identificadas, que depende de alguma informação prévia sobre as indicações de falhas. O Modelo 3, embora mais geral, apresenta um alto custo computacional e, devido ao seu maior número de parâmetros, demonstra desafios significativos na regularização. As respostas obtidas exibem oscilações notáveis, mas podem fornecer insights a serem refinados posteriormente usando os Modelos 1, 2 ou abordagens semelhantes. Em resumo, todos os métodos demonstraram eficácia na estimativa de falhas do tipo degrau com magnitudes variadas.

### 4.3 Identificação de melanoma cutâneo por termografia dinâmica

A presença de uma célula tumoral, no geral, pode ser modelada como um corpo estranho dentro do tecido saldável, com propriedades termofísicas diferentes. As propriedades mais sensíveis à presença desse melanoma são em primeiro lugar a perfusão sanguínea e em segundo lugar a taxa de geração de calor metabólica (Barros, 2022; Rojczyk et al., 2017). Por esse motivo estes serão os parâmetros de maior interesse nesta aplicação.

A Tab. 7 mostra os parâmetros utilizados para resolver o problema, onde são observados diferentes valores para a taxa de geração de calor metabólico em tecidos saudáveis e tecidos tumorais.

Tabela 7 – Parâmetros gerais para resolução do problema direto

Parâmetro	Valor
Calor específico do sangue ( $c_b$ )	3770 J/kg K
Densidade do sangue ( $\rho_b$ )	1060 kg/m <sup>3</sup>
Temperatura do sangue arterial ( $T_a$ )	37 °C
Coeficiente de troca térmica ( $h$ )	10 W/m <sup>2</sup> K
Temperatura ambiente ( $T_\infty$ )	20 °C
Tempo total de resfriamento ( $t_{f,c}$ )	30 s
Tempo total de medição ( $t_f$ )	600 s
Taxa metabólica de geração de calor para tecido saudável ( $q_{m,h}$ )	420 W/m <sup>3</sup>
Taxa metabólica de geração de calor para tecido tumoral ( $q_{m,t}$ )	3680 W/m <sup>3</sup>

Fonte: Cotta et al., 2010.

Os valores utilizados para propriedades termofísicas de cada camada são mostrados na Tab. 8. Vale ressaltar que esses valores são utilizados tanto para o caso saudável quanto para o caso tumoral, visto que, para esta aplicação, as propriedades de cada camada do tecido não são alteradas com a presença do tumor.

Tabela 8: Propriedade das camadas

Camada	$\rho$ ( $kg/m^3$ )	$c_p$ ( $J/kg K$ )	$k$ ( $W/mK$ )	$L$ ( $m$ )
Epiderme	1030	3852	0,558	0,00044
Derme	1200	3300	0,45	0,00164
Tecido subcutâneo	1000	2500	0,19	0,01
Tecido interno	1000	4000	0,50	0,03

Fonte: Cotta et al., 2010 .

Como dito anteriormente, a perfusão sanguínea para o caso tumoral é modelada pela Eq. (22), enquanto para o caso saudável foi adotada a Eq. (23) (Barros, 2022):

$$\omega(x, T) = a_T(x)T^2 + b_T(x)T + c_T(x) \quad \text{para } 0 < x < L \quad (22)$$

$$\omega(x, T) = a_S T + b_S \quad \text{para } 0 < x < L \quad (23)$$

Os valores adotados para a simulação das medições nos casos saudável e tumoral são apresentados, respectivamente, nas Tabs. 9 e 10.

Tabela 9 – Parâmetros de perfusão sanguínea para tecido saudável

Parâmetro	Valor
Parâmetro angular da perfusão sanguínea para tecido saudável ( $a_S$ )	$3,6 \times 10^{-5}$
Parâmetro linear da perfusão sanguínea para tecido saudável ( $b_S$ )	$9,6 \times 10^{-5}$

Fonte: Barros, 2022.

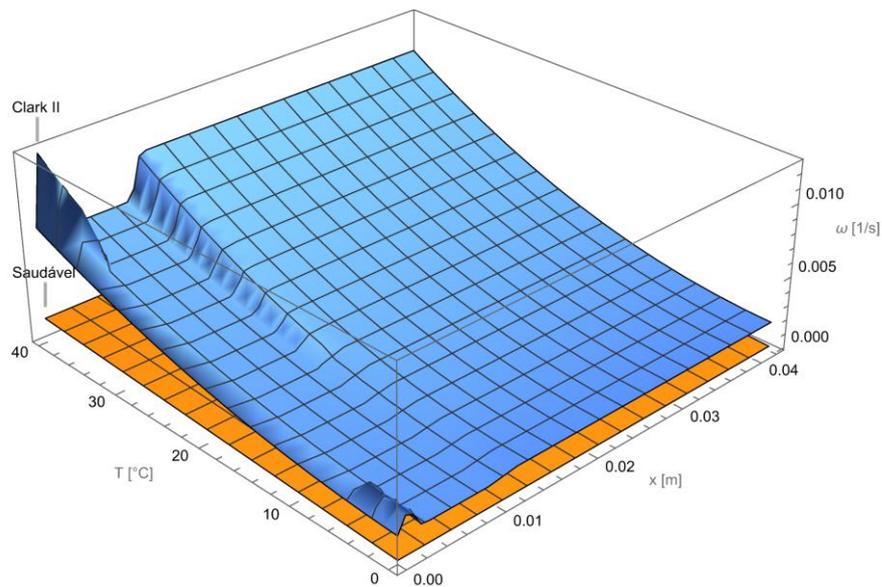
Tabela 10 – Parâmetros de perfusão sanguínea para tecido tumoral

Camada	Epiderme	Derme	Tecido Subcutâneo	Tecido Interno
$a_T$	0,0	$0,27 \times 10^{-5}$	$0,86888 \times 10^{-7}$	$0,2346 \times 10^{-5}$
$b_T$	0,0	$0,29 \times 10^{-4}$	$-0,79453 \times 10^{-6}$	$-0,21452 \times 10^{-4}$
$c_T$	0,0	$0,15 \times 10^{-2}$	$0,11294 \times 10^{-4}$	$0,30495 \times 10^{-3}$

Fonte: Barros, 2022.

Observa-se valores nulos para os coeficientes do termo de perfusão sanguínea para a epiderme na presença do tecido tumoral, Tab. 10, e isso se deve ao fato da epiderme não possuir fluxo sanguíneo. Além disso, diferentemente do caso tumoral, o tecido saudável utiliza um modelo dependente apenas da temperatura com valores médios em toda a profundidade do tecido (Barros, 2022), por isso o valor para a epiderme não será nulo nesse caso. A Fig. 35 mostra esse comportamento.

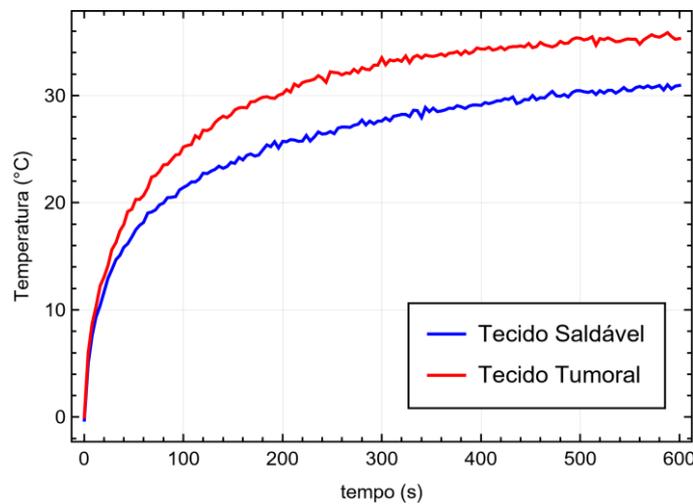
Figura 35 – Perfis de perfusão sanguínea utilizados na resolução do problema direto para os casos saudável e tumoral



Fonte: O autor, 2024.

A Fig. 36 mostra os dados obtidos pela resolução do problema direto para cada um dos casos, com um desvio padrão dos erros de medição de  $0,2^{\circ}\text{C}$  e um total de 151 medições ao longo de 600 segundos, ou seja, uma frequência de medição de aproximadamente 0,25 medições por segundo. Pode-se observar pela análise gráfica que as medições diferem ligeiramente ao longo do tempo, o tecido tumoral aquece mais rapidamente do que o tecido saudável.

Figura 36 – Simulação da termografia dinâmica do problema direto



Fonte: O autor, 2024.

O objetivo deste estudo é aplicar o método TMCMC para identificação de tumores, com foco na diferenciação de tecidos saudáveis e tumorais. Entre os parâmetros analisados, a perfusão sanguínea se destaca como o mais sensível à presença de células malignas, seguida pela taxa metabólica de transferência de calor, conforme evidenciado em Rojczyk et al. (2017). Embora outros parâmetros possam ser afetados, este trabalho concentra-se exclusivamente na análise da perfusão sanguínea e da taxa metabólica de transferência de calor para distinguir entre os dois casos. Assim, o objetivo do problema inverso é identificar valores distintos para essas propriedades, uma vez que diferenças nesses valores podem indicar a presença de melanoma.

O modelo quadrático utilizado para resolver o problema direto no cenário tumoral apresenta alto custo computacional. Além disso, não se sabe previamente se o tecido analisado é saudável ou tumoral, o que impede a escolha antecipada entre o modelo de perfusão sanguínea adequado para cada caso. Para abordar essa questão, será utilizado um único modelo para

realizar o diagnóstico do tecido a partir dos dados de termografia dinâmica simulados, independentemente de o tecido ser saudável ou tumoral. Espera-se, com isso, obter valores diferenciados para as propriedades de perfusão sanguínea e taxa de geração de calor metabólica no tecido tumoral, mesmo com o uso do modelo unificado.

Além disso, serão analisados dois modelos simplificados em relação ao modelo quadrático, que varia com a temperatura e a posição. O primeiro modelo a ser avaliado é o de perfusão sanguínea constante em todas as camadas e em toda a faixa de temperatura, conforme descrito na Eq. (41). O segundo modelo considera a perfusão sanguínea linear, que depende da temperatura, conforme descrito na Eq. (42).

$$\omega(x, T) = \omega \quad \text{para} \quad 0 < x < L \quad (41)$$

$$\omega(x, T) = aT + b \quad \text{para} \quad 0 < x < L \quad (42)$$

#### 4.3.1 Modelo de perfusão constante

Foram iniciadas 1.000 amostras independentes para cada um dos dois parâmetros a serem estimados,  $\beta = 0,2$  e considerou-se uma *priori* uniforme em que  $0 \leq \omega \leq 0,5$  e  $0 \leq q_m \leq 5000$ . O tempo médio de execução do algoritmo para ambos os casos foi de aproximadamente 17 minutos, foram necessários 9 estágios para a convergência do método TMCMC em ambos os casos e os resultados estimados são apresentados na Tab. 10.

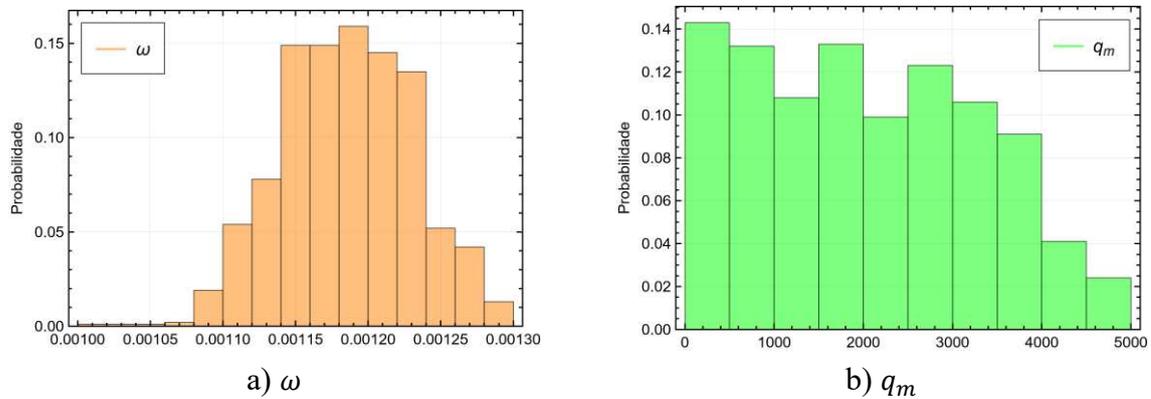
Tabela 11 – Valores estimados para o modelo de perfusão constante

Parâmetro	Tecido Saudável		Tecido Tumoral	
	Valor Estimado	Desvio Padrão	Valor Estimado	Desvio Padrão
$\omega [s^{-1}]$	0,001186	0,000045	0,006720	0,000090
$q_m [W/m^3]$	2031,58	1268,34	3891,43	1123,93

Fonte: O autor, 2024.

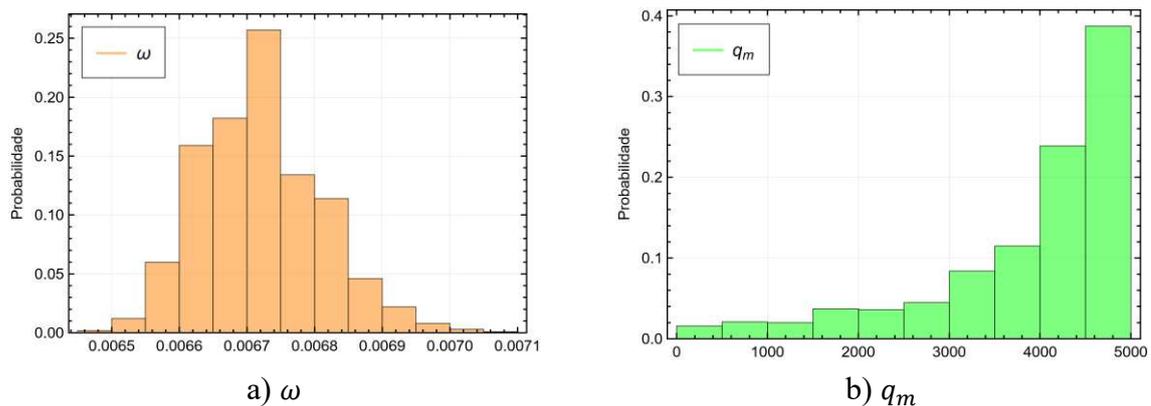
Os histogramas são apresentados nas Figs. 37 e 38 abaixo. A Fig. 37 mostra os resultados para o caso saudável e a outra para o caso tumoral.

Figura 37 – Histograma dos parâmetros estimados para o caso saudável



Fonte: O autor, 2024.

Figura 38 – Histograma dos parâmetros estimados para o caso tumoral

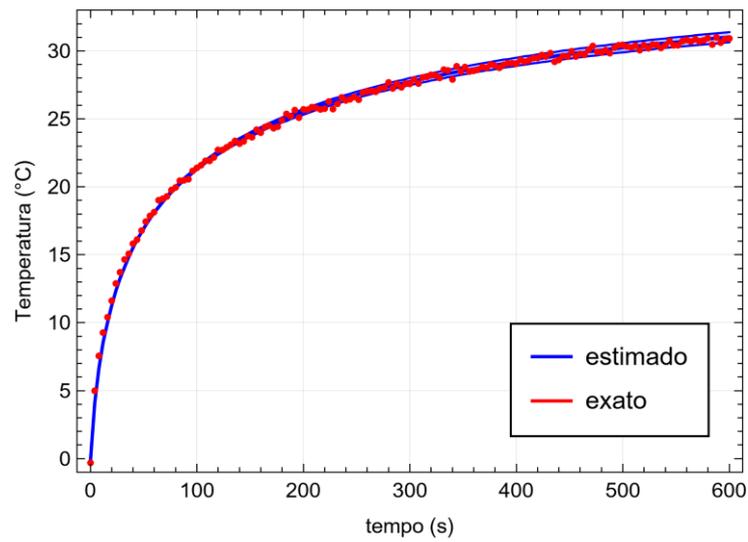


Fonte: O autor, 2024.

Ao analisar as imagens apresentadas, nota-se que os valores estimados para a perfusão sanguínea diferem significativamente, para o caso tumoral o valor é aproximadamente 5,7 vezes maior que para o caso saudável. Além disso, pode-se observar uma região preferencial para os dados estimados do parâmetro  $q_m$  no caso tumoral, embora a comparação desse último parâmetro entre as duas imagens não consiga diferenciar os dois casos com precisão.

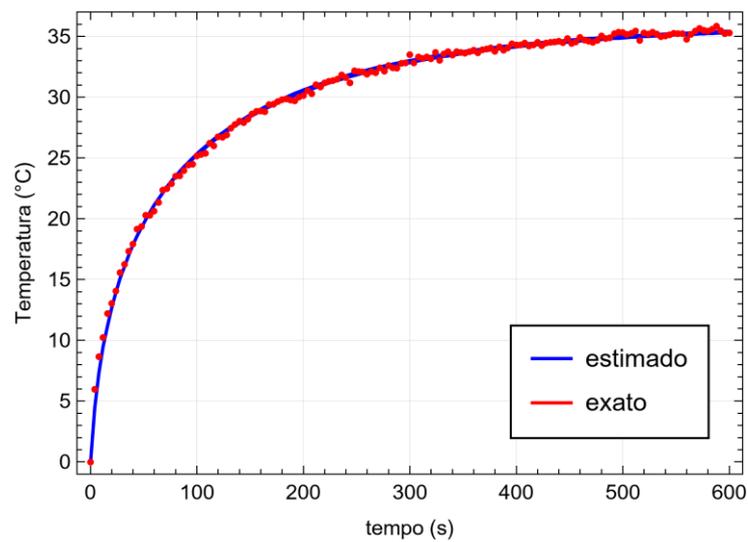
Os valores estimados foram utilizados para resolver o problema direto pelo mesmo modelo (modelo de perfusão constante) a fim de comparar com as medições iniciais, essas comparações são mostradas nas Figs. 39 e 40 junto com seus respectivos intervalos de credibilidade de 95%. Além disso, o  $RMS_T$  do problema para as medidas do caso saudável foi de 0,24 °C e para o caso tumoral foi de 0,31 °C.

Figura 39– Intervalo de 95% de credibilidade para medições a partir dos resultados estimados para o caso saudável



Fonte: O autor, 2024.

Figura 40 – Intervalo de 95% de credibilidade para medições a partir dos resultados estimados para o caso tumoral



Fonte: O autor, 2024.

Ao analisar as figuras acima, observa-se um bom ajuste entre as medidas do problema direto e as medidas dos parâmetros estimados, além disso, nota-se uma faixa de credibilidade muito estreita em ambos os casos.

### 4.3.2 Modelo de perfusão linear

Da mesma forma que o modelo de perfusão constante, os resultados para o modelo linear são apresentados aqui. Foram iniciadas 100 amostras independentes para cada um dos 3 parâmetros a serem estimados, devido ao grande custo computacional, foi utilizado  $\beta = 0,2$  e considerou-se uma priori uniforme em que  $0 \leq a \leq 0,5 \times 10^{-2}$ ,  $0 \leq b \leq 0,5 \times 10^{-2}$  e  $0 \leq q_m \leq 5000$ . O tempo médio de execução do algoritmo para ambos os casos foi de aproximadamente 256 minutos (15 vezes mais que o modelo com perfusão constante, e com 10 vezes menos amostras), foram necessários 11 estágios do método TMCM para o caso saudável e 12 estágios para o caso tumoral e os resultados estimados são apresentados na Tab. 11.

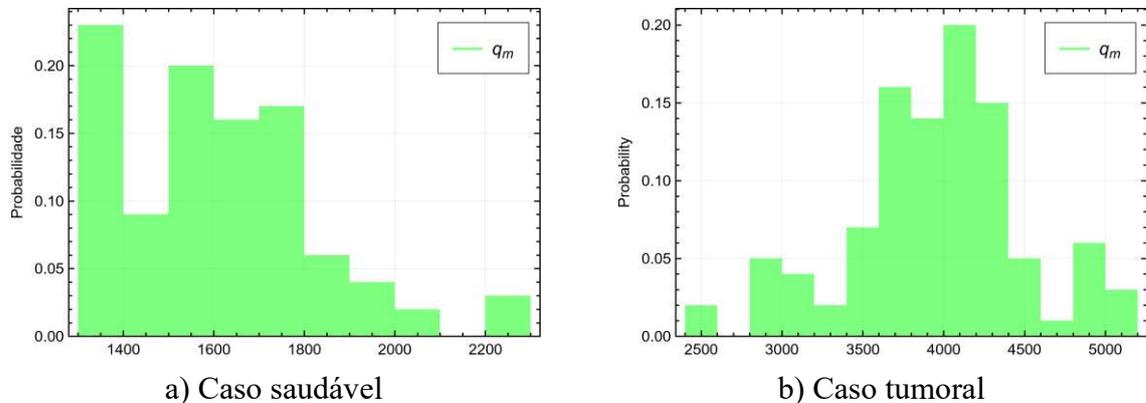
Tabela 12 – Valores estimados para o modelo de perfusão linear

Parâmetro	Tecido Saudável		Tecido Tumoral	
	Valor Estimado	Desvio Padrão	Valor Estimado	Desvio Padrão
$a [^{\circ}\text{C}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}]$	-0,000078	0,000004	0,000018	0,000002
$b [\text{s}^{-1}]$	0,003288	0,000114	0,003985	0,000044
$q_m [W/m^3]$	1613,24	216,116	3964,16	546,134

Fonte: O autor, 2024.

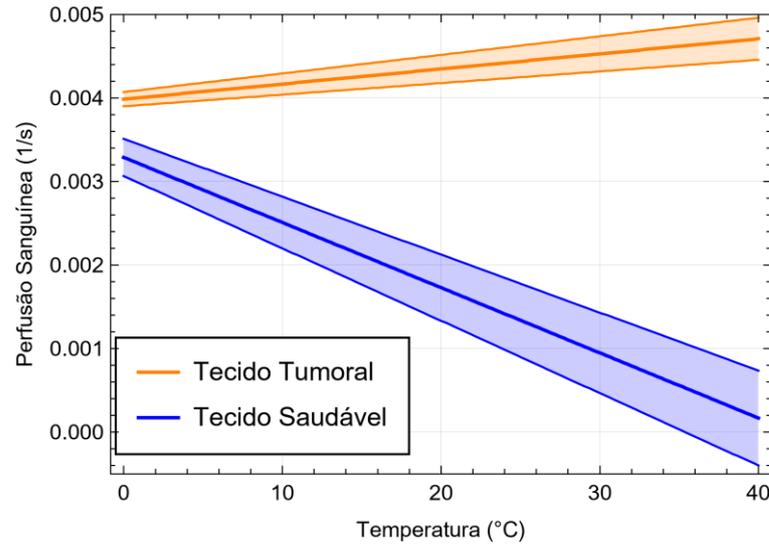
Os histogramas do parâmetro  $q_m$  são mostrados na Fig. 41 e as curvas de perfusão sanguínea estimadas para ambos os casos com seus respectivos intervalos de credibilidade de 95% são mostradas na Fig. 42.

Figura 41 – Histogramas do parâmetro  $q_m$  para ambos os casos



Fonte: O autor, 2024.

Figura 42 – Perfusão sanguínea estimada  $\omega(x, T)$

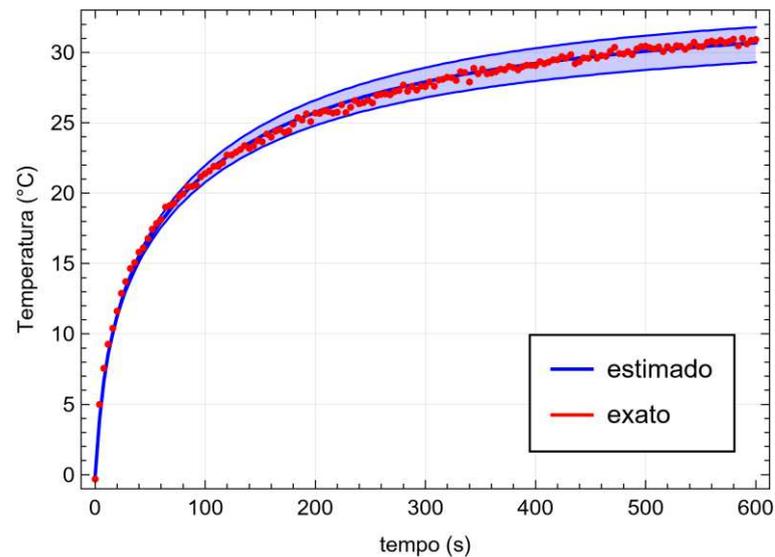


Fonte: O autor, 2024.

Nota-se que as estimativas de ambos os parâmetros diferem significativamente. O parâmetro  $q_m$  para o caso tumoral é cerca de 2,5 vezes maior que o do caso saudável, e a análise da Fig. 42 mostra curvas distintas de perfusão para a faixa de temperatura observada.

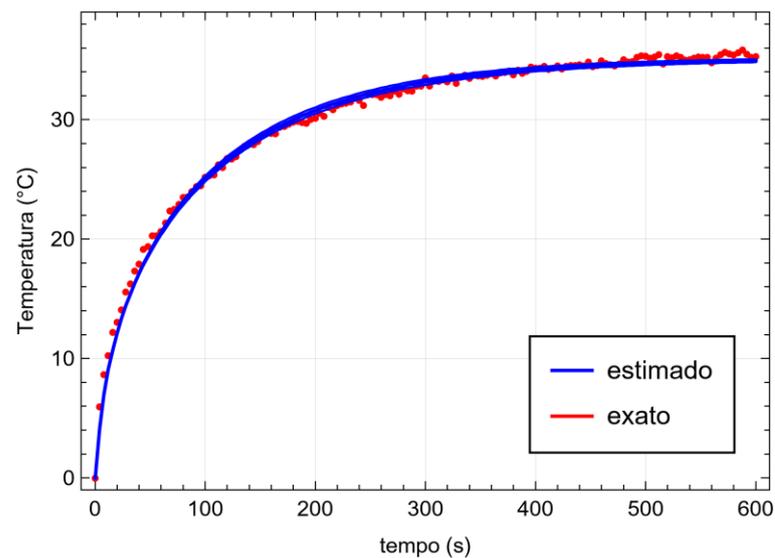
As comparações dos valores estimados com os dados de medição são mostradas nas Figs. 43 e 44 juntamente com seus respectivos intervalos de credibilidade de 95%, onde são observadas regiões de credibilidade mais amplas do que para o modelo com perfusão sanguínea constante, isso se deve ao fato de que foram utilizadas menos amostras do que no outro caso. Além disso, o  $RMS_T$  do problema para as medições do caso saudável foi de 0,30 °C e para o caso tumoral foi de 0,49 °C.

Figura 43 – Intervalo de 95% de credibilidade para medições a partir dos resultados estimados para o caso saudável



Fonte: O autor, 2024.

Figura 44 – Intervalo de 95% de credibilidade para medições a partir dos resultados estimados para o caso tumoral



Fonte: O autor, 2024.

Após a obtenção dos resultados, foram analisadas as evidências do modelo das últimas etapas para a escolha do modelo mais provável a ser utilizado, sendo que para ambos os casos analisados a evidência do modelo para o modelo de perfusão linear foi de aproximadamente 99,9% e de 0,1% para o modelo de perfusão constante.

## CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

A análise dos problemas apresentados demonstra que o método TMCMC foi eficaz na estimativa dos parâmetros de interesse em diversas situações, além de conseguir comparar e quantificar modelos para cada aplicação. Este método gera múltiplas amostras que operam em conjunto para estimar os parâmetros de forma sinérgica, resultando em cadeias de Markov relativamente curtas.

No primeiro problema, as estimativas obtidas com o TMCMC apresentaram menores erros RMS em comparação ao método MH, que utiliza apenas uma cadeia de Markov. A única exceção foi o terceiro perfil de temperatura analisado, onde o MH obteve resultados mais precisos. De modo geral, ambos os métodos foram capazes de estimar corretamente os parâmetros e o perfil de temperatura desejado, além de proporcionar uma análise probabilística da curva, mostrando a interseção de probabilidades entre os dois métodos e destacando a região com valores mais prováveis.

No segundo problema, o TMCMC mostrou-se eficaz na estimativa das falhas analisadas, indicando de forma eficiente o modelo mais adequado para cada situação. Isso sugere sua aplicabilidade em futuros estudos de sistemas com falhas espaciais juntamente com falhas temporais. Além disso, a possibilidade de realizar estudos sobre a estimativa simultânea de múltiplos parâmetros, além da condutância térmica de contato, podem ser explorada para identificar a origem das falhas com maior precisão.

Por fim, no último problema, o TMCMC conseguiu identificar tecidos com células tumorais por meio da diferenciação dos valores dos parâmetros analisados. Foi utilizado um modelo mais completo para simular as medições, seguido pela estimativa dos parâmetros com modelos mais simples. O modelo que utilizou a perfusão sanguínea linear diferenciou tanto o valor médio quanto a região em torno dos dois parâmetros de interesse para os casos tumoral e saudável. Embora o modelo com perfusão constante tenha diferenciado apenas a perfusão sanguínea, seu custo computacional foi significativamente menor, reduzindo o tempo de estimação.

Conforme observado no estudo de (Rojczyk et al., 2017), o termo de perfusão sanguínea está altamente relacionado à presença ou ausência de células tumorais, permitindo que o modelo mais simples seja empregado em trabalhos futuros.

## REFERÊNCIAS

- ABREU, L. A. et al. Identification of Contact Failures in Multilayered Composites With the Markov Chain Monte Carlo Method. **Journal of Heat Transfer**, v. 136, n. 10, p. 101302, 1 out. 2014.
- ABREU, L. A. S. et al. Detection of contact failures with the Markov chain Monte Carlo method by using integral transformed measurements. **International Journal of Thermal Sciences**, v. 132, p. 486–497, out. 2018.
- ANDERSON, D. A. et al. **Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer**. 4. ed. Fourth edition. | Boca Raton, FL : CRC Press, 2020. | Series: Computational and physical processes in mechanics and thermal sciences: CRC Press, 2020.
- ANDRADE, R. P. DE. **Seleção de modelos e estimação de parâmetros em identificação de danos estruturais via transformada integral generalizada e inferência bayesiana**. 2023. 64 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional) - Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2023.
- ANTUNES GUEDES, G. et al. Estimativa do perfil de temperatura na entrada de dutos via Método de Monte Carlo com Cadeias de Markov. **Revista Cereus**, v. 14, n. 4, 2022.
- ASTH, L. DA S. **Estimação de parâmetros e seleção de classes de modelos em problemas de convecção-difusão em microcanais**. 2024. 95 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional) - Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2024.
- BARROS, T. M. DE S. M. DE. **Modelagem computacional de problemas de biotransferência de calor empregando transformações integrais, metadados e inferência Bayesiana**. Nova Friburgo: Instituto Politécnico - UERJ, 2022.
- BECK, J. L.; AU, S.-K. Bayesian Updating of Structural Models and Reliability using Markov Chain Monte Carlo Simulation. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 128, n. 4, p. 380–391, abr. 2002.
- BECKER, S. M. Analytical Bioheat Transfer. Em: **Heat Transfer and Fluid Flow in Biological Processes**. [s.l.] Elsevier, 2015. p. 77–124.
- BERGMAN, T. L.; LEVINE, A. S. **Fundamentals of heat and mass transfer**. Eighth edition Wiley loose-leaf print edition ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc., 2019.
- BOKAR, J. C.; ÖZISIK, M. N. An inverse analysis for estimating the time-varying inlet temperature in laminar flow inside a parallel plate duct. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 38, n. 1, p. 39–45, jan. 1995.
- CHATO, J. C. A View of the History of Heat Transfer in Bioengineering. Em: **Advances in Heat Transfer**. [s.l.] Elsevier, 1992. v. 22p. 1–18.
- CHING, J.; CHEN, Y.-C. Transitional Markov Chain Monte Carlo Method for Bayesian Model Updating, Model Class Selection, and Model Averaging. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 133, n. 7, p. 816–832, jul. 2007.

CHING, J.; WANG, J.-S. Application of the transitional Markov chain Monte Carlo algorithm to probabilistic site characterization. **Engineering Geology**, v. 203, p. 151–167, mar. 2016.

CLARK JR, W. H. et al. The histogenesis and biologic behavior of primary human malignant melanomas of the skin. v. 29, p. 705–726, 1969.

COLAÇO, M. J.; ORLANDE, H. R. B. A function estimation approach for the identification of the transient inlet profile in parallel plate channels. Em: **Inverse Problems in Engineering Mechanics II**. [s.l.] Elsevier, 2000. p. 409–418.

CONDAT, L. A Direct Algorithm for 1-D Total Variation Denoising. **IEEE Signal Processing Letters**, v. 20, n. 11, p. 1054–1057, nov. 2013.

COSTA, L. L. DA S. **Estimativa de propriedades termofísicas espacialmente variáveis com seleção de classes de modelos e transformações integrais**. 2024. 71 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional) - Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2024.

COSTA, L. L. DA S. et al. Estimation of Spatially Dependent Coefficients in Heterogeneous Media in Diffusive Heat Transfer Problems. 8 jul. 2024.

COTTA, R. M. et al. Hybrid integral transforms analysis of the bioheat equation with variable properties. **International Journal of Thermal Sciences**, v. 49, n. 9, p. 1510–1516, set. 2010.

COTTA, R. M.; MIKHAĬLOV, M. D. **Heat conduction: lumped analysis, integral transforms, symbolic computation**. Chichester ; New York: Wiley, 1997.

FARIA, D. D. S.; STUTZ, L. T.; CASTELLO, D. A. Bayesian parameter estimation and model selection in nonlocal viscoelastic nanoplate models. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 211, p. 111237, abr. 2024.

FOX, R. W.; PRITCHARD, P. J.; MCDONALD, A. T. **Fox and McDonald's introduction to fluid mechanics**. 8th ed ed. Hoboken, NJ : Chichester: John Wiley & Sons, Inc. ; John Wiley [distribuidor], 2011.

GEERLIGS, M. (MARION). Skin layer mechanics. 2010.

HABASH, R. W. Y. et al. Thermal Therapy, Part 2: Hyperthermia Techniques. **Critical Reviews™ in Biomedical Engineering**, v. 34, n. 6, p. 491–542, 2006.

HABASH, R. W. Y. et al. Thermal Therapy, Part III: Ablation Techniques. **Critical Reviews™ in Biomedical Engineering**, v. 35, n. 1–2, p. 37–121, 2007.

HUANG, C.-H.; WANG, D.-M.; CHEN, H.-M. Prediction of local thermal contact conductance in plate finned-tube heat exchangers. **Inverse Problems in Engineering**, v. 7, n. 2, p. 119–141, abr. 1999.

HUANG, C.-M. C. et al. Metrology based on transient heat transfer theory for evaluating phase change materials with differential scanning calorimetry. **Thermochemica Acta**, v. 707, p. 179111, jan. 2022.

INCROPERA, F. P. et al. (EDS.). **Fundamentals of heat and mass transfer**. 6. ed ed. Hoboken, NJ: Wiley, 2007.

JACQUES HADAMARD. **Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations**. New Haven: Yale University Press, 1923.

JIN, Y.-F. et al. Identifying parameters of advanced soil models using an enhanced transitional Markov chain Monte Carlo method. **Acta Geotechnica**, v. 14, n. 6, p. 1925–1947, dez. 2019.

KAIPIO, J. P.; FOX, C. The Bayesian Framework for Inverse Problems in Heat Transfer. **Heat Transfer Engineering**, v. 32, n. 9, p. 718–753, ago. 2011.

KAIPIO, J.; SOMERSALO, E. **Statistical and computational inverse problems**. New York: Springer, 2005.

LARSEN, P. M. et al. Alloy design as an inverse problem of cluster expansion models. **Acta Materialia**, v. 139, p. 254–260, out. 2017.

LINDLEY, D. V. An Introduction to Bayesian Inference and Decision. **Journal of the Operational Research Society**, v. 25, n. 2, p. 336–337, jun. 1974.

LIU, F. B.; OZISIK, M. N. Estimation of inlet temperature profile in laminar duct flow. **Inverse Problems in Engineering**, v. 3, n. 1–3, p. 131–143, ago. 1996.

MADHUSUDANA, C. V. **Thermal contact conductance**. 2nd ed ed. Cham Heidelberg: Springer, 2014.

MAHMOUDINEZHAD, S. et al. A comprehensive review on the current technologies and recent developments in high-temperature heat exchangers. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, v. 183, p. 113467, set. 2023.

OHASHI, Y.; UCHIDA, I. Applying dynamic thermography in the diagnosis of breast cancer. **IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine**, v. 19, n. 3, p. 42–51, jun. 2000.

ORLANDE, H. R. B. Inverse Problems in Heat Transfer: New Trends on Solution Methodologies and Applications. **Journal of Heat Transfer**, v. 134, n. 3, p. 031011, 1 mar. 2012.

ORLANDE, H. R. B.; COLAÇO, M. J.; DULIKRAVICH, G. S. Approximation of the likelihood function in the Bayesian technique for the solution of inverse problems. **Inverse Problems in Science and Engineering**, v. 16, n. 6, p. 677–692, 1 jan. 2008.

ÖZISIK, M. N.; ORLANDE, H. R. B. **Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications**. 2. ed. [s.l.] CRC Press, 2021.

PARIKH, M. et al. A comprehensive experimental and numerical estimation of thermal contact conductance. **International Journal of Thermal Sciences**, v. 172, p. 107285, fev. 2022.

- PARWANI, A. K.; TALUKDAR, P.; SUBBARAO, P. M. V. Estimation of inlet temperature of a developing fluid flow in a parallel plate channel. **International Journal of Thermal Sciences**, v. 57, p. 126–134, jul. 2012.
- PARWANI, A. K.; TALUKDAR, P.; SUBBARAO, P. M. V. Estimation of boundary heat flux using experimental temperature data in turbulent forced convection flow. **Heat and Mass Transfer**, v. 51, n. 3, p. 411–421, mar. 2015.
- PATANKAR, S. V. **Numerical heat transfer and fluid flow**. New York, NY Hamburg: McGraw-Hill [u.a.], 1980.
- PENNES, H. H. *Analysis of Tissue and Arterial Blood Temperatures in the Resting Human Forearm*. **Journal of Applied Physiology**, v. 1, n. 2, p. 93–122, ago. 1948.
- RANDALL, M. J. et al. Advances in the Biofabrication of 3D Skin in vitro: Healthy and Pathological Models. **Frontiers in Bioengineering and Biotechnology**, v. 6, p. 154, 31 out. 2018.
- RANGEL, L. DOS S. **Modelagem computacional para identificação de danos estruturais empregando transformações integrais e inferência bayesiana**. 2020. 102 f. Tese (Doutorado em Modelagem Computacional) - Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2020.
- ROBERT, C. P.; CASELLA, G. The Metropolis—Hastings Algorithm. Em: ROBERT, C. P.; CASELLA, G. (Eds.). **Monte Carlo Statistical Methods**. Springer Texts in Statistics. New York, NY: Springer New York, 2004. p. 267–320.
- ROJCZYK, M. et al. Inverse heat transfer problems: an application to bioheat transfer. p. 365–383, 25 jan. 2017.
- ROSSMANN, C.; HAEMMERICH, D. Review of Temperature Dependence of Thermal Properties, Dielectric Properties, and Perfusion of Biological Tissues at Hyperthermic and Ablation Temperatures. **Critical Reviews in Biomedical Engineering**, v. 42, n. 6, p. 467–492, 2014.
- SILVA NETO, A. J. DA. **Técnicas de inteligência computacional inspiradas na natureza: aplicação em problemas inversos em transferência radiativa**. [s.l.] Sbmec, 2012.
- SPHAIER, L. A.; SU, J.; COTTA, R. M. Macroscopic Heat Conduction Formulation. Em: **Handbook of Thermal Science and Engineering**. Cham: Springer International Publishing, 2018. p. 3–59.
- TIAN, B. et al. Thermal conductivity characterisation of shallow ground via correlations with geophysical parameters. **Engineering Geology**, v. 272, p. 105633, jul. 2020.
- TRILOK, G.; VISHWESHWARA, P. S.; GNANASEKARAN, N. Inverse estimation of heat flux under forced convection conjugate heat transfer in a vertical channel fully filled with metal foam. **Thermal Science and Engineering Progress**, v. 33, p. 101343, ago. 2022.
- WATANABE, K. et al. Estimativa da Variação Temporal de Condutância Térmica de Contato em Placas Termicamente Finas via Método MCMC. **VETOR - Revista de Ciências Exatas e Engenharias**, v. 32, n. 2, p. 21–36, 28 dez. 2022.

WOODBURY, K. A. et al. **Inverse heat conduction: ill-posed problems**. Second edition ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc, 2023.

XU, F. et al. Mathematical Modeling of Skin Bioheat Transfer. **Applied Mechanics Reviews**, v. 62, n. 5, p. 050801, 1 set. 2009.

YADAN, Z. et al. An expert review of the inverse problem in electrocardiographic imaging for the non-invasive identification of atrial fibrillation drivers. **Computer Methods and Programs in Biomedicine**, v. 240, p. 107676, out. 2023.

YU, D.; ZHAN, L.; XU, Z. An environmentally-friendly permeable liquid salt pyrolysis method based on capillary heat transfer for recycling waste insulator materials. **Journal of Hazardous Materials**, v. 469, p. 133815, maio 2024.

ZHAO, K. et al. An overview of ultra-high temperature ceramic for thermal insulation: Structure and composition design with thermal conductivity regulation. **Journal of the European Ceramic Society**, v. 43, n. 16, p. 7241–7262, dez. 2023.

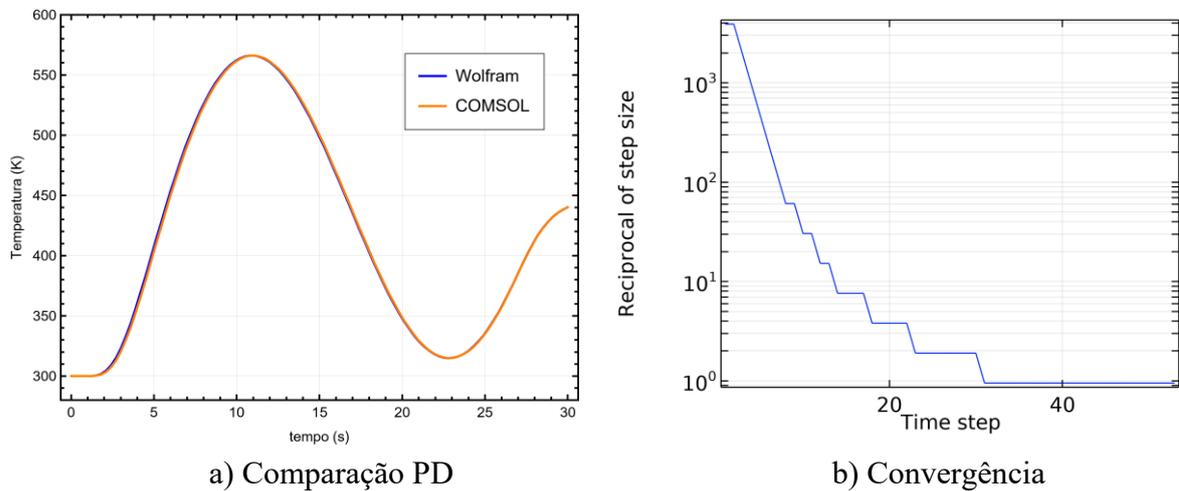
ZHOU, X. et al. Vibration-based Bayesian model updating of an actual steel truss bridge subjected to incremental damage. **Engineering Structures**, v. 260, p. 114226, jun. 2022.

## APÊNDICE – Verificação do software Wolfram Mathematica

Uma preocupação inerente na modelagem de problemas computacionais é se os resultados obtidos computacionalmente refletem os resultados do modelo matemático utilizado, principalmente se uma EDP está presente, e estes serão próximos se o problema for bem-posto, que será provado por meio da análise de convergência da solução (Anderson et al., 2020).

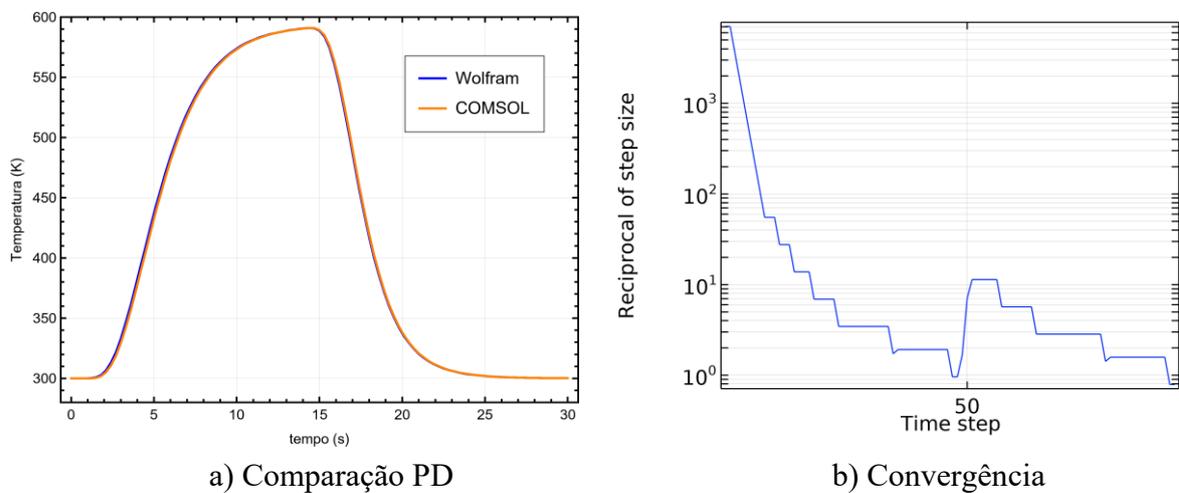
Nas figuras abaixo são mostradas as comparações entre os softwares Wolfram Mathematica e COMSOL Multiphysics durante a resolução do problema direto para cada um dos casos, assim como a análise de convergência da solução fornecida pelo próprio COMSOL.

Figura 45 – Análise comparativa do caso 1 do Problema 1



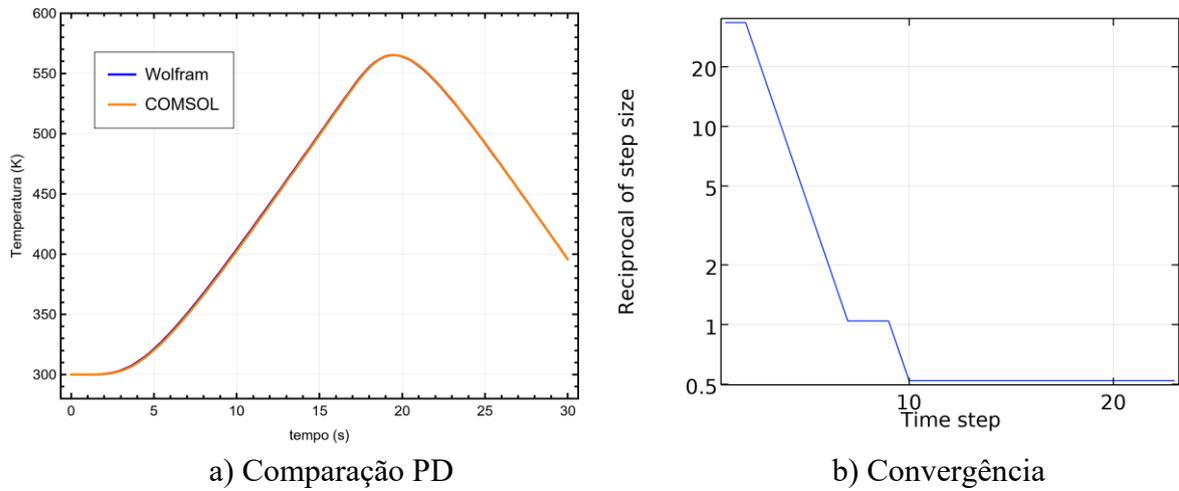
Fonte: O autor, 2024

Figura 46 – Análise comparativa do caso 2 do Problema 1



Fonte: O auto, 2024

Figura 47 – Análise comparativa do caso 3 do Problema 1

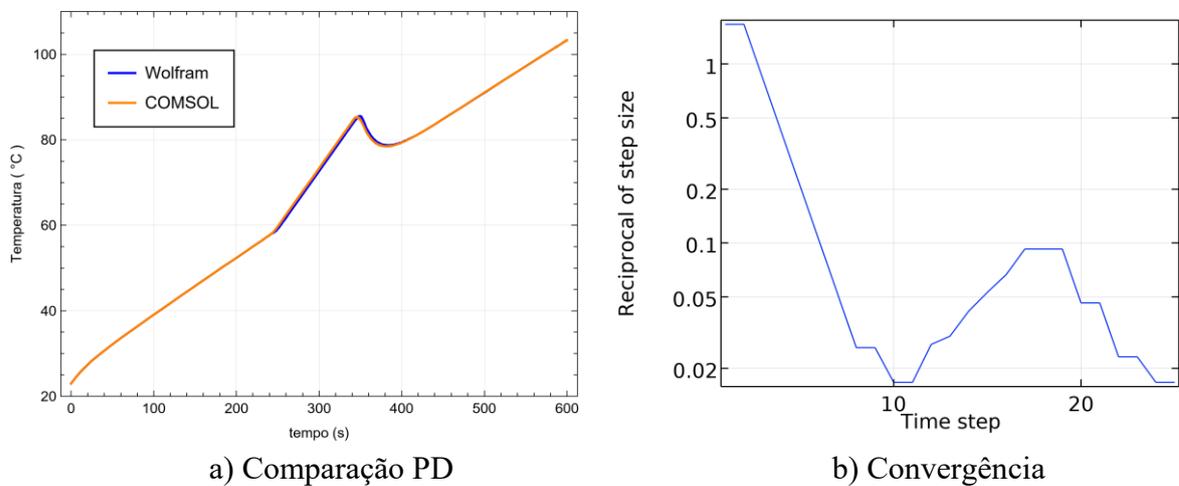


Fonte: O autor, 2024

Nas imagens acima observa-se boa aproximação do problema direto para os dois softwares utilizados, no caso dois nota-se boas convergências nos três casos analisados.

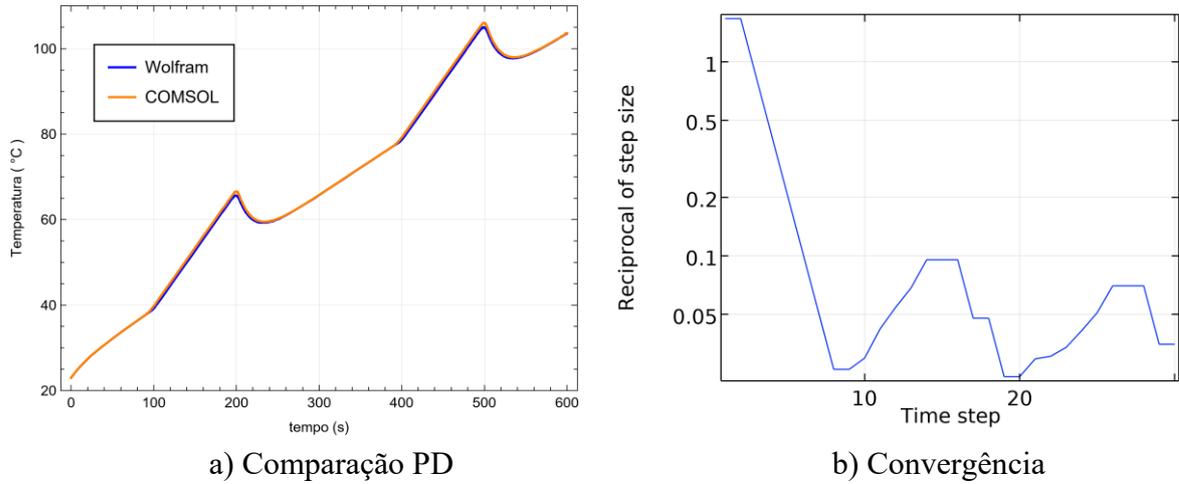
Abaixo são mostradas as análises da resolução do problema direto para o problema 2.

Figura 48 – Análise comparativa do caso 1 do Problema 2



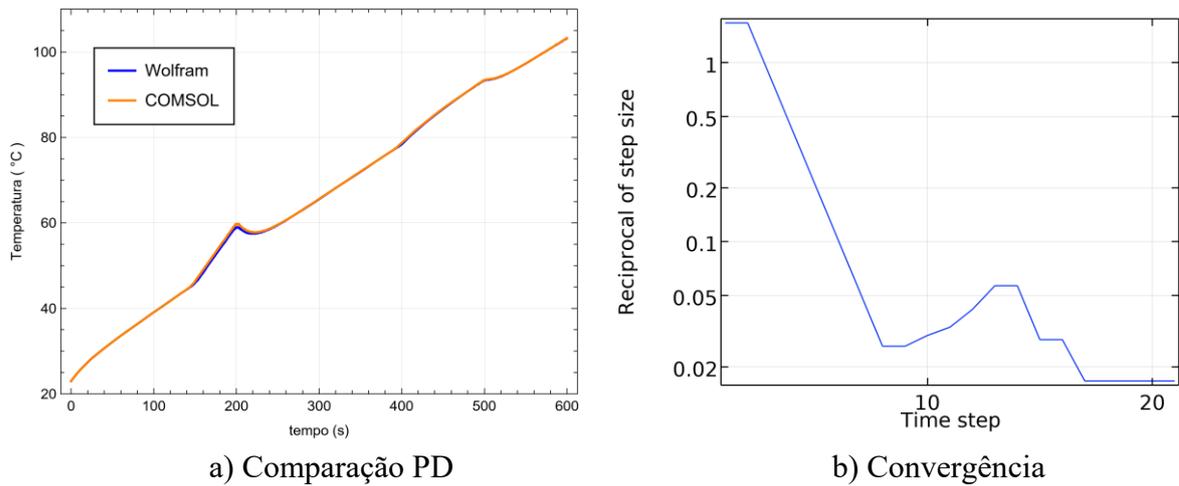
Fonte: O autor, 2024

Figura 49 – Análise comparativa do caso 2 do Problema 2



Fonte: O autor, 2024.

Figura 50 – Análise comparativa do caso 3 do Problema 2



Fonte: O autor, 2024.

Observa-se, novamente boa aproximação do problema direto, em ambos os softwares os resultados acompanham o comportamento da falha existente, porém aqui nota-se que a convergência é mais difícil de ser atingida refletindo a complexidade do problema em relação ao anterior.