



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto Politécnico

Caio Amaro de Oliveira

**Cálculo de função importância aplicado a problemas unidimensionais do
transporte de nêutrons na formulação de ordenadas discretas (S_N)**

Nova Friburgo

2025

Caio Amaro de Oliveira

**Cálculo de função importância aplicado a problemas unidimensionais do transporte de
nêutrons na formulação de ordenadas discretas (S_N)**

Dissertação apresentada, como requisito para
obtenção do título de Mestre, ao Programa de
Pós-Graduação em Modelagem
Computacional, do Instituto Politécnico, da
Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Hermes Alves Filho

Orientador: Prof. Dr. Fernando Carvalho da Silva

Nova Friburgo

2025

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/E

O48 Oliveira, Caio Amaro de.
Cálculo de função importância aplicado a problemas unidimensionais do transporte de nêutrons na formulação de ordenadas discretas (S_N) / Caio Amaro de Oliveira. - 2025.
80 f. : il.

Orientadores: Hermes Alves Filho e Fernando Carvalho da Silva.

Dissertação (mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico.

1. Teoria do transporte de nêutrons – Teses. 2. Nêutrons – Transporte – Métodos de simulação – Teses. 3. Teoria cinética do transporte – Método das ordenadas discretas – Teses. I. Alves Filho, Hermes. II. Silva, Fernando Carvalho da. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto Politécnico. III. Título.

CDU 539.125.52:519.6

Bibliotecária Fernanda Souza Cruz CRB7/7361

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Caio Amaro de Oliveira

**Cálculo de função importância aplicado a problemas unidimensionais do transporte de
nêutrons na formulação de ordenadas discretas (S_N)**

Dissertação apresentada, como requisito para
obtenção do título de Mestre, ao Programa de
Pós-Graduação em Modelagem
Computacional, do Instituto Politécnico, da
Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 17 de fevereiro de 2025.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Hermes Alves Filho (Orientador)
Instituto Politécnico – UERJ

Prof. Dr. Fernando Carvalho da Silva (Orientador)
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Roberto Pinheiro Domingos
Instituto Politécnico – UERJ

Prof. Dr. Adilson Costa da Silva
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Nova Friburgo

2025

DEDICATÓRIA

À minha esposa, Rebeca, pela motivação, pelo exemplo de resiliência, amor e fé.

AGRADECIMENTOS

A meus orientadores – Hermes Alves e Fernando Carvalho – convívio saudável, apoio e paciência.

A Victor Schote Nogueira – colega do curso, pelo exemplo profissional e auxílio na hora dos conflitos.

A Pedro Mineiro Cordoeira – colega do curso, pelas conversas construtivas e descontraídas.

A Natália Rocha Pinheiro – colega do curso, pelas trocas de ideias ao longo deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

OLIVEIRA, Caio Amaro de. Cálculo de função importância aplicado a problemas unidimensionais do transporte de nêutrons na formulação de ordenadas discretas (S_N). 2025. 80 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional) – Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2025.

No estudo das variações de alguns parâmetros de reatores nucleares, se faz útil calcular uma função importância associada a uma quantidade integral (uma grandeza física mensurável). Esta quantidade integral pode ser linear no fluxo angular de nêutrons, como a potência do núcleo do reator ou taxa de absorção de nêutrons. O cálculo desta função importância é realizado mediante a formulação adjunta da equação linear de transporte de nêutrons, que é obtida através de definições matemáticas. Dado a natureza das equações de transporte de nêutrons, a formulação adjunta pode ser derivada a partir das equações de balanço discretizadas escritas em formato matricial ou da equação de balanço antes de efetuar as devidas discretizações. No primeiro caso, obtém-se a função importância adjunta matemática e no segundo caso, obtém-se a função importância adjunta física, que não são necessariamente equivalentes. Então, neste trabalho foram calculadas as funções importâncias adjuntas, física e matemática, para problemas unidimensionais de fonte-fixa, na formulação de multigrupos de energia e espalhamento isotrópico para meios multiplicativos e não-multiplicativos. Para a solução destes problemas, foi utilizado a formulação de Ordenadas Discretas (S_N) para discretizar a variável angular e o método *Diamond Difference* (DD) para discretizar a variável espacial. Por conseguinte, verificou-se que utilizando estes métodos de discretização as funções importâncias não são equivalentes, mas que há uma relação de similaridade entre elas. Ademais, esta relação dá-se automaticamente da aplicação dos métodos de discretização no cálculo da quantidade integral, sendo possível a utilização tanto da função importância física quanto da função importância matemática em sua determinação. Esta afirmação foi verificada para cálculos de taxas de reações e obtidos os mesmos resultados, usando uma ou outra função importância.

Palavras-chave: transporte de nêutrons; fonte-fixa; ordenadas discretas; função importância; adjunto físico; adjunto matemático.

ABSTRACT

OLIVEIRA, Caio Amaro de. Calculation of importance function applied to unidimensional problems of neutron transport in discrete ordinate formulation (S_N). 2025. 80 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional) – Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2025.

When studying variations in nuclear reactor parameters, it is useful to calculate an importance function associated with an integral quantity (a measurable physical quantity). This integral quantity may be linear in the angular neutron flux, such as reactor core power or neutron absorption rate. The calculation of this importance function is realized using the adjoint formulation of neutron transport linear equation, which is obtained through mathematical definitions. Given the nature of the neutron transport equations, the adjoint formulation can be derived from the discretized balance equations written in matrix format or from the balance equation before making the appropriate discretizations. In the first case, the mathematical adjoint importance function is obtained and, in the second case, the physical adjoint importance function is obtained, which are not necessarily equivalent. Therefore, in this work, the importance functions, physical and mathematical, were calculated for one-dimensional fixed source problems, in the multigroups formulation of energy and isotropic scattering for multiplicative and nonmultiplicative medium. To solve these problems, the Discrete Ordinate (S_N) formulation was used to discretize the angular variable and the Diamond Difference (DD) method was used to discretize the spatial variable. In this way, it was verified that when using these discretization methods, the importance functions are not equivalent, but there is a similarity relation between them. Furthermore, this relation arises automatically from the application of discretization methods in the calculation of the integral quantity, making it possible to use both, the physical importance function and the mathematical importance function, for your determination. This statement was verified for the calculation of reaction rates and obtained the same results, using both importance functions.

Keywords: neutron transport; fixed-source; discrete ordinate; importance function; mathematical adjoint; physical adjoint.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Faixas de energia da formulação de multigrupos de energia.....	15
Figura 2 - Malha espacial discreta.....	18
Figura 3 - Varredura de ida ($1 \leq m \leq N/2$).....	44
Figura 4 - Varredura de volta ($N/2 + 1 \leq m \leq N$).....	45
Figura 5 - Varredura de ida ($N/2 + 1 \leq m \leq N$).....	47
Figura 6 - Varredura de volta ($1 \leq m \leq N/2$).....	47
Figura 7 - Domínio material do problema-modelo #1.....	50
Figura 8 - Resultados do problema-modelo #1	51
Figura 9 - Domínio material do problema-modelo #2.....	52
Figura 10 - Resultados do problema-modelo #2	54
Figura 11 - Domínio material do problema-modelo #3.....	55
Figura 12 - Resultados para taxa de absorção total do problema-modelo #3.....	56
Figura 13 - Resultados para taxa de absorção nos respectivos tecidos do problema-modelo #3	58
Figura 14 - Uso de memória relativa	60

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Parâmetros físicos-materiais do problema-modelo #1	49
Tabela 2 - Taxa de absorção do problema-modelo #1.....	50
Tabela 3 - Seção de choque macroscópica total do problema-modelo #2.....	52
Tabela 4 - Parâmetros de fissão do problema-modelo #2	53
Tabela 5 - Taxa de fissão do problema-modelo #2	53
Tabela 6 - Nuclídeos e densidades atômicas do problema modelo #3	55
Tabela 7 - Taxa de absorção total do problema-modelo #3	56
Tabela 8 - Taxa de absorção nos tecidos, saudável e doente, do problema-modelo #3	57
Tabela 9 - Número de iterações e tempo de execução dos problemas-modelo	59
Tabela 10 - Seções de choque macroscópicas do problema-modelo #2, zona material 1	64
Tabela 11 - Seções de choque macroscópicas do problema-modelo #2, zona material 2	64
Tabela 12 - Seções de choque macroscópicas do problema-modelo #2, zona material 3	64
Tabela 13 - Seções de choque macroscópicas do problema-modelo #2, zona material 4	65
Tabela 14 - Seções de choque macroscópicas do problema-modelo #2, zona material 5	65
Tabela 15 - Seções de choque macroscópicas do problema-modelo #2, zona material 6	65
Tabela 16 - Seções de choque macroscópicas do problema-modelo #2, zona material 7	65
Tabela 17 - Estrutura dos 30 (trinta) grupos de energia do problema modelo #3 (em MeV) ..	66
Tabela 18 - Seções de choque macroscópicas totais do tecido saudável - problema modelo #3	67
Tabela 19 - Seções de choque total do tecido doente do problema modelo #3	68
Tabela 20 - Seção de choque macroscópica de espalhamento para o tecido saudável (problema-modelo #3 - $g' \leq 15$ e $g \leq 10$).....	69
Tabela 21 - Seção de choque macroscópica de espalhamento para o tecido saudável (problema-modelo #3 - $11 \leq g' \leq 20$ e $g \leq 10$)	70
Tabela 22 - Seção de choque macroscópica de espalhamento para o tecido saudável (problema-modelo #3 - $21 \leq g' \leq 30$ e $g \leq 10$)	71
Tabela 23 - Seção de choque macroscópica de espalhamento para o tecido saudável (problema-modelo #3 - $g' \leq 15$ e $g \geq 16$).....	72
Tabela 24 - Seção de choque macroscópica de espalhamento para o tecido saudável (problema-modelo #3 - $11 \leq g' \leq 20$ e $g \geq 16$)	73

Tabela 25 - Seção de choque macroscópica de espalhamento para o tecido saudável (problema-modelo #3 - $21 \leq g' \leq 30$ e $g \geq 16$)	74
Tabela 26 - Seção de choque macroscópica de espalhamento para o tecido com tumor (problema-modelo #3 - $g' \leq 10$ e $g \leq 15$).....	75
Tabela 27 - Seção de choque macroscópica de espalhamento para o tecido com tumor (problema-modelo #3 - $11 \leq g' \leq 20$ e $g \leq 15$)	76
Tabela 28 - Seção de choque macroscópica de espalhamento para o tecido com tumor (problema-modelo #3 - $21 \leq g' \leq 30$ e $g \leq 15$)	77
Tabela 29 - Seção de choque macroscópica de espalhamento para o tecido com tumor (problema-modelo #3 - $g' \leq 10$ e $g \geq 16$).....	78
Tabela 30 - Seção de choque macroscópica de espalhamento para o tecido com tumor (problema-modelo #3 - $11 \leq g' \leq 20$ e $g \geq 16$)	79
Tabela 31 - Seção de choque macroscópica de espalhamento para o tecido com tumor (problema-modelo #3 - $21 \leq g' \leq 30$ e $g \geq 16$)	80

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO.....	11
1	TEORIA DE TRANSPORTE DE NÊUTRONS	14
1.1	Formulação de multigrupos de energia	15
1.2	Discretização da variável angular	16
1.3	Discretização da variável espacial	18
1.4	Formalismo matricial do transporte de nêutrons S_N – DD	20
2	FUNÇÃO IMPORTÂNCIA ADJUNTA FÍSICA	27
2.1	Equação para a função importância adjunta física.....	27
2.2	Discretização da variável angular e da variável espacial.....	32
2.3	Formalismo matricial da função importância adjunta física	34
3	FUNÇÃO IMPORTÂNCIA ADJUNTA MATEMÁTICA	38
3.1	Termo de fonte da função importância adjunta matemática	39
3.2	Equações intranodais: função adjunta matemática	40
4	MODELAGEM COMPUTACIONAL	43
4.1	Método iterativo: Fluxo angular de nêutrons	43
4.2	Método iterativo: Função importância adjunta física.....	45
4.3	Método direto: Função importância adjunta matemática	48
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	49
5.1	Problema-modelo #1	49
5.2	Problema-modelo #2: <i>Accelerator Driven Systems</i> (ADS)	51
5.3	Problema-modelo #3: <i>Boron Neutron Capture Therapy</i> (BNCT)	54
	CONCLUSÃO	61
	REFERÊNCIAS.....	62
	APÊNDICE – Tabelas de dados	64

INTRODUÇÃO

Desde a descoberta de A. H. Becquerel a respeito da radioatividade natural, o interesse da comunidade científica nos estudos do núcleo atômico se intensificou, acarretando em grandes avanços científicos e tecnológicos nessa área no decorrer do século XX (Tipler, 2017) e que se mantém até os dias de hoje.

A usina nuclear é uma das aplicações das reações nucleares, como a fissão, que pelo fato dos combustíveis nucleares possuírem alta densidade energética proporcionam uma produção de energia eficiente, indo ao encontro da alta demanda energética da sociedade nos dias atuais. Ainda, usinas nucleares funcionam com baixa emissão de poluentes a base de carbono, tornando-as uma fonte de energia limpa (Galindo, 2022). Contudo, as aplicações das reações nucleares não se limitam à fissão nuclear, as radiações emitidas por radioisótopos são usadas para diagnósticos de doenças, como no caso de tomografia computadorizada, em técnicas de detecção que utilizam ativação por nêutrons, além de tratamentos que utilizam captura de nêutrons como no caso do BNCT - *Boron Neutron Capture Therapy* - (Siqueira et al, 2019).

Apesar de diversas aplicações que contribuem para a sociedade, as reações nucleares podem apresentar riscos, quanto a exposição à radiação e a acidentes, além de possuírem alto custo econômico. Este fato, justifica o uso de simulações computacionais que podem ser usadas para estudar diversas configurações de um problema alvo, no caso desta dissertação, casos de reações induzidas por nêutrons. Uma das teorias para se estudar este tipo de problema é a teoria de transporte de nêutrons com o uso da equação de linear de Boltzmann (Lewis e Miller, 1984). Por outro lado, pode-se utilizar a formulação adjunta desta equação, como em Yang & Downar (1988).

A solução da equação que descreve a função importância é amplamente utilizada em teoria da perturbação e em cálculos variacionais relacionados a reatores nucleares. Isso deve-se, em partes, por seu significado físico de “importância” dos nêutrons em um sistema particular. Uma utilidade desta solução em problemas de fonte-fixa (tanto em meios multiplicativos quanto em meios não-multiplicativos), caso tenha-se interesse em calcular a resposta de um detector para diferentes fontes de nêutrons, é dispensar o cálculo do fluxo angular de nêutrons para cada fonte de nêutrons (Bell, 1970).

Contudo, tanto para o fluxo angular de nêutrons, que é a solução da equação de transporte de nêutrons, quanto para função importância, solução da equação de balanço da

formulação adjunta, têm-se equações integro-diferenciais para serem resolvidas, assim são necessários métodos de discretização que possibilitem a implementação computacional para encontrar solução do problema de interesse.

A função importância pode ser obtida ao aplicar a definição matemática de operador adjunto ao operador de transporte de nêutrons, assim, utilizando os métodos de discretização usados para resolver a equação de transporte de nêutrons, será obtido como solução a função importância adjunta física. Em contrapartida, pode-se obter uma equação matricial partindo-se da equação do fluxo angular de nêutrons discretizada. E ao tomar a transposta da matriz dos coeficientes, oriunda desta discretização, obtém-se uma equação cuja solução será a função importância adjunta matemática. De forma geral as funções importâncias adjuntas, física e matemática, não são equivalentes (Yang et al, 1994).

Esta dissertação teve como objetivo a abordagem da formulação adjunta de transporte de nêutrons unidimensional, independente do tempo, na formulação de multigrupos de energia, com fonte fixa de nêutrons e espalhamento isotrópico para meios multiplicativos e não-multiplicativos. Foi utilizada a formulação de Ordenadas Discretas (S_N) para discretizar a variável angular e usado o método *Diamond Difference* (DD) para discretizar a variável espacial. Com isso, foram obtidas a função importância adjunta física e a função importância adjunta matemática. Ademais, este trabalho também teve como objetivo realizar uma comparação entre essas funções adjuntas para o tipo de problema abordado. A fim de corroborar com os resultados obtidos, foram calculadas taxas de reações para três problemas-modelo. Esses cálculos foram feitos tanto a partir das funções adjuntas, física e matemática, quanto do fluxo angular de nêutrons.

O trabalho foi dividido em capítulos, totalizando seis. O primeiro capítulo aborda a modelagem matemática de problemas de transporte de nêutrons unidimensional, independente do tempo, na formulação de multigrupos de energia, com fonte fixa de nêutrons e espalhamento isotrópico para meios multiplicativos e não-multiplicativos. Nesse capítulo foram apresentados os métodos de discretização S_N e DD, além da obtenção da forma matricial das equações discretizadas.

Os capítulos 2 e 3 apresentam a formulação adjunta da equação de transporte de nêutrons abordada no capítulo 1, tal que, o capítulo 2 se reserva à função importância adjunta física e o capítulo 3 à função importância adjunta matemática. Por sua vez, o capítulo 4, descreve a modelagem computacional dos problemas tratados neste trabalho, ou seja, o modo com que os cálculos são feitos para obter os resultados expostos no capítulo 5, que apresenta resultados

numéricos e discussões a respeito dos resultados obtidos no trabalho. Por fim, o último capítulo contempla as conclusões desta dissertação.

1 TEORIA DE TRANSPORTE DE NÊUTRONS

A Física de Reatores nucleares tem como problema central a determinação da distribuição de nêutrons, segundo Duderstadt (1976). O estudo da população dessa partícula pode ser realizado a partir da Teoria de Transporte de Nêutrons, que utiliza a equação linear de Boltzmann, outrora escrita para gases ideais (Lewis e Miller, 1984).

A equação de transporte de nêutrons para um problema unidimensional, independente do tempo, de fonte-fixa, cujo os parâmetros nucleares e a fonte externa apresentam simetria azimutal é escrita como (Duderstadt, 1976):

$$\begin{aligned}
 \mu \frac{\partial \psi(x, \mu, E)}{\partial x} + \Sigma_T(x, E) \psi(x, \mu, E) \\
 = S_{ext}(x, \mu, E) \\
 + 2\pi \int_0^\infty \int_{-1}^{+1} \Sigma_S(x, \mu' \rightarrow \mu, E' \rightarrow E) \psi(x, \mu', E') d\mu' dE' \\
 + \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{-1}^{+1} \chi(E) \nu(E') \Sigma_F(x, E') \psi(x, \mu', E') d\mu' dE'.
 \end{aligned} \tag{1}$$

De modo que, x é a variável espacial. $\mu \equiv \cos \theta$, θ é a direção angular polar. A variável E é a energia dos nêutrons e $\psi(x, \mu, E)$ é o fluxo angular de nêutrons. Ademais, $\Sigma_T(x, E)$ é a seção de choque macroscópica total, ou seja, a soma entre seção de choque macroscópica de absorção $\Sigma_a(x, E)$ e a seção de choque macroscópica de espalhamento $\Sigma_S(x, E)$. $\Sigma_S(x, \mu' \rightarrow \mu, E' \rightarrow E)$ é a seção de choque duplamente diferencial de espalhamento. Ainda, $S_{ext}(x, \mu, E)$ é a fonte externa de nêutrons e o último termo da Eq.(1) é o termo de fonte de fissão, tal que, $\chi(E)$ é o espectro de fissão dos nêutrons emitido por fissão, $\nu(E')$ número médio de nêutrons produzido por fissão provocada por um nêutron de energia E' e $\Sigma_F(x, E')$ é a seção de choque macroscópica de fissão.

A solução da Eq.(1) pode ser usada em cálculos de taxas de reações, que são quantidades integrais lineares no fluxo angular de nêutrons. Segundo Bell (1970), tais quantidades são determinadas a partir da relação:

$$Q = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^H \int_{-1}^{+1} S^\dagger(x, \mu, E) \psi(x, \mu, E) d\mu dx dE, \quad (2)$$

tal que, $S^\dagger(x, \mu, E)$ é a sensibilidade do detector utilizado para calcular a quantidade integral Q .

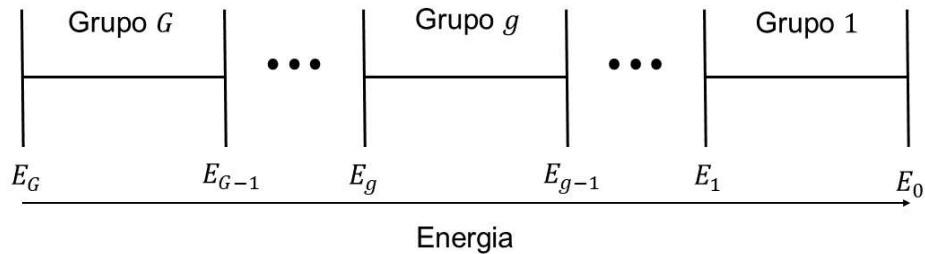
A Eq.(1), é uma equação integro-diferencial com três variáveis independentes: uma espaciais, uma angular e uma variável de energia. Portanto, não há solução analítica, dessa maneira são necessários métodos de discretização para obter-se solução numérica.

Neste capítulo, utilizou-se a formulação de multigrupos de energia para discretizar a variável de energia. Ademais, usou-se a formulação S_N para discretizar a variável angular e o método DD para discretizar a variável espacial. Por fim, foi apresentada a forma matricial da equação de transporte de nêutrons discretizada por esses métodos.

1.1 Formulação de multigrupos de energia

A formulação de multigrupos de energia divide o domínio dessa variável, que é contínuo, em um número finito de grupos, como representado na Figura 1.1. Cada grupo g de energia tem seus parâmetros nucleares bem definidos, dessa forma, possibilitando escrever uma equação de transporte de nêutrons para cada grupo de energia.

Figura 1 - Faixas de energia da formulação de multigrupos de energia



Fonte: O autor, 2025.

As G equações de transporte de nêutrons na formulação de multigrupos de energia são escritas por:

$$\begin{aligned}
& \mu \frac{\partial \psi_g(x, \mu)}{\partial x} + \Sigma_{T_g}(x) \psi_g(x, \mu) \\
& = S_{ext_g}(x, \mu) + 2\pi \sum_{g'=1}^G \int_{-1}^{+1} \Sigma_S^{g' \rightarrow g}(x, \mu' \rightarrow \mu) \psi_{g'}(x, \mu') d\mu' \\
& + \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \int_{-1}^{+1} \chi_g \nu \Sigma_{F_{g'}}(x) \psi_{g'}(x, \mu') d\mu', \\
& g = 1, 2, \dots, G.
\end{aligned} \tag{3}$$

Tal que, $\psi_g(x, \mu)$ é o fluxo angular do grupo g , $\Sigma_{T_g}(x)$ seção de choque macroscópica total do grupo g , $S_{ext_g}(x, \mu)$ fonte externa de nêutrons do grupo g , $\Sigma_S^{g' \rightarrow g}(x, \mu' \rightarrow \mu)$ seção de choque duplamente diferencial de espalhamento do grupo g' para o grupo g , χ_g espectro de fissão dos nêutrons gerados por fissão que pertencem ao grupo g e $\nu \Sigma_{F_{g'}}(x)$ é o produto entre o número médio de nêutrons gerados numa fissão ocasionada por um nêutron do grupo g' e a seção de choque macroscópica de fissão do grupo g' .

1.2 Discretização da variável angular

Após a discretização feita na seção anterior, as equações de transporte de nêutrons, Eq.(3), ainda apresentam caráter integro-diferencial e dependem de duas variáveis independentes: uma espacial e uma angular. Nesta seção, foi realizada a discretização da variável angular a partir da formulação S_N .

Na equação (3) há elementos que dependem da variável angular μ , o fluxo angular de nêutrons, $\psi_g(x, \mu)$, a seção de choque duplamente diferencial de espalhamento, $\Sigma_S^{g' \rightarrow g}(x, \mu' \rightarrow \mu)$ e a fonte externa de nêutrons $S_{ext_g}(x, \mu)$. Este último parâmetro pode ser escrito mediante a uma expansão em polinômios de Legendre como:

$$\Sigma_S^{g' \rightarrow g}(x, \mu' \rightarrow \mu) \equiv \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(2\ell+1)}{4\pi} \Sigma_{S\ell}^{g' \rightarrow g}(x) P_\ell(\mu) P_\ell(\mu'), \tag{4}$$

tal que, $P_\ell(\mu)$ e $P_\ell(\mu')$ são polinômios de Legendre de ordem ℓ , descritos por (Arfken, 2007):

$$P_\ell(\mu) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell (\mu^2 - 1)^\ell}{d\mu^\ell}, \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Considerando o espalhamento isotrópico tomaremos apenas o polinômio de grau zero ($\ell = 0$), resultando em

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \psi_g(x, \mu)}{\partial x} + \Sigma_{T_g}(x) \psi_g(x, \mu) \\ = S_{ext_g}(x, \mu) + \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \Sigma_{S0}^{g' \rightarrow g}(x) \int_{-1}^1 \psi_{g'}(x, \mu') d\mu' \\ + \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \chi_{g'} \nu \Sigma_{F_{g'}}(x) \int_{-1}^1 \psi_{g'}(x, \mu') d\mu', \end{aligned} \quad (6)$$

$g = 1, 2, \dots, G.$

As integrais na variável angular podem ser aproximadas por uma quadratura de Gauss-Legendre. Seja $f(\mu)$ uma função contínua no intervalo $[-1, +1]$, tem-se (Ruggiero, 1998):

$$\int_{-1}^1 f(\mu) d\mu \cong \sum_{n=1}^N \omega_n f(\mu_n). \quad (7)$$

Esta aproximação seleciona direções μ_n dentro do intervalo da variável de integração, esses valores são os chamados pontos de colocação da quadratura de Gauss-Legendre e compõem a malha discreta das direções. Por sua vez, ω_n representa os pesos dessas direções. Além disso, tem-se a seguinte relação:

$$\sum_{m=1}^N \omega_m = 2. \quad (8)$$

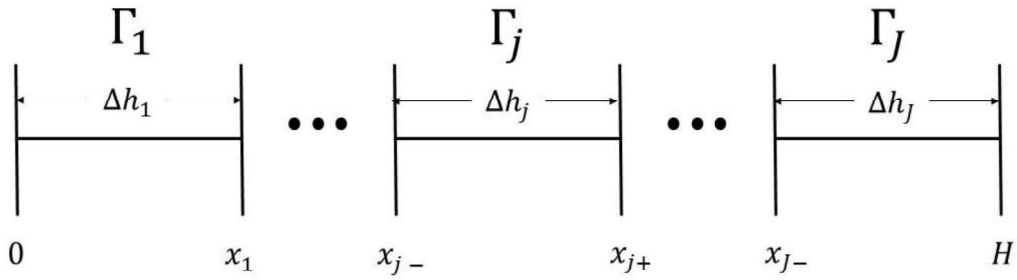
Então, definindo $\psi_g(x, \mu_m) \equiv \psi_{m,g}(x)$ é possível reescrever as equações de transporte de nêutrons na forma:

$$\begin{aligned}
& \mu_m \frac{d\psi_{m,g}(x)}{dx} + \Sigma_{T_g}(x) \psi_{m,g}(x) \\
& = S_{ext_{m,g}}(x) + \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \sum_{n=1}^N \Sigma_{S_0}^{g' \rightarrow g}(x) \omega_n \psi_{n,g'}(x) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \sum_{n=1}^N \chi_g \nu \Sigma_{F_{g'}}(x) \omega_n \psi_{n,g'}(x) , \\
& m = 1, 2, \dots, N \text{ e } g = 1, 2, \dots, G .
\end{aligned} \tag{9}$$

1.3 Discretização da variável espacial

A malha espacial discreta foi obtida dividindo-se o domínio material em nodos onde os parâmetros nucleares são uniformes. Na Figura 1.2 está representado a divisão do domínio de comprimento H em J nodos, Γ_j . Cada nodo tem largura $\Delta h_j = x_{j+} - x_{j-}$, de modo que, x_{j+} denota a extremidade direita do nodo Γ_j e x_{j-} denota a extremidade esquerda desse nodo.

Figura 2 - Malha espacial discreta



Fonte: O autor, 2025.

Dessa forma, obtém-se equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Essas equações são escritas por:

$$\begin{aligned}
& \mu_m \frac{d\psi_{m,g}(x_j)}{dx} + \Sigma_{Tg}^j \psi_{m,g}(x_j) \\
&= S_{ext\,m,g}^j + \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \sum_{n=1}^N \Sigma_{S0}^{g' \rightarrow g,j} \omega_n \psi_{n,g'}(x_j) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \sum_{n=1}^N \chi_g \nu \Sigma_{Fg'}^j \omega_n \psi_{n,g'}(x_j) , \\
&m = 1, 2, \dots, N ; g = 1, 2, \dots, G ; j = 1, 2, \dots, J .
\end{aligned} \tag{10}$$

De forma que, $\psi_{m,g}(x_j)$ representa o fluxa angular de nêutrons na direção m do grupo g definido no nodo de índice j , tal que $x_j \in [x_{j-}, x_{j+}]$. Σ_{Tg}^j representa a seção de choque macroscópica total do grupo g da região j , $\Sigma_{S0}^{g' \rightarrow g,j}$ a seção de choque macroscópica de espalhamento isotrópico do grupo g' para o grupo g da região j e $S_{ext\,m,g}^j$ a fonte externa de nêutrons da região j , do grupo g e com direção m , $\nu \Sigma_{Fg'}^j$ é o produto entre o número médio de nêutrons gerados numa fissão ocasionada por um nêutron do grupo g' e a seção de choque macroscópica de fissão do grupo g' da região j .

A solução da Eq.(10) foi obtida a partir do método DD, que consiste na escolha das larguras dos nodos de tal forma que, sejam suficientemente pequenas para considerar o fluxo angular de nêutrons linear em seu interior. Então, sendo $\mathcal{M}$ o operador média, dado por:

$$\mathcal{M}(\cdot) \equiv \frac{1}{\Delta h_j} \int_{x_{j-}}^{x_{j+}} (\cdot) dx . \tag{11}$$

A aplicação desse operador em Eq.(10) resulta nas equações intranodais

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu_m}{\Delta h_j} [\psi_{m,g}(x_{j+}) - \psi_{m,g}(x_{j-})] + \Sigma_{Tg}^j \bar{\psi}_{m,g}^j \\
&= S_{ext\,m,g}^j + \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \sum_{n=1}^N \Sigma_{S0}^{g' \rightarrow g,j} \omega_n \bar{\psi}_{n,g'}^j \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \sum_{n=1}^N \chi_g \nu \Sigma_{Fg'}^j \omega_n \bar{\psi}_{n,g'}^j ,
\end{aligned} \tag{12}$$

$$m = 1, 2, \dots, N ; g = 1, 2, \dots, G ; j = 1, 2, \dots, J .$$

Onde, $\bar{\psi}_{m,g}^j$ é o fluxo médio de direção m , do nodo j e do grupo g . Além disso, devido à aproximação oriunda do DD, o fluxo angular médio é definido por:

$$\mathcal{M}\psi_{m,g}(x_j) \equiv \bar{\psi}_{m,g}^j \cong \frac{1}{2} [\psi_{m,g}(x_{j+}) + \psi_{m,g}(x_{j-})]. \quad (13)$$

Portanto, as equações (12) e (13), além da condição de continuidade, $\psi_{m,g}(x_{j+}) = \psi_{m,g}(x_{(j+1)-})$, e das condições de contorno,

$$\begin{cases} \psi_{m,g}(0) = K & , \forall \ 1 \leq m \leq \frac{N}{2} \\ \psi_{m,g}(H) = K' & , \forall \ \frac{N}{2} + 1 \leq m \leq N \end{cases} , \quad (14)$$

formam um sistema linear possível e determinado cuja solução serão os fluxos angulares de nêutrons nas extremidades de cada nodo, $\psi_{m,g}(x_j)$.

1.4 Formalismo matricial do transporte de nêutrons $S_N - DD$

A fim de escrever o sistema linear encontrado na seção anterior no formalismo matricial, foi necessário reescrever as equações de balanço de nêutrons intranodais, Eq.(12), em função do fluxo angular médio $\bar{\psi}_{m,g}^j$. Desta maneira, construindo uma equação matricial para o fluxo angular médio de nêutrons.

Para representar as equações de balanço intranodais em função dos fluxos angulares médios de nêutrons é definido $\tilde{\psi}_{m,g}^j$, que representa a diferença desses fluxos nas extremidades do nodo j ,

$$\tilde{\psi}_{m,g}^j \equiv [\psi_{m,g}(x_{j+}) - \psi_{m,g}(x_{j-})]. \quad (15)$$

Então, utilizou-se a condição de continuidade e a Eq.(13) para reescrever os termos da Eq.(15) em função dos fluxos angulares médios de nêutrons, obtendo-se a seguinte relação:

$$\begin{cases} \tilde{\psi}_{m,g}^j = 2\bar{\psi}_{m,g}^j + 4 \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq 1}}^{j-1} (-1)^k \bar{\psi}_{m,g}^{j-k} + 2(-1)^j \psi_{m,g}(0) & , \forall \quad 1 \leq m \leq \frac{N}{2} \\ \tilde{\psi}_{m,g}^j = -2\bar{\psi}_{m,g}^j + 4 \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq J}}^{J-j} (-1)^{k-1} \bar{\psi}_{m,g}^{j+k} + 2(-1)^{J-j} \psi_{m,g}(H) & , \forall \quad \frac{N}{2} + 1 \leq m \leq N \end{cases} \quad (16)$$

Com a Eq.(16) podemos reescrever o problema de transporte em função dos fluxos angulares médios e dos valores dos fluxos angulares nos contornos do domínio, para as direções que $1 \leq m \leq \frac{N}{2}$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_m}{\Delta h_j} \left[2\bar{\psi}_{m,g}^j + 4 \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq 1}}^{j-1} (-1)^k \bar{\psi}_{m,g}^{j-k} \right] + \Sigma_{T_g}^j \bar{\psi}_{m,g}^j \\ - \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \sum_{n=1}^N \left\{ \Sigma_{S0}^{g' \rightarrow g,j} + \chi_g \nu \Sigma_{F_{g'}}^j \right\} \omega_n \bar{\psi}_{n,g'}^j = \bar{S}_{m,g}^j, \end{aligned} \quad (17)$$

$$m = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}; g = 1, 2, \dots, G; j = 1, 2, \dots, J;$$

e para as direções $\frac{N}{2} + 1 \leq m \leq N$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_m}{\Delta h_j} \left[-2\bar{\psi}_{m,g}^j + 4 \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq J}}^{J-j} (-1)^{k-1} \bar{\psi}_{m,g}^{j+k} \right] + \Sigma_{T_g}^j \bar{\psi}_{m,g}^j \\ - \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \sum_{n=1}^N \left\{ \Sigma_{S0}^{g' \rightarrow g,j} + \chi_g \nu \Sigma_{F_{g'}}^j \right\} \omega_n \bar{\psi}_{n,g'}^j = \bar{S}_{m,g}^j, \end{aligned} \quad (18)$$

$$m = \frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2} + 2, \dots, N; g = 1, 2, \dots, G; j = 1, 2, \dots, J.$$

Por sua vez, o termo de fonte da Eq.(17) e da Eq.(18) é descrito por:

$$\bar{S}_{m,g}^j = \begin{cases} S_{ext m,g}^j - 2 \frac{\mu_m}{\Delta h_j} (-1)^j \psi_{m,g}(0) & , \forall \quad 1 \leq m \leq \frac{N}{2} \\ S_{ext m,g}^j - 2 \frac{\mu_m}{\Delta h_j} (-1)^{J-j} \psi_{m,g}(H) & , \forall \quad \frac{N}{2} + 1 \leq m \leq N \end{cases}. \quad (19)$$

Dessa maneira, as equações (17) e (18) podem ser reescritas na seguinte forma matricial:

$$\Lambda \bar{\Psi} = \bar{S}. \quad (20)$$

Tal que $\bar{\Psi}$ é uma matriz coluna que contém os valores dos fluxos angulares médios organizados da seguinte forma:

$$\bar{\Psi} = [\bar{\psi}_{1,1}^1 \quad \bar{\psi}_{2,1}^1 \cdots \bar{\psi}_{N,1}^1 \quad \bar{\psi}_{1,2}^1 \quad \bar{\psi}_{2,2}^1 \cdots \bar{\psi}_{N,G}^1 \quad \bar{\psi}_{1,1}^2 \cdots \bar{\psi}_{N,G}^J]^T. \quad (21)$$

$\bar{S}$ é a matriz coluna que contém os termos de fonte das equações de balanço, dada por:

$$\bar{S} = [\bar{S}_{1,1}^1 \quad \bar{S}_{2,1}^1 \cdots \bar{S}_{N,1}^1 \quad \bar{S}_{1,2}^1 \quad \bar{S}_{2,2}^1 \cdots \bar{S}_{N,G}^1 \quad \bar{S}_{1,1}^2 \cdots \bar{S}_{N,G}^J]^T. \quad (22)$$

Ademais, Λ é a matriz dos coeficientes do problema de transporte unidimensional na formulação multigrupos de energia, com espalhamento isotrópico, na formulação S_N , ao aplicar a aproximação do DD. Essa matriz pode ser escrita em termos de outras matrizes mais simples, como:

$$\Lambda = MA + \Sigma_T - (\Sigma_{S0} + F)W. \quad (23)$$

A matriz M na Eq.(23), é diagonal cujos os termos são dados por $\mu_m/\Delta h_j$, obedecendo a mesma organização da matriz coluna $\bar{\Psi}$.

$$M = \begin{pmatrix} M^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M^J \end{pmatrix}_{NGJ \times NGJ}, \quad (24)$$

de modo que,

$$M^j = \frac{1}{\Delta h_j} \begin{pmatrix} M_1^j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2^j & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_G^j \end{pmatrix}_{NG \times NG}, \text{ com } M_g^j = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N). \quad (25)$$

A matriz A é uma matriz que efetua as operações do interior dos colchetes das equações (17) e (18) ao ser aplicada à matriz coluna $\bar{\Psi}$.

$$A = \begin{pmatrix} D^1 & A_{\mu>0}^{12} & \dots & A_{\mu>0}^{1J} \\ A_{\mu<0}^{21} & D^2 & \dots & A_{\mu>0}^{2J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{\mu<0}^{J1} & A_{\mu<0}^{J2} & \dots & D^J \end{pmatrix}_{NGJ \times NGJ}, \quad (26)$$

tal que,

$$D^j = \begin{pmatrix} d_1^j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_G^j \end{pmatrix}_{NG \times NG}, \text{ com } d_g^j = \begin{pmatrix} 2 \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & -2 \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}} \end{bmatrix} \end{pmatrix}_{N \times N}. \quad (27)$$

Além disso,

$$A_{\mu>0}^{jk} = \begin{pmatrix} (a_{\mu>0}^{jk})_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (a_{\mu>0}^{jk})_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (a_{\mu>0}^{jk})_G \end{pmatrix}_{NG \times NG}, \quad (28)$$

com

$$(a_{\mu>0}^{jk})_g = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4(-1)^k \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}} \end{bmatrix} \end{pmatrix}_{N \times N}. \quad (29)$$

Por outro lado, tem-se:

$$A_{\mu < 0}^{jk} = \begin{pmatrix} (a_{\mu < 0}^{jk})_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (a_{\mu < 0}^{jk})_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (a_{\mu < 0}^{jk})_G \end{pmatrix}_{NG \times NG}, \quad (30)$$

com

$$(a_{\mu < 0}^{jk})_g = \begin{pmatrix} 4(-1)^{k-1} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{N \times N}. \quad (31)$$

Σ_T é uma matriz diagonal cujos termos são dados por $\Sigma_{T_g}^j$, obedecendo a mesma organização da matriz coluna $\bar{\Psi}$, ou seja,

$$\Sigma_T = \begin{pmatrix} \Sigma_T^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Sigma_T^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \Sigma_T^J \end{pmatrix}_{NGJ \times NGJ}, \quad (38)$$

de modo que,

$$\Sigma_T^j = \begin{pmatrix} \Sigma_{T_1}^j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Sigma_{T_2}^j & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \Sigma_{T_G}^j \end{pmatrix}_{NG \times NG}, \text{ com } \Sigma_{T_g}^j = \text{diag}(\Sigma_{T_g}^j, \Sigma_{T_g}^j, \dots, \Sigma_{T_g}^j)_{N \times N}. \quad (39)$$

A matriz Σ_{S_0} é uma matriz diagonal em blocos dada por:

$$\Sigma_{S_0} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Sigma_{S_0}^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Sigma_{S_0}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \Sigma_{S_0}^J \end{pmatrix}_{NGJ \times NGJ}, \quad (40)$$

tal que,

$$\Sigma_{s0}^j = \begin{pmatrix} [\Sigma_{s0}^{1 \rightarrow 1}, j]_{N \times N} & [\Sigma_{s0}^{2 \rightarrow 1}, j]_{N \times N} & \cdots & [\Sigma_{s0}^{G \rightarrow 1}, j]_{N \times N} \\ [\Sigma_{s0}^{1 \rightarrow 2}, j]_{N \times N} & [\Sigma_{s0}^{2 \rightarrow 2}, j]_{N \times N} & \cdots & [\Sigma_{s0}^{G \rightarrow 2}, j]_{N \times N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\Sigma_{s0}^{1 \rightarrow G}, j]_{N \times N} & [\Sigma_{s0}^{2 \rightarrow G}, j]_{N \times N} & \cdots & [\Sigma_{s0}^{G \rightarrow G}, j]_{N \times N} \end{pmatrix}_{NG \times NG}. \quad (41)$$

Por sua vez, $[\Sigma_{s0}^{g' \rightarrow g}, j]_{N \times N}$ é uma matriz cheia de dimensão $N \times N$, na qual todos os elementos são dados por $\Sigma_{s0}^{g' \rightarrow g}, j$.

A matriz F é diagonal em blocos composta pelo produto dos espectros de fissão, o número médio de nêutrons gerado por fissão e a seção de choque de macroscópica de fissão, ou seja, $\chi_g \nu \Sigma_{Fg'}^j$.

$$F = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} F^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & F^J \end{pmatrix}_{NGJ \times NGJ}, \quad (42)$$

tal que,

$$F^j = \begin{pmatrix} [\chi_1 \nu \Sigma_{F_1}^j]_{N \times N} & [\chi_1 \nu \Sigma_{F_2}^j]_{N \times N} & \cdots & [\chi_1 \nu \Sigma_{F_G}^j]_{N \times N} \\ [\chi_2 \nu \Sigma_{F_1}^j]_{N \times N} & [\chi_2 \nu \Sigma_{F_2}^j]_{N \times N} & \cdots & [\chi_2 \nu \Sigma_{F_G}^j]_{N \times N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\chi_G \nu \Sigma_{F_1}^j]_{N \times N} & [\chi_G \nu \Sigma_{F_2}^j]_{N \times N} & \cdots & [\chi_G \nu \Sigma_{F_G}^j]_{N \times N} \end{pmatrix}_{NG \times NG}. \quad (43)$$

Por sua vez, $[\chi_g \nu \Sigma_{Fg'}^j]_{N \times N}$ é uma matriz cheia de dimensão $N \times N$, na qual todos os elementos são dados por $\chi_g \nu \Sigma_{Fg'}^j$.

A matriz W também é uma matriz diagonal, porém seus termos são os pesos da quadratura de Gauss-Legendre, ω_m .

$$W = \begin{pmatrix} W^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & W^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & W^J \end{pmatrix}_{NGJ \times NGJ}, \quad (44)$$

de modo que,

$$W^j = \begin{pmatrix} W_1^j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_2^j & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & W_G^j \end{pmatrix}_{NG \times NG}, \text{ com } W_g^j = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N). \quad (45)$$

Ademais, normalmente não se resolve a equação de transporte de nêutrons a partir da equação matricial Eq.(20), mas utiliza-se as equações intranodais, Eq.(17) e Eq.(18), como realizado no capítulo 4. Entretanto, a formulação matricial da equação de transporte discretizada é útil para realizar um comparativo com os resultados obtidos na formulação adjunta de transporte de nêutrons, que será abordado no próximo capítulo.

2 FUNÇÃO IMPORTÂNCIA ADJUNTA FÍSICA

A formulação adjunta de transporte de nêutrons apresenta diversas aplicações na área de Física de Reatores nucleares, como em cálculos de análise da potência do núcleo do reator (Tang e Downar, 1988), em determinação de fontes de nêutrons prescritas (Moraes, 2020), em estudos de resposta de detectores (Garcia, 2004). A relevância desta formulação não está unicamente na aplicabilidade em cálculos de parâmetros mensuráveis em reatores nucleares, mas também em seu significado físico de “importância” dos nêutrons para uma determinada medida (Bell, 1970).

Neste capítulo foi derivada a equação para função importância usando a definição matemática de operador adjunto (Bell, 1970; Childs, 1980). Além disso, como essa equação também é uma equação integro-diferencial, foram aplicados os mesmos métodos de discretização utilizados no capítulo anterior. Neste caso, a solução é chamada de função importância adjunta física.

2.1 Equação para a função importância adjunta física

Para determinar a equação para a função importância adjunta física, primeiro toma-se o operador de transporte $\mathcal{L}$, que para um problema unidimensional de fonte-fixa, na formulação de multigrupos de energia, com espalhamento isotrópico é escrito como:

$$\mathcal{L}(\cdot) \equiv \mu \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + \Sigma_{T_g}(x)(\cdot) - \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \left\{ \Sigma_{S0}^{g' \rightarrow g}(x) + \chi_g \nu \Sigma_{F_{g'}}(x) \right\} \int_{-1}^1 (\cdot) d\mu', \quad (46)$$

assim a equação de transporte, Eq.(6), pode ser escrita na formulação de operador da seguinte forma:

$$\mathcal{L}\psi_g(x, \mu) = S_{ext_g}(x, \mu). \quad (47)$$

Consequente, seja $\mathcal{O}$ um operador que atua na função $f(\xi)$, ξ representa as variáveis a qual essa função é dependente. Então tem-se a definição de operador adjunto dado por (Bell, 1970):

$$\int_{\xi} f^*(\xi) [\mathcal{O}f(\xi)] d\xi = \int_{\xi} f(\xi) [\mathcal{O}^\dagger f^*(\xi)] d\xi. \quad (48)$$

Tal que, $\mathcal{O}^\dagger$ é o operador adjunto a $\mathcal{O}$ e $f^*(\xi)$ é a função adjunta. Assim, aplicando essa definição no operador de transporte de nêutrons $\mathcal{L}$, pode-se escrever a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \sum_{g=1}^G \int_0^H \int_{-1}^1 \psi_g^*(x, \mu) [\mathcal{L}\psi_g(x, \mu)] d\mu dx \\ = \sum_{g=1}^G \int_0^H \int_{-1}^1 \psi_g(x, \mu) [\mathcal{L}^\dagger \psi_g^*(x, \mu)] d\mu dx. \end{aligned} \quad (49)$$

Por sua vez, $\psi_g^*(x, \mu)$ é a função importância adjunta física e $\mathcal{L}^\dagger$ é o operador adjunto de transporte de nêutrons.

A fim de determinar a forma do operador $\mathcal{L}^\dagger$, é explicitado os termos do operador $\mathcal{L}$ do lado esquerdo da Eq.(49) e comparado termo a termo com o lado direito dessa equação. Dessa maneira, obtém-se a definição do operador adjunto, $\mathcal{L}^\dagger$. O lado esquerdo da Eq.(49) é reescrito como:

$$\begin{aligned}
& \sum_{g=1}^G \int_0^H \int_{-1}^1 \psi_g^*(x, \mu) [\mathcal{L}\psi_g(x, \mu)] d\mu dx \\
&= \sum_{g=1}^G \int_0^H \int_{-1}^1 \psi_g^*(x, \mu) \left\{ \mu \frac{\partial \psi_g(x, \mu)}{\partial x} \right\} d\mu dx \\
&+ \sum_{g=1}^G \int_0^H \int_{-1}^1 \psi_g^*(x, \mu) \left\{ \Sigma_{T_g}(x) \psi_g(x, \mu) \right\} d\mu dx \\
&- \sum_{g=1}^G \int_0^H \int_{-1}^1 \psi_g^*(x, \mu) \left\{ \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \Sigma_{S_0}^{g' \rightarrow g}(x) \int_{-1}^1 \psi_{g'}(x, \mu') d\mu' \right\} d\mu dx \\
&- \sum_{g=1}^G \int_0^H \int_{-1}^1 \psi_g^*(x, \mu) \left\{ \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \chi_g \nu \Sigma_{F_{g'}}(x) \int_{-1}^1 \psi_{g'}(x, \mu') d\mu' \right\} d\mu dx
\end{aligned} \tag{50}$$

O primeiro termo do lado direito da Eq.(50) pode ser reescrito a partir da relação:

$$\begin{aligned}
& \sum_{g=1}^G \int_0^H \int_{-1}^1 \psi_g^*(x, \mu) \left\{ \mu \frac{\partial \psi_g(x, \mu)}{\partial x} \right\} d\mu dx \\
&= \sum_{g=1}^G \int_0^H \int_{-1}^1 \mu \frac{\partial}{\partial x} \{ \psi_g^*(x, \mu) \psi_g(x, \mu) \} d\mu dx \\
&+ \sum_{g=1}^G \int_0^H \int_{-1}^1 \psi_g(x, \mu) \left\{ -\mu \frac{\partial \psi_g^*(x, \mu)}{\partial x} \right\} d\mu dx,
\end{aligned} \tag{51}$$

onde o primeiro termo da direita da Eq.(51) é o Concomitante Bilinear (*CCB*),

$$CCB \equiv \sum_{g=1}^G \int_0^H \int_{-1}^1 \mu \frac{\partial}{\partial x} \{ \psi_g^*(x, \mu) \psi_g(x, \mu) \} d\mu dx. \tag{52}$$

O segundo termo do lado direito da Eq.(50), por ter apenas escalares, pode ser reescrito de maneira direta na forma:

$$\begin{aligned}
& \sum_{g=1}^G \int_0^H \int_{-1}^1 \psi_g^*(x, \mu) \left\{ \Sigma_{T_g}(x) \psi_g(x, \mu) \right\} d\mu dx \\
& = \sum_{g=1}^G \int_0^H \int_{-1}^1 \psi_g(x, \mu) \left\{ \Sigma_{T_g}(x) \psi_g^*(x, \mu) \right\} d\mu dx.
\end{aligned} \tag{53}$$

O terceiro e o quarto termo do lado direito da Eq.(50) podem ser agrupados e reescritos ao ser realizada uma troca de variáveis, obtendo-se:

$$\begin{aligned}
& \sum_{g=1}^G \int_0^H \int_{-1}^1 \psi_g^*(x, \mu) \left\{ \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \int_{-1}^1 \left\{ \Sigma_{S_0}^{g' \rightarrow g}(x) + \chi_{g'} \nu \Sigma_{F_{g'}}(x) \right\} \psi_{g'}(x, \mu') d\mu' \right\} d\mu dx \\
& = \sum_{g=1}^G \int_0^H \int_{-1}^1 \psi_g(x, \mu) \left\{ \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \int_{-1}^1 \left\{ \Sigma_{S_0}^{g \rightarrow g'}(x) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \chi_{g'} \nu \Sigma_{F_{g'}}(x) \right\} \psi_{g'}^*(x, \mu') d\mu' \right\} d\mu dx.
\end{aligned} \tag{54}$$

Portanto, comparando-se termo a termo do lado direito da Eq.(50), ou seja, as equações Eq.(51), Eq.(53) e Eq.(54), com o lado direito da Eq.(49) é possível definir o operador adjunto de transporte $\mathcal{L}^\dagger$, dado por:

$$\mathcal{L}^\dagger(\cdot) \equiv -\mu \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + \Sigma_{T_g}(x)(\cdot) - \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \left\{ \Sigma_{S_0}^{g \rightarrow g'}(x) + \chi_{g'} \nu \Sigma_{F_{g'}}(x) \right\} \int_{-1}^1 (\cdot) d\mu'. \tag{55}$$

Assim, a equação da função importância, escrita na formulação de operador, é dada por:

$$\mathcal{L}^\dagger \psi_g^*(x, \mu) = S_g^\dagger(x, \mu), \tag{56}$$

de modo que, $S_g^\dagger(x, \mu)$ é o termo de fonte da Eq.(56). A partir dessa equação, a função importância adjunta física é solução da seguinte equação, na teoria de transporte de nêutrons:

$$\begin{aligned}
& -\mu \frac{\partial \psi_g^*(x, \mu)}{\partial x} + \Sigma_{T_g}(x) \psi_g^*(x, \mu) \\
& - \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \left\{ \Sigma_{S0}^{g \rightarrow g'}(x) + \chi_{g'} \nu \Sigma_{F_g}(x) \right\} \int_{-1}^1 \psi_{g'}^*(x, \mu') d\mu' \\
& = S_g^\dagger(x, \mu), \\
& g = 1, 2, \dots, G.
\end{aligned} \tag{57}$$

Note que a Eq.(57) não apresenta o termo de concomitante bilinear ($CCB = 0$). Isto ocorre para que, a definição de $\mathcal{L}^\dagger$ expressa pela Eq.(55) mantenha o significado físico de $\psi_g^*(x, \mu)$, “importância” dos nêutrons da fonte $S_{ext_g}(x, \mu)$ na contribuição da resposta do detector para realizar uma medida cuja a sensibilidade do detector é dada pela seção de choque macroscópica de absorção, ou seja, $S_g^\dagger(x, \mu) = \Sigma_{a_g}(x)$ dos nuclídeos que compõem o detector (Bell, 1970). Isso, pode ser observado ao escrever uma quantidade integral Q da forma:

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{g=1}^G \int_0^H \int_{-1}^1 \Sigma_{a_g}(x) \psi_g(x, \mu) d\mu dx, \tag{58}$$

e, partindo da Eq.(56), obtendo-se essa quantidade integral em termos da função importância física como:

$$Q = \sum_{g=1}^G \int_0^H \int_{-1}^1 S_{ext_g}(x, \mu) \psi_g^*(x, \mu) d\mu dx = \sum_{g=1}^G \int_0^H \int_{-1}^1 \Sigma_{a_g}(x) \psi_g(x, \mu) d\mu dx. \tag{59}$$

É relevante observar que a Eq.(59) é conhecida como Relação de Reciprocidade de Fontes (Gandini, 2001) e ela serve como um parâmetro de verificação se o cálculo da função importância está feito corretamente.

Além de considerar o CCB nulo, esta dissertação considera que as funções importâncias nas extremidades do domínio e com direção orientada para fora dele, são nulas ($\psi_g^*(0, \mu < 0) = 0$ e $\psi_g^*(H, \mu > 0) = 0$). Isto está em concordância com o significado físico da função adjunta, ou seja, os nêutrons que saem do domínio-material não são importantes para uma determinada quantidade integral definida neste domínio. Portanto, resolvendo-se a integral em x da Eq.(52), obtém-se:

$$CCB = \sum_{g=1}^G \left\{ \int_{-1}^0 \mu [\psi_g^*(H, \mu) \psi_g(H, \mu)] d\mu - \int_0^1 \mu [\psi_g^*(0, \mu) \psi_g(0, \mu)] d\mu \right\} = 0. \quad (60)$$

Assim, a partir da Eq.(60), verifica-se que o operador de transporte adjunto escrito com na Eq.(55) pode ser utilizado em casos que não haja nêutrons entrando pelas extremidades do domínio (condição de contorno do tipo vácuo). Contudo, essa condição não limita o estudo desta dissertação, uma vez que, caso haja nêutrons entrando no domínio pelos contornos em um determinado problema físico, é possível modelá-lo como um problema de fonte-fixa, com condições de contorno do tipo vácuo, considerando uma fonte descrita por um delta de Dirac nos pontos dos contornos.

2.2 Discretização da variável angular e da variável espacial

A equação (58), assim como no caso da equação de transporte de nêutrons, é uma equação integro-diferencial que necessita de métodos de discretização de suas variáveis para obter solução. Desta maneira, utilizam-se os mesmos métodos usados para o caso da equação de transporte de nêutrons, ou seja, formalismo S_N para a discretização da variável angular e o método DD para a discretização da variável espacial.

Sendo ω_n os pesos da quadratura de Gauss-Legendre utilizados para aproximar o termo integral da equação de balanço, obtém-se a equação discretizada na variável angular dada por:

$$-\mu_m \frac{d\psi_{m,g}^*(x)}{dx} + \Sigma_{T_g}(x) \psi_{m,g}^*(x) - \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \left\{ \Sigma_{S0}^{g \rightarrow g'}(x) + \chi_{g'} \nu \Sigma_{F_g}(x) \right\} \sum_{n=1}^N \omega_n \psi_{n,g'}^*(x) = S_{m,g}^+(x), \quad (61)$$

$$m = 1, 2, \dots, N \text{ e } g = 1, 2, \dots, G.$$

Ademais, considerando as regiões com os parâmetros físico-materiais uniformes, é possível escrever um sistema de equações intranodais cuja solução é a função importância adjunta física, escrito como:

$$\begin{aligned}
& -\mu_m \frac{d\psi_{m,g}^*(x_j)}{dx} + \Sigma_{T_g}^j \psi_{m,g}^*(x_j) \\
& - \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \left\{ \Sigma_{S0}^{g \rightarrow g',j} + \chi_{g'} \nu \Sigma_{F_g}^j \right\} \sum_{n=1}^N \omega_n \psi_{n,g'}^*(x_j) = S_{m,g}^{\dagger j},
\end{aligned} \tag{62}$$

$$m = 1, 2, \dots, N ; g = 1, 2, \dots, G \text{ e } j = 1, 2, \dots, J.$$

Considerando nodos de larguras suficientemente pequenas, pode-se aplicar a aproximação do DD, ou seja, considerar que a função importância adjunta física tem um comportamento linear no interior de cada nodo. Dado que, $\psi_{m,g}^*(x_{j+})$ e $\psi_{m,g}^*(x_{j-})$, representam a função importância adjunta física nos extremos direito e esquerdo do nodo j , respectivamente. A função importância adjunta física média no nodo j será representada por $\overline{\psi}_{m,g}^{\star j}$, tal que

$$\overline{\psi}_{m,g}^{\star j} \cong \frac{1}{2} [\psi_{m,g}^*(x_{j+}) + \psi_{m,g}^*(x_{j-})]. \tag{63}$$

Por sua vez, $\overline{\psi}_{m,g}^{\star j}$ é obtido a partir da aplicação do operador média ($\mathcal{M}$). De modo que,

$$\mathcal{M}\psi_{m,g}^*(x_j) = \frac{1}{\Delta h_j} \int_{x_{j-}}^{x_{j+}} \psi_{m,g}^*(x_j) dx \equiv \overline{\psi}_{m,g}^{\star j} \tag{64}$$

Então, ao aplicar o operador média, Eq.(11), às equações de balanço intranodais, Eq.(62), é possível escrever um sistema linear, com coeficientes constantes, dado por:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\mu_m}{\Delta h_j} [\psi_{m,g}^*(x_{j+}) - \psi_{m,g}^*(x_{j-})] + \Sigma_{T_g}^j \overline{\psi}_{m,g}^{\star j} \\
& - \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \left\{ \Sigma_{S0}^{g \rightarrow g',j} + \chi_{g'} \nu \Sigma_{F_g}^j \right\} \sum_{n=1}^N \omega_n \overline{\psi}_{n,g'}^{\star j} = S_{m,g}^{\dagger j},
\end{aligned} \tag{65}$$

$$m = 1, 2, \dots, N ; g = 1, 2, \dots, G \text{ e } j = 1, 2, \dots, J.$$

Este sistema se torna completo ao considerar as condições de contorno:

$$\begin{cases} \psi_{m,g}^*(0) = 0 & , \forall \frac{N}{2} + 1 \leq m \leq N \\ \psi_{m,g}^*(H) = 0 & , \forall 1 \leq m \leq \frac{N}{2} \end{cases}; \quad (66)$$

Além da condição de continuidade:

$$\psi_{m,g}^*(x_{j+}) = \psi_{m,g}^*(x_{(j+1)-}); \quad (67)$$

E por fim, considerar Eq. (63), ou seja, a aproximação do DD para a função importância adjunta física.

De posse do sistema linear descrito pelas equações (63), (65), (66) e (67) é possível obter a solução para a função importância adjunta física através de métodos iterativos, que serão descritos no capítulo 4, e por método direto. Para este último, é preciso escrever esse sistema em um formalismo matricial, $Ax = b$, semelhante ao caso da equação de transporte de nêutrons, e então solucionado diretamente ao tomar a inversa da matriz de coeficientes.

2.3 Formalismo matricial da função importância adjunta física

A fim de escrever o sistema linear encontrado na seção anterior no formalismo matricial, é necessário reescrever a equação de balanço, Eq.(65), em termos da função importância adjunta física média $\overline{\psi}_{m,g}^*$. Além disso, definindo $\widetilde{\psi}_{m,g}^*$ como sendo a diferença entre o adjunto físico no extremo direito do nodo j e o adjunto físico no extremo esquerdo do nodo j , ou seja,

$$\widetilde{\psi}_{m,g}^* \equiv \psi_{m,g}^*(x_{j+}) - \psi_{m,g}^*(x_{j-}), \quad (68)$$

pode-se utilizar, a aproximação do método DD para a função importância adjunta física e a condição de continuidade, Eq(63) e Eq.(67), para escrever $\widetilde{\psi}_{m,g}^*$ em termos das funções importâncias adjuntas físicas médias nos nodos, como:

$$\begin{cases} \widetilde{\psi}_{m,g}^{\star j} = 2\overline{\psi}_{m,g}^{\star j} + 4 \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq 1}}^{j-1} (-1)^k \overline{\psi}_{m,g}^{\star j-k} & ; \forall \frac{N}{2} + 1 \leq m \leq N \\ \widetilde{\psi}_{m,g}^{\star j} = -2\overline{\psi}_{m,g}^{\star j} + 4 \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq J}}^{J-j} (-1)^{k-1} \overline{\psi}_{m,g}^{\star j+k} & ; \forall 1 \leq m \leq \frac{N}{2} \end{cases} . \quad (69)$$

Consequentemente, é possível reescrever as equações intranodais em função da função importância adjunta física média. Para as direções onde $N/2 + 1 \leq m \leq N$, tem-se:

$$\begin{aligned} -\frac{\mu_m}{\Delta h_j} \left[2\overline{\psi}_{m,g}^{\star j} + 4 \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq 1}}^{j-1} (-1)^k \overline{\psi}_{m,g}^{\star j-k} \right] + \Sigma_{T_g}^j \overline{\psi}_{m,g}^{\star j} \\ - \frac{1}{2} \sum_{g'}^G \sum_{n=1}^N \left\{ \Sigma_{S_0}^{g \rightarrow g', j} + \chi_{g'} \nu \Sigma_{F_g}^j \right\} \omega_n \overline{\psi}_{n,g'}^{\star j} = S_{m,g}^{\dagger j}, \end{aligned} \quad (70)$$

$$m = \frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2} + 2, \dots, N ; g = 1, 2, \dots, G \text{ e } j = 1, 2, \dots, J.$$

Por sua vez, para as direções onde $1 \leq m \leq N/2$, tem-se:

$$\begin{aligned} -\frac{\mu_m}{\Delta h_j} \left[-2\overline{\psi}_{m,g}^{\star j} + 4 \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq J}}^{J-j} (-1)^{k-1} \overline{\psi}_{m,g}^{\star j+k} \right] + \Sigma_{T_g}^j \overline{\psi}_{m,g}^{\star j} \\ - \frac{1}{2} \sum_{g'}^G \sum_{n=1}^N \left\{ \Sigma_{S_0}^{g \rightarrow g', j} + \chi_{g'} \nu \Sigma_{F_g}^j \right\} \omega_n \overline{\psi}_{n,g'}^{\star j} = S_{m,g}^{\dagger j}, \end{aligned} \quad (71)$$

$$m = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} ; g = 1, 2, \dots, G \text{ e } j = 1, 2, \dots, J.$$

Desta maneira, o sistema linear, dado pelas equações (70) e (71), pode ser escrito em notação matricial na forma:

$$\Lambda^\dagger \overline{\Psi}^\star = S^\dagger. \quad (72)$$

Tal que, $\overline{\Psi}^*$ é uma matriz coluna que contém os valores das funções importâncias adjuntas físicas médias organizados da forma:

$$\overline{\Psi}^* = \left[\overline{\psi}_{1,1}^{*1} \overline{\psi}_{2,1}^{*1} \cdots \overline{\psi}_{N,1}^{*1} \overline{\psi}_{1,2}^{*1} \overline{\psi}_{2,2}^{*1} \cdots \overline{\psi}_{N,G}^{*1} \overline{\psi}_{1,1}^{*2} \cdots \overline{\psi}_{N,G}^{*J} \right]^T. \quad (73)$$

$\overline{S}^\dagger$ é a matriz coluna que contém os termos de fonte das equações adjuntas, escrita na forma:

$$S^\dagger = \left[S_{1,1}^{\dagger 1} S_{2,1}^{\dagger 1} \cdots S_{N,1}^{\dagger 1} S_{1,2}^{\dagger 1} S_{2,2}^{\dagger 1} \cdots S_{N,G}^{\dagger 1} S_{1,1}^{\dagger 2} \cdots S_{N,G}^{\dagger J} \right]^T. \quad (74)$$

Ademais, $\Lambda^\dagger$ é a matriz dos coeficientes do problema adjunto do transporte unidimensional na formulação de multigrupos de energia, com espalhamento isotrópico, na formulação S_N ao aplicar a aproximação do DD, cuja solução é a função importância adjunta física. A matriz dos coeficientes para esse problema pode ser expressa em termos de outras matrizes, como foi feito no capítulo anterior para o problema de transporte. Portanto, seguindo a forma realizada no caso da equação de transporte de nêutrons pode-se escrever $\Lambda^\dagger$ como:

$$\Lambda^\dagger = -MB + \Sigma_T - (\Sigma_{S0}^\dagger + F^\dagger)W \quad (75)$$

A matriz M é idêntica ao caso da equação de transporte de nêutrons, ela carrega os termos $\mu_m/\Delta h_j$. A matriz B é responsável por efetuar as operações no interior do colchete das equações (70) e (71) ao ser aplicada ao $\overline{\Psi}^*$. Por sua vez, as matrizes Σ_T e W também são idênticas ao caso da equação de transporte de nêutrons e, portanto, são matrizes diagonais onde a primeira é referente às seções de choque macroscópicas totais e a segunda é referente aos pesos da quadratura de Gauss-Legendre. $\Sigma_{S0}^\dagger$ é a matriz que carrega as seções de choque macroscópicas de espalhamento, $\Sigma_{S0}^{g \rightarrow g', j}$ que pode ser representada da maneira que se segue.

$$\Sigma_{S0}^\dagger = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Sigma_{S0}^{\dagger 1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Sigma_{S0}^{\dagger 2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \Sigma_{S0}^{\dagger J} \end{pmatrix}_{NGJ \times NGJ}, \quad (76)$$

tal que,

$$\Sigma_{s0}^{\dagger j} = \begin{pmatrix} [\Sigma_{s0}^{1 \rightarrow 1}, j]_{N \times N} & [\Sigma_{s0}^{1 \rightarrow 2}, j]_{N \times N} & \cdots & [\Sigma_{s0}^{1 \rightarrow G}, j]_{N \times N} \\ [\Sigma_{s0}^{2 \rightarrow 1}, j]_{N \times N} & [\Sigma_{s0}^{2 \rightarrow 2}, j]_{N \times N} & \cdots & [\Sigma_{s0}^{2 \rightarrow G}, j]_{N \times N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\Sigma_{s0}^{G \rightarrow 1}, j]_{N \times N} & [\Sigma_{s0}^{G \rightarrow 2}, j]_{N \times N} & \cdots & [\Sigma_{s0}^{G \rightarrow G}, j]_{N \times N} \end{pmatrix}_{NG \times NG}. \quad (77)$$

Por sua vez, $[\Sigma_{s0}^{g \rightarrow g'}, j]_{N \times N}$ é uma matriz cheia de dimensão $N \times N$, na qual todos os elementos são dados por $\Sigma_{s0}^{g \rightarrow g', j}$. Vale ressaltar que a matriz $\Sigma_{s0}^{\dagger}$, definida para descrever o problema adjunto de transporte, é a transposta da matriz Σ_{s0} , utilizada para descrever o problema de transporte de nêutrons discutido no capítulo anterior.

A matriz $F^{\dagger}$ carrega as seções de choque macroscópicas de fissão, assim como os espectros de fissão e o número médio de nêutrons gerados. Representa-se esta matriz como:

$$F^{\dagger} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} F^{\dagger 1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F^{\dagger 2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & F^{\dagger J} \end{pmatrix}_{NGJ \times NGJ}, \quad (78)$$

tal que,

$$F^{\dagger j} = \begin{pmatrix} [\chi_1 \nu \Sigma_{F_1}^j]_{N \times N} & [\chi_2 \nu \Sigma_{F_1}^j]_{N \times N} & \cdots & [\chi_G \nu \Sigma_{F_1}^j]_{N \times N} \\ [\chi_1 \nu \Sigma_{F_2}^j]_{N \times N} & [\chi_2 \nu \Sigma_{F_2}^j]_{N \times N} & \cdots & [\chi_G \nu \Sigma_{F_2}^j]_{N \times N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\chi_1 \nu \Sigma_{F_G}^j]_{N \times N} & [\chi_2 \nu \Sigma_{F_G}^j]_{N \times N} & \cdots & [\chi_G \nu \Sigma_{F_G}^j]_{N \times N} \end{pmatrix}_{NG \times NG}. \quad (79)$$

Por sua vez, $[\chi_{g'} \nu \Sigma_g^j]_{N \times N}$ é uma matriz cheia de dimensão $N \times N$, na qual todos os elementos são dados por $\chi_{g'} \nu \Sigma_g^j$. Vale ressaltar que a matriz $F^{\dagger}$, definida para descrever o problema de adjunto de transporte, é a transposta da matriz F , utilizada para descrever o problema de transporte de nêutrons discutido no capítulo anterior.

3 FUNÇÃO IMPORTÂNCIA ADJUNTA MATEMÁTICA

No capítulo anterior foi abordado a formulação adjunta da equação de transporte de nêutrons, para tal, definiu-se um operador de transporte $\mathcal{L}$ a partir da equação de balanço de nêutrons, utilizou-se a definição matemática de operador adjunto para determinar um operador adjunto de transporte de nêutrons ($\mathcal{L}^\dagger$) e, então, escrever a equação de balanço para o problema de adjunto de transporte. A solução desta equação é a função importância adjunta física.

Utilizando processos iguais de discretização das variáveis independentes, tanto no caso da equação para o fluxo angular de nêutrons quanto no caso da equação para a função importância adjunta física, foi possível escrever uma equação matricial para o fluxo angular médio de nêutrons, dada por:

$$\Lambda \bar{\Psi} = S, \quad (80)$$

e uma para a função importância física média, expressa por:

$$\Lambda^\dagger \bar{\Psi}^* = S^\dagger. \quad (81)$$

Apesar da equação da função importância adjunta física ser derivada da definição de operador adjunto, ao comparar as matrizes dos coeficientes nas equações (80) e (81), é possível observar que elas não são adjuntas uma da outra, ou seja, não são matrizes transpostas uma da outra. Portanto, a transposta da matriz dos coeficientes para o problema de transporte de nêutrons não é equivalente à matriz de coeficientes para o problema adjunto descrito pela Eq.(81).

Por outro lado, partindo da equação de transporte de nêutrons discretizada, ou seja, da equação matricial para o fluxo angular médio, Eq.(80), e tomar a transposta da matriz de coeficientes obtém-se a matriz de coeficientes para uma equação matricial, escrita como:

$$\Lambda^T \hat{\Psi}^* = \hat{S}^\dagger, \quad (82)$$

cujas solução é chamada de função importância adjunta matemática. Sendo Λ^T a transposta da matriz dos coeficientes da equação para o fluxo angular médio, $\hat{\Psi}^*$ função importância adjunta

matemática e $\hat{S}^\dagger$ o termo de fonte para a equação da função importância adjunta matemática. Este termo de fonte é obtido a partir da aplicação dos métodos de discretização no cálculo da quantidade integral.

A seguir, neste mesmo capítulo será abordada a forma do termo de fonte, $\hat{S}^\dagger$, e as equações intranodais cuja solução é a função importância adjunta matemática. Ademais, em vista que as funções importâncias, física e matemática, não são necessariamente equivalentes (Yang, 1994), este capítulo ainda se propõe a realizar uma comparação entre essas funções.

3.1 Termo de fonte da função importância adjunta matemática

Como as funções importâncias, física e matemática, não são iguais, de maneira geral, é necessário investigar o termo de fonte da Eq.(82). Para tal, aplica-se os métodos utilizados na discretização da equação de transporte nêutrons, no cálculo da quantidade integral Q , ou seja,

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{g=1}^G \int_0^H \int_{-1}^1 S_g^\dagger(x, \mu) \psi_g(x, \mu) d\mu dx \simeq \frac{1}{2} \sum_{g=1}^G \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \left(\Delta h_j \omega_n S_{n,g}^{\dagger j} \right) \bar{\psi}_{n,g}^j. \quad (83)$$

Portanto, adota-se como fonte o termo no interior dos parênteses e pode-se definir uma matriz coluna que representa esse termo de fonte para a função importância adjunta matemática como nas equações a seguir.

$$\hat{S}^\dagger = \left[\hat{S}_{1,1}^{\dagger 1} \hat{S}_{2,1}^{\dagger 1} \dots \hat{S}_{N,1}^{\dagger 1} \hat{S}_{1,2}^{\dagger 1} \hat{S}_{2,2}^{\dagger 1} \dots \hat{S}_{N,G}^{\dagger 1} \hat{S}_{1,1}^{\dagger 2} \dots \hat{S}_{N,G}^{\dagger J} \right]^T, \quad (84)$$

tal que, os elementos da Eq.(84) são definidos por:

$$\hat{S}_{m,g}^{\dagger j} = \Delta h_j \omega_m S_{m,g}^{\dagger j}. \quad (85)$$

3.2 Equações intranodais: função adjunta matemática

Neste trabalho os cálculos de função importância adjunta matemática serão realizados de maneira direta, diferentemente dos cálculos de fluxo angular de nêutrons e de função importância adjunta física, porém é conveniente conhecer as equações intranodais da função importância adjunta matemática para comparações ou até para se implementar métodos iterativos nos cálculos de função importância adjunta matemática.

Então, organizando a matriz coluna que representa a função importância adjunta matemática, $\hat{\Psi}^*$, como:

$$\hat{\Psi}^* = \left[\hat{\psi}_{1,1}^{*1} \hat{\psi}_{2,1}^{*1} \cdots \hat{\psi}_{N,1}^{*1} \hat{\psi}_{1,2}^{*1} \hat{\psi}_{2,2}^{*1} \cdots \hat{\psi}_{N,G}^{*1} \hat{\psi}_{1,1}^{*2} \cdots \hat{\psi}_{N,G}^{*J} \right]^T, \quad (86)$$

e realizando a aplicação da matriz Λ^T , tal que,

$$\Lambda^T = A^T M + \Sigma_T - W(\Sigma_{S0}^T + F^T), \quad (87)$$

pode-se escrever as equações intranodais cuja solução é a função importância adjunta matemática. Para as direções onde $1 \leq m \leq \frac{N}{2}$, tem-se:

$$\begin{aligned} & - \left[-2 \frac{\mu_m}{\Delta h_j} \hat{\psi}_{m,g}^{*j} + 4 \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq J}}^{J-j} (-1)^{k-1} \frac{\mu_m}{\Delta h_{j+k}} \hat{\psi}_{m,g}^{*j+k} \right] + \Sigma_{Tg}^j \hat{\psi}_{m,g}^{*j} \\ & - \frac{1}{2} \omega_m \sum_{g'}^G \sum_{n=1}^N \left\{ \Sigma_{S0}^{g \rightarrow g',j} + \chi_{g'} \nu \Sigma_{Fg}^j \right\} \hat{\psi}_{n,g}^{*j} = \hat{S}_{m,g}^{*j}, \end{aligned} \quad (88)$$

$$m = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}; g = 1, 2, \dots, G \text{ e } j = 1, 2, \dots, J.$$

Para as direções onde $\frac{N}{2} + 1 \leq m \leq N$, tem-se:

$$\begin{aligned}
& - \left[2 \frac{\mu_m}{\Delta h_j} \hat{\psi}_{m,g}^{*j} + 4 \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq 1}}^{j-1} (-1)^k \frac{\mu_m}{\Delta h_{j-k}} \hat{\psi}_{m,g}^{*j-k} \right] + \Sigma_{T_g}^j \hat{\psi}_{m,g}^{*j} \\
& - \frac{1}{2} \omega_m \sum_{g'=1}^G \sum_{n=1}^N \left\{ \Sigma_{S0}^{g \rightarrow g',j} + \chi_{g'} \nu \Sigma_{F_g}^j \right\} \hat{\psi}_{n,g}^{*j} = \hat{S}_{m,g}^{+j}, \tag{89}
\end{aligned}$$

$$m = \frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2} + 2, \dots, N; g = 1, 2, \dots, G \text{ e } j = 1, 2, \dots, J.$$

Então, ao comparar as equações intranodais para a função importância adjunta física desenvolvida no capítulo anterior, equações (70) e (71), e as equações (88) e (89), para a função importância adjunta matemática, é possível estipular uma relação entre essas duas funções adjuntas, ou seja, uma Relação de Similaridade. Essa relação é dada por:

$$\hat{\psi}_{m,g}^{*j} = \omega_m \Delta h_j \overline{\psi}_{m,g}^{*j} \tag{90}$$

Portanto, com o resultado acima, verifica-se que a grandeza $\hat{\psi}_{m,g}^{*j}$ representa um valor médio de função importância adjunta matemática do nodo j . Ademais, é possível escrever uma relação de reciprocidade de fonte em termos da função importância adjunta matemática média como:

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{g=1}^G \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \hat{S}_{n,g}^{+j} \overline{\psi}_{n,g}^j = \frac{1}{2} \sum_{g=1}^G \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \bar{S}_{n,g}^j \hat{\psi}_{n,g}^{*j}. \tag{91}$$

Note que, substituindo a Eq.(89) na Eq.(90), obtém-se a discretização da relação de reciprocidade de fonte descrita pela Eq.(59), que escreve a quantidade integral em termos da função adjunta física. Dessa maneira, temos:

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{g=1}^G \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \omega_n \Delta h_j \bar{S}_{n,g}^j \overline{\psi}_{n,g}^{*j}. \tag{92}$$

Portanto, a quantidade integral (Q), linear no fluxo angular de nêutrons, pode ser calculada pelas funções importâncias adjuntas, física e matemática, de maneira equivalente quando

utilizada a formulação S_N , para discretização da variável angular, e o método DD, para discretização da variável espacial. Isto em problemas unidimensionais, independentes do tempo, na formulação de multigrupos de energia, com fonte fixa de nêutrons e espalhamento isotrópico para meios multiplicativos e não-multiplicativos.

4 MODELAGEM COMPUTACIONAL

Este capítulo apresenta os métodos de cálculo implementados para encontrar a solução das equações discutidas nos capítulos anteriores. Tanto para a solução do fluxo angular de nêutrons quanto para a função importância adjunta física foi utilizado um método iterativo que se assemelha ao método de *Source Iteration* (SI) (Lewis e Miller, 1984). Ainda, a solução da função importância adjunta matemática foi obtida pelo cálculo direto, dado pela equação matricial Eq.(85).

4.1 Método iterativo: Fluxo angular de nêutrons

O método abordado nesta seção parte da equação de balanço intranodal descrita a partir dos fluxos angulares nas extremidades e do fluxo angular médio do nodo de índice j , Eq.(17). Esta equação foi separada mediante às direções da seguinte forma:

$$\psi_{m,g}^{(k)}(x_{j+}) = \frac{\psi_{m,g}^{(k)}(x_{j-}) \left[\frac{\mu_m}{\Delta h_j} - \frac{\Sigma_{Tg}^j}{2} \right] + SS_{m,g}^{j(k-1)}}{\left[\frac{\mu_m}{\Delta h_j} + \frac{\Sigma_{Tg}^j}{2} \right]} ; \forall 1 \leq m \leq \frac{N}{2} \quad (93)$$

e

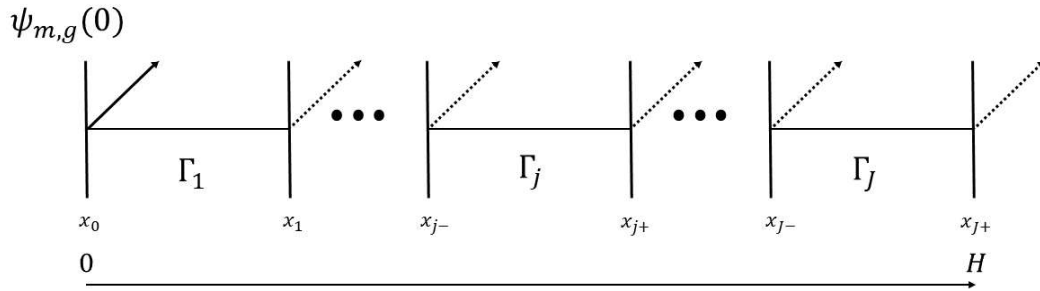
$$\psi_{m,g}^{(k)}(x_{j-}) = \frac{\psi_{m,g}^{(k)}(x_{j+}) \left[\frac{|\mu_m|}{\Delta h_j} - \frac{\Sigma_{Tg}^j}{2} \right] + SS_{m,g}^{j(k-1)}}{\left[\frac{|\mu_m|}{\Delta h_j} + \frac{\Sigma_{Tg}^j}{2} \right]} ; \forall \frac{N}{2} + 1 \leq m \leq N. \quad (94)$$

Com, $g = 1, 2, \dots, G$ e $j = 1, 2, \dots, J$. Os sobrescritos (k) e $(k - 1)$ representam o número das iterações atual e anterior. Além disso, o termo $SS_{m,g}^{j(k-1)}$ é dado por:

$$S_{m,g}^{j(k-1)} = S_{ext,m,g}^j + \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \sum_{n=1}^N \left\{ \Sigma_{S0}^{g' \rightarrow g,j} + \chi_g \nu \Sigma_{F,g'}^j \right\} \omega_n \bar{\psi}_{n,g'}^j{}^{(k-1)}. \quad (95)$$

Utilizou-se a Eq.(93) para o cálculo do fluxo angular que sai pela direita do nodo j , $\psi_{m,g}^{(k)}(x_{j+})$, a partir do fluxo angular que entra nesse nodo pela esquerda, $\psi_{m,g}^{(k)}(x_{j-})$. Então, mediante a relação de continuidade, ou seja, o fluxo angular que sai à direita de um nodo j é o fluxo angular que entra pela esquerda no nodo $(j + 1)$, através da interface entre estes nodos, varre-se a malha no sentido da esquerda para direita (“ida”) obtendo-se os fluxos angulares de nêutrons para as direções $1 \leq m \leq N/2$ de todas as interfaces, conforme é mostrado na Figura 3. Vale ressaltar que, os fluxos angulares que entram na extremidade esquerda do domínio, $\psi_{m,g}(0)$ (para $1 \leq m \leq N/2$), são conhecidos.

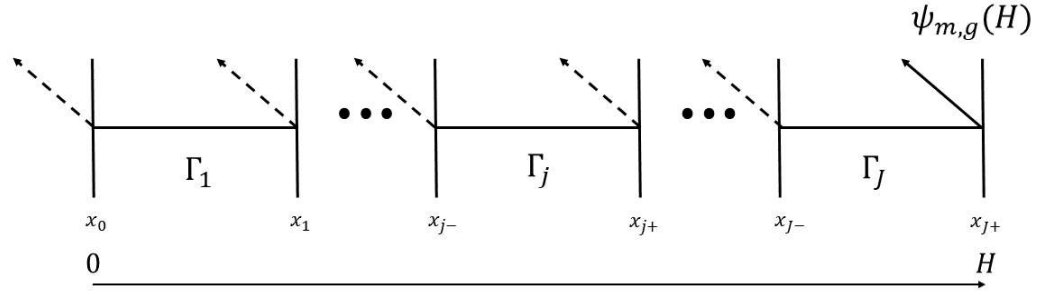
Figura 3 - Varredura de ida ($1 \leq m \leq N/2$)



Fonte: O autor, 2025.

Semelhantemente, utilizou-se a Eq.(94) para percorrer a malha no sentido oposto, ou seja, da direita para a esquerda (“volta”), assim determinando-se os fluxos angulares de nêutrons para as direções $\frac{N}{2} + 1 \leq m \leq N$ de todas as interfaces, conforme é mostrado na Figura 4. Ainda, os fluxos angulares que entram na extremidade direita do domínio, $\psi_{m,g}(H)$ (para $\frac{N}{2} + 1 \leq m \leq N$), são conhecidos.

Figura 4 - Varredura de volta $\left(\frac{N}{2} + 1 \leq m \leq N\right)$



Fonte: O autor, 2025.

Por se tratar de um método iterativo há um critério de parada. Neste trabalho foi avaliado o fluxo escalar na extremidade de cada nodo. Essa grandeza foi calculada por:

$$\phi_g(x_j) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \omega_n \psi_{n,g}(x_j). \quad (96)$$

Onde $\psi_{n,g}(x_j)$ são os fluxos angulares de cada interface. Então, após cada iteração (uma ida e uma volta) verifica-se o critério de parada, que utiliza a máxima diferença absoluta dada por:

$$d_{max} = \max \left| \phi_g^{(k)}(x_j) - \phi_g^{(k-1)}(x_j) \right| < 10^{-12}. \quad (97)$$

Caso a condição dada pela Eq.(97) não seja atendida, atualiza-se o termo $SS_{m,g}^j$, descrito pela Eq.(95), e realiza-se um novo processo de varredura, até que a condição da Eq.(97) seja atendida.

4.2 Método iterativo: Função importância adjunta física

Para os cálculos iterativos da função importância adjunta física tomou-se a equação intranodal dependente tanto da função importância adjunta física média no nodo de índice j , quanto da função importância adjunta física nas interfaces desse nodo, Eq.(66). Esta equação foi reescrita considerando as direções conforme as equações a seguir:

$$\psi_{m,g}^{\star(k)}(x_{j+}) = \frac{\psi_{m,g}^{\star(k)}(x_{j-}) \left[\frac{|\mu_m|}{\Delta h_j} - \frac{\Sigma_{Tg}^j}{2} \right] + S_{m,g}^{\dagger j (k-1)}}{\left[\frac{|\mu_m|}{\Delta h_j} + \frac{\Sigma_{Tg}^j}{2} \right]} ; \frac{N}{2} + 1 \leq m \leq N \quad (98)$$

e

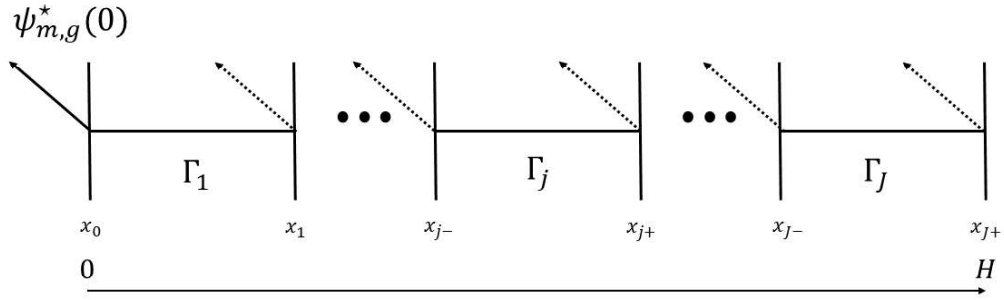
$$\psi_{m,g}^{\star(k)}(x_{j-}) = \frac{\psi_{m,g}^{\star(k)}(x_{j+}) \left[\frac{\mu_m}{\Delta h_j} - \frac{\Sigma_{Tg}^j}{2} \right] + S_{m,g}^{\dagger j (k-1)}}{\left[\frac{\mu_m}{\Delta h_j} + \frac{\Sigma_{Tg}^j}{2} \right]} ; \forall 1 \leq m \leq \frac{N}{2}. \quad (99)$$

Com, $g = 1, 2, \dots, G$ e $j = 1, 2, \dots, J$. Os sobrescritos (k) e $(k-1)$ representam o número das iterações atual e anterior, além do que o termo $S_{m,g}^{\dagger j (k-1)}$ é dado por:

$$S_{m,g}^{\dagger j (k-1)} = S_{m,g}^{\dagger j} + \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \sum_{n=1}^N \left\{ \Sigma_{S_0}^{g \rightarrow g', j} + \chi_{g'} v \Sigma_{Fg}^j \right\} \omega_n \overline{\psi}_{n,g'}^{\star j (k-1)}. \quad (100)$$

Utilizou-se a Eq.(98) para varrer a malha da esquerda para a direita (“ida”), calculando a função importância que entra no nodo de índice j pela extremidade direita, $\psi_{m,g}^{\star(k)}(x_{j+})$, a partir da função importância que sai deste nodo pela extremidade esquerda, $\psi_{m,g}^{\star(k)}(x_{j-})$, sendo ambos da iteração k . Dessa forma, obtêm-se as funções importâncias para as direções $\frac{N}{2} + 1 \leq m \leq N$ de todas as interfaces, conforme é mostrado na Figura 5. Vale ressaltar que, as funções importâncias que saem na extremidade esquerda do domínio, $\psi_{m,g}^{\star}(0)$ (para $\frac{N}{2} + 1 \leq m \leq N$), são conhecidas.

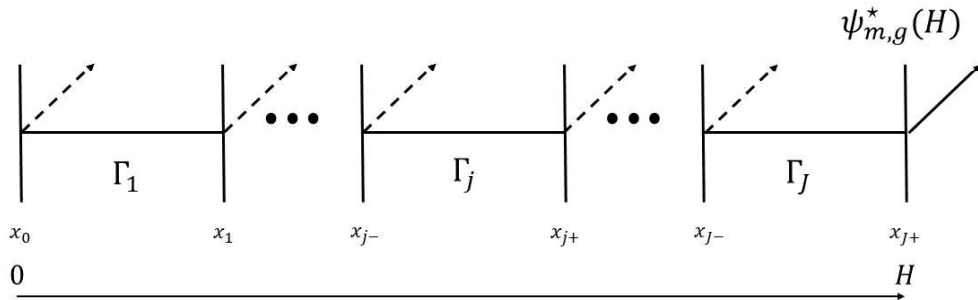
Figura 5 - Varredura de ida ($\frac{N}{2} + 1 \leq m \leq N$)



Fonte: O autor, 2025.

Ademais, utilizou-se a Eq.(99) para percorrer a malha da direita para a esquerda (“volta”), calculando a função importância que entra no nodo de índice j pela esquerda, $\psi_{m,g}^{*(k)}(x_{j-})$, a partir da função importância que sai desse nodo pela direita, $\psi_{m,g}^{*(k)}(x_{j+})$, sendo ambos da iteração k . Dessa forma, obtêm-se as funções importâncias para as direções $1 \leq m \leq N/2$ de todas as interfaces, conforme é mostrado na Figura 6. As funções importâncias que saem na extremidade direita do domínio, $\psi_{m,g}^*(H)$ (para $1 \leq m \leq N/2$), são conhecidas.

Figura 6 - Varredura de volta ($1 \leq m \leq N/2$)



Fonte: O autor, 2025.

Neste caso, para o critério de parada das iterações foi calculado uma grandeza semelhante ao fluxo escalar de nêutrons Eq.(96), dada por:

$$\phi_g^*(x_j) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \omega_n \psi_{n,g}^*(x_j). \quad (101)$$

De modo que, $\psi_{n,g}^*(x_j)$ são as funções importâncias de cada interface. Então, calcula-se as diferenças absolutas entre $\phi_g^{*(k)}(x_j)$ e $\phi_g^{*(k-1)}(x_j)$ de cada interface entre os nodos ao final de cada iteração (uma ida e uma volta). Por fim, as iterações foram encerradas quando a maior diferença absoluta for inferior a 10^{-19} , como descrito na equação a seguir.

$$d_{max} = \max \left| \phi_g^{*(k)}(x_j) - \phi_g^{*(k-1)}(x_j) \right| < 10^{-19}. \quad (102)$$

4.3 Método direto: Função importância adjunta matemática

A função importância adjunta matemática foi calculada de forma direta a partir da Eq.(82), ou seja, foi calculada invertendo-se a matriz dos coeficientes e realizando-se a multiplicação matricial dada por:

$$\hat{\Psi}^* = [\Lambda^T]^{-1} \hat{S}^\dagger. \quad (103)$$

Vale comentar que os cálculos computacionais realizados foram feitos utilizando uma rotina computacional em linguagem de programação Python e para a realização dos cálculos matriciais foi utilizada a biblioteca NumPy. Ainda, o processo iterativo para o cálculo do fluxo angular de nêutrons e o processo iterativo para o cálculo da função importância adjunta física apresentam critérios de parada de ordem diferentes, 10^{-12} para o fluxo angular de nêutrons e 10^{-19} para a função importância adjunta física. Isto ocorre por conta da ordem de grandeza dos termos de fonte das equações, de modo que, o termo de fonte para a equação do fluxo angular de nêutrons é da ordem da unidade, enquanto que o termo de fonte da equação para a função importância adjunta física é da ordem das seções de choque macroscópicas, que, de modo geral, é bem menor que a unidade. Com isso, para evitar a parada das iterações no cálculo da função importância adjunta física antes da convergência é utilizado um critério de parada mais rigoroso.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo serão apresentados três problemas-modelo a fim de validar a teoria desenvolvida neste trabalho. Para isso foram calculadas as taxas de reações a partir das quantidades integrais Q , que são lineares no fluxo angular de nêutrons. Por outro lado, essas taxas também foram determinadas escrevendo as quantidades integrais a partir das funções adjuntas, ou seja, as funções importâncias, física e matemática.

Os cálculos computacionais foram resolvidos a partir de rotinas computacionais escritas em linguagem de programação Python. Para os cálculos foi utilizada a biblioteca NumPy e para as construções gráficas foi utilizada a biblioteca Matplotlib. O computador utilizado apresenta um processador Intel(R) Core(TM) i7-8700 com 8 de RAM, além do sistema operacional Windows 10 Home de 64 bits.

5.1 Problema-modelo #1

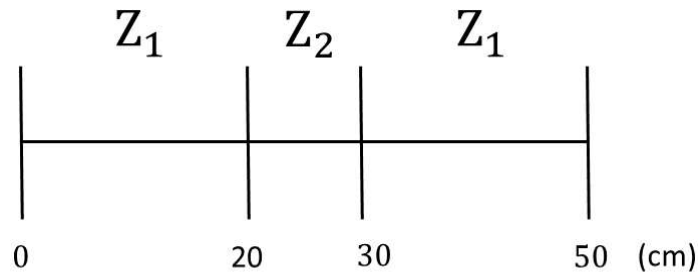
Este problema-modelo #1 consiste em um domínio material de comprimento 50 cm, formado por três regiões não-multiplicativas e duas zonas materiais, com condições de contorno do tipo vácuo, ou seja, não há fluxo de nêutrons entrando pelas extremidades do domínio. Os parâmetros físicos estão representados na Tabela 1 e o domínio material está representado na Figura 7. A fonte externa de nêutrons é isotrópica, ou seja, apresenta igual intensidade em todas as direções m .

Tabela 1 - Parâmetros físicos-materiais do problema-modelo #1

Zona Material	$\Sigma_{tg}(cm^{-1})$		$\Sigma_{S0}^{g' \rightarrow 1}(cm^{-1})$		$\Sigma_{S0}^{g' \rightarrow 2}(cm^{-1})$		$S_{ext_{m,g}}(\#/cm^3s)$	
	$g = 1$	$g = 2$	$g' = 1$	$g' = 2$	$g' = 1$	$g' = 2$	$g = 1$	$g = 2$
Zona 1	1,0	1,0	0,500	0,000	0,180	0,800	0,0	0,0
Zona 2	1,0	1,0	0,950	0,030	0,010	0,960	1,0	0,0

Fonte: O autor, 2025.

Figura 7 - Domínio material do problema-modelo #1



Fonte: O autor, 2025.

Para a resolução deste problema foi utilizada uma quadratura de Gauss-Legendre de ordem 4 ($N = 4$). Ademais, as regiões foram divididas em nodos de mesmo tamanho e calculada a taxa de absorção de nêutrons, a partir das três funções discutidas neste trabalho: fluxo angular de nêutrons, função importância adjunta física e função importância adjunta matemática, conforme é mostrado na Tabela 2. O termo de fonte da equação para a função importância adjunta física, é a seção de choque macroscópica de absorção isotrópica, dado por:

$$S_{m,g}^{\dagger j} = \Sigma_{a_g}^j = \Sigma_{T_g}^j - \sum_{g'=1}^G \Sigma_{S0}^{g \rightarrow g',j}. \quad (104)$$

Tabela 2 - Taxa de absorção do problema-modelo #1

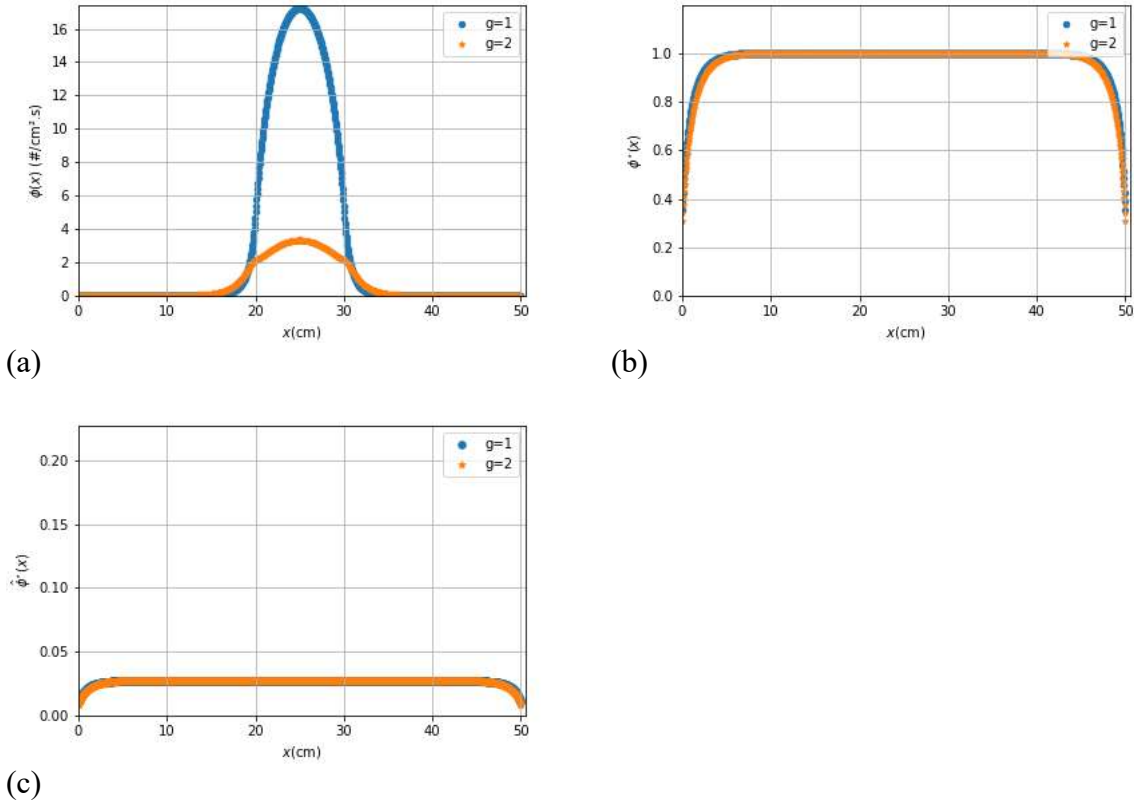
Δh_j (cm)	Função Utilizada	Taxa de Absorção	Desvio relativo percentual (%)
0,05	$\bar{\Psi}$	9,999997848690457	Referência
	$\bar{\Psi}^*$	9,999997848837502	$1,4704507444266054 \times 10^{-9}$
	$\hat{\Psi}^*$	9,999997848837177	$1,4672000107111693 \times 10^{-9}$

Fonte: O autor, 2025.

Vale ressaltar que os desvios relativos percentuais foram determinados em relação à taxa de absorção obtida a partir do fluxo angular médio de nêutrons (Referência). Consequente, com os resultados apresentados na tabela acima verifica-se que a escolha da função para o cálculo da taxa de absorção não afeta significativamente o valor numérico. Ainda, foi possível observar graficamente o comportamento das funções importâncias a partir da Figura 8 e

verificou-se que elas possuem um comportamento semelhante, porém com escalas diferentes, indicando a existência da relação de similaridade entre essas funções importâncias.

Figura 8 - Resultados do problema-modelo #1



Legenda: (a) Fluxo escalar de nêutrons; (b) Função Importância Adjunta Física integrada na variável angular; (c) Função Importância Adjunta Matemática integrada na variável angular.

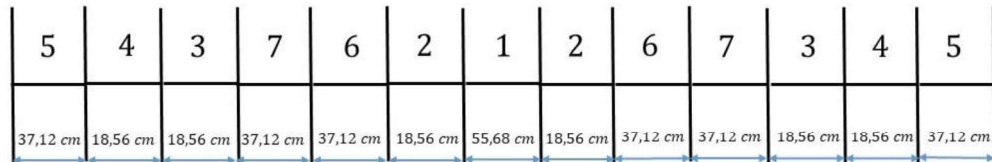
Fonte: O autor, 2025.

5.2 Problema-modelo #2: *Accelerator Driven Systems (ADS)*

Neste problema-modelo #2 foi abordado um reator unidimensional do tipo ADS, em que o reator é guiado por uma fonte externa de nêutrons. Esse reator é composto por sete zonas materiais, conforme é mostrado na Figura 9 e na Tabela 3. Ademais, as únicas zonas materiais que possuem fonte de nêutrons são as zonas 1 (*Spallation target*), 6 e 7 (*Inner Core* e *Outer core*), onde na zona 1 está a fonte fixa de nêutrons, de intensidade de 1 nêutrons/cm³.s, apenas

para o grupo 1 de energia, e nas zonas 6 e 7 estão as fontes de fissão, cujos parâmetros constam na Tabela 4. Por sua vez, as seções de choque macroscópicas de espalhamento estão tabeladas no Apêndice.

Figura 9 - Domínio material do problema-modelo #2



Fonte: O autor, 2025.

Tabela 3 - Seção de choque macroscópica total do problema-modelo #2

Índice	Zona	$\Sigma_{T_g} (cm^{-1})$			
		$g = 1$	$g = 2$	$g = 3$	$g = 4$
1	<i>Spallation target</i>	0,16646755622620	0,20708678925174	0,30141549207271	0,31932734589886
2	<i>LBE buffer</i>	0,21453781478684	0,25592366410894	0,36732369116619	0,73085372516866
3	<i>LBE reflector</i>	0,21727458632097	0,25535512674919	0,36455050492276	0,73119034416605
4	<i>SUS shield</i>	0,25058447457641	0,30112795045951	0,44160469618765	0,80050229238996
5	<i>B4C shield</i>	0,25841177609114	0,40242028424501	0,50955628791776	0,67905932681244
6	<i>Inner core</i>	0,20837148400182	0,27296874233007	0,37203732809505	0,44393045088137
7	<i>Outer core</i>	0,20808473120670	0,27235341988672	0,37190271311542	0,44246262690578

Fonte: O autor, 2025.

Tabela 4 - Parâmetros de fissão do problema-modelo #2

Índice	Zona	$\nu\Sigma_{F_g} (10^{-2} \text{ cm}^{-1})$			
		$g = 1$	$g = 2$	$g = 3$	$g = 4$
6	<i>Inner core</i>	1,0863339654228	0,32471096785577	0,30006825711972	0,49687562915774
7	<i>Outer core</i>	1,1221000361185	0,42669203492471	0,41451001694494	0,69994284675514
χ_g		$g = 1$	$g = 2$	$g = 3$	$g = 4$
		0,86614323783790	0,11053026089759	0,022801119041383	0,00052538222314407

Fonte: O autor, 2025.

Nesse caso, foi calculada a taxa de fissão utilizando uma quadratura de Gauss-Legendre de ordem 4 (S_4), para os cálculos das funções (fluxo e importâncias), condições de contorno do tipo vácuo em ambas as extremidades. A Tabela 5 apresenta esta quantidade integral calculada a partir do fluxo angular médio de nêutrons e das funções importâncias, física e matemática. Para o cálculo da taxa de fissão foi tomado as seções de choque macroscópica de fissão, Σ_{F_g} , como termo de fonte da equação para a função importância adjunta física.

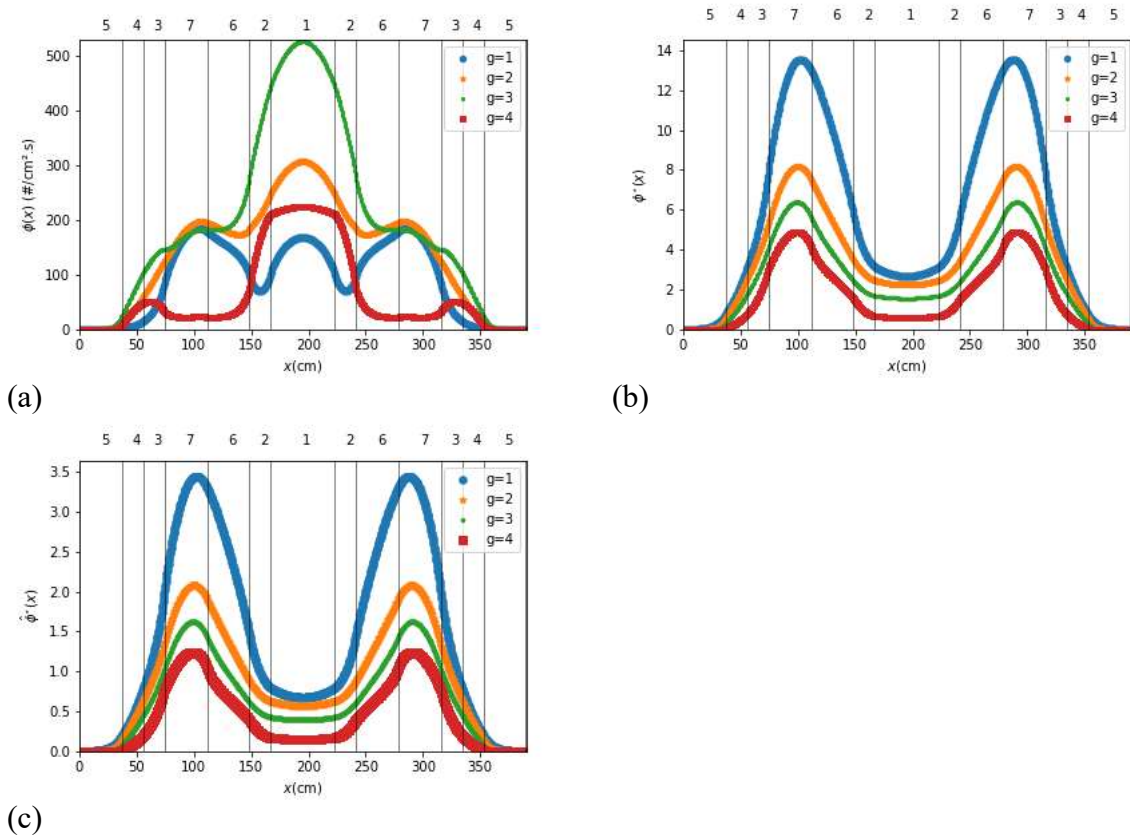
Tabela 5 - Taxa de fissão do problema-modelo #2

$\Delta h_j \text{ (cm)}$	Função Utilizada	Taxa de Fissão	Desvio relativo percentual (%)
0,464	$\bar{\Psi}$	157,42510678202655	Referência
	$\bar{\Psi}^*$	157,42510679057256	$5,428619548991896 \times 10^{-9}$
	$\hat{\Psi}^*$	157,42510679064594	$5,475235273287330 \times 10^{-9}$

Fonte: O autor, 2025.

Ademais, foi possível observar o comportamento das funções importâncias ao integrá-las com respeito às direções. Dessa maneira, nota-se que essas funções não são equivalentes, mas proporcionais, conforme é mostrado na Figura 10. Assim como no problema-modelo #1, evidenciando uma relação de similaridade entre as funções importâncias adjuntas e essa relação não depende da quantidade integral, desde que esta seja linear no fluxo angular de nêutrons, como a taxa de fissão e a taxa de absorção.

Figura 10 - Resultados do problema-modelo #2



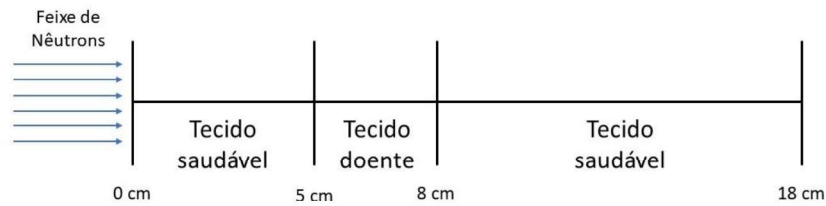
Legenda: (a) Fluxo escalar de nêutrons; (b) Função Importância Adjunta Física integrada na variável angular; (c) Função Importância Adjunta Matemática integrada na variável angular.

Fonte: O autor, 2025.

5.3 Problema-modelo #3: *Boron Neutron Capture Therapy (BNCT)*

A terapia por captura de nêutrons por boro (BNCT) é uma técnica radioterápica em que a energia útil para o tratamento de tecido cancerígeno se dá pela reação nuclear promovida por um feixe de nêutrons e o nuclídeo Boro-10, um isótopo do elemento Boro (Siqueira et al, 2019). Neste problema-modelo #3 o domínio material será composto por duas zonas materiais, uma que representa o tecido doente e outra que representa o tecido saudável, conforme é mostrado na Figura 11.

Figura 11 - Domínio material do problema-modelo #3



Fonte: O autor, 2025.

Na simulação deste problema foram considerados trinta grupos de energia e uma quadratura de Gauss-Legendre de ordem 4 (S_4). Ainda, o feixe de nêutrons tem intensidade de 1 nêutron/cm².s para todos os grupos de energia, o que acarreta na utilização de uma condição prescrita na condição de contorno na extremidade esquerda do domínio material. As faixas de energia estão definidas na Tabela 17, no apêndice. Os parâmetros nucleares foram obtidos a partir do ENDF/B considerando as concentrações da Tabela 6, por sua vez, as seções de choque deste problema estão presentes nas últimas quatorze tabelas do apêndice.

Tabela 6 - Nuclídeos e densidades atômicas do problema modelo #3

Nuclídeo	Peso (%)	Densidade Atômica (em 10^{24} átomos/cm ³)
^1_1H	10,7	0,064
$^{16}_8\text{O}$	71,4	0,0269
$^{12}_6\text{C}$	12,1	0,00602
$^{23}_{11}\text{Na}$	4,5	0,00118
$^{14}_7\text{N}$	1,3	0,00056
$^{10}_5\text{B}$ (Tecido Saudável)	10 ppm	$5,57 \times 10^{-7}$
$^{10}_5\text{B}$ (Tecido Doente)	30 ppm	$1,67 \times 10^{-6}$

Fonte: Marashi, 2000.

Assim como nos problemas anteriores, a simulação deste problema-modelo #3 foi realizada para uma malha cujos nodos apresentam o mesmo comprimento, obtendo-se como resultado para a taxa de absorção de nêutrons os valores representados na Tabela 7. Neste caso, foi calculada a taxa de absorção considerando tanto o fluxo angular de nêutrons quanto as funções importâncias. Além disso, o fluxo escalar de nêutrons e as funções importâncias

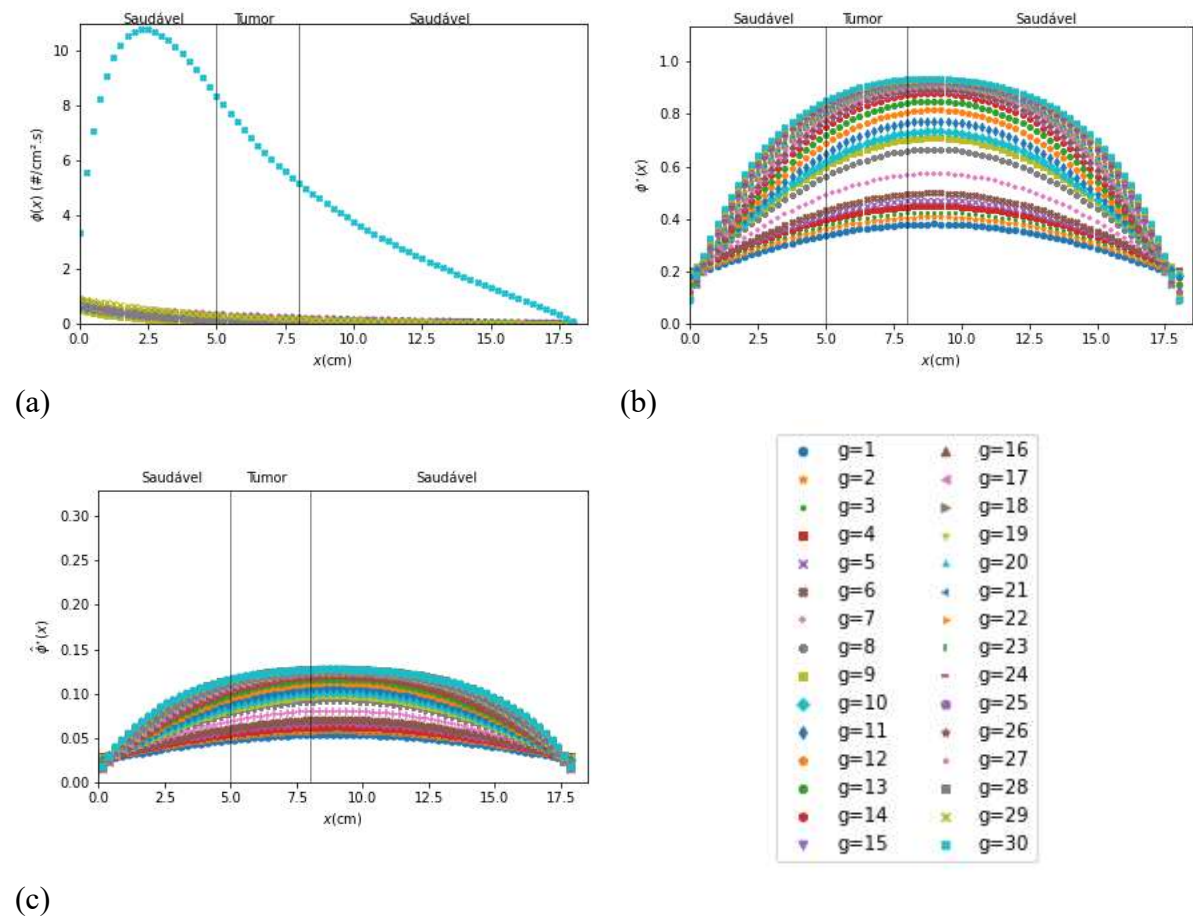
integradas nas direções estão representadas na Figura 12. Vale ressaltar que as seções de choque macroscópicas de absorção, definida pela Eq.(104), foram utilizadas como termo de fonte para os cálculos das funções importâncias.

Tabela 7 - Taxa de absorção total do problema-modelo #3

Δh_j (cm)	Função Utilizada	Taxa de Absorção Total	Desvio relativo percentual (%)
0,25	$\bar{\Psi}$	2,2738114812223510	Referência
	$\bar{\Psi}^*$	2,2738114814174417	$8,5798938014116 \times 10^{-9}$
	$\hat{\Psi}^*$	2,2738114814174386	$8,5797570871547 \times 10^{-9}$

Fonte: O autor, 2025.

Figura 12 - Resultados para taxa de absorção total do problema-modelo #3



Legenda: (a) Fluxo escalar de nêutrons; (b) Função Importância Adjunta Física integrada na variável angular; (c) Função Importância Adjunta Matemática integrada na variável angular.

Fonte: O autor, 2025.

Em concordância com os resultados acima, também foram calculadas as taxas de absorção de nêutrons nos tecidos, saudável e doente, separadamente. Para o cálculo destas taxas foi necessário calcular as funções importâncias de absorção dos respectivos tecidos, obtendo-se os resultados expostos na Tabela 8 e na Figura 6.

Tabela 8 - Taxa de absorção nos tecidos, saudável e doente, do problema-modelo #3

Δh_j (cm)	Função Utilizada	Taxa de Absorção	
		Tecido Saudável	Tecido Doente
0,25	$\bar{\Psi}$	1,7211140834245375	0,5526973977978140
	$\bar{\Psi}^*$	1,7211140835725450	0,5526973978448952
	$\hat{\Psi}^*$	1,7211140835725360	0,5526973978448932

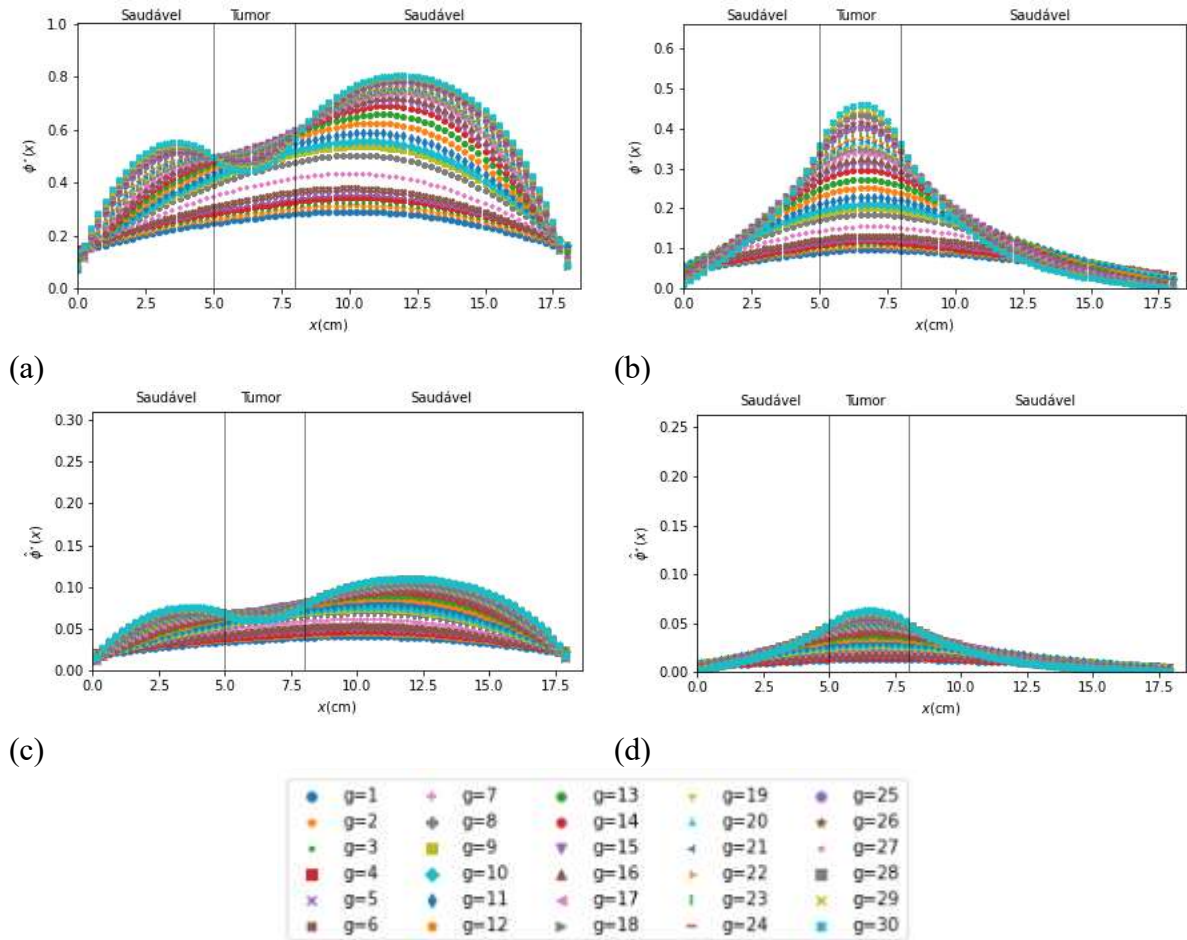
Fonte: O autor, 2025.

Portanto, foi possível observar, a partir das Tabelas 7 e Tabela 8, que utilizar o fluxo angular médio de nêutrons, a função importância física média ou a função importância matemática não acarretou em diferenças significativas nos cálculos das taxas de absorções de nêutrons. Para a taxa de absorção de nêutrons no tecido saudável, calculado com a função importância adjunta física o desvio relativo percentual é da ordem de $10^{-9}\%$ em relação ao calculado com o fluxo angular de nêutrons, igualmente para a taxa de absorção de nêutrons no tecido doente, calculado com a função importância adjunta física o desvio relativo percentual é da ordem de $10^{-9}\%$ em relação ao calculado com o fluxo angular de nêutrons. Desta maneira, esses valores corroboram com os valores encontrados com a taxa de absorção total expressos na Tabela 7.

Comparando os valores encontrados pelas funções importâncias adjuntas, física e matemática, há uma diferença entre os valores apenas na décima quarta casa decimal, o que corrobora para a indiferença na escolha da função adjunta ao calcular uma quantidade integral linear no fluxo de angular de nêutrons em problemas unidimensionais, na formulação de multigrupos de energia, independente do tempo, com fonte fixa de nêutrons e espalhamento isotrópico em meios multiplicativos e não-multiplicativos. Ademais, ao analisar os gráficos das funções importâncias, física e matemática, integradas nas direções, conforme a Figura 13, é perceptível que elas são semelhantes, diferenciando-se pela escala, assim mantendo o fato de não serem equivalentes, mas apresentarem uma relação de similaridade.

Figura 13 - Resultados para taxa de absorção nos respectivos tecidos do problema-modelo

#3



Legenda: (a) Função Importância Adjunta Física para absorção de nêutrons no tecido saudável integrada na variável angular; (b) Função Importância Adjunta Física para absorção de nêutrons no tecido doente integrada na variável angular; (c) Função Importância Adjunta Matemática para absorção de nêutrons no tecido saudável integrada na variável angular; (d) Função Importância Adjunta Matemática para absorção de nêutrons no tecido doente integrada na variável angular.

Fonte: O autor, 2025.

A escolha da linguagem de programação Python foi feita principalmente por familiaridade, porém tal preferência não afeta a forma como os cálculos são realizados computacionalmente. Dado os parâmetros dos problemas-modelo abordados, os tempos das execuções e os números de iterações estão representados na Tabela 9. Note que, considerando

os cálculos iterativos, o tempo de execução e o número de iterações para o cálculo da função importância adjunta física média é sempre maior do que para o cálculo do fluxo angular médio de nêutrons. Isto pode ser atribuído ao fato de utilizar um critério de parada das iterações mais rigoroso para o cálculo da função importância adjunta física, que por sua vez, foi escolhido considerando a diferença de ordem nos termos de fonte das equações de iteração, equações (95) e (100). Ademais, como o cálculo da função importância adjunta matemática foi realizado de maneira direta, não há número de iterações.

Tabela 9 - Número de iterações e tempo de execução dos problemas-modelo

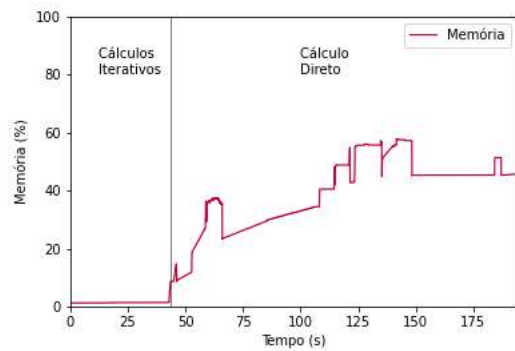
Problema-modelo	$\bar{\Psi}$		$\bar{\Psi}^*$		$\hat{\Psi}^*$	
	Iterações	Tempo (s)	Iterações	Tempo (s)	Iterações	Tempo (s)
#1	528	17,79	745	24,21		144,48
#2	29794	2267,40	38161	2780,66		868,65
#3	1677	284,73	2423	460,04		172,65

Fonte: O autor, 2025.

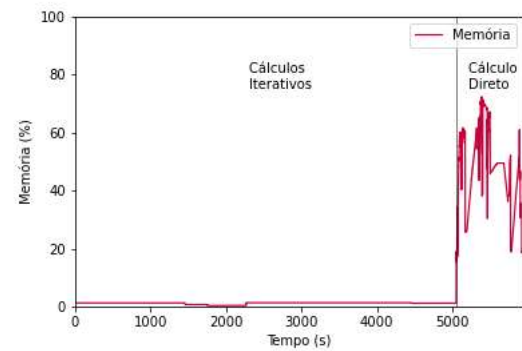
Ainda através dos dados da Tabela 5.9 é possível observar que o cálculo da função importância adjunta matemática possui tempo de execução inferior aos cálculos do fluxo angular de nêutrons e da função importância adjunta física, com exceção no problema-modelo #1, que foi o único que o tempo de execução do cálculo direto foi maior do que nos cálculos iterativos.

Quanto ao gasto de memória foi utilizado uma biblioteca chamada psutil que possibilitou o monitoramento da porcentagem de memória gasta nas simulações. Portanto, conforme a Figura 14, é possível observar que apesar do tempo de execução dos cálculos diretos serem menores, de maneira geral, o custo alto de memória (em torno de 50% da memória) é um limitador que pode causar complicações quando houver necessidade de refinar ainda mais as malhas discretas, ou seja, aumentar a ordem de quadratura de Gauss-Legendre ou aumentar o número de nodos por região.

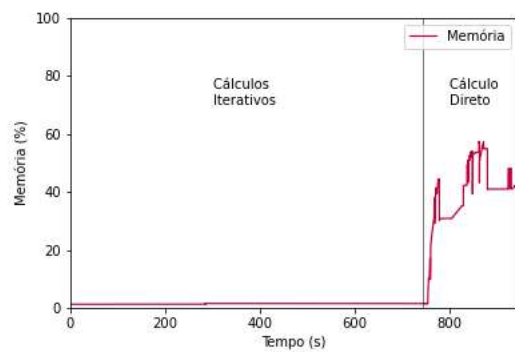
Figura 14 - Uso de memória relativa



(a)



(b)



(c)

Legenda: (a) Uso da memória na simulação do problema-modelo #1; (b) Uso da memória na simulação do problema-modelo #2; (c) Uso da memória na simulação do problema-modelo #3.

Fonte: O autor, 2025.

CONCLUSÃO

Nesta dissertação foi abordada a formulação adjunta de transporte de nêutrons unidimensional, na formulação de multigrupos de energia, para problema independente do tempo, com fonte fixa de nêutrons e espalhamento isotrópico em meios multiplicativos e não-multiplicativos. O capítulo 1 se dispõe a discutir o problema de transporte de nêutrons de mesma natureza, que para tratar as equações integro-diferenciais foi utilizado os método de Ordenadas Discretas (S_N) e o método *Diamond Difference* (DD), que discretiza a variável angular e variável espacial, respectivamente. Ainda neste capítulo é apresentada a forma matricial da equação de transporte de nêutrons discretizada por esses métodos.

Nos capítulos 2 e 3 foram apresentadas as funções importâncias adjuntas, física e matemática, a primeira obtida usando-se a definição de operador adjunto ao operador de transporte e a segunda obtida transpondo-se a matriz que resulta da discretização da equação do fluxo angular médio de nêutrons. Ademais, foi observado que no caso da discretização espacial pelo método DD, o cálculo de uma quantidade integral Q , e, conseqüentemente, cálculos de perturbações/variações em Q , podem ser feitos usando a função importância adjunta física. A razão disto vem do fato que a simples relação de similaridade, dada pela Eq.(90), ser exatamente a expressão que iguala as quantidades integrais calculadas com a função importância adjunta física e a função importância adjunta matemática. Sendo esta última aquela que deveria ser usada nos cálculos, pois todas as grandezas utilizadas já estariam discretizadas.

Outro ponto que reforça esta conclusão são os valores de Q serem praticamente os mesmos (com desvios relativos percentuais de ordem de 10^{-8}) utilizando-se ou o fluxo angular de nêutrons ou as funções importâncias adjuntas, física e matemática, para os três problemas-modelo abordados nesta dissertação, sendo o primeiro um problema de blindagem de nêutrons, o segundo um reator a fissão nuclear unidimensional do tipo ADS e o terceiro um problema de BNCT, que apresenta um feixe de nêutrons (condição de contorno prescrita).

Em trabalhos futuros pode-se abordar anisotropia no espalhamento e geometrias mais complexas como a bidimensional. Por fim, os estudos realizados neste trabalho restringiram-se à utilização do método DD, portanto, cabendo ser investigado o comportamento das funções importâncias adjuntas, física e matemática, ao se utilizar de outros métodos nodais para discretização da variável espacial, como por exemplo métodos nodais de malha grossa.

REFERÊNCIAS

ARFKEN, George; WEBER, Hans. **Física Matemática: Métodos Matemáticos Para Engenharia e Física**. 6. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007. ISBN 978-85-352-2050-6.

BELL, George; GLASSTONE, Samuel. **Nuclear Reactor Theory**. VanNostrand Reinhold: LINTTON EDUCATIONAL PUBLISHING, 1970.

CHILDS R. L. **Generalized Perturbation Theory Using Two-Dimensional, Discrete Ordinates Transport Theory**. Computer Science Division, Union Carbide Corporation-Nuclear Division, 1980.

DUDERSTADT, James; HAMILTON, Louis. **Nuclear Reactor Analysis**. John Wiley & Sons, 1976.

GALINDO, Andrea. **What is Nuclear Energy? The Science of Nuclear Power**. IAEA Office of Public Information and Communication, 2022. Disponível em: <https://www.iaea.org/newscenter/news/what-is-nuclear-energy-the-science-of-nuclear-power>. Acesso em: 30 out. 2024.

GANDINI, Augusto. HGPT based sensitivity time-dependent methods for the analysis of subcritical systems. **Annals Of Nuclear Energy**, v. 28, p. 1193-1217, 2001.

GARCIA, Vanessa. **Determinação da Resposta nos Detectores Externos de um Reator PWR Usando Equação Adjunta de Transporte de Nêutrons**. 2004. Tese (Mestre em Ciências) - COOPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2004.

LEWIS, Elmer; MILLER, Warren. **Computational Methods of Neutron Transport**. John Wiley & Sons, 1984.

MARASHI M. K. Analysis of absorbed dose distribution in head phantom in boron neutron capture therapy. **Nuclear Instruments and Methods in Physics Research**, A 440, p. 446-452, 2000.

MORAES, Leonardo; ALVES FILHO, Hermes; BARROS, Ricardo. Determinação de Fontes de Nêutrons que Conduzem Sistemas Subcríticos a Distribuições Prescritas de Potência. **TEMA - Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, São Carlos, v. 21, p. 425-440, 2020.

RUGGIERO, Márcia; LOPES, Vera Lúcia. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. 2. ed. São Paulo: Pearson/Makron, 1998.

SIQUEIRA, P. T. D; YORIYAZ, H.; SHORTO, J. M. B; CAVALIERI T. A. Princípio e Aplicação da Terapia por Captura de Nêutrons por Boro. **Revista Brasileira de Física Médica**, v. 13, n. 1, p. 116-121, 2019.

TIPLER, Paul; LLEWELLYN, Ralph. **Física Moderna**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017. ISBN 978-85-216-2607-7.

YANG, W. S.; TAIWO, T. A.; KHALIL, H. Solution of the mathematical adjoint equations for an interface current nodal formulation. **Nuclear science and engineering**, v. 116, n. 1, p. 42-54, 1994.

YANG, Won Sik; DOWNAR, Thomas J. Generalized perturbation theory for constant power core depletion. **Nuclear Science and Engineering**, v. 99, n. 4, p. 353-366, 1988.

APÊNDICE – Tabelas de dados

Tabela 10 - Seções de choque macroscópicas do problema-modelo #2, zona material 1

<i>Spallation target</i>	$\Sigma_{S0}^{g' \rightarrow g} (cm^{-1})$			
	$g' = 1$	$g' = 2$	$g' = 3$	$g' = 4$
$g = 1$	0,16222913513400	0,000000000000000	0,000000000000000	0,000000000000000
$g = 2$	$0,36697017471314 \times 10^{-2}$	0,20593424121073	0,000000000000000	0,000000000000000
$g = 3$	$0,48715452703277 \times 10^{-3}$	$0,10488387103767 \times 10^{-2}$	0,30110171532229	0,000000000000000
$g = 4$	$0,78964654747121 \times 10^{-5}$	0,000000000000000	$0,20161301186285 \times 10^{-3}$	0,31902446488107

Fonte: O autor, 2025.

Tabela 11 - Seções de choque macroscópicas do problema-modelo #2, zona material 2

<i>LBE buffer</i>	$\Sigma_{S0}^{g' \rightarrow g} (cm^{-1})$			
	$g' = 1$	$g' = 2$	$g' = 3$	$g' = 4$
$g = 1$	0.20153835505666	0,000000000000000	0,000000000000000	0,000000000000000
$g = 2$	$0,10707621263452 \times 10^{-1}$	0,25128695243305	0,000000000000000	0,000000000000000
$g = 3$	$0,17039929923862 \times 10^{-1}$	$0,42768389582139 \times 10^{-2}$	0,36513472392174	0,000000000000000
$g = 4$	$0,10340815843129 \times 10^{-1}$	$0,95415164020803 \times 10^{-6}$	$0,15806435775153 \times 10^{-2}$	0,72871342075639

Fonte: O autor, 2025.

Tabela 12 - Seções de choque macroscópicas do problema-modelo #2, zona material 3

<i>LBE reflector</i>	$\Sigma_{S0}^{g' \rightarrow g} (cm^{-1})$			
	$g' = 1$	$g' = 2$	$g' = 3$	$g' = 4$
$g = 1$	0,20467386504769	0,000000000000000	0,000000000000000	0,000000000000000
$g = 2$	$0,10227580563091 \times 10^{-1}$	0,25095710445471	0,000000000000000	0,000000000000000
$g = 3$	$0,17256163669521 \times 10^{-2}$	$0,40410598407383 \times 10^{-2}$	0,36241749462944	0,000000000000000
$g = 4$	$0,10549007331644 \times 10^{-3}$	$0,76680706694453 \times 10^{-6}$	$0,15365658856520 \times 10^{-2}$	0,72897305642182

Fonte: O autor, 2025.

Tabela 13 - Seções de choque macroscópicas do problema-modelo #2, zona material 4

<i>SUS shield</i>	$\Sigma_{S0}^{g' \rightarrow g} (cm^{-1})$			
	$g' = 1$	$g' = 2$	$g' = 3$	$g' = 4$
$g = 1$	0,23668102448269	0,000000000000000	0,000000000000000	0,000000000000000
$g = 2$	$0,11409522450233 \times 10^{-1}$	0,29606851516865	0,000000000000000	0,000000000000000
$g = 3$	$0,18919368439678 \times 10^{-1}$	$0,46707832812833 \times 10^{-2}$	0,43899130539522	0,000000000000000
$g = 4$	$0,11520982936293 \times 10^{-1}$	$0,17936202249794 \times 10^{-5}$	$0,19655013153264 \times 10^{-2}$	0,79794514657930

Fonte: O autor, 2025.

Tabela 14 - Seções de choque macroscópicas do problema-modelo #2, zona material 5

<i>B4C shield</i>	$\Sigma_{S0}^{g' \rightarrow g} (cm^{-1})$			
	$g' = 1$	$g' = 2$	$g' = 3$	$g' = 4$
$g = 1$	0,22549134074260	0,000000000000000	0,000000000000000	0,000000000000000
$g = 2$	$0,27709282726362 \times 10^{-1}$	0,35435686876018	0,000000000000000	0,000000000000000
$g = 3$	$0,61981887073257 \times 10^{-3}$	$0,34806523475536 \times 10^{-1}$	0,47151479865429	0,000000000000000
$g = 4$	$0,35742069153492 \times 10^{-4}$	0,000000000000000	$0,80200321963827 \times 10^{-2}$	0,58953264092285

Fonte: O autor, 2025.

Tabela 15 - Seções de choque macroscópicas do problema-modelo #2, zona material 6

<i>Inner core</i>	$\Sigma_{S0}^{g' \rightarrow g} (cm^{-1})$			
	$g' = 1$	$g' = 2$	$g' = 3$	$g' = 4$
$g = 1$	0,19221930911845	0,000000000000000	0,000000000000000	0,000000000000000
$g = 2$	$0,10537653634523 \times 10^{-1}$	0,26190751249875	0,000000000000000	0,000000000000000
$g = 3$	$0,11077656386834 \times 10^{-1}$	$0,73387880672224 \times 10^{-1}$	0,36285507185274	0,000000000000000
$g = 4$	$0,32924647172602 \times 10^{-1}$	$0,71793891929223 \times 10^{-5}$	$0,21448608660985 \times 10^{-2}$	0,42556160238916

Fonte: O autor, 2025.

Tabela 16 - Seções de choque macroscópicas do problema-modelo #2, zona material 7

<i>Outer core</i>	$\Sigma_{S0}^{g' \rightarrow g} (cm^{-1})$			
	$g' = 1$	$g' = 2$	$g' = 3$	$g' = 4$
$g = 1$	0,19202385524166	0,000000000000000	0,000000000000000	0,000000000000000
$g = 2$	$0,10436734926051 \times 10^{-1}$	0,26139167019435	0,000000000000000	0,000000000000000
$g = 3$	$0,10905947200017 \times 10^{-2}$	$0,72032757041649 \times 10^{-2}$	0,36296181839921	0,000000000000000
$g = 4$	$0,31879405980967 \times 10^{-4}$	$0,58552011947768 \times 10^{-5}$	$0,22345523271838 \times 10^{-2}$	0,42498221836133

Fonte: O autor, 2025.

Tabela 17 - Estrutura dos 30 (trinta) grupos de energia do problema modelo #3 (em MeV)

Grupo	Limite Superior	Limite Inferior	Grupo	Limite Superior	Limite Inferior
1	17,000	15,000	16	0,184	0,0676
2	15,000	13,500	17	0,0676	0,0248
3	13,500	12,000	18	0,0248	0,00912
4	12,000	10,000	19	0,00912	0,00335
5	10,000	7,790	20	0,00335	0,001235
6	7,790	6,070	21	0,001235	$4,54 \times 10^{-4}$
7	6,070	3,680	22	$4,54 \times 10^{-4}$	$1,67 \times 10^{-4}$
8	3,680	2,265	23	$1,67 \times 10^{-4}$	$6,14 \times 10^{-5}$
9	2,265	2,232	24	$6,14 \times 10^{-5}$	$2,26 \times 10^{-5}$
10	2,232	1,738	25	$2,26 \times 10^{-5}$	$8,32 \times 10^{-6}$
11	1,738	1,353	26	$8,32 \times 10^{-6}$	$3,06 \times 10^{-6}$
12	1,353	0,823	27	$3,06 \times 10^{-6}$	$1,13 \times 10^{-6}$
13	0,823	0,500	28	$1,13 \times 10^{-6}$	$4,14 \times 10^{-7}$
14	0,500	0,303	29	$4,14 \times 10^{-7}$	$1,52 \times 10^{-7}$
15	0,303	0,184	30	$1,52 \times 10^{-7}$	$1,39 \times 10^{-10}$

Fonte: O autor, 2025.

Tabela 18 - Seções de choque macroscópicas totais do tecido saudável -
problema modelo #3

Grupo	$\Sigma_{T_g} (cm^{-1})$	Grupo	$\Sigma_{T_g} (cm^{-1})$
1	$9,336110292803924 \times 10^{-2}$	16	$9,062147393032020 \times 10^{-1}$
2	$9,879783723951586 \times 10^{-2}$	17	1,169425893934003
3	$1,013524762912476 \times 10^{-1}$	18	1,327829671040681
4	$1,060572674226889 \times 10^{-1}$	19	1,411490271907792
5	$1,099519549721759 \times 10^{-1}$	20	1,505286751693987
6	$1,206986462464790 \times 10^{-1}$	21	1,442896112966793
7	$1,631129034978853 \times 10^{-1}$	22	1,446984748130635
8	$2,094580330094419 \times 10^{-1}$	23	1,448805008119858
9	$2,149419217616211 \times 10^{-1}$	24	1,449940419284454
10	$2,481778236864342 \times 10^{-1}$	25	1,451380785502255
11	$2,906514255267066 \times 10^{-1}$	26	1,454376185043374
12	$3,937966985830521 \times 10^{-1}$	27	1,461498950077345
13	$4,506570626887333 \times 10^{-1}$	28	1,479605526036213
14	$6,532544985990435 \times 10^{-1}$	29	1,535736169756738
15	$6,968346235876413 \times 10^{-1}$	30	2,014437283442237

Fonte: O autor, 2025.

Tabela 19 - Seções de choque total do tecido doente do problema modelo #3

Grupo	$\Sigma_{T_g} (cm^{-1})$	Grupo	$\Sigma_{T_g} (cm^{-1})$
1	$9,339629764231842 \times 10^{-2}$	16	$9,057695911023875 \times 10^{-1}$
2	$9,877767914137386 \times 10^{-2}$	17	1,169364701176141
3	$1,013475483829207 \times 10^{-1}$	18	1,328253908762976
4	$1,060500308052396 \times 10^{-1}$	19	1,411591796235123
5	$1,099467991561019 \times 10^{-1}$	20	1,504126564355986
6	$1,207108725129929 \times 10^{-1}$	21	1,442931789670759
7	$1,631933389175657 \times 10^{-1}$	22	1,447031637355399
8	$2,092774964581804 \times 10^{-1}$	23	1,448880515903960
9	$2,150802769282104 \times 10^{-1}$	24	1,450057227032979
10	$2,481618927014489 \times 10^{-1}$	25	1,451569748374389
11	$2,908096224958114 \times 10^{-1}$	26	1,454695831539428
12	$3,938244737048405 \times 10^{-1}$	27	1,462030442581782
13	$4,508267051092347 \times 10^{-1}$	28	1,480501522402503
14	$6,522566798547733 \times 10^{-1}$	29	1,538186151954541
15	$6,976700239294437 \times 10^{-1}$	30	2,019956642546840

Fonte: O autor, 2025.

Tabela 20 - Seção de choque macroscópica de espalhamento para o tecido saudável (problema-modelo #3 - $g' \leq 15$ e $g \leq 10$)

$g' \backslash g$	$\Sigma_{s0}^{g' \rightarrow g} (cm^{-1})$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2,550097466 594200E-02	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
2	1,028757532 182890E-02	2,37743505798 8370E-02	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
3	5,178494204 696220E-03	1,30957210774 0920E-02	2,22467874151 6680E-02	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
4	5,708587616 547250E-03	8,49522398709 8590E-03	1,75111567291 5440E-02	2,37887204451 5680E-02	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
5	8,527573465 085500E-03	7,98542471766 5361E-03	9,90794127932 9809E-03	2,16678627734 7530E-02	2,37769684178 6550E-02	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
6	6,245232722 975510E-03	8,86765612241 5451E-03	8,34474698855 4440E-03	9,20703465209 0310E-03	2,19698344756 3910E-02	2,75176331121 0290E-02	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
7	1,035973427 721720E-02	1,08336830138 0210E-02	1,54930795220 3210E-02	1,72962615045 5990E-02	1,92263979871 3250E-02	4,06973821675 3120E-02	6,47424896515 7510E-02	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
8	7,217134558 061010E-03	8,03855267849 2889E-03	8,10904464944 7920E-03	1,15625768190 2310E-02	1,45598086886 7490E-02	1,75555337014 6970E-02	4,37809046420 1670E-02	8,08307785812 7059E-02	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
9	1,653391491 722740E-04	2,01020700410 4650E-04	2,02729517509 2890E-04	2,31842128837 2150E-04	3,93521477685 5210E-04	4,27518603579 6060E-04	7,56856693529 6200E-04	2,81705293676 0440E-03	3,88262184270 8080E-03	0,00000000000 0000E+00
10	2,372800132 913860E-03	2,97357526346 5810E-03	2,97274679398 5940E-03	3,32173733896 7050E-03	6,39624607184 5180E-03	6,47872891029 8300E-03	1,14803983426 6100E-02	3,33912521645 2520E-02	7,34218563710 5200E-02	5,40264485928 5090E-02
11	1,771235235 584500E-03	2,19058582118 9040E-03	2,30033751121 8970E-03	2,46585828489 1910E-03	5,01181094492 5930E-03	5,18758315809 3910E-03	8,98383947951 3429E-03	2,04900640820 0110E-02	3,32864868325 9550E-02	6,42106429562 5560E-02
12	2,213592568 269350E-03	2,61520840591 4200E-03	3,22212284062 8040E-03	3,43254536819 1420E-03	5,89800346202 0160E-03	8,09617377542 8209E-03	1,24899339458 9080E-02	2,80511688421 5030E-02	4,06664861458 9950E-02	5,12096656802 2660E-02
13	1,234820465 792910E-03	1,44045461378 9860E-03	1,81446286950 2010E-03	2,08615245383 4390E-03	2,97648162173 8110E-03	5,00491193015 4650E-03	7,70671036479 7900E-03	1,71567796120 4230E-02	2,51794460568 7850E-02	3,08951653031 1170E-02
14	6,879540873 905410E-04	7,99506067287 7120E-04	9,89540940347 0391E-04	1,22980788186 7180E-03	1,73107041621 6900E-03	2,86043676495 7260E-03	4,61259568543 1200E-03	1,05097199375 3240E-02	1,47667126430 2000E-02	1,88911147178 3590E-02
15	3,914090627 904590E-04	4,52182403001 1100E-04	5,60243976445 1530E-04	6,99008693537 0040E-04	9,89654351826 1309E-04	1,68195740987 0500E-03	2,81708684328 3330E-03	6,33142827966 8520E-03	9,62837686154 6370E-03	1,14365791134 8650E-02

Fonte: O autor, 2025.

Tabela 21 - Seção de choque macroscópica de espalhamento para o tecido saudável (problema-modelo #3 - $11 \leq g' \leq 20$ e $g \leq 10$)

$g' \backslash g$	$\Sigma_{s0}^{g' \rightarrow g} (cm^{-1})$									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
2	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
3	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
4	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
5	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
6	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
7	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
8	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
9	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
10	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
11	6,54630940819 5830E-02	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
12	1,09021833113 4390E-01	1,52584538888 6780E-01	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
13	4,54586134574 6630E-02	1,14467091414 0150E-01	1,62025377433 5610E-01	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
14	2,79492937188 9830E-02	4,99823613417 5570E-02	1,26007627737 5390E-01	2,58982124055 8570E-01	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
15	1,68750161333 3500E-02	3,02404145041 7040E-02	6,38411902952 9610E-02	1,78195100208 2180E-01	2,15664717148 9090E-01	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00

Fonte: O autor, 2025.

Tabela 23 - Seção de choque macroscópica de espalhamento para o tecido saudável (problema-modelo #3 - $g' \leq 15$ e $g \geq 16$)

g'	$\Sigma_{s0}^{g' \rightarrow g} (cm^{-1})$									
g	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3,55607639928	4,00635447107	5,23636098613	6,61783549034	9,01185665736	1,55098349158	2,72256846409	6,16827968969	8,90616125886	1,10932823921
6	0840E-04	8420E-04	7901E-04	0700E-04	0500E-04	5330E-03	0040E-03	5830E-03	8469E-03	3200E-02
1	1,14307169038	1,46513809382	1,82198993951	2,29348718569	3,40943172694	5,42130998415	1,00149655656	2,27695820716	3,24853306695	4,05266750010
7	8460E-04	5000E-04	7260E-04	5970E-04	0910E-04	1370E-04	7220E-03	8680E-03	4830E-03	8280E-03
1	4,03028635783	4,29676930277	6,43632524895	7,79079026779	1,26968186750	1,91066265820	3,71144448945	7,98450243628	1,18453846675	1,46398948504
8	7510E-05	4760E-05	8730E-05	8290E-05	9960E-04	8130E-04	5020E-04	1470E-04	7160E-03	3000E-03
1	1,31919302528	1,60335804102	2,21953697676	3,34869227513	4,13386141435	7,08058781882	1,33436183431	3,02805081084	4,32196467600	5,09739686364
9	2620E-05	8370E-05	6640E-05	6090E-05	9200E-05	1050E-05	2100E-04	4110E-04	5860E-04	2050E-04
2	4,88630492200	6,09263529236	1,07806081728	1,11609222931	1,79133994622	2,43752456205	5,06641408569	1,16988311644	1,04047297755	1,92533256149
0	6350E-06	8360E-06	6650E-05	2800E-05	2320E-05	3570E-05	0960E-05	9380E-04	6970E-04	9480E-04
2	9,76167947810	2,24465510771	3,80492053159	3,95282664548	7,87402174163	1,18390356619	1,92937527919	3,95312133688	8,00363828889	7,41726478610
1	3041E-07	4660E-06	9950E-06	2830E-06	6580E-06	9030E-05	3000E-05	7280E-05	9730E-05	4540E-05
2	9,77260984401	9,61995046163	1,90246026579	1,39511528664	3,14960869665	5,10703499144	6,62762500486	1,68559488476	1,60072765777	3,31409703208
2	2701E-07	4260E-07	9980E-06	1000E-06	4630E-06	6800E-06	1450E-06	4120E-05	9950E-05	9260E-05
2	0,00000000000	9,61995046163	3,17076710966	6,97557643320	5,90551630622	1,62496567909	1,47280555663	4,41465326962	0,00000000000	1,57814144385
3	0000E+00	4260E-07	6630E-07	5000E-07	7430E-07	6710E-06	5880E-06	0310E-06	0000E+00	2030E-05
2	4,88630492200	9,61995046163	0,00000000000	0,00000000000	5,90551630622	2,32137954156	1,32552500097	1,40466240397	8,00363828889	4,20837718360
4	6350E-07	4260E-07	0000E+00	0000E+00	7430E-07	6730E-07	2290E-06	0100E-06	9729E-06	5410E-06
2	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	2,32137954156	4,41841666990	6,01998173130	0,00000000000	1,05209429590
5	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	6730E-07	7630E-07	0430E-07	0000E+00	1350E-06
2	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	1,47280555663	4,01332115420	0,00000000000	5,26047147950
6	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	5880E-07	0280E-07	0000E+00	6760E-07
2	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	5,26047147950
7	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	6760E-07
2	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000
8	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00
2	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000
9	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00
3	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000	0,00000000000
0	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00

Fonte: O autor, 2025.

Tabela 24 - Seção de choque macroscópica de espalhamento para o tecido saudável (problema-modelo #3 - $11 \leq g' \leq 20$ e $g \geq 16$)

$g' \backslash g$	$\Sigma_{s0}^{g' \rightarrow g} (cm^{-1})$									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
16	1,63597085297 4090E-02	2,93594515464 8190E-02	6,24514983439 1970E-02	1,36323576037 7140E-01	3,15360172022 3080E-01	4,022060516 008580E-01	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
17	5,98223152523 2760E-03	1,08986067554 7890E-02	2,29706370175 9070E-02	5,02252435077 1010E-02	1,04808949135 6500E-01	3,250418074 072610E-01	5,03454841246 7510E-01	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
18	2,18149730627 1940E-03	3,95299209450 2600E-03	8,42528731891 0500E-03	1,86496712341 9820E-02	3,83752890917 7890E-02	1,131203718 982660E-01	4,27217126273 1640E-01	5,62147366084 4600E-01	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
19	8,40348055777 2800E-04	1,43579212909 4510E-03	3,06391735651 1100E-03	6,85907184283 9820E-03	1,42502222955 9440E-02	4,146285445 514030E-02	1,50829264196 2980E-01	4,89991844496 7840E-01	5,97043770003 0770E-01	0,00000000000 0000E+00
20	2,91474814422 3870E-04	5,27012699678 6920E-04	1,15430853513 6790E-03	2,55610651262 8670E-03	5,30026129582 4420E-03	1,530488139 961880E-02	5,56584661977 1960E-02	1,74009415268 7880E-01	5,22018746478 3040E-01	6,70531529682 3270E-01
21	1,02837669389 1100E-04	2,11519404313 8120E-04	4,35414111025 1040E-04	9,40401631829 5440E-04	1,93528993757 6780E-03	5,731081424 454740E-03	2,04344312743 3520E-02	6,41586268838 7440E-02	1,84894190360 6520E-01	5,34512744224 4260E-01
22	4,38124982012 7750E-05	7,34166787956 0100E-05	1,51448386443 5140E-04	3,11839413522 1120E-04	7,24763061776 4151E-04	2,119640404 290730E-03	7,42371373628 9170E-03	2,36048652212 4840E-02	6,78524251437 2029E-02	1,89831922463 0970E-01
23	1,58211799060 1690E-05	3,13509060802 8370E-05	5,38806759462 5030E-05	1,28363427490 0860E-04	2,51941445284 1820E-04	7,664852190 322950E-04	2,77986296572 1020E-03	8,91948938043 5110E-03	2,52787975864 9330E-02	6,97861143143 1690E-02
24	5,47656227515 9680E-06	7,93693824817 3070E-06	2,23289287705 1810E-05	3,48813661657 8430E-05	8,71441300469 2610E-05	2,694201599 284130E-04	1,02911965278 7000E-03	3,21156633821 3720E-03	9,05904291541 5091E-03	2,55342072461 1700E-02
25	1,82552075838 6560E-06	1,98423456204 3270E-06	9,70822990022 5280E-06	1,67430557595 7650E-05	4,48662847766 3520E-05	1,168496423 959190E-04	3,49652701308 3530E-04	1,11014682232 5330E-03	3,29302344038 6100E-03	9,22658931923 1770E-03
26	0,00000000000 0000E+00	1,58738764963 4620E-06	4,85411495011 2640E-06	5,58101858652 5490E-06	1,72562633756 2890E-05	4,298613787 621880E-05	1,57881006973 7480E-04	4,20480389340 9220E-04	1,27093486375 6860E-03	3,66599230118 4590E-03
27	6,08506919462 1870E-07	3,96846912408 6540E-07	1,45623448503 3790E-06	2,09288196994 7060E-06	8,62813168781 4460E-07	1,392508691 764830E-05	5,12493321066 6170E-05	1,46382191616 3490E-04	4,75658941389 1030E-04	1,28304078379 4180E-03
28	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	4,85411495011 2640E-07	6,97627323315 6860E-07	8,62813168781 4460E-07	4,238069931 458190E-06	1,32256340920 4170E-05	4,51918175459 8690E-05	1,54965808959 3460E-04	4,54433828268 9500E-04
29	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	1,72562633756 2890E-06	3,027192808 184420E-06	4,13301065376 3040E-06	2,45607704054 2770E-05	5,70360269086 4810E-05	1,79738752972 0480E-04
30	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	1,210877123 273770E-06	2,47980639225 7820E-06	9,82430816217 1070E-06	3,55129978865 1680E-05	1,15304105680 1820E-04

Fonte: O autor, 2025.

Tabela 25 - Seção de choque macroscópica de espalhamento para o tecido saudável (problema-modelo #3 - $21 \leq g' \leq 30$ e $g \geq 16$)

$g' \backslash g$	$\Sigma_{s0}^{g' \rightarrow g} (cm^{-1})$									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1 6	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00
1 7	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00
1 8	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00
1 9	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00
2 0	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00
2 1	6,04018433179 6200E-01	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00
2 2	5,37204359832 4761E-01	6,05595663789 8570E-01	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00
2 3	1,90781976583 2630E-01	5,38541169180 0860E-01	6,05921643019 8940E-01	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00
2 4	7,00868808112 0799E-02	1,91604894709 0950E-01	5,39638243602 1580E-01	6,06821417527 9359E-01	6,47447310665 6720E-06	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00
2 5	2,58054676928 0560E-02	7,00467145706 9769E-02	1,91723553254 9570E-01	5,39621022917 2260E-01	6,08718314751 4820E-01	1,71982611450 7600E-05	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00
2 6	9,49561935206 2430E-03	2,58325160104 7440E-02	7,03546171414 5159E-02	1,91546075078 8120E-01	5,39446886573 0200E-01	6,13733524630 3670E-01	1,42639699362 6020E-04	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00
2 7	3,40653158339 1830E-03	9,65284334966 5799E-03	2,57635238516 8690E-02	7,03644938769 7150E-02	1,91749778412 3830E-01	5,38102335635 4701E-01	6,22845602262 6940E-01	1,01853717033 7380E-03	0,0000000000 0000E+00	0,0000000000 0000E+00
2 8	1,20895730731 5990E-03	3,54721593008 6040E-03	9,60590277452 9520E-03	2,59764214711 1730E-02	7,05989496496 0620E-02	1,92507743994 4140E-01	5,41009773530 9850E-01	6,55181220709 9690E-01	4,75927812738 6470E-03	6,50594494602 7650E-07
2 9	4,88479374894 3100E-04	1,25640564235 4560E-03	3,55541555257 2660E-03	9,75410709943 0811E-03	2,61011908821 7590E-02	7,05968046263 7991E-02	1,92877107298 7910E-01	5,40487328786 9500E-01	6,40592458740 1800E-01	2,04021062314 8850E-02
3 0	2,49485885984 2060E-04	6,62402974765 7290E-04	1,84113136511 8160E-03	5,19477896553 0310E-03	1,36689076227 7370E-02	3,76235022145 1970E-02	1,01664261373 6600E-01	2,78033108662 7420E-01	8,81838830359 6020E-01	1,97185329882 0740E+00

Fonte: O autor, 2025.

Tabela 26 - Seção de choque macroscópica de espalhamento para o tecido com tumor (problema-modelo #3 - $g' \leq 10$ e $g \leq 15$)

g'	$\Sigma_{s0}^{g' \rightarrow g} (cm^{-1})$									
g	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2,613576287 436270E-02	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
2	9,866407537 775920E-03	2,35160882219 9740E-02	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
3	5,221637158 317060E-03	1,27301767068 5100E-02	2,23295092083 7790E-02	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
4	5,313661648 235000E-03	8,94197983901 4950E-03	1,80370814349 6440E-02	2,36969572680 3120E-02	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
5	8,433700870 031830E-03	8,36556100580 5180E-03	9,63252843002 6819E-03	2,25281413400 2190E-02	2,38463148484 2090E-02	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
6	5,860656056 372590E-03	8,72013146139 4311E-03	7,96114866709 8831E-03	9,38588681307 1559E-03	2,19151590642 9830E-02	2,71672627345 2580E-02	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
7	1,008185051 809970E-02	1,10887915962 3040E-02	1,54244021214 0820E-02	1,68087666987 7310E-02	1,84569761674 7930E-02	4,07237267208 1960E-02	6,48140841804 2039E-02	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
8	7,787210920 860900E-03	7,09738669107 5490E-03	7,33924265785 5700E-03	1,13326425360 6300E-02	1,48666112340 7950E-02	1,78352701335 7210E-02	4,40148384352 8860E-02	7,97616201635 2810E-02	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
9	2,832240808 329670E-04	3,46337884142 6570E-04	1,60598589894 5690E-04	2,04886205340 1750E-04	3,34333466106 1580E-04	4,17801361500 6760E-04	6,35092165551 6020E-04	2,56919975424 5870E-03	1,77032103023 0560E-03	0,00000000000 0000E+00
10	2,433136734 584890E-03	2,69474417323 3560E-03	3,00957050153 4740E-03	3,58655286786 7390E-03	6,65384773661 9430E-03	6,88487867975 8440E-03	1,17358446542 3120E-02	3,49814771234 8910E-02	7,37366734575 6631E-02	5,35867945452 1430E-02
11	1,813975268 491670E-03	2,49578519308 2990E-03	2,57691214457 9190E-03	2,48489424430 6870E-03	5,25366509234 3450E-03	5,09773050343 0380E-03	8,57654995961 8981E-03	2,02437171811 9600E-02	3,64375007274 3500E-02	6,39895373489 4521E-02
12	2,158057601 290280E-03	2,91409316321 7790E-03	3,52074387172 5190E-03	3,10323328781 0200E-03	5,93346223627 0890E-03	8,03396091568 7900E-03	1,22876924606 4810E-02	2,82993893750 7300E-02	4,12380442216 5210E-02	5,22919835399 8890E-02
13	1,222257829 837630E-03	1,24343233131 6170E-03	2,23201542550 1480E-03	2,01434549133 9870E-03	2,92125415601 2120E-03	4,81115451994 1590E-03	7,38699138422 8540E-03	1,69132116392 1420E-02	2,74920294811 0140E-02	3,10236346032 6960E-02
14	7,686579466 190170E-04	9,76415064467 7980E-04	9,93299620492 0770E-04	1,18527611997 4380E-03	1,63526155303 7890E-03	2,71869582167 1710E-03	4,82179909520 9640E-03	1,04391348873 4830E-02	1,27641565447 9710E-02	1,76164357294 9480E-02
15	4,470400437 628850E-04	4,90509201410 3340E-04	6,43749769512 6010E-04	7,38684317152 0870E-04	9,79728581852 9870E-04	1,63910169223 6510E-03	2,86145492789 9430E-03	6,14447998800 1670E-03	7,85486556602 8969E-03	1,16611450669 5760E-02

Fonte: O autor, 2025.

Tabela 27 - Seção de choque macroscópica de espalhamento para o tecido com tumor (problema-modelo #3 - $11 \leq g' \leq 20$ e $g \leq 15$)

$g' \backslash g$	$\Sigma_{s0}^{g' \rightarrow g} (cm^{-1})$									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
2	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
3	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
4	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
5	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
6	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
7	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
8	6,48187052005 3540E-02	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
9	1,07960432896 0250E-01	1,53154963607 8570E-01	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
10	4,61909822512 2990E-02	1,14879489593 9430E-01	1,61627890694 7480E-01	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
11	2,82073912314 4370E-02	5,08309427048 7790E-02	1,27111942097 5240E-01	2,53469286901 0980E-01	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
12	1,67602459458 2510E-02	3,01795910273 6880E-02	6,31189235696 0640E-02	1,76071848760 6490E-01	2,14260711335 8930E-01	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
13	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
14	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
15	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00

Fonte: O autor, 2025.

Tabela 28 - Seção de choque macroscópica de espalhamento para o tecido com tumor (problema-modelo #3 - $21 \leq g' \leq 30$ e $g \leq 15$)

[illegible]

Fonte: O autor, 2025.

Tabela 29 - Seção de choque macroscópica de espalhamento para o tecido com tumor (problema-modelo #3 - $g' \leq 10$ e $g \geq 16$)

g'	$\Sigma_{s0}^{g' \rightarrow g} (cm^{-1})$									
g	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
16	3,69161715235 5930E-04	4,72696600679 3250E-04	3,85000643516 5550E-04	6,39911328613 6630E-04	1,00526742089 9300E-03	1,65164870498 3930E-03	2,76889739145 8120E-03	6,21893334286 2920E-03	8,22754789128 7689E-03	1,18482222605 4520E-02
17	1,07311833523 1740E-04	1,62287608999 7260E-04	1,41842342348 2040E-04	1,31903045039 4900E-04	3,35168203049 3630E-04	5,49082688818 0840E-04	1,32540973680 3340E-03	2,09371425157 7500E-03	3,43650368513 7680E-03	3,89744153307 4080E-03
18	3,06605238637 6400E-05	4,08111432353 6000E-05	4,05263835280 5840E-05	8,79353633596 5969E-05	1,36550008649 7410E-04	2,60422675043 8800E-04	3,40556668484 1920E-04	9,79515439334 5000E-04	4,90929097876 8110E-04	1,37189941964 2080E-03
19	4,59907857956 4600E-05	4,08111432353 6000E-05	2,02631917640 2920E-05	5,86235755731 0650E-05	4,96545485999 0570E-05	1,01031004820 9710E-04	1,01246577116 9220E-04	2,93854631800 3500E-04	9,81858195753 6220E-04	6,23590645291 8520E-04
20	3,06605238637 6400E-05	2,04055716176 8000E-05	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	2,48272742999 5290E-05	2,88660013774 2040E-05	2,76127028500 6960E-05	1,22439429916 8130E-04	0,00000000000 0000E+00	6,23590645291 8519E-05
21	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	2,02631917640 2920E-05	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	4,60211714167 8270E-05	4,89757719667 2500E-05	0,00000000000 0000E+00	6,23590645291 8519E-05
22	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	4,90929097876 8110E-04	3,11795322645 9260E-05
23	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	1,22439429916 8130E-05	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
24	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
25	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
26	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
27	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
28	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
29	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
30	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00

Fonte: O autor, 2025.

Tabela 30 - Seção de choque macroscópica de espalhamento para o tecido com tumor (problema-modelo #3 - $11 \leq g' \leq 20$ e $g \geq 16$)

$g' \backslash g$	$\Sigma_{s0}^{g' \rightarrow g} (cm^{-1})$									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1 6	1,70274082661 7790E-02	2,88225546124 7110E-02	6,18190028453 8150E-02	1,39999055169 9790E-01	3,18610806464 2300E-01	4,03544050873 4160E-01	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
1 7	6,36229293747 0360E-03	1,00906513228 4630E-02	2,37729553863 6750E-02	5,21847377882 9550E-02	1,04826397743 0940E-01	3,24652540995 1500E-01	5,00768021274 8460E-01	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
1 8	2,05947054623 3180E-03	3,46361029388 3180E-03	8,80376969331 6020E-03	1,81946786924 7080E-02	3,89521505727 4610E-02	1,11477656806 3610E-01	4,30700974712 3770E-01	5,58062385086 2750E-01	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00
1 9	6,61972675574 9511E-04	1,50089779401 6050E-03	2,99939156743 8900E-03	8,47752062154 6849E-03	1,37278438506 6890E-02	4,22592855439 1560E-02	1,47818797347 2970E-01	4,97918385079 1100E-01	6,02412549449 4190E-01	0,00000000000 0000E+00
2 0	4,41315117049 9670E-04	5,77268382313 8630E-04	8,60936468431 5350E-04	2,31932167947 9800E-03	5,09336962657 3280E-03	1,53670129250 6020E-02	5,64716095128 9660E-02	1,72675888171 1490E-01	5,10253399249 6380E-01	6,69830313671 4260E-01
2 1	1,83881298770 8200E-04	2,53998088218 1000E-04	3,33265729715 4330E-04	4,79859657823 4070E-04	1,40674018257 7380E-03	5,41186107360 8160E-03	2,05229364738 0800E-02	6,28765462362 3350E-02	1,92144848227 0590E-01	5,33574047061 1620E-01
2 2	3,67762597541 6390E-05	2,30907352925 5450E-05	2,22177153143 6220E-04	6,39812877097 8760E-04	4,36574539420 5660E-04	1,77054714136 5630E-03	7,91407354218 7400E-03	2,28357605733 5850E-02	6,76210695425 2529E-02	1,86655729324 9860E-01
2 3	0,00000000000 0000E+00	2,30907352925 5450E-05	5,55442882859 0550E-05	1,19964914455 8520E-04	2,91049692947 0440E-04	8,35163745927 1850E-04	3,44284555225 1020E-03	8,13328458777 1520E-03	2,45231596598 2040E-02	7,21050440151 2620E-02
2 4	3,67762597541 6390E-05	0,00000000000 0000E+00	2,77721441429 5270E-05	7,99766096372 3441E-05	4,85082821578 4070E-05	3,67472048207 9610E-04	1,16251927738 3460E-03	3,44100501790 3330E-03	9,20319950620 2610E-03	2,54557078466 3560E-02
2 5	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	7,99766096372 3441E-05	0,00000000000 0000E+00	3,34065498370 8740E-05	3,57698239194 9110E-04	1,30341099163 0050E-03	3,53537542006 5640E-03	9,98377532517 1321E-03
2 6	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	7,99766096372 3441E-05	0,00000000000 0000E+00	3,34065498370 8740E-05	1,78849119597 4550E-04	6,7773715647 6260E-04	1,23457554351 4980E-03	4,43723347785 3920E-03
2 7	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	2,08545758660 8080E-04	2,80585350798 8600E-04	1,10930836946 3480E-03
2 8	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	5,21364396652 0200E-05	1,68351210479 3160E-04	4,08692557170 7550E-04
2 9	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	5,61170701597 7200E-05	2,91923255121 9680E-04
3 0	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	0,00000000000 0000E+00	5,61170701597 7200E-05	5,83846510243 9360E-05

Fonte: O autor, 2025.

Tabela 31 - Seção de choque macroscópica de espalhamento para o tecido com tumor (problema-modelo #3 - $21 \leq g' \leq 30$ e $g \geq 16$)

g'	$\Sigma_{s0}^{g' \rightarrow g} (cm^{-1})$									
g	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000
6	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00
1	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000
7	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00
1	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000
8	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00
1	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000
9	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00
2	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000
0	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00
2	5,95164284436	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000
1	5100E-01	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00
2	5,47416329082	6,06702598097	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000
2	5000E-01	6920E-01	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00
2	1,91331936420	5,45206200373	6,04882397679	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000
3	9730E-01	5521E-01	2540E-01	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00
2	6,87608416471	1,90066366687	5,35965002741	6,02708271598	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000
4	0330E-02	0730E-01	9690E-01	4020E-01	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00
2	2,51549584627	6,59303937373	1,93115958731	5,37601055323	6,13081056356	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000
5	8840E-02	8740E-02	9910E-01	9000E-01	2150E-01	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00	0000E+00
2	9,25512622687	2,43720892380	7,17722303318	1,94302090843	5,38675341265	6,09433210431	6,57356445134	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000
6	4990E-03	7140E-02	8970E-02	8150E-01	5459E-01	2750E-01	1030E-05	0000E+00	0000E+00	0000E+00
2	2,96638661117	9,04222475417	2,70666461844	7,43977374003	1,90541916887	5,42887290830	6,24692451846	1,11655254176	0,0000000000	0,0000000000
7	7880E-03	3930E-03	8380E-02	1209E-02	7870E-01	8620E-01	4430E-01	8830E-03	0000E+00	0000E+00
2	1,83915969893	3,23364328957	9,73182784161	2,65971911206	6,87354432179	1,93379339644	5,38180501076	6,55060976775	4,26915941111	0,0000000000
8	0290E-03	2130E-03	2171E-03	1160E-02	8820E-02	6710E-01	9510E-01	7700E-01	3150E-03	0000E+00
2	4,74621857788	1,61682164478	3,64943544060	8,86573037353	2,46871145194	6,82256871774	1,91826432726	5,39860441074	6,34703820483	2,01792969648
9	4610E-04	6070E-03	4560E-03	7200E-03	9620E-02	6100E-02	6600E-01	4020E-01	4470E-01	9790E-02
3	3,55966393341	5,38940548262	2,18966126436	4,77385481652	1,45365750470	3,86633149046	1,03761520955	2,78703292026	8,89111531549	1,97376543078
0	3450E-04	0220E-04	2740E-03	0030E-03	1300E-02	1450E-02	6630E-01	0560E-01	2000E-01	0890E+00

Fonte: O autor, 2025.