



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Rafael Borges Elias

Incomensurabilidade, antifairese e equivalência de áreas

Rio de Janeiro

2023

Rafael Borges Elias

Incomensurabilidade, antifairese e equivalência de áreas



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em rede nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Antonio de Araujo Carneiro

Rio de Janeiro

2023

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

E42 Elias, Rafael Borges.
Incomensurabilidade, antifairese e equivalência de áreas/ Rafael Borges
Elias. – 2023.
76 f.: il.

Orientador: Fernando Antonio de Araujo Carneiro
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -
PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de
Matemática e Estatística.

1. Matemática - História - Teses. 2. Lógica - Teses. 3. Geometria plana -
Teses. I. Carneiro, Fernando Antonio de Araujo. II. Universidade do Estado do
Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título

CDU 51(091)

Patricia Bello Meijinhos CRB7/5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta
dissertação, desde que citada a fonte

Assinatura

Data

Rafael Borges Elias

Incomensurabilidade, antifairese e equivalência de áreas

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em rede nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 27 de setembro de 2023.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fernando Antonio de Araujo Carneiro (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho
Instituto Federal de São Paulo - IFSP

Prof^a. Dr^a. Patricia Nunes da Silva
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Rio de Janeiro

2023

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado saúde e sabedoria para otimizar meu tempo em prol deste trabalho.

Aos meus pais, Marise Borges e Daniel Elias, que abriram mão de conquistas pessoais para cuidarem de perto do meu crescimento e investiram tudo o que tinham para que eu tivesse uma educação de qualidade.

À minha esposa, Suellen Borges. Agradeço por todo amor, carinho, dedicação, por entender a minha ausência e me motivar em cada passo. Obrigado por todo suporte e por estar ao meu lado nos momentos mais difíceis.

Aos meus amigos do Colégio Pedro II, que sempre me incentivaram a cursar o mestrado e fizeram todo o possível para ajustar meus horários de aula com os horários das disciplinas do PROFMAT.

Ao meu orientador, Fernando Carneiro, que me guiou e me deu total apoio em cada etapa do trabalho.

RESUMO

ELIAS, Rafael Borges. *Incomensurabilidade, antifairese e equivalência de áreas*. 2023. 76 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

Neste trabalho, abordamos alguns acontecimentos do momento histórico em que aconteceu a descoberta da incomensurabilidade. A partir da junção de fragmentos históricos, conseguimos especular algumas características da sociedade grega acerca do desenvolvimento matemático da época. Destacamos a habilidade geométrica grega e a sua independência dos recursos aritméticos. Buscamos estudos e experimentos mais recentes que reafirmam o importante papel do uso dos recursos pictográficos na compreensão de conceitos abstratos e do uso da lógica na resolução de problemas, mesmo que de maneira intuitiva. O conceito de razão, definido a partir do mecanismo de antifairese, é inserido como uma das principais ferramentas na compreensão da incomensurabilidade. Abordamos definições, propriedades, correlacionamos o mecanismo de antifairese com algumas perspectivas mais modernas e dividimos o mecanismo em três estruturas: a numérica, a geométrica relacionando segmentos e a geométrica relacionando áreas. Concluímos o trabalho com alguns resultados importantes do estudo de antifairese envolvendo áreas.

Palavras-chave: Incomensurabilidade. Antifairese. Gnômon.

ABSTRACT

ELIAS, Rafael Borges. *Incommensurability, anthyphairesis and equivalence of areas*. 2023. 76 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

In this work, we address some events of the historical moment in which the discovery of incommensurability took place. From the combination of historical fragments, we were able to speculate some characteristics of Greek society about the mathematical development of the time. We highlight the Greek geometric skill and its independence from arithmetic resources. We looked for more recent studies and experiments that reaffirm the important role of the use of pictographic resources in understanding abstract concepts and the use of logic in solving problems, even if intuitively. The concept of reason, defined from the antyphairesis mechanism, is inserted as one of the main tools in understanding incommensurability. We approach definitions, properties, correlate the antyphairesis mechanism with some more modern perspectives and divide the mechanism into three structures: numerical, geometric relating segments and geometric relating areas. We conclude the work with some important results from the study of antyphairesis involving areas.

Keywords: Incommensurability. Anthyphairesis. Gnomon.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Diálogo entre Sócrates e o jovem escravo de Mênon (etapa 1).	13
Figura 2 - Diálogo entre Sócrates e o jovem escravo de Mênon (etapa 2).	14
Figura 3 - Diálogo entre Sócrates e o jovem escravo de Mênon (etapa 3).	15
Figura 4 - Diálogo entre Sócrates e o jovem escravo de Mênon (etapa 4).	15
Figura 5 - Diálogo entre Sócrates e o jovem escravo de Mênon (etapa 5).	16
Figura 6 - Diálogo entre Sócrates e o jovem escravo de Mênon (etapa 6).	17
Figura 7 - Abordagem CPA.	21
Figura 8 - Material dourado (visão geral).	22
Figura 9 - Material dourado (representação).	23
Figura 10 - etapas do método científico.	24
Figura 11 - Linha do tempo.	28
Figura 12 - Linha do tempo de Maria.	28
Figura 13 - Linha do tempo de João.	29
Figura 14 - uma representação de igualdade.	29
Figura 15 - Equação do segundo grau (modelo geométrico - etapa 1).	30
Figura 16 - Equação do segundo grau (modelo geométrico - etapa 2).	31
Figura 17 - Equação do segundo grau (modelo geométrico - etapa 3).	31
Figura 18 - Equação do segundo grau (generalização).	32
Figura 19 - Antifairese de segmento (etapa 1).	45
Figura 20 - Antifairese de segmento (etapa 2).	45
Figura 21 - Antifairese de segmento (etapa 3).	45
Figura 22 - Antifairese de segmento (etapa 4).	46
Figura 23 - Antifairese de segmento (etapa 5).	46
Figura 24 - Antifairese de segmento (etapa 6).	46
Figura 25 - Incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do quadrado.	48
Figura 26 - Trissecção do ângulo interno do pentágono regular.	50
Figura 27 - Relação entre a diagonal e o lado do pentágono regular.	50
Figura 28 - Antifairese entre a diagonal e o lado do pentágono regular.	51
Figura 29 - Divisão em média e extrema razão.	52
Figura 30 - Gnômon.	55
Figura 31 - Gnômon retangular.	55
Figura 32 - Retângulos de mesma altura.	56
Figura 33 - Gnômon da proposição 6 (construção).	57
Figura 34 - Gnômon da proposição 6 (demonstração).	58
Figura 35 - Propriedade da área do quadrado construído sobre a diagonal de um quadrado.	58

Figura 36 - Proposição 11 do livro II (enunciado).	59
Figura 37 - Proposição 11 do livro II (construção).	60
Figura 38 - Antifairese entre a diagonal e o lado do quadrado, via teoria dos gnômons.	62
Figura 39 - Antifairese de $\sqrt{5} : 1$ (construção geométrica).	64
Figura 40 - Antifairese de $\sqrt{5} : 1$	65
Figura 41 - Antifairese de $\sqrt{n^2 + 1} : 1$	67
Figura 42 - Antifairese de $\sqrt{3} : 1$	69
Figura 43 - Antifairese de $\sqrt{3} : 1$ (numericamente).	70

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	9
1	A HIPÓTESE DE DAVID H. FOWLER ACERCA DOS INCOMENSURÁVEIS	12
1.1	A estrutura da matemática grega na perspectiva de Fowler: . . .	12
1.2	A descoberta dos incomensuráveis:	18
2	A IMPORTÂNCIA DA GEOMETRIA E DA LÓGICA NA DESCOBERTA DOS INCOMENSURÁVEIS	20
2.1	A abordagem CPA (concreto, pictórico e abstrato):	20
2.2	Lógica utens e lógica docens:	24
2.3	Teoria da metáfora conceitual (CMT):	26
3	ANTIFAIRESE	35
3.1	Antifairese numérica:	36
3.1.1	<u>Apresentação do método e algumas definições:</u>	36
3.1.2	<u>Generalização:</u>	39
3.1.3	<u>Algumas propriedades:</u>	40
3.2	Antifairese de segmentos:	45
3.2.1	<u>Antifairese entre a diagonal e o lado de um quadrado:</u>	47
3.2.2	<u>Antifairese entre a diagonal e o lado de um pentágono regular:</u>	50
3.2.3	<u>Divisão de um segmento em média e extrema razão (divisão áurea):</u>	52
3.3	Antifairese envolvendo áreas — Método dos gnômons:	53
3.3.1	<u>Definição:</u>	55
3.3.2	<u>Resultados importantes:</u>	56
3.3.3	<u>Antifairese via teoria dos gnômons:</u>	59
	CONCLUSÃO	73
	REFERÊNCIAS	75

INTRODUÇÃO

As diversas formas e padrões encontrados no universo foram, sem dúvidas, o estopim para a busca incessante da humanidade pelo conhecimento e pela compreensão de tudo que está à nossa volta. Essa busca sem fim proporcionou diversos avanços científicos, tecnológicos, medicinais e etc., melhorando nossa qualidade de vida e nos dando condições de construirmos uma sociedade cada vez mais desenvolvida. Além de ser uma grande fonte de inspiração, a natureza nos fornece muito conhecimento, seja pela percepção dos padrões da anatomia humana, pelo comportamento dos astros, ou até mesmo pela complexidade de uma estrutura infinitamente pequena como um átomo.

Onde está a matemática em meio a toda essa complexidade? Há quem diga que o surgimento da matemática se deu como uma forma de dialogar com o universo, ou que o universo foi arquitetado segundo a linguagem matemática. Avançando um pouco na história da humanidade, chegamos num momento marcante que foi o advento dos números. As estruturas de simbolismos e significados, constatada por vestígios materiais arqueológicos, foi um recurso amplamente utilizado pelos primeiros habitantes da terra. A necessidade de criar símbolos que representassem determinadas quantidades foi o ponto de partida para criação de um “novo universo”.

Uma civilização que contribuiu significativamente para o avanço, não somente da matemática, mas da filosofia, da política e da economia, foi a civilização grega. A Grécia proporcionou ao mundo uma maneira de pensar e disseminar o conhecimento, sendo responsável pela criação de escolas e academias, onde muitos pensadores se reuniam para dialogar, compartilhar conhecimento e estimular novos pensadores. Uma escola que se destaca na Grécia primitiva é a escola pitagórica, conhecida até os dias atuais pelas suas consideráveis contribuições na compreensão e associação dos números com o universo. Alguns pensadores discursavam em praças públicas e em centros comerciais da época, fazendo com que o conhecimento e a cultura grega fosse propagada para as regiões vizinhas, visto que muitas pessoas vinham de outros lugares, não só para ouvir os ensinamentos, mas para atividades comerciais.

Acredita-se que a matemática, como conhecemos hoje, estruturada em conceitos lógicos e axiomáticos, teve origem na civilização grega. As poucas peças históricas que sobreviveram ao tempo, mostram uma composição sistemática, bem consolidada e usada até os dias atuais.

A discussão principal do nosso trabalho teve origem na Grécia antiga. Os pi-

tagóricos estavam desenvolvendo diversos estudos que contribuíram não só para a sociedade da época, mas para as gerações futuras de filósofos, matemáticos e cientistas. De todas as contribuições, destacamos aqui o pensamento pitagórico. Os pitagóricos acreditavam que todas as grandezas (aquilo que pode ser medido) eram expressas por números inteiros, ou uma comparação entre números inteiros (razão). Do ponto de vista comparativo, dadas duas grandezas, sempre era possível determinar uma grandeza (menor ou igual a menor delas) capaz de dividi-las, determinando assim o critério de comensurabilidade. A partir desse momento histórico, abordaremos dois possíveis rumos que a descoberta dos incomensuráveis pode ter tomado na história.

Nos baseamos nas obras do historiador da matemática inglês David Herbert Fowler que, inspirado nos estudos publicados de Wilbur Knorr, trouxe mais algumas camadas de argumentação para a discussão acerca da incomensurabilidade na Grécia antiga.

No primeiro capítulo abordamos a escassez de fontes históricas e a dificuldade de afirmarmos, com precisão, o impacto que os incomensuráveis tiveram na sociedades grega e no pensamento pitagórico. Começamos com alguns dados históricos sobre o desenvolvimento da matemática grega da época e os recursos utilizados na tentativa de compreender os incomensuráveis. Apesar de diversas literaturas (em maioria) afirmarem que houve uma crise no pensamento pitagórico, Fowler caminha para o lado oposto. Um dos recursos utilizados em defesa da não crise, foi o domínio geométrico não aritmetizado da sociedade grega. Fowler busca na filosofia o livro *Mênon* de Platão. Na obra, Platão descreve um diálogo entre Sócrates e o estudante Mênon sobre a virtude e o aprendizado. No diálogo, Sócrates e o escravo de Mênon demonstram recurso geométricos eficazes, sem a necessidade do rigor aritmético. Neste capítulo, faremos uma releitura do diálogo entre Sócrates e Mênon, mostrando algumas propriedades geométricas importantes para a discussão seguinte. Outro recurso utilizado em defesa da não crise é um dos conceitos de razão já conhecidos da época.

No segundo capítulo, fizemos um levantamento de estudos mais recentes, no campo da ciência de resolução de problemas, da filosofia e da neurociência, que descrevem alguns comportamentos do cérebro ao se deparar com novos desafios, como por exemplo a descoberta dos incomensuráveis na época. Baseado nos trabalhos de Jerome Seymour Bruner, começamos com a abordagem CPA (concreto, pictórico e abstrato), que é um caminho pedagógico que viabiliza a compreensão sequenciada de novos conceitos matemáticos abstratos. Em seguida, trazemos dois conceitos filosóficos propostos pelo filósofo e matemático Charles Sanders Peirce, a lógica utens e a lógica docens. Peirce discorre sobre a capacidade instintiva que temos de compreender certos fenômenos e certos padrões através do nosso instinto de raciocínio, nomeado pelo autor de lógica utens, e sobre a habilidade

de sistematizar processos da natureza e do nosso dia a dia, denominada lógica docens. Terminamos o capítulo com um estudo baseado num experimento realizado pelo professor de Semiótica e Antropologia linguística, Marcel Danesi, sobre a teoria da metáfora conceitual (CMT). A partir da ampla dificuldade dos alunos em compreender a estrutura de significados em modelagem matemática, Danesi, juntamente com sua equipe, propõe um experimento baseado nos estudos de George Lakoff para ensinar os alunos selecionados a desenvolverem problemas de modelagem a partir de ferramentas de representatividade chamadas de esquemas de imagens.

No terceiro capítulo abordaremos o mecanismo de subtrações recíprocas e contínuas, denominada antifairese. Fowler acredita que tal mecanismo foi fundamental para a compreensão do fenômeno da incomensurabilidade, viabilizando a comparação entre grandezas sem a necessidade de caracterizá-las numericamente. O autor descreve em sua principal obra, *The Mathematics of Plato's Academy: A New Reconstruction*, um diálogo fictício, baseado no diálogo entre Mênon, seu escravo e Sócrates, abordando o tema antifairese. Neste, o autor define o mecanismo, exemplifica a comparação entre grandezas, descreve algumas propriedades numéricas e aborda o mecanismo na comparação entre segmentos e entre áreas. Faremos uma associação do mecanismo com ferramentas matemática um pouco mais modernas, mesmo não sendo o objetivo alvo do nosso estudo. Resolveremos alguns problemas clássicos como a incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do quadrado e a incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do pentágono regular, a partir do mecanismo de subtrações recíprocas e contínuas. Em todas as demonstrações manipularemos as figuras geométricas a partir da perspectiva geométrica grega da época, uma geometria não aritmetizada. Por fim, abordaremos o mecanismo de antifairese envolvendo áreas pelo método dos gnômons. Utilizando relações de equivalências de áreas, podemos realizar algumas construções geométricas para viabilizar o mecanismo de antifairese. Essa é uma estratégia muito eficaz para reduzir comparações de áreas para comparações entre segmentos de reta.

1 A HIPÓTESE DE DAVID H. FOWLER ACERCA DOS INCOMENSURÁVEIS

Neste capítulo abordaremos o impacto que a descoberta dos incomensuráveis causou na Grécia antiga, e a visão de Fowler acerca do portfólio matemático grego da época para lidar com a nova descoberta. A partir de uma das primeiras evidências históricas que temos sobre a matemática na Grécia antiga e um dos conceitos de razão conhecidos na época (baseado no mecanismo das subtrações recíprocas e contínuas), Fowler reitera a argumentação já proposta por outros autores de que os incomensuráveis teriam recebido um tratamento diferente do que é propagado pela maioria das literaturas matemáticas.

1.1 A estrutura da matemática grega na perspectiva de Fowler:

O tratamento do conhecimento histórico é um tanto delicado, pois depende de inúmeras variáveis. A partir do momento em que temos um fato, ele é registrado por uma ou mais óticas, e poderia ser manipulado ou direcionado para fins políticos, militares, religiosos, científicos, econômicos, etc. Outro elemento determinante é o tempo. Algumas informações que temos hoje, acerca do conhecimento matemático, são provenientes de “quebra-cabeças históricos”. A junção de diversos fragmentos estudados e registrados na mesma época, ou em épocas diferentes, foram importantes para que o conhecimento e a informação chegassem até os tempos atuais.

Não existem muitas fontes históricas que relatam como se desenvolveu a matemática grega primitiva. Muito do que sabemos são relatos posteriores de outros acadêmicos que registraram alguns fragmentos, ou até mesmo conseguiram escrever resumos dos trabalhos gregos originais.

“A escassez das fontes, somada à convergência interessada dos únicos textos disponíveis, nos permite duvidar até mesmo da existência de um matemático chamado Pitágoras.” (ROQUE, 2012, p.104).

Para entender melhor o contexto matemático grego da época, Fowler se baseia numa das primeiras evidências diretas, o livro *Mênon* de Platão (385 a.C.).

“A passagem é bem conhecida e frequentemente discutida, mas cito-a aqui completamente por razões especiais:

(i) Esta é a nossa primeira evidência direta, explícita e estendida sobre a matemática grega; data provável de 385 a.C.. Avançando a partir deste momento,

podemos investigar ainda mais o passado.

(ii) Serve como um exemplo lúcido e direto de alguns dos problemas, estilos e técnicas da matemática grega antiga.” (FOWLER, 1999, p.7-8)

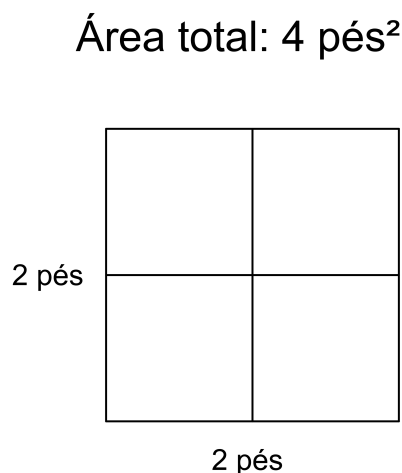
Neste livro, Platão propõe um diálogo entre Sócrates e o estudante Mênon sobre a virtude. No fragmento em que Mênon pergunta a Sócrates sobre a natureza do conhecimento, Platão (ilustrado por Sócrates) afirma que o conhecimento já está em nossa alma, em nossa essência. Nada aprendemos, apenas recordamos. A partir desta afirmação, o estudante pede que Sócrates demonstre sua teoria. Para demonstrar, o filósofo pede que Mênon chame um de seus escravos.

Pelo fato do diálogo ser extenso, faremos uma releitura sobre as qualidades geométricas do jovem escravo de Mênon. Em síntese, Sócrates utiliza recursos geométricos como o quadrados, seus elementos e suas respectivas áreas, e a partir de comparações entre figuras, leva o escravo a compreender que a diagonal de um quadrado de lado medindo 2 pés é igual a medida do lado de um quadrado de área medindo 8 pés².

Releitura do diálogo:

Após se certificar de que o escravo falava grego, sabia o que era um quadrado, sabia dividi-lo em quadrados menores (ligando os pontos médios dos lados opostos) e compreendia que era possível construir quadrados com áreas maiores, Sócrates desenha no chão um quadrado com lado medindo 2 pés. Após algumas manipulações preliminares, o escravo afirma que o quadrado de lado medindo 2 pés possui área de 4 pés².

Figura 1 - Diálogo entre Sócrates e o jovem escravo de Mênon (etapa 1).



Em seguida, Sócrates pergunta ao escravo se seria possível desenhar uma outra figura, com o dobro da área do primeiro quadrado desenhado (4 pés²), porém com lados de

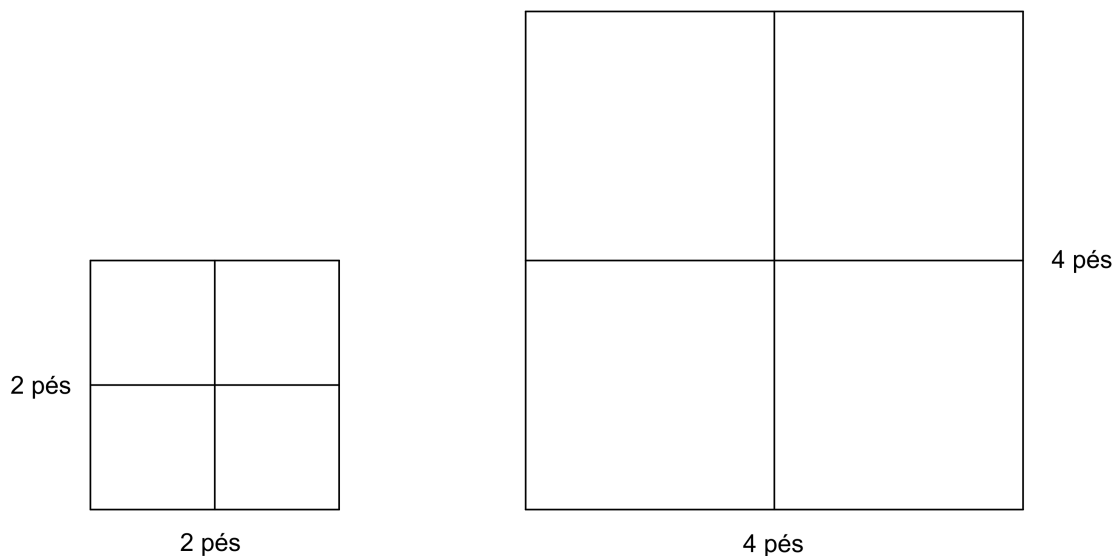
mesma medida, como a figura desenhada anteriormente (o quadrado). O escravo afirma que é possível. Quando Sócrates pergunta sobre a medida da superfície do novo quadrado, o escravo responde 8 pés².

Quando Sócrates interroga-o sobre a medida do lado do quadrado de superfície 8 pés², o escravo, com convicção, afirma (de maneira errada) que o lado mede o dobro do lado do quadrado de 4 pés² de superfície, ou seja, 4 pés.

Sócrates se dirige a Mênon afirmando que não está ensinando nada ao escravo, apenas interrogando-o. Após concordarem que o escravo não sabia a medida do lado do quadrado de 8 pés² de superfície, Sócrates volta a se dirigir ao escravo e reafirma que ele está falando de uma superfície de lados com a mesma medida (neste caso um quadrado), acreditando que o escravo não tenha entendido a proposta.

Sócrates desenha um segmento com medida de 4 pés e pergunta novamente se o quadrado construído a partir de tal segmento terá superfície medindo 8 pés². O escravo afirma novamente que sim. Após desenhar o quadrado de lado medindo 4 pés, e o escravo reafirmar que a superfície de tal quadrado mede 8 pés², Sócrates mostra ao escravo que o quadrado de lado medindo 4 pés é o resultado da quadruplicação do quadrado de 4 pés² de superfície.

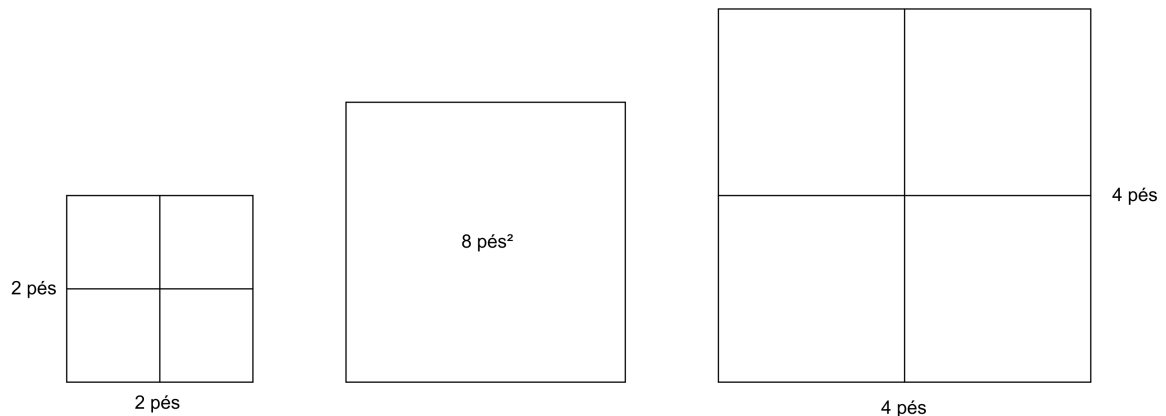
Figura 2 - Diálogo entre Sócrates e o jovem escravo de Mênon (etapa 2).



O escravo encontra-se em estado de aporia, porém chega a conclusão de que o quadrado de lado medindo 4 pés possui o quádruplo da área do quadrado lado medindo 2 pés. Ou seja, a medida da superfície do quadrado de lado medindo 4 pés é de 16 pés².

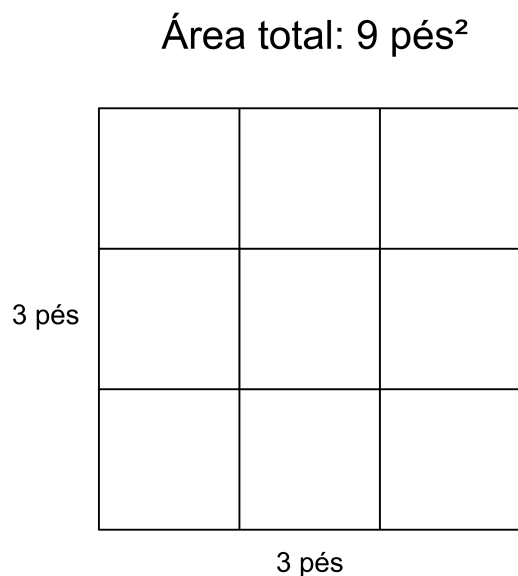
Sócrates retorna ao questionamento sobre o quadrado com superfície medindo 8 pés², mas agora segundo o argumento de que o quadrado de 8 pés² de superfície é o dobro do quadrado de 4 pés² de superfície, porém é metade do quadrado de 16 pés² de superfície. O escravo concorda com Sócrates que o quadrado de superfície medindo 8 pés² deve ter um lado de medida maior do que 2 pés, porém menor do que 4 pés.

Figura 3 - Diálogo entre Sócrates e o jovem escravo de Mênon (etapa 3).



Sócrates sugere que o escravo tente novamente determinar a medida do lado do quadrado de 8 pés² de superfície, a partir das novas conclusões sobre o intervalo em que tal medida se encontra. O escravo responde 3 pés. A partir do quadrado de lado medindo 2 pés, Sócrates faz uma complementação, formando um quadrado de lado medindo 3 pés. A partir do novo quadrado, o jovem escravo conclui que a medida da área do quadrado de lado medindo 3 pés é igual a 9 pés².

Figura 4 - Diálogo entre Sócrates e o jovem escravo de Mênon (etapa 4).

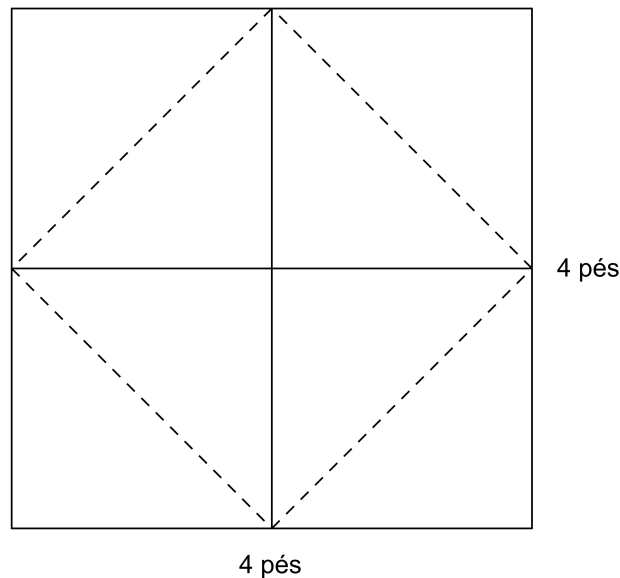


Chegando a conclusão de que o lado do quadrado de área igual a 8 pés^2 não é igual a 3 pés, Sócrates pergunta se o escravo poderia responder de maneira correta agora, ou ao menos traçar o segmento de medida igual ao lado do quadrado de área 8 pés^2 . Retomando o diálogo com Ménon, Sócrates destaca o progresso que o escravo teve em investigar e descobrir que estava equivocado quanto a medida do lado do quadrado de 8 pés^2 de área, algo que talvez ele nunca teria feito por causa da forte convicção que tinha.

Além do conhecimento despertado, Sócrates destaca o anseio e o prazer de estudar o assunto que, a princípio, não seria ao menos pensado, dado que o escravo estava confiante e acreditado de que sabia a medida do lado do quadrado de área 8 pés^2 .

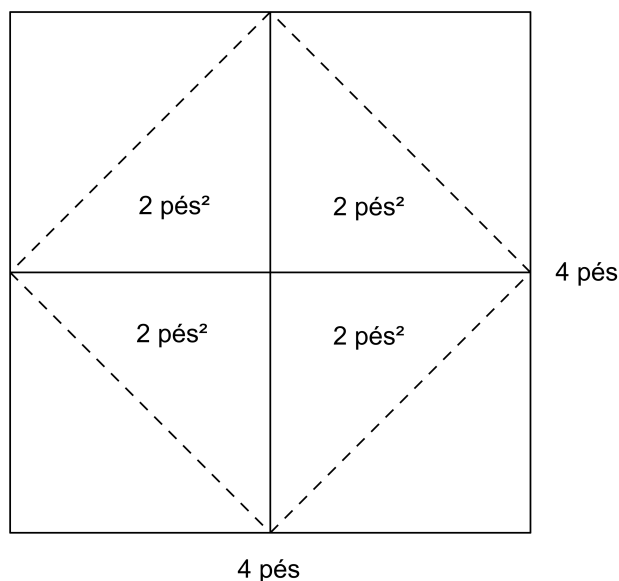
Retomado o diálogo com o escravo, Sócrates direciona-o a olhar novamente para o quadrado de área igual a 4 pés^2 . Quaduplicando tal quadrado, ele forma um quadrado de área igual a 16 pés^2 . Sócrates liga dois vértices de um dos quadrados de área medindo 4 pés^2 , e o escravo chega a conclusão que o quadrado teve sua área dividida ao meio. Repetindo o processo nos outros quadrados de área igual a 4 pés^2 , Sócrates questiona o escravo sobre a área da nova figura formada. O mesmo indica não saber.

Figura 5 - Diálogo entre Sócrates e o jovem escravo de Ménon (etapa 5).



Sócrates direciona o escravo a entender que, dividindo cada quadrado de área igual a 4 pés^2 ao meio, cada triângulo formado teria 2 pés^2 de área. Como a nova figura formada era composta por 4 triângulos, cada um medindo 2 pés^2 de área, o escravo concluiu que o novo quadrado formado possui área igual a 8 pés^2 e seu lado é a linha que liga dois vértices opostos dos quadrados de 4 pés^2 de superfície.

Figura 6 - Diálogo entre Sócrates e o jovem escravo de Mênon (etapa 6).



Em seguida, Sócrates menciona que os sofistas dão o nome de diagonal para essa linha, e que a diagonal é o lado do quadrado de área dupla, ou seja, a diagonal de um quadrado de área igual 4 pés^2 é o lado de um quadrado de área igual a 8 pés^2 . Voltaremos a falar dessa propriedade em nosso trabalho.

O intuito de Fowler, ao trazer este diálogo para a discussão sobre os recursos matemáticos gregos, é mostrar que a geometria grega não precisava de recursos aritméticos para ser definida. Elementos geométricos, suas áreas, suas combinações e manipulações, eram suficientes para o tratamento matemático. O autor classifica a geometria grega como fortemente não aritmetizada. Resoluções de problemas, ou demonstrações, poderiam ser sustentadas exclusivamente por estruturas figurativas e suas variações.

“A geometria, modelada nas propriedades do espaço tridimensional que parecemos experimentar ao nosso redor, fornece o principal ingrediente da matemática grega. E Sócrates dá uma boa ilustração de sua atitude de bom senso em relação a essa geometria quando diz, logo no início de seu encontro com o escravo:

— Tal figura pode ser maior ou menor, não é?

Uma solução típica de um problema ou prova de uma proposição consistirá em uma figura e uma coleção de declarações sobre a figura.” (FOWLER, 1999, p.10)

Outra percepção decorrente do diálogo é que a geometria parecia ser uma ferramenta fundamental do “currículo básico grego”. A construção e a manipulação dos objetos geométricos são feitas de modo intuitivo e muito natural.

1.2 A descoberta dos incomensuráveis:

“Magnitudes são ditas comensuráveis as que são medidas pela mesma medida, e incomensuráveis, aquelas das quais nenhuma medida comum é possível produzir-se.” (Euclides de Alexandria)

Algumas literaturas matemáticas afirmam que a descoberta dos incomensuráveis gerou uma grande turbulência na comunidade matemática Grega da época. Um dos pilares que embasa tal crença é o pensamento pitagórico. Acreditava-se que os números naturais eram a essência de tudo, e que todas as estruturas geométricas, sonoras, da natureza, da sociedade, do comércio e outras mais, orbitavam ao redor dos números naturais e suas razões. Essa vertente é a mais propagada tanto em livros de história da matemática quanto em abordagens históricas de livros didáticos.

“Alguém que se disponha a estudar o episódio da descoberta dos incomensuráveis na Grécia Antiga encontrará em livros de história da matemática e de matemática duas visões contraditórias sobre o assunto. A primeira delas, que é a mais disseminada, afirma que tal descoberta foi seguida por uma crise no pensamento pitagórico. Nessa versão, a existência da incomensurabilidade seria conflituosa com um princípio pitagórico de que tudo poderia ser explicado ou representado por meio de números.” (GONÇALVES E POSSANI, 2009, p.16)

Do ponto de vista pedagógico, essa versão é um tanto interessante. A partir do momento em que os números naturais, os inteiros e os racionais, respectivamente, são inseridos na estrutura curricular, a existência de números que não podem ser expressos como uma razão entre dois números inteiros pode causar uma certa estranheza e ao mesmo tempo curiosidade, principalmente nos anos finais do ensino fundamental.

Na teoria pitagórica, o termo número restringia-se somente ao conjunto dos números naturais. Uma razão era vista como uma comparação entre números inteiros ou comparação entre grandezas que poderiam ser expressas numericamente por números inteiros. É muito provável que os pitagóricos conhecessem propriedades do pentágono regular, visto que o símbolo da escola pitagórica era o pentágono estrelado (pentagrama). Acredita-se que na manipulação da diagonal do pentágono regular (será abordado futuramente em nosso trabalho), os pitagóricos se depararam com a incomensurabilidade, porém não temos dados históricos que expressem com exatidão quando os incomensuráveis foram descobertos. Algumas literaturas citam que a descoberta foi feita por Hipaso de Metaponto em 410 a.C..

Tão grande foi o “escândalo lógico” que por algum tempo foram feitos esforços para manter a questão em sigilo, e há uma lenda que conta que o pitagórico

Hipaso (ou um outro talvez) foi lançado ao mar pela ação ímpia de revelar o segredo a estranhos ou (de acordo com outra versão) que ele foi banido da comunidade pitagórica, sendo-lhe erigido um túmulo, como se estivesse morto.” (EVES, 1969, p.60-61)

Do ponto de vista de Fowler, e baseado nos trabalhos de Wilbur Knorr, a descoberta dos incomensuráveis não seria uma problemática para o conhecimento matemático da época. O autor argumenta, inicialmente, que o portfólio grego acerca do conhecimento geométrico era suficiente para que o tema (incomensurabilidade) fosse tratado sem o uso de associações numéricas diretas para representar grandezas. Acredita-se que no momento em que ocorreu a erupção dos incomensuráveis (a partir de um tratamento numérico), os geômetras gregos já haviam se deparado com tal “problema”, porém em um âmbito estritamente geométrico. Manipulações entre o lado e a diagonal de um quadrado, por exemplo, não exigiam nenhum rigor aritmético.

Um segundo argumento proposto por Fowler é que, dentre os conceitos de razão já conhecidos na época, como por exemplo, o de comparação entre grandezas comensuráveis (fortemente propagado pelo pensamento pitagórico), existia um conceito de razão resultante de um mecanismo de subtrações recíprocas e contínuas. Segundo o autor, tal processo era usado no período pré-eudoxano, tanto com estruturas numéricas como geométricas. Este argumento abre mais uma hipótese de que grandezas incomensuráveis já eram manipuladas a partir de ferramentas já existentes na época.

“... meu escravo desenvolve um processo de subtração recíproca repetida que é então usado para gerar uma definição de razão como uma sequência de números repetidos. Como diz “meu Sócrates”, essa não é a única maneira possível de definir razão ou proporção, mesmo dentro do contexto da matemática grega antiga; assim, para distingui-la, muitas vezes me referirei a ela como “a razão antifarética” e chamarei o processo de subtração subjacente de antifairese.” (FOWLER, 1999, p.30)

Um dos objetivos da nossa pesquisa é nos aprofundarmos no estudo realizado por Fowler em defesa da não crise. A partir de trabalhos mais recentes no campo da matemática, da filosofia, da neurociência e na ciência de resolução de problemas, verificamos a grande importância da geometria na descoberta e na compreensão dos incomensuráveis, assim como as diferentes respostas cognitivas em meio a descoberta de novas possibilidades.

2 A IMPORTÂNCIA DA GEOMETRIA E DA LÓGICA NA DESCOBERTA DOS INCOMENSURÁVEIS

Neste capítulo, buscamos resultados de novos estudos, em diversas áreas de conhecimento, que reafirmam a importância da abordagem geométrica e do instinto de raciocínio em novas descobertas. Começando pela abordagem CPA, conseguimos compreender que existem diversas formas de abordagem de conceitos matemáticos abstratos. Acreditamos, a partir da descrição do diálogo entre Mênon, Sócrates e o escravo, que a representação pictórica, por meio da geometria, era uma ferramenta amplamente utilizada na sociedade grega.

Trazemos os conceitos filosóficos de Peirce, acerca das habilidades cognitivas instintivas do ser humano de compreender, fazer aferições e tomar decisões, mesmo sem a compreensão sistemática de determinados assuntos. O autor descreve também um outro tipo de lógica, um pouco mais refinada, que é notável nos avanços matemáticos da Grécia antiga.

Abordaremos a teoria da metáfora conceitual (CMT). Com uma gama de estratégias para compreender e manipular conceitos abstratos, a CMT pode ser uma ferramenta potencial para tratarmos da incomensurabilidade do ponto de vista geométrico. Podemos notar a essência da CMT no fragmento histórico proposto por Fowler em sua argumentação sobre a qualidade das habilidades geométricas gregas da época.

2.1 A abordagem CPA (concreto, pictórico e abstrato):

Evidências históricas revelam que o uso de recursos pictográficos, como as pinturas rupestres, usadas para a representação de animais, símbolos, rituais, episódios, e etc., sempre foram ferramentas fundamentais na construção da sociedade. Antes da representação numérica por um símbolo, e a associação funcional desse símbolo com uma determinada quantidade, alguns recursos concretos eram utilizados para efetuar contagens. Pastores soltavam suas ovelhas no pasto, e para cada ovelha solta uma pedra era colocada em sua sacola. Para cada ovelha que retornava, uma pedra era retirada da sacola. Outros mecanismos de contagem, como nós em um fio de lã, ou os próprios dedos das mãos, eram usados até o advento e a compreensão dos símbolos numéricos.

As noções numéricas, tanto do ponto de vista cardinal quanto do ordinal, nos parecem tão naturais e inatas, que não percebemos o processo de ambientação que vivemos,

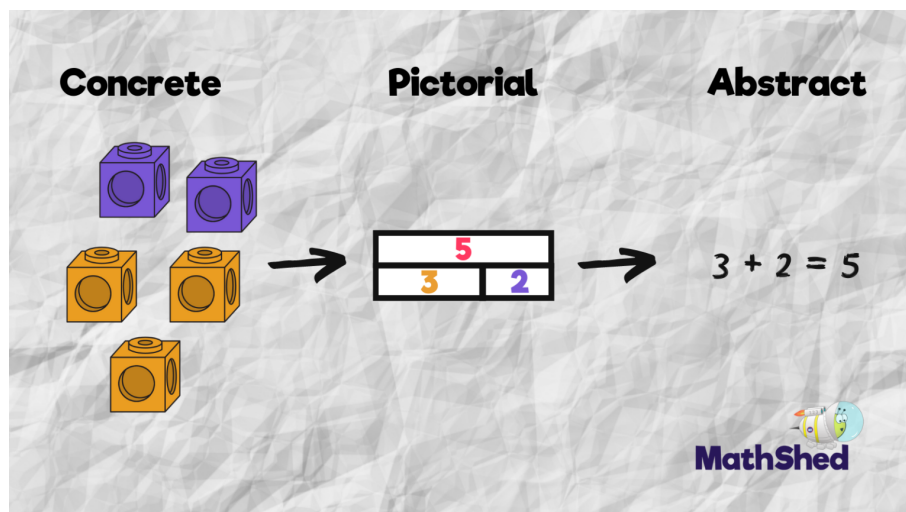
mesmo antes de cursar os anos iniciais. A abordagem CPA é um caminho pedagógico de aprendizagem que facilita o processo de compreensão de conceitos abstratos a partir de uma abordagem concreta e representativa.

Desenvolvida em 1960, a abordagem CPA no ensino de matemática foi criada pelo psicólogo estadunidense Jerome Seymour Bruner, e ganhou notoriedade em 1980 por ser uma das características principais no ensino de matemática de Singapura. O país conta com indicadores de alta performance de seus estudantes no campo da matemática e seu método de ensino tem sido usado em diversos países. O objetivo principal da abordagem CPA é criar uma ponte entre conceitos abstratos e os recursos concretos através da aprendizagem pela descoberta.

A abordagem concreta, pictórica e abstrata em matemática, tem como objetivo final a compreensão de conceitos matemáticos abstratos. Muitos alunos tem uma relação negativa com a disciplina, seja pelo fato de não conseguirem compreender ou associar elementos matemáticos abstratos com objetos do seu dia a dia, ou pelo rigor da escrita matemática.

A proposta inicial é usar e manipular materiais concretos para simbolizar números, objetos geométricos, operações matemáticas, entre outros. A segunda etapa consiste na representação pictórica. A partir da manipulação do concreto, o aluno deve representar pictoricamente o conceito estudado (com base no material concreto), seja por meio de gráficos, diagramas, ou qualquer outro recurso representativo. Enfim, após os dois passos da abordagem CPA (concreto e pictórico), o aluno é levado ao campo do abstrato.

Figura 7 - Abordagem CPA.



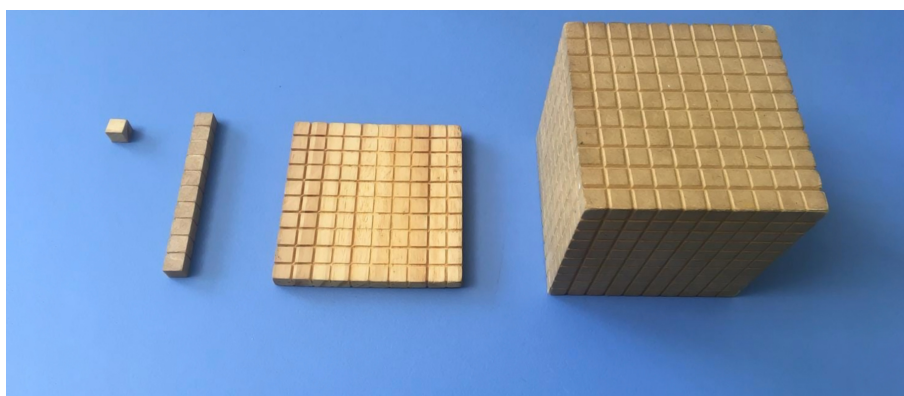
Fonte: Disponível em <https://blog.edshed.com/what-is-the-cpa-approach-explained/> (acesso 06/02/2023).

Em suas publicações, Bruner afirma que existem três maneiras de representação: a ativa, a icônica e a simbólica. Para a representação ativa, é necessária a manipulação de recursos físicos, associando conceitos abstratos a elementos concretos e tornando o imaginário mais “palpável”. A proposta da representação icônica é baseada na composição figurativa, onde ideias são representadas em gráficos, diagramas, esboços ou qualquer outro esquema de imagens. A representação simbólica é baseada em uma nova linguagem. Podemos citar a linguagem aritmética, onde conceitos são expressos por números e símbolos, ou a linguagem algébrica, que é capaz de representar o desconhecido ou generalizar processos.

Um recurso amplamente utilizado para auxiliar o processo de ensino e aprendizagem do sistema de numeração decimal é o material dourado. Idealizado pela médica e educadora italiana Maria Tecla Artemisia Montessori, o recurso pedagógico consiste em um conjunto de cubinhos (representando a unidade), barras (representando a dezena), placas (representando a centena) e cubos (representando a unidade de milhar), e auxilia as crianças a compreenderem a estrutura do sistema decimal de numeração através das associações entre esses objetos (por exemplo: 10 cubinhos são permutados por uma barra) e também algumas operações fundamentais.

A primeira etapa do processo, a manipulação do concreto, torna a matemática mais atrativa. A partir de objetos que possuem forma, cor e textura, a manipulação do concreto cria uma matriz de referência, armazenando na memória do aluno a base para a representação pictórica e a compreensão do abstrato.

Figura 8 - Material dourado (visão geral).

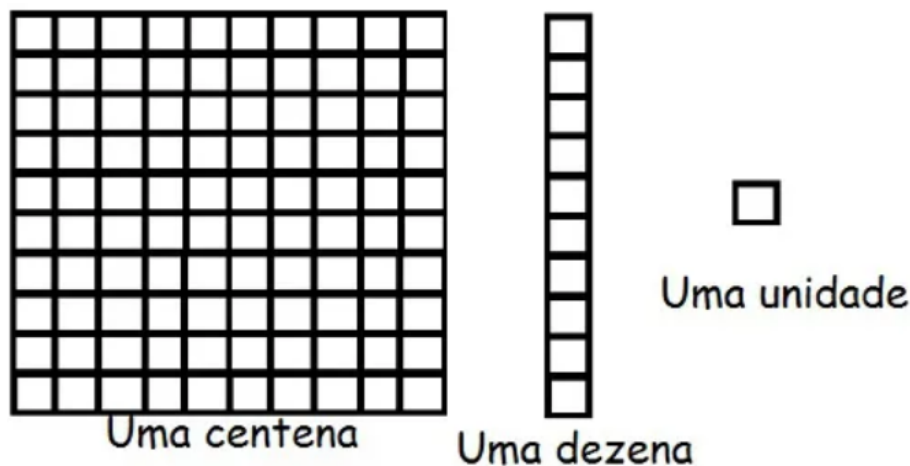


Fonte: Disponível em <https://www.institutoclaro.org.br/educacao/para-ensinar/planos-de-aula/explorando-o-material-dourado-de-maria-montessori/> (acesso 06/02/2023).

O segundo passo na introdução ao estudo do sistema decimal de numeração é a representação pictórica. Nesta etapa do processo, os materiais são representados por quadriláteros, ou qualquer outro esquema de imagem, dando autonomia e retirando a dependência do material concreto. Bruner enfatiza que o cuidado em fazer as transições

em cada etapa do processo é fundamental. Os “andaimes” devem ser retirados a cada passo que os alunos progridem.

Figura 9 - Material dourado (representação).



Fonte: Disponível em <https://educador.brasilecola.uol.com.br/estrategias-ensino/utilizando-material-dourado-na-adicao.htm> (acesso 06/02/2023).

Para chegar na etapa do abstrato, é importante que a criança tenha a clareza conceitual (a partir da manipulação do concreto), tenha autonomia e tenha adquirido habilidades pictóricas, ou seja, saiba transcrever um ideal concreto para uma folha de papel, como modelos de barras, diagramas, e etc. Neste degrau, os alunos saem da representação pictórica e encaram uma nova linguagem, repleta de símbolos e representações, com o intuito principal de dar agilidade aos processos operacionais e ajudar na manipulação de problemas de forma simplificada.

As pesquisas de Fowler, sobre os conhecimentos geométricos da época na Grécia antiga, indicam que a abordagem pictórica, representada pela própria geometria, era bem desenvolvida e parte fundamental do conhecimento matemático da sociedade. Podemos associar o cenário da descoberta dos incomensuráveis como uma fusão concreto/pictórica, dado que era possível tratar do assunto por um ponto de vista inteiramente geométrico, sem associações numéricas aos comprimentos, áreas ou volumes dos elementos geométricos a serem comparados. Um pouco mais à frente, representaremos pictoricamente o mecanismo de subtrações recíprocas e contínuas do ponto de vista da geometria grega, a partir da comparação entre segmentos de reta.

Podemos fazer uma correlação entre os passos da descoberta dos incomensuráveis com o método CPA, começando pela abordagem geométrica não aritmetizada e terminando na associação da medida de um segmento com um número irracional. Fowler, em seu argumento, identifica a grande habilidade geométrica da sociedade grega e mostra que elementos básicos, como um quadrado e suas manipulações, não eram restritos à

comunidade acadêmica da época. A partir desta perspectiva, a descoberta inicial dos incomensuráveis cumpre as etapas 1 e 2 do método CPA, representando a ideia matemática da incomensurabilidade pictoricamente a partir de recursos geométricos. Após a estruturação conceitual da incomensurabilidade, foi possível identificar que os números que representavam as medidas dos segmentos incomensuráveis poderiam estar relacionadas a um novo campo numérico, os irracionais, atingindo a etapa 3 do método CPA, o domínio do abstrato.

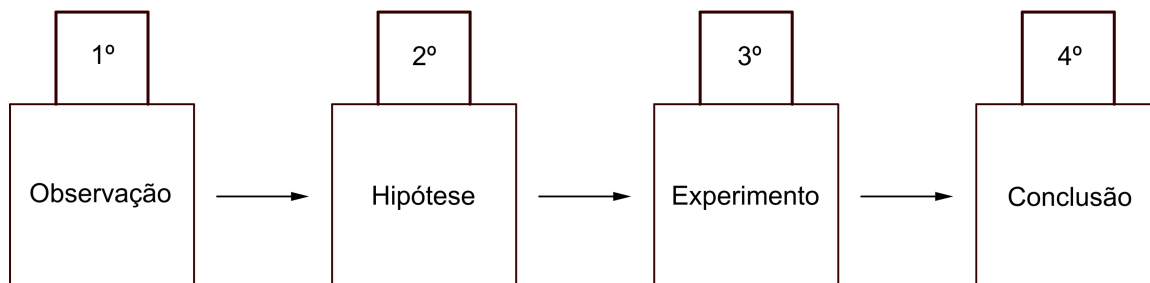
2.2 Lógica utens e lógica docens:

Em nosso dia a dia, conseguimos identificar em nós mesmos ou em nosso ciclo social, um instinto de raciocínio (ou hábitos de raciocínio) que nos leva a tomar decisões e formar opiniões sobre diversos assuntos, sejam eles de pequena ou grande importância. Não contamos exclusivamente com um instinto de raciocínio, mas com uma teoria instintiva de raciocínio. Segundo o filósofo Kuang Tih Fann, tal habilidade pode ser o resultado da adaptação na tentativa de compreender o universo.

Em momentos em que nos deparamos com situações atípicas e incomuns, vemos que nosso instinto de raciocínio não é suficiente. Precisamos nos dedicar ao estudo de processos e investigações de métodos para que possamos ter a ampliação do conhecimento. Tal ampliação pode ser realizada pela lapidação de uma teoria de raciocínio, ou simplesmente pela imersão em busca do desconhecido.

Segundo Charles Peirce, as estruturas figurativas e diagramáticas que representam ideias matemáticas, podem ser compreendidas intuitivamente, pois todos nós somos dotados de um hábito de raciocínio instintivo de fazer inferências, nomeado pelo autor de lógica utens. Fazendo uma associação com recursos matemáticos, mesmo sem a total compreensão do que representa um ponto (elemento primitivo geométrico), por exemplo, entendemos seu significado em algumas estruturas geométricas, observamos um gráfico estatístico e, intuitivamente, conseguimos compreender as informações brutas expostas. A lógica utens é uma habilidade instrumental nativa que usamos, muitas vezes sem reconhecê-la. Por outro lado, Peirce define um outro tipo de lógica, uma habilidade lógica mais polida e pragmática, utilizada em diversas áreas do conhecimento, denominada lógica docens. Podemos citar como exemplo do uso da lógica docens, o método científico, onde a partir de uma observação, ou uma intuição, surgem questionamentos e hipóteses que devem ser testados e experimentados para que se chegue a uma conclusão.

Figura 10 - etapas do método científico.



Imagine que, ao atravessar uma rua, conseguimos intuitivamente calcular o tempo de reação do cérebro, após o contato visual com um veículo, em frações de segundos calcular a velocidade em que ele se aproxima (a partir da ampliação ótica), observamos a largura da rua e calculamos a velocidade com que devemos caminhar para o outro lado da rua sem ser atingido. Agora imagine sistematizar os conceitos envolvidos da biologia, da física e os cálculos matemáticos numa folha de papel? O instinto de atravessar a rua, mesmo não conhecendo nenhum tipo de estrutura física e nem matemática, é o que compõe a lógica utens. Já a capacidade de entender o processo, manipular as variáveis da cinemática e da ótica, e equacionar todo o processo, caracteriza a lógica docens.

Peirce afirma que existem pessoas que vem “equipadas” com uma lógica utens apurada, o que lhes dá capacidade de perseguir determinadas anomalias ou padrões que a grande maioria dos seres humanos não visualiza. São indivíduos que são atraídos, inatamente, pelo único e incomum fenômeno, e a partir disso elaboram hipóteses, constroem argumentos, realizam testes, demonstram teorias e elaboram ideias originais. Observando a linha histórica, notamos alguns ícones das diversas áreas do conhecimento que se enquadram neste formato: Albert Einstein, Gregor Mendel, Srinivasa Ramanujan, entre outros.

O argumento proposto por Fowler, baseado no levantamento de dados históricos, de que a geometria era uma estrutura fundamental na construção matemática grega, concomitantemente com a ideia filosófica proposta por Peirce, sobre a habilidade nativa de compreendermos alguns padrões ou fenômenos intuitivamente, nos levam a um novo questionamento sobre o tratamento dos incomensuráveis na época.

Começamos pela evidência histórica mencionada por Fowler (Mênon de Platão), onde os conceitos de segmento de reta, diagonal e área do quadrado são naturalmente

tratados (sem o rigor aritmético), até mesmo pelo escravo de Mênon (suposto indivíduo sem grandes habilidades geométricas). Tal evidência nos leva a acreditar que noções consistentes de geometria faziam parte do “currículo base” da época.

Assim como em qualquer descoberta, existe um impacto inicial com a chegada do “novo”. No caso dos incomensuráveis, o recurso das subtrações recíprocas e contínuas poderia ter sido uma estratégia instintiva (o que Peirce define como lógica utens) para a compreensão inicial do comportamento dos incomensuráveis, no âmbito geométrico.

Após as primeiras impressões, no estágio da lógica utens, outras indagações acerca dos incomensuráveis surgem e outras ferramentas são necessárias. Conceitos mais aprofundados como a associação do comprimento de segmentos com um certo tipo de número, ou os pares distintos de segmentos que compartilham a “mesma quantidade de subtrações” no processo de subtrações recíprocas e contínuas, são questionamentos que não são respondidos pela lógica utens. Seguimos para o estágio da lógica docens. Neste estágio, nos deparamos com a sistematização do fenômeno da incomensurabilidade, seja associando tal fenômeno com estruturas já conhecidas, ou até mesmo levando a pesquisa para a elaboração de novas hipóteses acerca dos incomensuráveis.

2.3 Teoria da metáfora conceitual (CMT):

A compreensão do abstrato é um grande desafio nas áreas de conhecimento. Estudos recentes atestam as dificuldades de lidar com o abstrato no âmbito matemático, e como as estruturas figurativas e diagramáticas viabilizam uma melhor compreensão (torna o abstrato mais palpável). O projeto realizado pelo professor de Semiótica e Antropologia Linguística da Universidade de Toronto, Marcel Danesi, sobre a teoria da metáfora conceitual, revela a importância do uso das estruturas figurativas na compreensão de conceitos abstratos e na resolução de problemas. Como proposto por Fowler, a potencial geometria grega foi fundamental para a compreensão da incomensurabilidade.

Em 1998, Danesi conduziu uma pesquisa, juntamente com o Ontario Institute for Studies in Education, pedindo a 29 professores de matemática, dos ensinos fundamental e médio, que identificassem e sinalizassem a área de conhecimento matemático que seus alunos mais tivessem dificuldades de aprendizagem. Quase que unanimemente, os professores identificaram que os problemas de modelagem matemática (também nomeado pelo autor de problemas verbais ou problemas de histórias) eram os mais difíceis de serem ensinados. Com base nos dados levantados, Danesi decide elaborar e executar um projeto, chamado de projeto piloto, estruturado a partir teoria da metáfora conceitual

(CMT), visando entender e atestar o desenvolvimento de um grupo de alunos que foram devidamente “alfabetizados” pela CMT em problemas de modelagem matemática.

A CMT, que tem como um de seus criadores George Lakoff, baseia-se no uso de uma estrutura metafórica para dar significados aos problemas (ou ideias) inicialmente abstratos. A maior parte da discussão proposta aqui será voltada para o pensamento matemático, porém o estudo dos significados e da ambientação abre um caminho mais amplo à materialização de qualquer tipo de mecanismo não visível.

O projeto, financiado pelo Social Sciences and Humanities Research Council, foi iniciado no outono de 1992 e teve seu fim na primavera de 1998. Inicialmente, os assistentes de pesquisa foram treinados em CMT, e orientados a elaborar todos os materiais de apoio suplementares de acordo com a teoria da metáfora conceitual. Além dos assistentes, cinco professores de matemática da oitava série, momento em que os problemas de modelagem matemática eram inseridos, foram convidados para o projeto. Para selecionar os alunos que participariam do projeto, os candidatos (indicados pelos professores convidados) receberam um teste com problemas de modelagem matemática, a ser realizado em duas horas. Os alunos que tiveram menos de 20% de proficiência foram selecionados para a etapa inicial do projeto.

Após o horário escolar regular, cada aluno selecionado para o projeto tinha um encontro semanal, com duração de 15 minutos, com um membro da equipe de pesquisa. Nestes encontros, o mentor abordava os mesmos problemas que foram trabalhados em sala de aula, porém abordados de acordo com a estrutura CMT, ou seja, foi ensinado para o aluno como representar um problema de história de maneira conceitual. Nesta etapa do processo, Danesi afirma que o aluno desenvolve a habilidade de “descascar” as finas camadas metafóricas que rodeiam a composição do problema.

Após o registro regular dos dados obtidos antes e depois do projeto, a média de precisão dos alunos participantes do projeto teve o incrível salto de 20% para 82% (desvio padrão de 2,3%). Um fato interessante é que os alunos já haviam recebido uma atenção especial e individualizada pelos professores, devido ao baixo desempenho nas avaliações escolares, porém continuaram não obtendo êxito. Danesi acredita que o resultado expressivo no desenvolvimento dos participantes do projeto se deu pelo treinamento da abordagem de um problema pela CMT, o que ampliou o campo de resolução com uma melhor manipulação dos significados dos elementos envolvidos em cada estrutura abstrata.

O ponto chave observado pela equipe foi que os alunos não tinham dificuldades no desenvolvimento algébrico relacionado à resolução de problemas de modelagem ma-

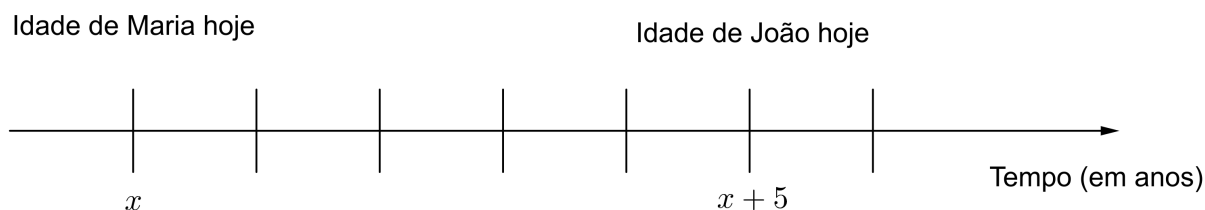
temática, e sim na decodificação das ideias que estruturavam os problemas. A ausência de habilidades para representar um problema de forma concreta inibe todo o desenvolvimento sistemático no ponto de partida da resolução.

Em seu artigo *teoria da metáfora conceitual e o ensino de matemática: resultados de um projeto piloto*, publicado em 2003, Danesi exemplifica a abordagem de um problema segundo a dinâmica CMT.

Problema: João é cinco anos mais velho que Maria. Daqui a quatro anos, ele terá o dobro da idade dela. Qual a idade atual de cada um?

Uma primeira análise sobre as dificuldades encontradas, demonstra que os alunos não conseguiam manipular os dois conceitos de tempo envolvidos, um ponto na linha do tempo e o tempo como algo mensurável. Essas duas percepções são metáforas conceituais. Observe que o tempo (uma noção abstrata) pode ser representado de maneira concreta. No projeto, os alunos foram ensinados a resolver o problema proposto utilizando uma linha do tempo para materializar os momentos propostos pelo problema. Representando a idade de Maria por x , a idade de João é representada por $x + 5$, e estará disposto 5 unidades à frente da representação da idade de Maria na linha do tempo.

Figura 11 - Linha do tempo.



A linha do tempo permite que a noção abstrata de tempo, relacionada ao problema, se torne concreta. Idealizar o tempo desta maneira, tornou a segunda parte do problema mais simples. No segundo fragmento, o problema propõe um avanço no tempo de 4 anos.

Linha do tempo de Maria:

Figura 12 - Linha do tempo de Maria.

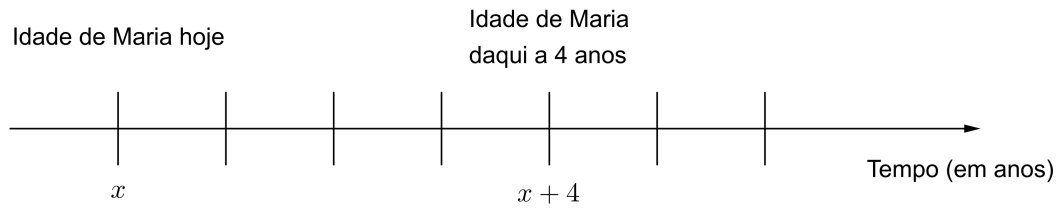
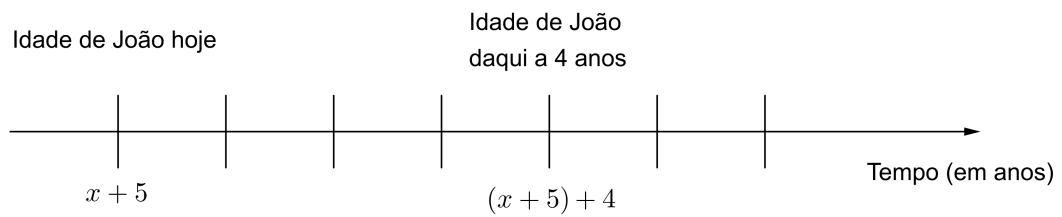
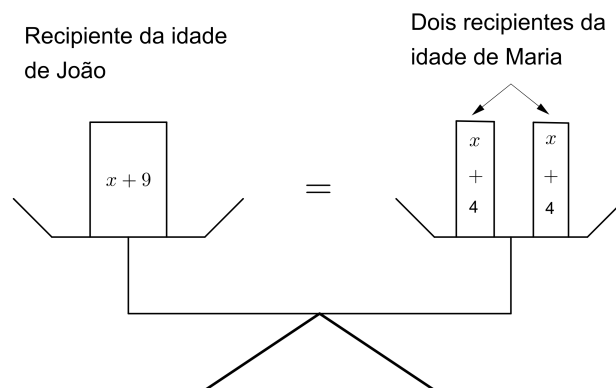
**Linha do tempo de João:**

Figura 13 - Linha do tempo de João.



Para a última etapa do processo, era necessária uma “virada de chave”. Os alunos foram instruídos a manipular o tempo, não como um marco na linha progressiva temporal, mas sim como uma quantidade. A partir de um sistema equilibrado, relacionamos a idade de João como o dobro da idade de Maria a partir de uma relação algébrica.

Figura 14 - uma representação de igualdade.



Utilizamos a balança de dois pratos para caracterizar a relação de equilíbrio entre as grandezas. Com a técnica de representar o tempo como um recipiente relacionado a uma grandeza expressa por uma relação algébrica, o entendimento do conceito de tempo se tornou mais simples de ser relacionado. Isso levou a equação:

$$x + 9 = 2(x + 4) \Leftrightarrow x + 9 = 2x + 8 \Leftrightarrow x = 1$$

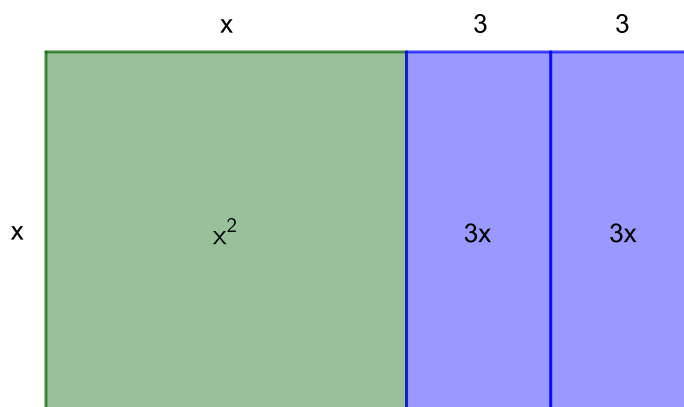
Ou seja, as idades de Maria e de João são, respectivamente, 1 e 6 anos.

No projeto, todos os problemas de modelagem matemática que envolviam tempo eram ensinados dessa maneira. Para outros tipos de problema, a transcrição por meio de figuras, gráficos ou diagramas, poderia ser diferente, porém não perdendo o princípio fundamental da abordagem CMT.

Baseado na proposta de Danesi, vamos abordar um outro modelo geométrico que facilita a compreensão do abstrato, o modelo geométrico de resolução de equações do segundo grau. Fundamentado na teoria de áreas euclidianas, o método consiste na manipulação de figuras retangulares associadas aos elementos que compõem a equação do segundo grau.

Suponha a equação $x^2 + 6x = 16$. Representaremos o primeiro membro da equação ($x^2 + 6x$) por um retângulo composto por um quadrado de lado x (e área x^2) e dois retângulos de lados 3 e x (e área $3x$).

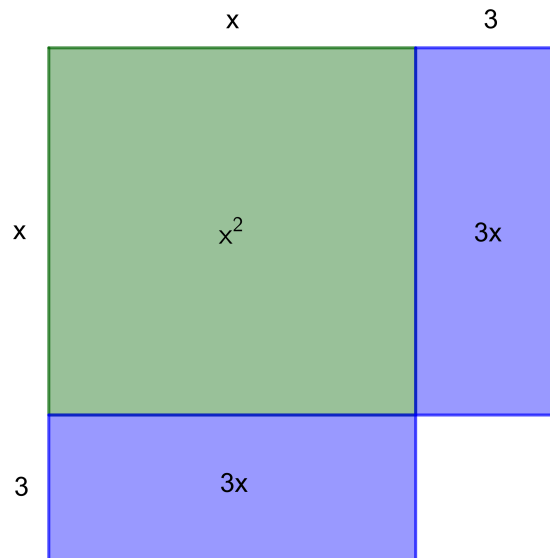
Figura 15 - Equação do segundo grau (modelo geométrico - etapa 1).



Suponha que o retângulo de lados x e $x + 6$ represente uma região de área 16. Movemos um dos retângulo de área $3x$ (suponha o localizado mais à direita do quadrado)

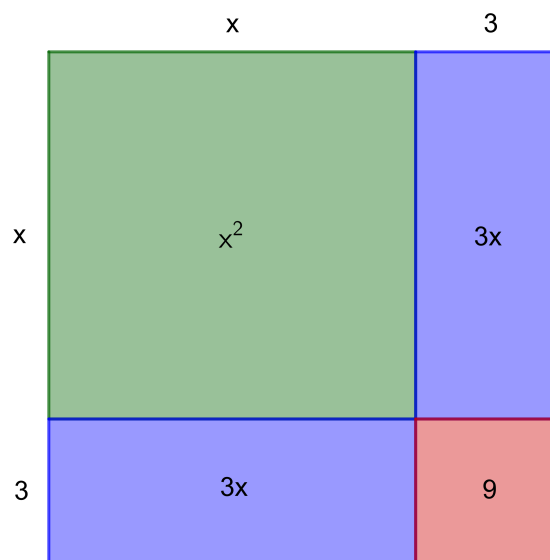
para a parte de baixo do quadrado.

Figura 16 - Equação do segundo grau (modelo geométrico - etapa 2).



Adicionamos à figura um quadrado de área 9, formando assim um quadrado de lado $x + 3$ e área $16 + 9 = 25$.

Figura 17 - Equação do segundo grau (modelo geométrico - etapa 3).

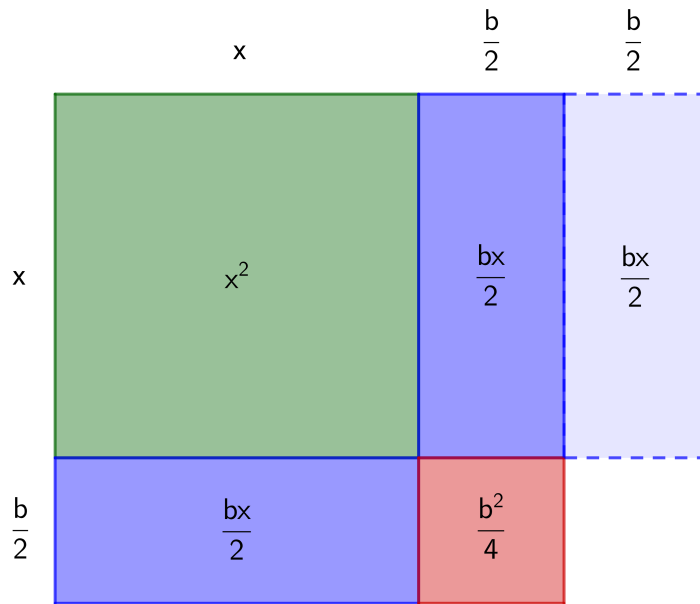


Temos que $x + 3 = 5$, ou seja, $x = 2$.

A partir da construção geométrica proposta no exemplo acima, podemos generalizar o método de resolução para equações da forma $x^2 + bx = c$, inicialmente com $b > 0$ e $c > 0$.

Representamos o primeiro membro da equação $(x^2 + bx)$ pelo retângulo de lados x e $x + b$, composto por um quadrado de lado x (e área x^2) e dois retângulos de lados x e $\frac{b}{2}$ (e área $\frac{bx}{2}$). Suponha que o retângulo de lados x e $x + b$ represente uma região de área c . Após o deslocamento de um dos retângulos de área $\frac{bx}{2}$ para a parte de baixo do quadrado, adicionamos um pequeno quadrado de área $\frac{b^2}{4}$, formando assim um quadrado maior de lado $x + \frac{b}{2}$ e área $c + \frac{b^2}{4}$.

Figura 18 - Equação do segundo grau (generalização).



Temos que $x + \frac{b}{2} = \sqrt{c + \frac{b^2}{4}}$, ou seja, $x = -\frac{b}{2} + \sqrt{c + \frac{b^2}{4}}$.

Numa perspectiva mais moderna, os passos da construção geométrica realizada acima ilustram o processo de completar quadrados. Do ponto de vista algébrico, podemos estender o mecanismo de resolução da equação $x^2 + bx = c$ para b ou c negativos. Veja:

$$\begin{aligned}
 x^2 + bx = c &\iff x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = c + \frac{b^2}{4} \iff \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \frac{b^2}{4} \iff x + \frac{b}{2} = \pm \sqrt{c + \frac{b^2}{4}} \\
 &\iff x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{c + \frac{b^2}{4}}
 \end{aligned}$$

O método geométrico para resolver equações do segundo grau torna a abordagem mais concreta. Os elementos que compõem a equação, objetos inicialmente abstratos, são materializados em forma de regiões retangulares.

Retomando à proposta de Danesi, o autor afirma que ao longo dos sete anos de projeto, quase todos os alunos conseguiram se desenvolver e resolver problemas de forma autônoma após o desenvolvimento do método de decodificação metafórica. Segundo o autor, a teoria da metáfora conceitual pode ser usada até mesmo em outros campos matemáticos, fornecendo percepções de como sistematizar problemas de palavras em um problema concreto. A ideia principal da CMT é identificar a fonte do conceito metafórico (nomeado pelo autor de domínio-fonte) e representá-lo de maneira singular, no caso do problema tratado, no formato de uma linha do tempo. A representação diagramática facilita a visualização do cenário descrito pelo enunciado do problema. Sobre a abordagem figurativa, Danesi afirma:

“Estes tendem a ser objetos mentais, como recipientes, linhas, impedimentos, substâncias, etc. Na CMT, eles são chamados de esquemas de imagem. Eles são definidos como contornos mentais amplamente inconscientes de formas, ações, dimensões, etc., que derivam da percepção e da sensação. Os esquemas de imagem estão tão profundamente enraizados que quase nunca temos consciência de seu controle sobre a conceituação.” (DANESI, 2003, p.77)

O processo de concretização é uma ferramenta extremamente poderosa para a compreensão matemática. No estudo dos números, usamos a reta real para melhor visualizar o comportamento numérico, em problemas de geometria, concretizamos os objetos geométricos citados no enunciado para facilitar a visualização, em problemas de contagem, podemos esquematizar uma árvore de possibilidades. Quase que de maneira intuitiva, associamos diversos elementos matemáticos abstratos a objetos concretos e pictóricos. Na ciência, em geral, o processo de concretização é usado para representar diversos elementos que não podem ser vistos a olho nu, como um átomo ou forças exercidas sobre um corpo, e até mesmo objetos concretos inacessíveis em determinados momentos, como um circuito elétrico ou lentes esféricas. Além da matemática e da ciência, podemos ver o processo de concretização na arte, onde um pintor transcreve um ideal abstrato para uma tela, um escritor materializa seu universo criado em um livro, um roteirista expressa sua narrativa e seus personagens em uma peça ou um filme.

Voltando para o foco de nossa investigação, os conceitos geométricos gregos eram apurados e era natural o uso do processo de concretização geométrica (diálogo entre Sócrates e o escravo de Mênon). Diante deste cenário, a tentativa de relacionar a diagonal de um quadrado e seu lado, por exemplo, sendo investigada numa perspectiva puramente geométrica não aritmetizada, poderia não gerar uma crise, e sim um novo ramo de investigação e descobertas matemáticas. Segundo Fowler, a ausência de registros históricos torna a pesquisa um tanto especulativa, mas a junção de fragmentos históricos e o estudo do desenvolvimento geométrico grego da época, onde podemos observar o processo de

concretização, direcionam Fowler à defesa da não crise.

3 ANTIFAIRESE

O processo de subtrações recíprocas e contínuas, citado anteriormente, é chamado de Antifairese (do grego: subtrações mútuas ou recíprocas). Neste processo, o conceito de razão é definido por uma sequência de números associados a quantidade de vezes que podemos subtrair uma grandeza de outra. Vale ressaltar que este não era o único conceito de razão da época e, para diferenciá-lo dos demais, Fowler dá o nome de razão antifairética.

Este conceito de razão é abordado por Fowler numa continuação fictícia do diálogo entre Sócrates e o jovem escravo de Mênon, onde Sócrates conduz o escravo a entender o conceito de razão a partir da comparação entre um monte de sessenta pedras e outro com vinte e seis pedras, e aborda algumas propriedades da comparação entre razões.

A seguir, enunciaremos um trecho do diálogo (fragmento 1 - nossa tradução):

Sócrates 1: diga-me, rapaz, qual é a relação de tamanho entre este monte de sessenta pedras, e aquele monte de vinte e seis pedras?

Escravo 1: você quer dizer o número de vezes que o menor cabe no maior?

Sócrates 2: tente!

Escravo 2: cabe mais de duas vezes, mas menos de três vezes.

Sócrates 3: você pode ser mais preciso?

Escravo 3: cabe duas vezes e restam oito pedras.

Sócrates 4: essas oito pedras não estão relacionadas a nada agora?

Escravo 4: eu apenas omiti dizer que eles ainda estão em relação ao outro monte de vinte e seis pedras.

Sócrates 5: prossiga!

Escravo 5: me dê tempo. Agora posso descrever esse relacionamento da mesma maneira. Digamos: duas vezes no primeiro passo, e agora vou falar sobre a relação entre oito pedras e vinte e seis pedras.

Sócrates 6: prossiga!

Escravo 6: novamente, esse será o número de vezes que o menor cabe no maior, isto é, três vezes, e então a relação entre duas pedras e oito pedras; e isso é quatro vezes exatamente.

Sócrates 7: então você extraiu uma relação expressa por: primeiro passo, duas vezes; segundo passo, três vezes; terceiro passo, quatro vezes exatamente. O nome técnico para isso é razão.

$$60 : 26 = [2, 3, 4]$$

Escravo 7: então é isso que é uma razão! Sempre me perguntei o que esses matemáticos querem dizer quando usam a palavra logos.

3.1 Antifairese numérica:

3.1.1 Apresentação do método e algumas definições:

Usaremos o exemplo citado no fragmento 1 para apresentar as etapas do processo e enunciar algumas definições.

A partir dos montes de 60 e 26 pedras:

1º passo: queremos verificar quantas vezes podemos subtrair o monte de 26 pedras do monte de 60 pedras.

Podemos subtrair o monte de 26 pedras **duas** vezes do monte de 60 pedras e restará um monte com 8 pedras.

2º passo: queremos verificar quantas vezes podemos subtrair o monte de 8 pedras do monte de 26 pedras.

Podemos subtrair o monte de 8 pedras **três** vezes do monte de 26 pedras e restará um monte com 2 pedras.

3º passo: queremos verificar quantas vezes podemos subtrair o monte de 2 pedras

do monte de 8 pedras.

Podemos subtrair o monte de 2 pedras **quatro** vezes do monte de 8 pedras, não restando mais pedras.

Dizemos que a antifairese entre 60 e 26 resulta na sequência 2, 3 e 4. Em termos técnicos, Fowler denota da seguinte maneira:

$$60 : 26 = [2, 3, 4]$$

Dizemos que a sequência $[2, 3, 4]$ é razão antifairética resultante da comparação entre os montes de 60 e 26 pedras.

Observe o cuidado do autor, num caráter introdutório, em não relacionar o termo antifairese com “divisão”, diretamente. O mecanismo de subtrações recíprocas e contínuas traduz o conceito de razão a partir da comparação entre grandezas, via subtração, gerando uma sequência numérica que compõe a razão antifairética.

Em termos mais “modernos”, o processo da antifairese está associado à divisão Euclidiana usada sucessivamente (a seguir vamos sistematizar o processo pelo algoritmo de Euclides), para obter o maior divisor comum (M.D.C) de dois números naturais. No terceiro passo do processo de antifairese descrito acima, onde não há resto, identificamos que 4 é o M.D.C. de 60 e 26, ou seja, além da razão antifairética, podemos observar que quando o mecanismo da antifairese termina, obtemos o maior divisor comum entre os números, ou seja o M.D.C. $(60, 26) = 4$.

Vamos determinar a razão 28:6.

Pela divisão Euclidiana sucessiva:

$$28 = 6.4 + 4$$

$$6 = 4.1 + 2$$

$$4 = 2.2 + 0$$

Ou seja, $28 : 6 = [4, 1, 2]$.

Pelo algoritmo de Euclides:

	4	1	2	← Razão antifairética
28	6	4	2	
4	2	0		

Pela teoria das frações contínuas:

Uma outra perspectiva “moderna” relacionada ao mecanismo de antifairese são as frações contínuas. Retomando o exemplo do processo de antifairese entre 28 e 6, podemos rescrever o processo da seguinte maneira:

$$\frac{28}{6} = 4 + \frac{4}{6} = 4 + \frac{1}{\frac{6}{4}} = 4 + \frac{1}{1 + \frac{2}{4}} = 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = [4, 1, 2]$$

Associando com a razão antifairética, a razão numérica $\frac{28}{6}$ está associada à sequência gerada pela manipulação, via frações contínuas, $[4, 1, 2]$.

Generalizando, dada a razão antifairética $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$, podemos representá-la por:

$$[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n] = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

Ao longo do trabalho retornaremos à teoria de frações contínuas em algumas demonstrações.

Voltando ao diálogo fictício entre Sócrates e o escravo, Fowler aborda o conceito de razão a partir de duas grandezas (pilhas de pedras) de mesma espécie, onde suas quantidades podem ser representadas por números inteiros. Associar uma grandeza a um número é uma ferramenta fundamental para sistematizar o mecanismo de antifairese

de maneira prática, porém nosso objeto de estudo terá uma abordagem expansiva para grandezas. Não há sentido na comparação puramente numérica no fenômeno da comensurabilidade/incomensurabilidade, mas sim uma comparação entre as grandezas estudadas.

3.1.2 Generalização:

Sejam G_1 e G_2 duas grandezas de mesma espécie que são representadas numericamente por N_1 e N_2 , respectivamente, sendo $N_2 < N_1$.

Iniciamos o processo de antifairese a partir da comparação entre N_1 e N_2 , denotado por $N_1 : N_2$.

$$N_1 = N_2.n_1 + r_1$$

Ou seja, $N_1 : N_2 = [n_1, N_2 : r_1]$.

Suponha que:

$$N_2 = r_1.n_2 + r_2$$

Temos que: $N_1 : N_2 = [n_1, n_2, r_1 : r_2]$

Suponha que:

$$r_1 = r_2.n_3 + r_3$$

Temos que: $N_1 : N_2 = [n_1, n_2, n_3, r_2 : r_3]$

Poderíamos repetir o processo uma certa quantidade de vezes até que:

$$r_k = r_{k+1}.n_{k+2}$$

Logo:

$$N_1 : N_2 = [n_1, n_2, n_3, \dots, n_{k+2}]$$

Neste caso particular, onde o mecanismo de subtrações recíprocas e contínuas termina, determinamos o maior número (r_{k+1}) que divide N_1 e N_2 . Retornando à comparação entre grandezas, a grandeza G_2 cabe n_1 vezes em G_1 e resta a grandeza g_1 , representada numericamente por r_1 (veja a generalização acima). Analogamente, chegaremos na etapa final do processo onde haverá uma grandeza g_{k+1} que cabe n_{k+2} vezes em g_k não havendo resto.

O fato de o processo ter um fim, implica que podemos encontrar a maior grandeza g_{k+1} que é capaz de dividir G_1 e G_2 simultaneamente, ou seja, G_1 e G_2 são grandezas comensuráveis.

A partir da proposta de generalização, algumas perguntas são imediatas: o que aconteceria se o processo de antifairese não terminasse (fosse infinito)? Existem comparações entre grandezas onde não encontramos uma grandeza que divida G_1 e G_2 ? Existem padrões para as razões antifairéticas? Um pouco mais à frente, abordaremos algumas propriedades e padrões, estudaremos alguns casos de comparação entre grandezas de mesma espécie (a partir de segmentos de reta e áreas) e abriremos um espaço para a discussão acerca da incomensurabilidade, abordando casos clássicos da geometria plana.

3.1.3 Algumas propriedades:

I. Antifaireses equivalentes:

Ainda no diálogo fictício, Fowler (através de Sócrates) estimula o escravo a relacionar a razão antifairética gerada pela comparação entre os montes de 60 e 26 pedras com outros montes de pedras.

Segue o trecho do diálogo (fragmento 2 - nossa tradução):

...

Sócrates 8: é apenas uma das diferentes definições possíveis. Você pode deduzir alguma coisa desse último passo?

Escravo 8: sim, poderíamos ter manipulado em duplas. Assim, montes de trinta e treze pedras darão a mesma razão.

Propriedade 1: sejam a , b e k números inteiros positivos.

$$a : b = a.k : b.k$$

No exemplo citado no fragmento 2, o escravo afirma que $60 : 26 = 30 : 13$. Pela

propriedade 1, temos que:

$$30 : 13 = 30.2 : 13.2 = 60 : 26$$

Veja:

$$30 : 13 = [2, 13 : 4] = [2, 3, 4 : 1] = [2, 3, 4] = 60 : 26$$

Uma manipulação interessante do método de antifairese, é determinar os elementos iniciais de comparação a partir da razão antifairética. Suponha a razão antifairética $[9, 7, 3]$.

Suponha que o último termo 3, da razão antifairética, seja resultante de 3:1. Reescrevendo: $[9, 7, 3 : 1]$. O que sugere que a última comparação foi entre um “monte de **três** pedras e um monte com **uma** pedra”. Reconstruindo o processo das comparações entre os montes de pedras anteriores:

$$[9, 7, 3 : 1] = [9, (7.3 + 1) : 3] = [9, 22 : 3] = [(9.22 + 3) : 22] = 201 : 22$$

No início da desconstrução, se relacionássemos o último termo da razão antifairética (3) com 6:2, obteríamos a comparação inicial 402:44.

Na perspectiva das frações contínuas, temos:

$$[9, 7, 3] = 9 + \frac{1}{7 + \frac{1}{3}} = 9 + \frac{1}{\frac{22}{3}} = 9 + \frac{3}{22} = \frac{201}{22}$$

Para essa e outras propriedades, a teoria das frações contínuas viabiliza uma compreensão um pouco mais fluida, pelo fato que as frações, e suas manipulações/operações, são ferramentas instrumentais no desenvolvimento matemático.

II. Comparação entre razões antifairéticas:

Dando sequência ao diálogo fictício, Fowler coloca em discussão a comparação entre razões antifairéticas. A partir da sequência gerada no desenvolvimento das subtrações recíprocas e contínuas, podemos verificar qual é a maior razão.

Segue um trecho do diálogo (fragmento 3 - nossa tradução):

...

Sócrates 9: agora vamos comparar essa razão com algumas outras razões. A

razão $[2, 3, 4]$ é maior que a razão: três vezes, três vezes, quatro vezes exatamente?

Escravo 9: você não disse que as razões sempre podem ser comparadas ou me disse o que isso significa; mas eu diria que, seja como for definido, deve implicar que qualquer comparação que comece primeiro com três vezes será maior do que qualquer comparação que comece primeiro com duas vezes.

$$[2, \dots] < [3, \dots]$$

Sócrates 10: bom! Às vezes é melhor, em matemática, deixar esses pontos formais de definição e verificação para mais tarde, e primeiro descobrir que tipo de coisa você quer fazer. Tente outra comparação, desta vez com a razão duas vezes, quatro vezes, quatro vezes exatamente. Pense com cuidado.

Escravo 10: isso é estranho! Como o segundo resto vem da segunda pilha, originalmente menor, podemos ver que qualquer coisa que comece “duas vezes, quatro vezes” será menor do que qualquer coisa que comece “duas vezes, três vezes”.

$$[2, 4, \dots] < [2, 3, \dots]$$

Esse tipo de coisa parece acontecer geralmente, já que depende de qual das duas pilhas originais vem o restante.

Sócrates 11: sim. Para ver qual das duas razões é a maior, você deve observar se seus termos diferem primeiro no primeiro, terceiro, quinto, ... passo, ou o segundo, quarto, sexto, ... passo desde que, no último caso, o inverso da relação de menor e maior entre os termos ocorre entre as razões; esta será a primeira maneira de descobrirmos que o maior e o menor estão conectados com o ímpar e o par. Então você vê como podemos encaixar nossa razão: duas vezes é menor que duas vezes, quatro vezes, que é menor que nossa razão duas vezes, três vezes, quatro vezes, que é menor que duas vezes, três vezes, que é menor do que três vezes.

$$[2] < [2, 4] < [2, 3, 4] < [2, 3] < [3]$$

Escravo 11: sim, e posso ver como funcionará em geral. A cada passo você se aproxima cada vez mais, alternando acima e abaixo.

Vamos abordar o critério de comparação, dividindo a comparação entre razões antifairéticas em dois casos.

Sejam as razões antifairéticas:

$$a : b = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_k]$$

e

$$c : d = [b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, b_{n+1}, b_{n+2}, \dots, b_p]$$

Caso 1:

Suponha que o par de termos a_n e b_n seja o primeiro par da sequência onde $a_n \neq b_n$.

Para simplificar o enunciado, suponha $a_n < b_n$.

$$\text{Se } n \text{ é } \begin{cases} \text{ímpar, } a : b < c : d \\ \text{par, } a : b > c : d \end{cases}$$

Exemplos:

- $[2] < [3]$
- $[1, 2] > [1, 3]$
- $[3, 6, 9] > [3, 6, 5]$
- $[1, 2] > [1, 3, 7]$
- $[6, 2, 4] < [6, 2, 8, 9]$

Vamos usar alguns dos exemplos para mostrar a ideia de comparação via teoria das frações contínuas.

Suponha a comparação entre as razões antifairéticas $[1, 2]$ e $[1, 3]$.

$$2 < 3 \iff \frac{1}{2} > \frac{1}{3} \iff 1 + \frac{1}{2} > 1 + \frac{1}{3} \iff [1, 2] > [1, 3]$$

Suponha a comparação entre as razões antifairéticas $[3, 6, 9]$ e $[3, 6, 5]$.

$$\begin{aligned} 9 > 5 &\iff \frac{1}{9} < \frac{1}{5} \iff 6 + \frac{1}{9} < 6 + \frac{1}{5} \iff \frac{1}{6 + \frac{1}{9}} > \frac{1}{6 + \frac{1}{5}} \iff \\ &\iff 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{9}} > 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{5}} \iff [3, 6, 9] > [3, 6, 5] \end{aligned}$$

Suponha a comparação entre as razões antifairéticas $[1, 2]$ e $[1, 3, 7]$.

$$2 < 3 + \frac{1}{7} \iff \frac{1}{2} > \frac{1}{3 + \frac{1}{7}} \iff 1 + \frac{1}{2} > 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{7}} \iff [1, 2] > [1, 3, 7]$$

Caso 2:

Suponha agora que, para todos os pares de termos a_n e b_n , existentes da sequência, temos $a_n = b_n$.

O caso onde $k = p$ é imediato. Temos que $a : b = c : d$.

No caso $k \neq p$, vamos supor que $k < p$ para simplificar o enunciado.

$$\text{Se } k \text{ é } \begin{cases} \text{ímpar, } a : b < c : d \\ \text{par, } a : b > c : d \end{cases}$$

Exemplos:

- $[2] < [2, 4]$
- $[1, 2] > [1, 2, 5]$
- $[4, 7, 6] < [4, 7, 6, 9]$
- $[1, 6, 5] < [1, 6]$

Vamos usar alguns dos exemplos para mostrar a ideia de comparação via teoria das frações contínuas.

Suponha a comparação entre as razões antifairéticas $[2]$ e $[2, 4]$.

$$2 < 2 + \frac{1}{4} \iff [2] < [2, 4]$$

Suponha a comparação entre as razões antifairéticas $[1, 2]$ e $[1, 2, 5]$.

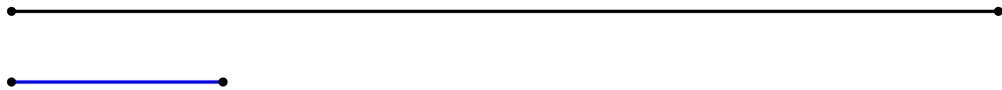
$$2 < 2 + \frac{1}{5} \iff \frac{1}{2} > \frac{1}{2 + \frac{1}{5}} \iff 1 + \frac{1}{2} > 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5}} \iff [1, 2] > [1, 2, 5]$$

3.2 Antifairese de segmentos:

Vamos propor um exemplo geométrico segundo a perspectiva da geometria não aritmetizada grega, onde um segmento de reta pode ser representado sem ser associado a um número. Vamos realizar o processo de antifairese a partir dos segmentos preto e azul, representados abaixo.

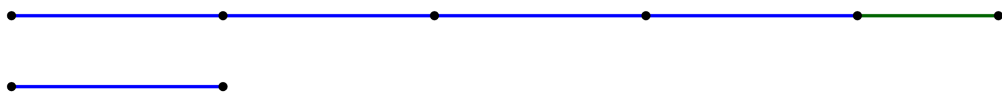
Nota: a proposta inicial é manipular os segmentos sem o rigor das notações matemáticas.

Figura 19 - Antifairese de segmento (etapa 1).



Queremos verificar quantas vezes o segmento azul cabe no segmento preto.

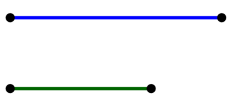
Figura 20 - Antifairese de segmento (etapa 2).



O segmento azul cabe **4 vezes** no segmento preto e resta o segmento verde.

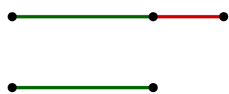
Vamos agora comparar os segmentos azul e verde.

Figura 21 - Antifairese de segmento (etapa 3).



O segmento verde cabe **uma vez** no segmento azul e resta o segmento vermelho.

Figura 22 - Antifairese de segmento (etapa 4).



Vamos agora comparar os segmentos verde e vermelho.

Figura 23 - Antifairese de segmento (etapa 5).



O segmento vermelho cabe **exatamente duas vezes** no segmento verde.

Figura 24 - Antifairese de segmento (etapa 6).



O segmento vermelho determina o final do processo de antifairese. Ele é o maior segmento que divide simultaneamente os segmentos preto e azul (propostos inicialmente). Neste caso, os segmentos preto e azul possuem uma unidade em comum, o segmento vermelho.

Fowler afirma que a compreensão da abordagem geométrica, definida pelo autor como o principal ingrediente da matemática grega, atrelada ao método da antifairese, viabilizaram um melhor entendimento dos incomensuráveis. Ao contrário da ideia mais disseminada, os incomensuráveis trouxeram uma nova via de possibilidades e de estudos futuros. O tratamento geométrico conecta o campo abstrato com o campo do visual e do material. A geometria como ferramenta de compreensão e didática nos ajuda a visualizar o questionamento iminente acerca da antifairese de segmentos: o que acontece quando a antifairese não termina? Qual é a relação que existe entre os segmentos quando não encontramos um segmento que divida exatamente os segmentos inicialmente propostos?

Para responder alguns questionamentos e mapear o estudo de antifairese, faremos algumas definições. No livro X dos Elementos de Euclides, o autor define magnitudes

comensuráveis e incommensuráveis da seguinte maneira:

Definição 1: magnitudes comensuráveis são aquelas que podem ser medidas com uma medida comum.

Quando o processo de antifairese é finito, dizemos que as magnitudes inicialmente comparadas são comensuráveis, pois no final do processo encontramos uma unidade de medida comum. A antifairese $28 : 6 = [4, 1, 2]$ é um exemplo de antifairese finita.

Definição 2: magnitudes incommensuráveis são aquelas que não podem ser medidas com uma medida comum.

Observamos que em alguns casos o processo de antifairese é periódico, o que nos leva a antifaireses infinitas. Neste caso, dizemos que as magnitudes inicialmente comparadas são incommensuráveis, pois não conseguimos encontrar uma unidade de medida comum. Um dos focos da investigação grega, acerca dos incommensuráveis, está diretamente ligado aos casos de antifaireses periódicas. Estudaremos estes casos ao longo do trabalho.

Podemos dividir as antifaireses infinitas em dois casos: periódicas e as eventualmente periódicas.

As antifaireses periódicas são aquelas que, em determinada etapa do processo, retornam ao primeiro estágio de comparação. A antifairese $(\sqrt{3} + 1) : 1 = [2, 1, 2, 1, 2, 1, \dots]$ é um exemplo de antifairese periódica. As antifaireses eventualmente periódicas são aquelas que retornam a uma etapa posterior ao estágio inicial de comparação. A antifairese $\sqrt{2} : 1 = [1, 2, 2, 2, \dots]$ é um exemplo de antifairese eventualmente periódica.

3.2.1 Antifairese entre a diagonal e o lado de um quadrado:

Inicialmente, vamos demonstrar uma propriedade.

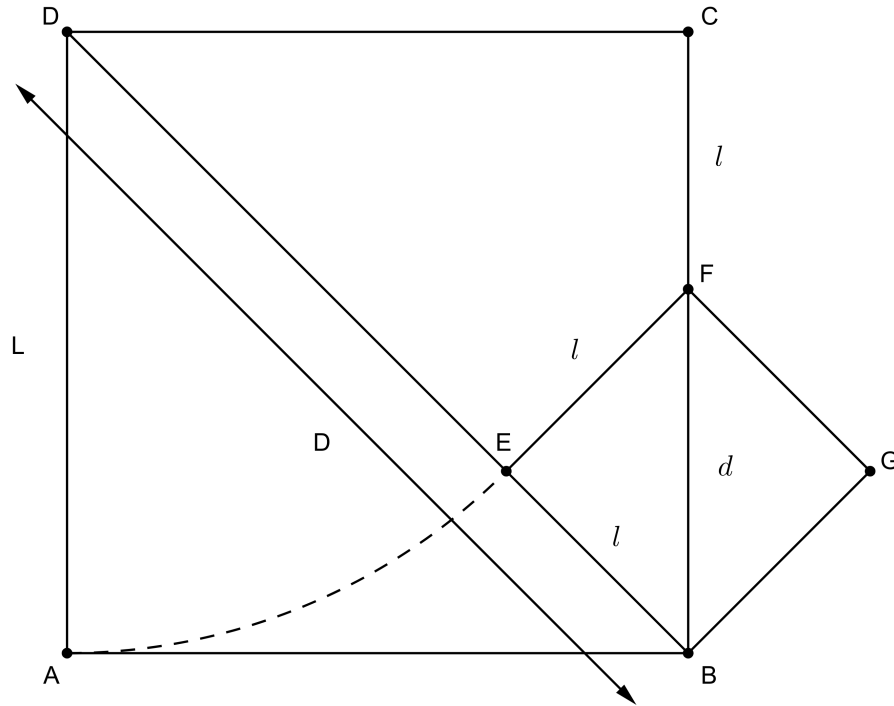
Propriedade: suponha um quadrado de lado L e diagonal D .

$$(D + L) : L = [2, 2, 2, \dots]$$

Prova: suponha um quadrado $ABCD$ e sua diagonal $\overline{BD}$. Com centro em D , traçamos o arco $\widehat{AE}$, tal que E esteja sobre a diagonal $\overline{BD}$. Construimos o quadrado

$BEFG$, com F sobre $\overline{BC}$, de lado l e diagonal d .

Figura 25 - Incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do quadrado.



É imediato que o triângulo CEF é isósceles de base $\overline{CE}$, logo $\overline{CF} = l$. Veja que $\overline{BC} = L = d + l$. L cabe **duas vezes** em $D + L$ e resta $D - L = l$. Ou seja:

$$(D + L) : L = [2, L : l]$$

Sabemos que $L = d + l$. Então:

$$(D + L) : L = [2, (d + l) : l]$$

Como $(D + L) : L = (d + l) : l$, voltamos à etapa inicial. Logo:

$$(D + L) : L = [2, 2, 2, \dots]$$

A partir da propriedade acima, podemos mostrar que a diagonal e o lado de um quadrado são incomensuráveis.

Prova:

$$D : L = [1, L : (D - L)]$$

Da demonstração, sabemos que $L = d + l$ e que $D - L = l$. Então:

$$D : L = [1, L : (D - L)] = [1, (d + l) : l] = [1, 2, 2, 2, \dots]$$

No exemplo em questão, o processo da antifairese é periódico, e consequentemente, infinito. De modo geral, quando o processo da antifairese é infinito, as grandezas envolvidas são incomensuráveis. No exemplo citado, onde realizamos o mecanismo da antifairese entre segmentos, o fato da antifairese ser infinita indica que não existe um segmento que divida ao mesmo tempo a diagonal e o lado de um quadrado.

Algumas observações acerca da antifairese entre a diagonal e o lado de um quadrado:

A partir da relação entre o lado e a diagonal de um quadrado, podemos fazer algumas conexões com o mecanismos de antifairese. Sabemos que, dado um quadrado de lado l , sua diagonal d se relaciona com seu lado por $d = l\sqrt{2}$. Pela propriedade das antifaireses equivalentes, verificamos que $\sqrt{2} : 1 = l\sqrt{2} : l = [1, 2, 2, 2, \dots]$.

Não temos como objetivo adotar um tratamento estritamente numérico para o mecanismo de antifairese, mas para efeito de sintetização as representações numéricas são indispensáveis. Iremos determinar a razão antifairética de $\sqrt{2} : 1$ via teoria de frações contínuas. Usaremos a seguinte manipulação para a demonstração:

$$\frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} - 1$$

Manipulando $\sqrt{2}$, temos:

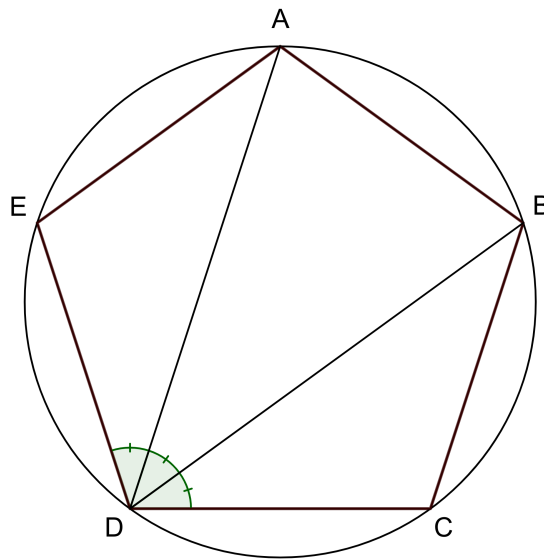
$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = 1 + \frac{1}{2 + \sqrt{2} - 1} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}} = \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \sqrt{2} - 1}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} = \\ &= [1, 2, 2, 2, \dots] \end{aligned}$$

3.2.2 Antifairese entre a diagonal e o lado de um pentágono regular:

Para demonstrarmos a incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do pentágono regular, a partir da perspectiva grega, usaremos a seguinte propriedade:

Propriedade: dado um pentágono regular $ABCDE$, as diagonais $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$ trissecam o ângulo interno do vértice D .

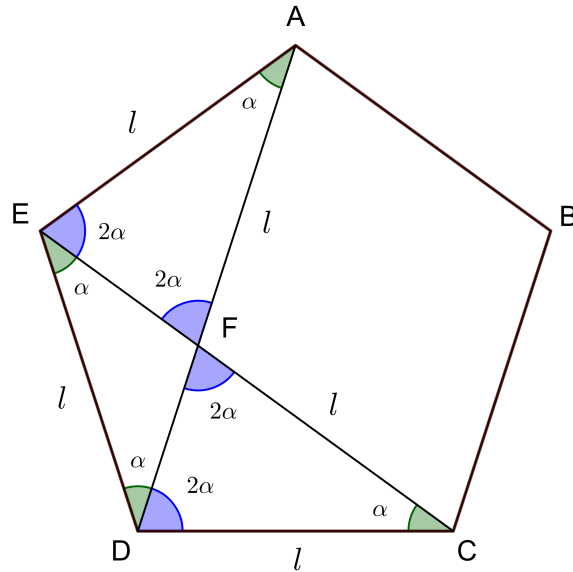
Figura 26 - Trisseção do ângulo interno do pentágono regular.



Nota: a propriedade citada acima pode ser demonstrada pela relação angular entre os ângulos internos de um triângulo.

Retornando ao processo de antifairese entre a diagonal e o lado do pentágono regular, construímos um pentágono regular $ABCDE$ de lado l e traçamos as diagonais $\overline{AD}$ e $\overline{CE}$, que se intersectam no ponto F . Observe que os ângulos $\hat{ADE}$, $\hat{EAD}$, $\hat{DCE}$ e $\hat{DEC}$ possuem a mesma medida (denotado por α na figura), dado que os triângulos ADE e CED são isósceles e possuem ângulo do vértice de mesma medida. Pela propriedade citada acima (da trisseção do ângulo interno do pentágono regular), sabemos que $\hat{FDC} = 2\alpha$. Analogamente, $\hat{AEF} = 2\alpha$. Do triângulo DEF , podemos afirmar, pela propriedade dos ângulos externo, que $\hat{CFD} = \hat{AFE} = 2\alpha$. Os triângulos AEF e CDF são isósceles e $\overline{AE} = \overline{AF} = \overline{CD} = \overline{CF} = l$.

Figura 27 - Relação entre a diagonal e o lado do pentágono regular.

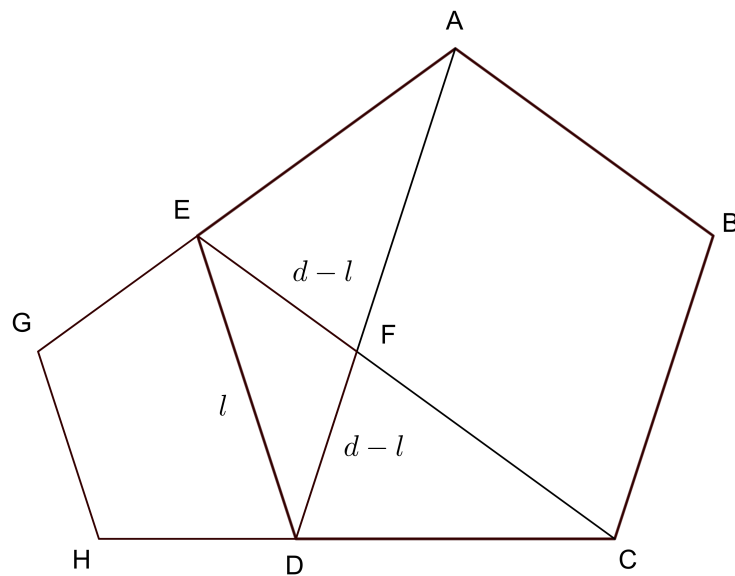


Seja d a diagonal do pentágono regular. Vamos realizar a antifairese entre a diagonal e o lado do pentágono regular.

$$d : l = [1, l : (d - l)]$$

Construímos o pentágono regular $EFDHG$, a partir dos segmentos $\overline{EF}$ e $\overline{DF}$, ambos de medida $d - l$. Retornamos ao processo inicial da antifairese entre a diagonal de um pentágono regular e seu lado, dado que $\overline{ED} = l$ é diagonal do pentágono regular $EFDHG$ e $\overline{EF} = d - l$ é seu lado.

Figura 28 - Antifairese entre a diagonal e o lado do pentágono regular.



Ou seja:

$$d : l = [1, l : (d - l)] = [1, 1, 1, \dots]$$

A diagonal e o lado de um pentágono regular são segmentos incomensuráveis.

Retornando a um dos pilares da argumentação de Fowler, temos um cenário onde a geometria é uma habilidade bem desenvolvida e o método das subtrações recíprocas e contínuas traduz uma das definições de razão existentes na época, o autor acredita que a incomensurabilidade entre a diagonal e o lado de um quadrado, ou de um pentágono regular, poderia ser tratada de maneira puramente geométrica (geometria não aritmetizada).

Alguns pesquisadores, como Kurtz Von Fritz, acreditam que a primeira vez que os acadêmicos gregos se depararam com a incomensurabilidade foi na manipulação do pentágono regular.

“Além disso, sabemos que os pitagóricos usavam o pentagrama, ou seja, um pentágono regular com os lados prolongados até o ponto de interseção, como sinal de reconhecimento. É absolutamente do caráter de Hipaso, como o conhecemos agora, que ele deveria ter tentado descobrir os números e as razões incorporados no pentagrama e no pentágono regular.” (K. VON FRITZ, 1945, p.256-257)

3.2.3 Divisão de um segmento em média e extrema razão (divisão áurea):

Definição: um segmento de reta $\overline{AB}$ está dividido em média e extrema razão por um ponto P se:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$$

Figura 29 - Divisão em média e extrema razão.



Com base na teoria de antifairese, podemos demonstrar que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AP}$ são incomensuráveis e, analogamente, $\overline{AP}$ e $\overline{PB}$ também são incomensuráveis.

Sejam $\overline{AP}$ de medida $\mathbf{a}$ e $\overline{PB}$ de medida $\mathbf{b}$, com $a > b$.

$$\overline{AB} : \overline{AP} = (a + b) : a = [1, a : b]$$

Por definição, $a : b = (a + b) : b$. Então:

$$\overline{AB} : \overline{AP} = (a + b) : a = [1, a : b] = [1, (a + b) : a] = [1, 1, 1, \dots]$$

A antifairese nos mostra que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AP}$ são incomensuráveis. Via teoria algébrica, podemos verificar que a representação da medida de $\overline{AB}$ ou $\overline{AP}$ é dada por um número irracional. O mesmo vale para $\overline{AP}$ ou $\overline{PB}$. Segue abaixo a demonstração.

$$\text{Seja } \phi = \frac{a + b}{a} = \frac{a}{b}.$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a + b}{a} \iff \frac{a}{b} = 1 + \frac{b}{a} \implies \phi = 1 + \frac{1}{\phi} \iff \phi^2 - \phi - 1 = 0$$

Como $\phi > 0$:

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \implies \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

3.3 Antifairese envolvendo áreas — Método dos gnômons:

No diálogo entre Sócrates e o escravo de Mênon, acerca do aprendizado, Sócrates afirma que o conhecimento já está em nossa alma e demonstra sua teoria provocando o escravo de Mênon a entender conceitos geométricos “mais avançados” a partir de elementos geométricos conhecidos pelo jovem. Fowler cria um diálogo fictício para expor algumas de suas ideias sobre o método de subtrações recíprocas e contínuas (não nomeado de antifairese no momento) imaginando como o escravo poderia ter respondido se Sócrates lhe perguntasse qual era o significado da razão entre dois números. Antes do diálogo, o autor faz algumas considerações sobre o escravo, para embasar recursos mais apurados utilizados no diálogo. Fowler supõe que o escravo tenha desenvolvido habilidades matemáticas mais aprofundadas, e para dar fluidez ao diálogo, ele sugere uma certa afinidade entre os personagens.

Segue um trecho do diálogo (fragmento 4 - nossa tradução):

Sócrates 12: ... vamos passar para um tópico diferente: e quanto à razão de dois segmentos de reta?

Escravo 12: certamente posso usar o mesmo processo. Eu me pergunto se isso pode durar para sempre.

Sócrates 13: e de duas regiões planas ou de dois sólidos?

Escravo 13: posso usar construções geométricas para converter duas regiões retilíneas em dois retângulos adjacentes com lados verticais iguais; a razão dos retângulos é a razão das bases, então estamos de volta à razão das linhas. Mas prevejo problemas ao fazer essas operações com regiões curvilíneas em geral e com a maioria dos tipos de sólidos.

Sócrates 14: sim. Eudoxus está trabalhando apenas nesses problemas agora. E quanto à razão da diagonal para um lado?

Escravo 14: sobre o quê?

Sócrates 15: Um quadrado, um pentágono, o que você quiser. Ou a circunferência para um diâmetro? Ou a superfície para uma seção? Ou do diâmetro da circunferência circunscrita para um lado, para uma diagonal, ou o diâmetro da esfera circunscrita para uma aresta? Ou as dimensões de quadrados e cubos?

Escravo 15: não tão rápido! Tudo isso é muito intrigante. Como posso saber mais?

Sócrates 16: vá ver Platão e seus amigos no jardim da Academia ao noroeste; eles não parecem falar sobre mais nada agora. Mas esteja avisado: estudos que exigem mais trabalho no aprendizado e na prática do que este, você não descobrirá facilmente, nem encontrará muitos deles; parece que vai demorar muito até que essa ideia de razão seja compreendida.

3.3.1 Definição:

Originalmente, o nome gnômon era dado para um instrumento astronômico com o formato de um esquadro, usado para projetar sombras sobre superfícies, indicando a hora do dia. Segundo Heródoto, a invenção babilônica teria sido inserida na Grécia por Anaximandro de Mileto (Heródoto II - p. 29).

Figura 30 - Gnômon.

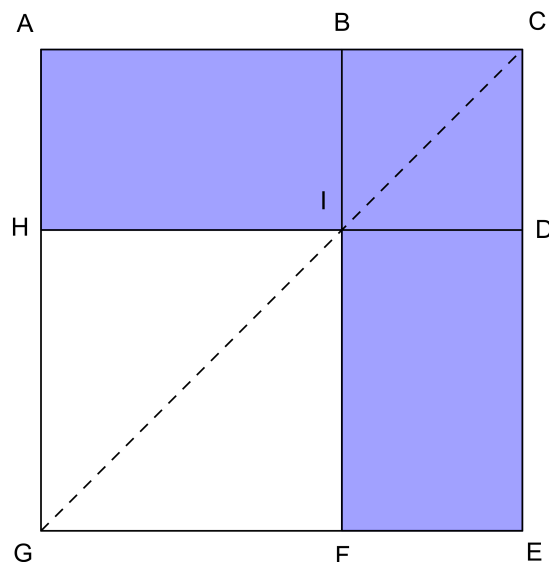


Fonte: Disponível em <https://www.tricurioso.com/wp-content/uploads/2018/08/como-o-relogio-de-sol-funciona-1.jpg> (acesso 06/02/2023).

Em seu livro II, Euclides define geometricamente um gnômon e amplia sua noção. Vamos tecer a definição dada por Euclides, a partir de um paralelogramo retangular (como exemplo), e faremos alguns comentários para melhor compreensão.

Definição: em qualquer paralelogramo (suponha $ACEG$), qualquer um dos paralelogramos em torno de sua diagonal (suponha $BCDI$) com os dois complementos (suponha $ABIH$ e $IDEF$) é chamado de gnômon.

Figura 31 - Gnômon retangular.

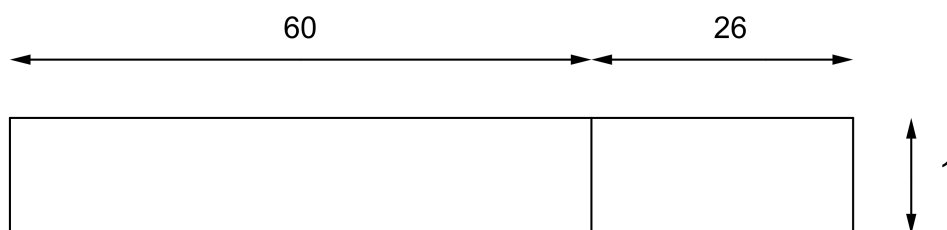


3.3.2 Resultados importantes:

No trecho do diálogo citado, na fala escravo 13, o jovem cita um modelo de construção geométrica para reduzir a comparação entre duas regiões a uma comparação entre dois segmentos de reta, visto que é possível comparar dois segmentos de reta assim como as pilhas de pedras foram comparadas.

A estratégia de comparação proposta pelo escravo se resume em converter as regiões a serem comparadas em retângulos adjacentes de mesma altura. Suponha a comparação entre uma região de 60 u.a. e outra de 26 u.a.. Representamos as regiões como dois retângulos adjacentes, um com base 60 u.m. e altura 1 u.m. e outro de base 26 u.m. e altura 1 u.m..

Figura 32 - Retângulos de mesma altura.



Como os dois retângulos possuem mesma altura, comparar as suas áreas é o equivalente a comparar as suas bases. Com essa estratégia, podemos reduzir a antifairese de duas regiões à antifairese de dois segmentos.

Na fala Sócrates/Escravo 12 do diálogo fictício, onde o conceito de razão abordado é relacionada a dois segmentos, Fowler destaca o fato de existir a possibilidade do processo de antifairese durar para sempre. No momento histórico onde acontece a descoberta dos incomensuráveis, não havia a preocupação em associar a medida de um segmento a um número, mas o mecanismo de subtrações recíprocas e contínuas deixava claro que em alguns casos o processo de comparação era infinito, como na comparação entre a diagonal e o lado de um pentágono regular, por exemplo. A noção aritmetizada de associar grandezas a números irracionais não era o ponto em questão neste momento.

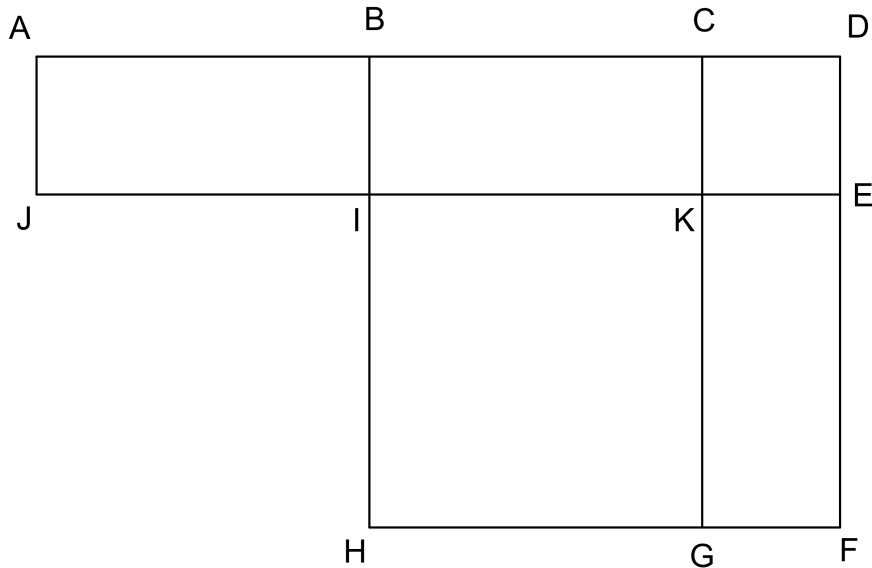
A proposta dos gnômons é trabalhar com construções geométricas compostas por elementos básicos como quadrados, retângulos e paralelogramos. Nossa proposta de abordagem baseia-se na perspectiva grega da época, onde objetos geométricos poderiam ser

tratados de modo não aritmetizado, sem qualquer rigor matemático nas demonstrações. Basicamente, conseguimos fazer associações numéricas com os elementos de uma construção geométrica específica. Iniciamos a construção do gnômon por um quadrado, com dimensões apropriadas, e adicionamos mais alguns elementos que se relacionam com a comparação antifairética inicial. O objetivo principal é manipular segmentos de reta, sem a associação numérica com o seu comprimento.

Ainda no livro II, Euclides descreve quatorze resultados geométricos envolvendo quadrados, retângulos, triângulos e gnômons. Enunciaremos e demonstraremos o resultado 6 com o intuito de usá-lo futuramente em algumas demonstrações. Todos os passos da demonstração serão pautados em operações estritamente geométricas, sem a necessidade da algebrização para fazer afirmações quanto a equivalência de áreas.

Proposição 6 do livro II: suponha um segmento $\overline{AC}$ e seu ponto médio B . Prolongamos o segmento $\overline{AC}$, de A para C , até um ponto D . Construimos o quadrado $BDFH$, a partir de $\overline{BD}$ e o quadrado $CDEK$, a partir de $\overline{CD}$. Traçamos $\overline{CG} \parallel \overline{DF}$, com G sobre $\overline{HF}$. Finalizamos a construção com o retângulo $ADEJ$.

Figura 33 - Gnômon da proposição 6 (construção).



Neste caso:

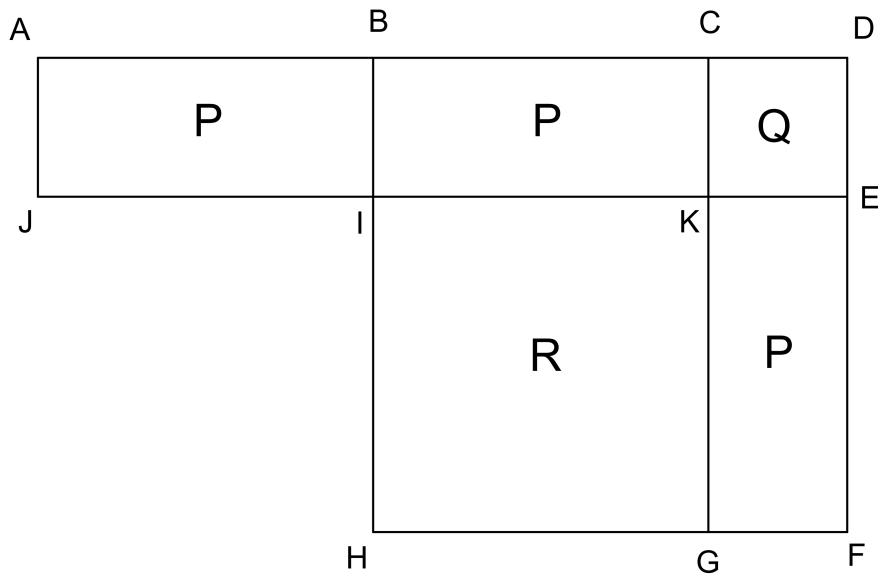
$$A_{ADEJ} + A_{IKGH} = A_{BDFH}$$

Demonstração: pelo fato de $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{EF}$ e $\overline{AJ} = \overline{BI} = \overline{KE}$, então:

$$A_{ABIJ} = A_{BCKI} = A_{KEFG} = P \text{ (denotamos por } P\text{)}$$

Sejam $A_{CDEK} = Q$ e $A_{IKGH} = R$.

Figura 34 - Gnômon da proposição 6 (demonstração).



Temos que:

$$A_{ADEJ} + A_{IKGH} = 2P + Q + R = A_{BDFH}$$

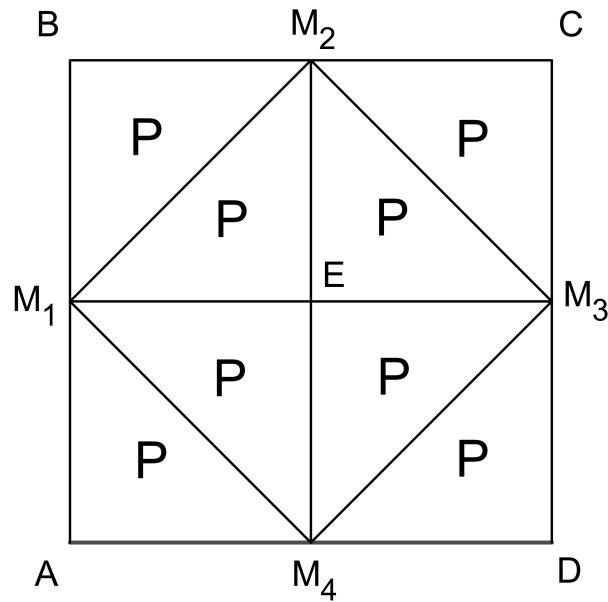
Com o método dos gnômons, e utilizando a propriedade descrita na proposição 6, vamos determinar a razão antifairética $\sqrt{2} : 1$. Antes, demonstraremos uma propriedade, que inclusive faz parte da literatura usada por Fowler para argumentar sobre as habilidades geométricas gregas da época, citada no diálogo entre Sócrates e o escravo de Mênon no livro Mênon de Platão.

Propriedade: seja um quadrado Q_1 de diagonal medindo d . Um quadrado Q_2 , de lado medindo d , possui o dobro da área de Q_1 .

Demonstração: suponha o quadrado $ABCD$ e sejam M_1, M_2, M_3 e M_4 os pontos médios dos seus lados.

Ligamos os pontos médios, dois a dois, originando assim 8 triângulos de mesma área P .

Figura 35 - Propriedade da área do quadrado construído sobre a diagonal de um quadrado.



$$A_{M_1M_2M_3M_4} = 4P = 2 \cdot 2P = 2 \cdot A_{M_1EM_4A}$$

Ou seja, o quadrado $M_1M_2M_3M_4$, construído sobre a diagonal do quadrado M_1EM_4A , possui o dobro da área de M_1EM_4A .

3.3.3 Antifairese via teoria dos gnômons:

I. Elementos de Euclides - Proposição 11 do livro II:

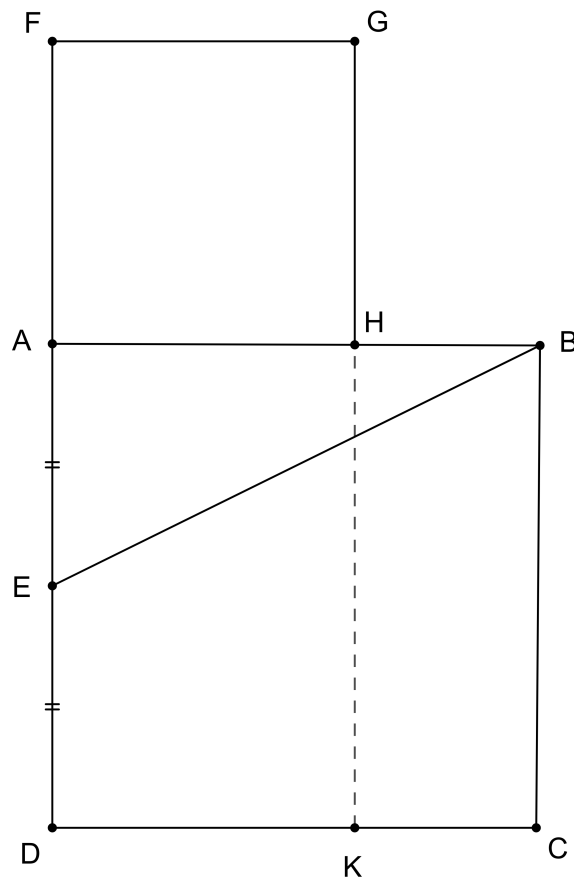
Determinar um ponto H sobre o segmento $\overline{AB}$ de modo que $\overline{AB} \cdot \overline{HB} = \overline{AH}^2$.

Figura 36 - Proposição 11 do livro II (enunciado).



Construção geométrica: a partir do segmento $\overline{AB}$ construímos o quadrado $ABCD$. Seja E o ponto médio de $\overline{AD}$. Prolongamos $\overline{AD}$, no sentido de D para A , até um ponto F , de modo que $\overline{EF} = \overline{EB}$. Construímos o quadrado $AFGH$, com H sobre $\overline{AB}$. Prolongamos o segmento $\overline{GH}$, no sentido de G para H , até um ponto K , de modo que K esteja sobre $\overline{CD}$.

Figura 37 - Proposição 11 do livro II (construção).



Antes de iniciarmos a demonstração, enunciaremos uma proposição que será usada.

Proposição 47 do livro I: nos triângulos retângulos, o quadrado do lado oposto ao ângulo reto é igual a soma dos quadrados dos lados que formam o ângulo reto.

Demonstração: queremos provar que $\overline{AB} \cdot \overline{HB} = \overline{AH}^2$.

Como E é ponto médio de $\overline{AD}$, a partir da proposição 6 do livro II, demonstrada no início do capítulo, temos que $A_{DFGK} + \overline{AE}^2 = \overline{EF}^2$.

Como $\overline{EB} = \overline{EF}$, podemos reescrever a relação: $A_{DFGK} + \overline{AE}^2 = \overline{EB}^2$.

Manipulando:

$$A_{DFGK} + \overline{AE}^2 = \overline{EB}^2 \iff A_{DFGK} + \overline{AE}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{AB}^2.$$

A partir da proposição 47 do livro I, temos que $\overline{AE}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{EB}^2$.

Então:

$$A_{DFGK} + \overline{AE}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{AB}^2 \iff A_{DFGK} + \overline{EB}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{AB}^2 \iff$$

$$A_{DFGK} = \overline{AB}^2 \iff A_{DFGK} = A_{ABCD} \iff$$

$$A_{AHKD} + A_{AFGH} = A_{AHKD} + A_{HBCK} \iff A_{AFGH} = A_{HBCK} \iff$$

$$\overline{AH}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{HB}$$

Da demonstração realizada acima, decorre imediatamente que H divide o segmento $\overline{AB}$ em dois segmentos tais que:

$$\overline{AB} \cdot \overline{HB} = \overline{AH}^2 \iff \frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{HB}}$$

Realizando a antifairese entre $\overline{AB}$ e $\overline{AH}$, temos:

$$\overline{AB} : \overline{AH} = [1, \overline{AH} : \overline{HB}]$$

Como $\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{HB}}$, temos que:

$$\overline{AB} : \overline{AH} = [1, \overline{AH} : \overline{HB}] = [1, \overline{AB} : \overline{AH}] = [1, 1, 1, \dots]$$

A antifairese entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AH}$ é periódica e consequentemente infinita. Podemos afirmar que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AH}$, assim como $\overline{AH}$ e $\overline{HB}$, são incomensuráveis.

II. Razão $\sqrt{2} : 1$:

Para determinarmos a razão antifairética $\sqrt{2} : 1$, usaremos a razão antifairética $(1 + \sqrt{2}) : 1$ que será desenvolvida a partir da construção utilizada na proposição 6. As operações realizadas serão estritamente geométricas, somente segmentos de reta serão relacionados, e não seus comprimentos. Usaremos seus comprimentos somente para correlacionar a relação numérica do resultado da razão antifairética.

Construção geométrica da figura da proposição 6 do livro II a partir de uma nova perspectiva: começamos construindo um quadrado $IKGH$. Prolongamos o lado $\overline{HI}$, de H para I , até um ponto B , de modo de $\overline{HB}$ tenha a mesma medida da diagonal de $IKGH$. A partir de $\overline{HB}$, construímos o quadrado $BDFH$.

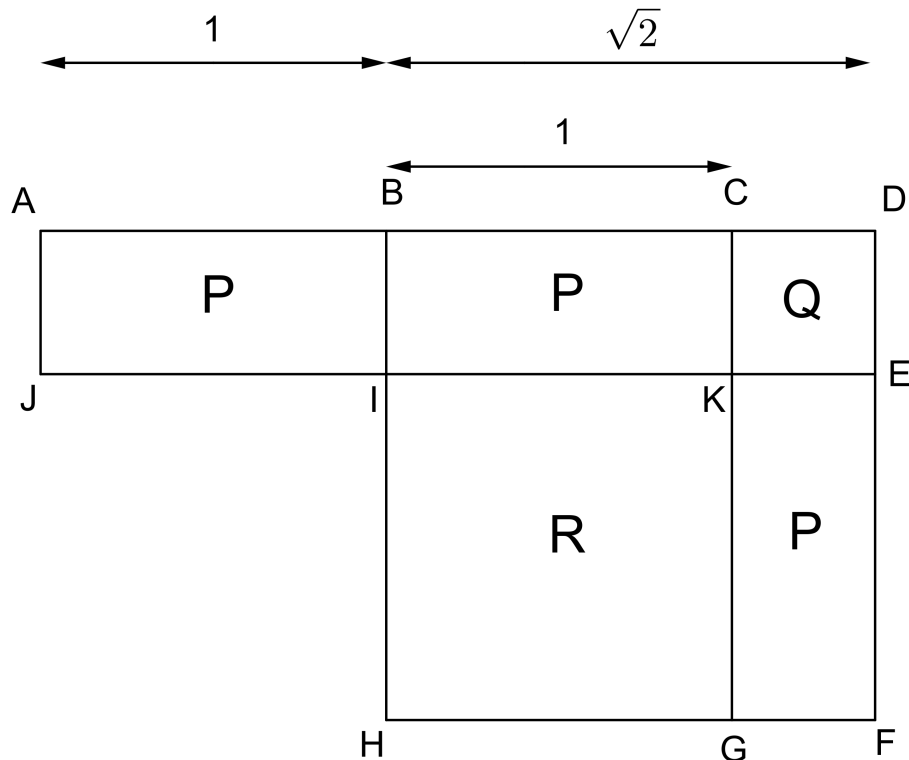
Como o quadrado $BDFH$ foi construído a partir de $\overline{HB}$, que por sua vez possui a mesma medida da diagonal de $IKGH$, então $A_{BDFH} = 2.A_{IKGH}$. Denotando $A_{IKGH} = R$, $A_{BCKI} = A_{KEFG} = P$ e $A_{CDEK} = Q$, temos:

$$R = 2P + Q$$

Adjacente ao retângulo $BCKI$, anexamos o retângulo $ABIJ$, com as mesmas dimensões de $BCKI$.

Vamos representar a figura com as medidas necessárias para determinar a razão antifairética, mas para as operações utilizaremos somente os objetos geométricos. Se supormos $IKGH$ um quadrado de lado 1, teremos todos os segmentos necessários para realizar a antifairese desejada. Observe que $BDFH$ é um quadrado de lado $\sqrt{2}$ (gerado a partir da diagonal do quadrado de lado 1).

Figura 38 - Antifairese entre a diagonal e o lado do quadrado, via teoria dos gnômons.



Inicialmente, queremos determinar $\overline{AD} : \overline{BC}$, numericamente é o mesmo que

$$(1 + \sqrt{2}) : 1.$$

$\overline{BC}$ cabe duas vezes em $\overline{AD}$ e resta o segmento $\overline{CD}$, sendo $\overline{CD} < \overline{BC}$. Temos:

$$\overline{AD} : \overline{BC} = [2, \overline{BC} : \overline{CD}]$$

Comparar $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ é o equivalente a comparar as áreas do quadrado $IKGH$ e do retângulo $KEFG$, pois são retângulos adjacentes que compartilham a mesma altura (estratégia de comparação proposta por Fowler no diálogo fictício). Como $R = 2P + Q$, temos que $A_{IKGH} = A_{ADEJ}$. Comparar as regiões $IKGH$ e $KEFG$ é equivalente a comparar as regiões $ADEJ$ e $BCKI$, pois possuem a mesma área, respectivamente.

Retornando à estratégia de comparação entre retângulos adjacentes de mesma altura, podemos reduzir a comparação entre as áreas dos retângulos $ADEJ$ e $BCKI$ para uma comparação entre os segmentos determinantes $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, ou seja $\overline{BC} : \overline{CD} = \overline{AD} : \overline{BC}$.

$$\overline{AD} : \overline{BC} = [2, \overline{BC} : \overline{CD}] = [2, \overline{AD} : \overline{BC}] = [2, 2, 2, \dots]$$

O fato de $\overline{BC} : \overline{CD} = \overline{AD} : \overline{BC}$ faz com que o mecanismo de antifairese retorne a etapa inicial de comparação. Numericamente:

$$(1 + \sqrt{2}) : 1 = [2, 2, 2, \dots]$$

Retornando à proposta inicial, temos:

$$\sqrt{2} : 1 = [1, 1 : (\sqrt{2} - 1)]$$

Pela propriedade de antifairese equivalentes, temos:

$$1 : (\sqrt{2} - 1) = 1.(1 + \sqrt{2}) : (\sqrt{2} - 1).(1 + \sqrt{2}) = (1 + \sqrt{2}) : 1 = [2, 2, 2, \dots]$$

Então:

$$\sqrt{2} : 1 = [1, 2, 2, 2, \dots],$$

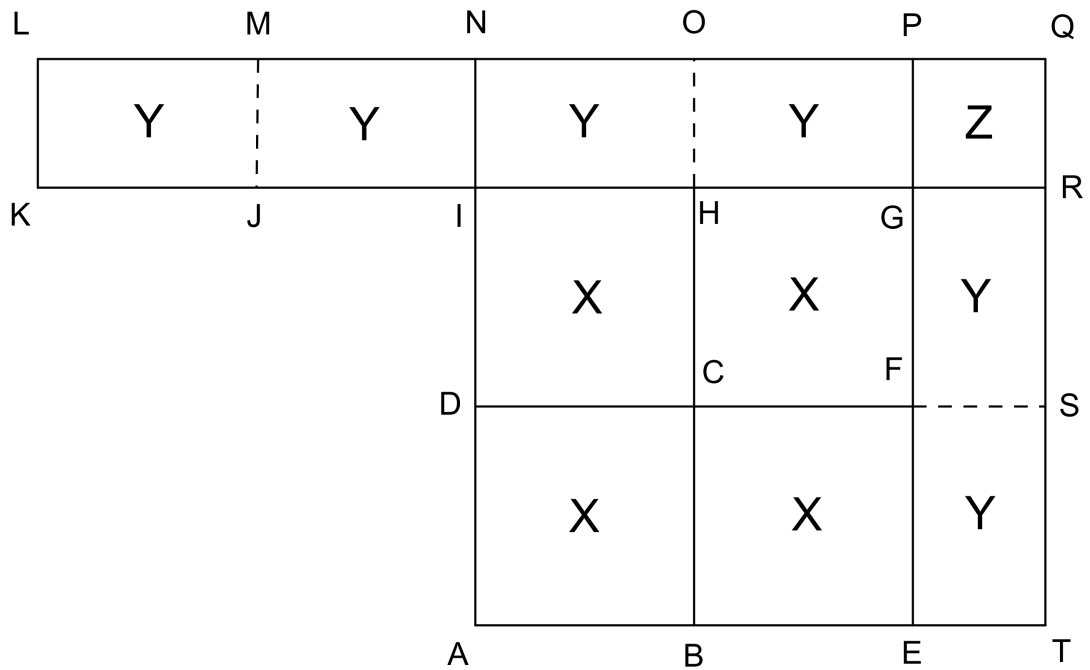
III. Razão $\sqrt{5} : 1$:

Determinaremos a razão antifairética $\sqrt{5} : 1$, via teoria dos gnômons, a partir de uma construção geométrica auxiliar.

Seja um quadrado $ABCD$ de área X . Quadruplicaremos o quadrado de área X , formando o quadrado $AEGI$. Prologamos o segmento $\overline{AI}$, no sentido de A para I , até

um ponto N , de modo que $\overline{AH} = \overline{AN}$. Construimos o gnômon $NQTEGI$ de área X . Terminamos a construção adicionando o retângulo $LNJK$, com mesma base e mesma altura do retângulo $NPGI$. Sejam M e J pontos médios de $\overline{LN}$ e $\overline{KI}$, respectivamente, O e H pontos médios de $\overline{NP}$ e $\overline{IG}$, respectivamente e F e S pontos médios de $\overline{GE}$ e $\overline{RT}$, respectivamente.

Figura 39 - Antifairese de $\sqrt{5} : 1$ (construção geométrica).



Denotaremos:

$$A_{LMJK} = A_{MNIJ} = A_{NOHI} = A_{OPGH} = A_{GRSF} = A_{FSTE} = Y$$

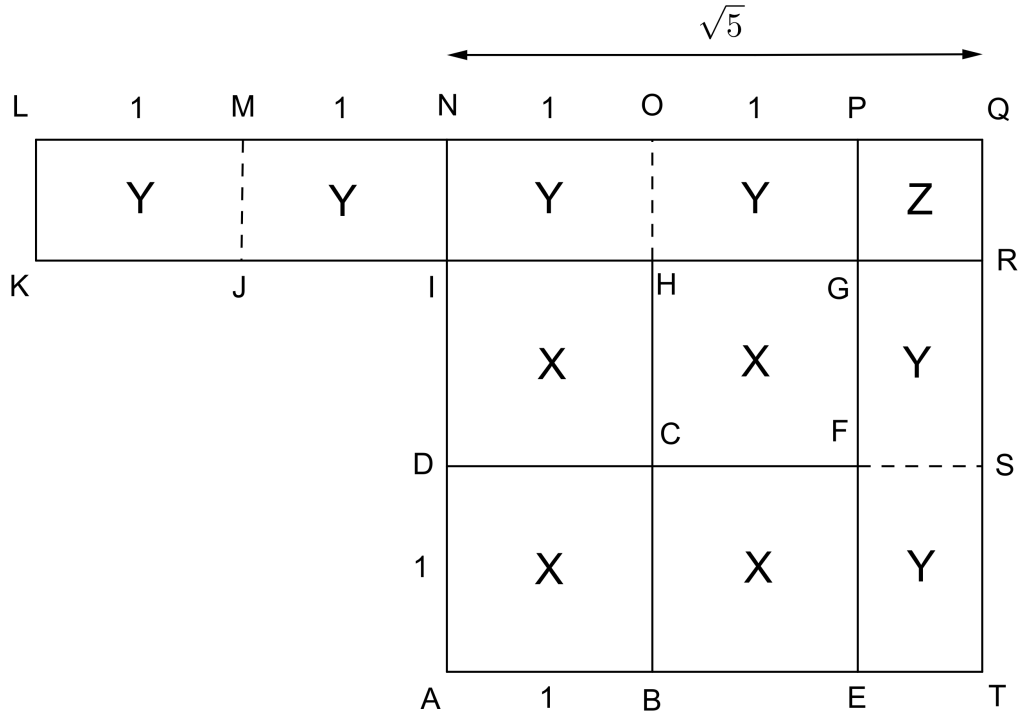
e

$$A_{PQRG} = Z$$

Se o gnômon $NQTEGI$ possui área X , então $X = 4Y + Z$.

Com esta construção, temos todos os elementos necessários para determinarmos a razão antifairética de $\sqrt{5} : 1$.

Fazendo uma associação numérica, suponha $ABCD$ um quadrado de lado 1. Pela construção, temos que $NQTA$ é um quadrado de lado $\sqrt{5}$, visto que a área de $NQTA$ é igual a 5 u.a..

Figura 40 - Antifairese de $\sqrt{5} : 1$.

Inicialmente queremos determinar $\overline{NQ} : \overline{OP}$, o que é numericamente equivalente a $\sqrt{5} : 1$.

$\overline{OP}$ cabe duas vezes em $\overline{NQ}$ e resta o segmento $\overline{PQ}$, sendo $\overline{PQ} < \overline{OP}$. Temos que:

$$\overline{NQ} : \overline{OP} = [2, \overline{OP} : \overline{PQ}]$$

Comparar $\overline{OP}$ e $\overline{PQ}$ é o equivalente a comparar as regiões do quadrado $CFEB$ e do retângulo $FSTE$, pois são retângulos adjacentes que compartilham a mesma altura. (novamente utilizamos a estratégia de comparação proposta por Fowler no diálogo fictício). Como $X = 4Y + Z$, temos que $A_{CFEB} = A_{LQRK}$. Comparar as regiões $CFEB$ e $FSTE$ é equivalente a comparar as regiões $LQRK$ e $OPGH$, pois possuem a mesma área, respectivamente.

Retornando à estratégia de comparação entre retângulos adjacentes de mesma altura, podemos reduzir a comparação entre as regiões $LQRK$ e $OPGH$ para uma comparação entre os segmentos determinantes $\overline{LQ}$ e $\overline{OP}$, ou seja $\overline{OP} : \overline{PQ} = \overline{LQ} : \overline{OP}$.

$$\overline{NQ} : \overline{OP} = [2, \overline{OP} : \overline{PQ}] = [2, \overline{LQ} : \overline{OP}]$$

$\overline{OP}$ cabe quatro vezes em $\overline{LQ}$ e resta o segmento $\overline{PQ}$, sendo $\overline{PQ} < \overline{OP}$. Temos:

$$\overline{NQ} : \overline{OP} = [2, \overline{OP} : \overline{PQ}] = [2, \overline{LQ} : \overline{OP}] = [2, 4, \overline{OP} : \overline{PQ}] = [2, 4, 4, \dots]$$

O fato de $\overline{LQ} : \overline{OP} = \overline{OP} : \overline{PQ}$ faz com que o mecanismo de antifairese retorne à etapa anterior de comparação. Numericamente temos que:

$$\sqrt{5} : 1 = [2, 4, 4, 4, \dots]$$

Do ponto de vista estritamente numérico:

$$\sqrt{5} : 1 = [2, 1 : (\sqrt{5} - 2)]$$

Pela propriedade de antifairese equivalentes, temos:

$$1 : (\sqrt{5} - 2) = 1.(\sqrt{5} + 2) : (\sqrt{5} - 2).(\sqrt{5} + 2) = (\sqrt{5} + 2) : 1$$

Então:

$$\sqrt{5} : 1 = [2, 1 : (\sqrt{5} - 2)] = [2, (\sqrt{5} + 2) : 1] = [2, 4, 1 : (\sqrt{5} - 2)] = [2, 4, 4, 4, \dots]$$

IV. Generalizando o caso $\sqrt{n^2 + 1} : 1$:

Queremos mostrar que $\sqrt{n^2 + 1} : 1 = [n, 2n, 2n, 2n, \dots]$.

Usaremos uma construção geométrica análoga à construção usada para determinar a razão antifairética $\sqrt{5} : 1$. Construimos um quadrado $ABCD$ de lado n e vamos subdividir o quadrado em n^2 quadrados de área $X = 1$. Adicionamos à figura o gnômon $GJKBCD$, também de área X . O gnômon será composto por $2n$ retângulos de área Y e um quadrado de área Z . Terminamos a construção com o retângulo $FGDE$, com mesma base e mesma altura do retângulo $GICD$.

$$\overline{GJ} : \overline{HI} = [n, \overline{HI} : \overline{IJ}] = [n, \overline{FJ} : \overline{HI}] = [n, 2n, \overline{HI} : \overline{IJ}] = [n, 2n, 2n, 2n, \dots]$$

O fato de $\overline{HI} : \overline{IJ} = \overline{FJ} : \overline{HI}$ faz com que o mecanismo de antifairese retorne à etapa anterior de comparação. Numericamente, temos:

$$\sqrt{n^2 + 1} : 1 = [n, 2n, 2n, 2n, \dots]$$

Abriremos um parênteses para demonstrarmos essa generalização via manipulação numérica (usando uma estrutura algébrica). Numa perspectiva mais moderna, poderíamos determinar o resultado da antifairese via teoria de frações contínuas.

Usaremos a seguinte manipulação algébrica para o desenvolvimento:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 1} - n}{\sqrt{n^2 + 1} - n} = \sqrt{n^2 + 1} - n$$

Segue a generalização:

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + 1} &= n + \sqrt{n^2 + 1} - n = n + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = n + \frac{1}{2n + \sqrt{n^2 + 1} - n} = \\ &= n + \frac{1}{2n + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n}} = n + \frac{1}{2n + \frac{1}{2n + \sqrt{n^2 + 1} - n}} = n + \frac{1}{2n + \frac{1}{2n + \dots}} = \\ &= n + \frac{1}{2n + \frac{1}{2n + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n}}} = n + \frac{1}{2n + \frac{1}{2n + \frac{1}{2n + \sqrt{n^2 + 1} - n}}} = \\ &= n + \frac{1}{2n + \frac{1}{2n + \frac{1}{2n + \dots}}} \end{aligned}$$

Ou seja:

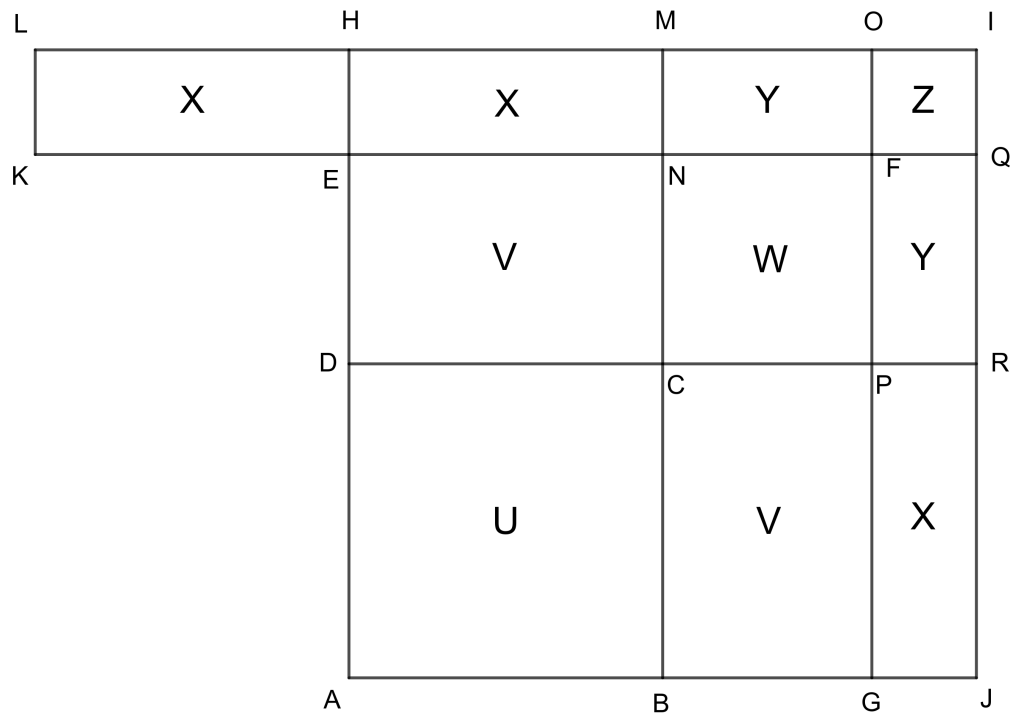
$$\sqrt{n^2 + 1} = n + \frac{1}{2n + \frac{1}{2n + \dots}} = [n, 2n, 2n, 2n, \dots]$$

V. Razão $\sqrt{3} : 1$

Queremos mostrar que $\sqrt{3} : 1 = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots]$.

Começamos construindo o quadrado $ABCD$, de área U . Prolongamos o segmento $\overline{AD}$, no sentido de A para D , até um ponto E , de modo que $\overline{AE}$ tenha a mesma medida da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos com medidas iguais ao lado e a diagonal de $ABCD$. Construimos o gnômon $EFGBCD$ de área $2U$ e em seguida o gnômon $HIJGFE$ de área U . Adicionamos o retângulo $LHEK$, com mesma base e mesma altura do retângulo $HMNE$.

Figura 42 - Antifairese de $\sqrt{3} : 1$.



Observe que $HIJA$ é a quadruplicação do quadrado $ABCD$.

Denotaremos:

$$A_{ENCD} = A_{CPGB} = V,$$

$$A_{NFPC} = W,$$

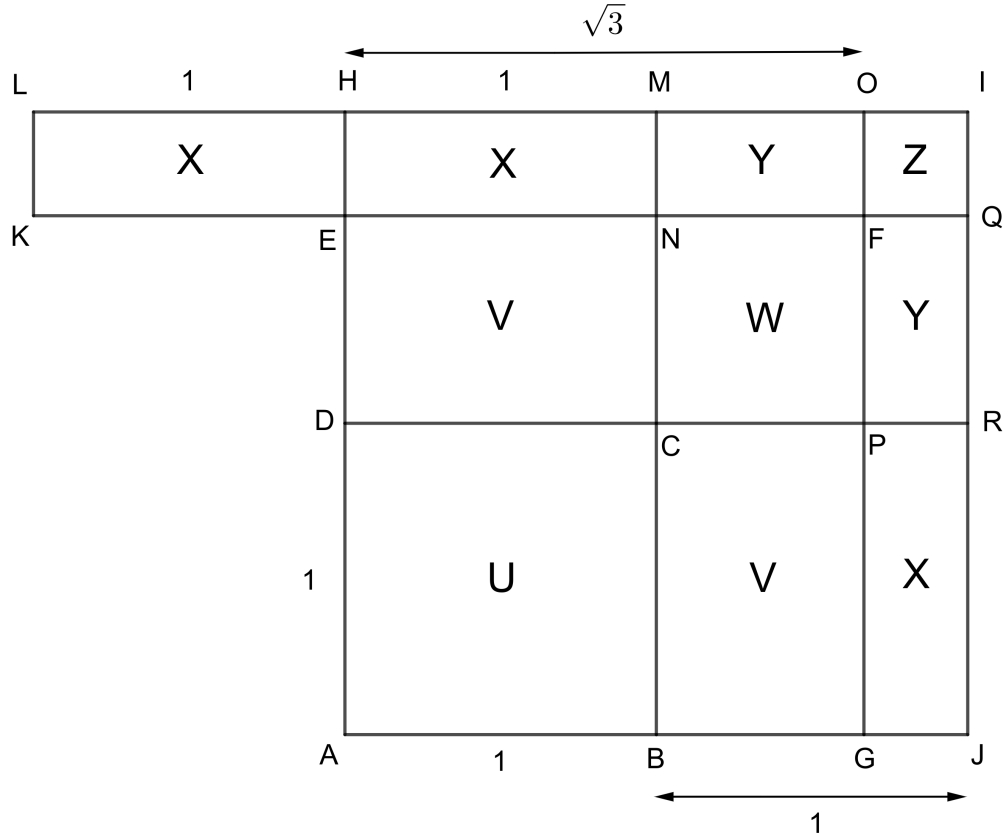
$$A_{LHEK} = A_{HMNE} = A_{PRJG} = X,$$

$$A_{MOFN} = A_{FQRP} = Y \text{ e}$$

$$A_{OIQF} = Z$$

Com esta construção, temos todos os elementos necessários para determinarmos a razão antifairética desejada. Sendo ABCD um quadrado de lado 1, então $\overline{HO} = \sqrt{3}$ e $\overline{HM} = 1$.

Figura 43 - Antifairese de $\sqrt{3} : 1$ (numericamente).



Inicialmente, vamos determinar $\overline{HO} : \overline{HM}$, o que é numericamente equivalente a $\sqrt{3} : 1$.

$\overline{HM}$ cabe **uma** vez em $\overline{HO}$ e resta o segmento $\overline{MO}$, sendo $\overline{MO} < \overline{HM}$. Ou seja:

$$\overline{HO} : \overline{HM} = [1, \overline{HM} : \overline{MO}]$$

Observe que $\overline{HM} = \overline{MI}$. Então:

$$\overline{HO} : \overline{HM} = [1, \overline{MI} : \overline{MO}]$$

$\overline{MO}$ cabe **uma** vez em $\overline{MI}$ e resta o segmento $\overline{OI}$, sendo $\overline{OI} < \overline{MO}$. Temos:

$$\overline{HO} : \overline{HM} = [1, \overline{MI} : \overline{MO}] = [1, 1, \overline{MO} : \overline{OI}]$$

Para darmos prosseguimento, precisaremos mostrar uma relação de equivalência

de áreas importante para o processo. Queremos provar que $W = 2X$. Tal relação não é imediata, vamos demonstrá-la.

Como o gnômom $EFGBCD$ tem área $2U$, temos que $2V + W = 2U$. Observe que HMCD é um quadrado de área U (HIJA é resultado da quadruplicação de ABCD), logo $V + X = U$.

$$\begin{aligned} 2V + W = 2U &\iff 2V + 2X + W = 2U + 2X \implies 2U + W = 2U + 2X \iff \\ &\iff W = 2X \end{aligned}$$

Como $W = 2X$, os retângulos MOPC e LOFK possuem mesma área ($2X + Y$). Note também que os retângulos OIRP e MIQN possuem mesma área.

Comparar $\overline{MO}$ e $\overline{OI}$ é o equivalente a comparar as regiões MOPC e OIRP, dado que são retângulos adjacentes de mesma altura. Porém comparar as regiões MOPC e OIRP é o equivalente a comparar as regiões LOFK e MIQN, respectivamente. Podemos reduzir o critério de comparação das regiões para uma comparação entre segmentos, pois LOFK e MIQN são retângulos de mesma altura. Ou seja, $\overline{MO} : \overline{OI} = \overline{LO} : \overline{MI}$.

Observe que $\overline{MI} = \overline{HM}$, logo $\overline{LO} : \overline{MI} = \overline{LO} : \overline{HM}$.

Retomando o processo da antifairese:

$$\overline{HO} : \overline{HM} = [1, \overline{MI} : \overline{MO}] = [1, 1, \overline{MO} : \overline{OI}] = [1, 1, \overline{LO} : \overline{HM}]$$

$\overline{HM}$ cabe **duas** vezes em $\overline{LO}$, restando o segmento $\overline{MO}$, sendo $\overline{MO} < \overline{HM}$. Então:

$$\begin{aligned} \overline{HO} : \overline{HM} &= [1, \overline{MI} : \overline{MO}] = [1, 1, \overline{MO} : \overline{OI}] = [1, 1, \overline{LO} : \overline{HM}] = \\ &= [1, 1, 2, \overline{HM} : \overline{MO}] \end{aligned}$$

Como $\overline{HM} = \overline{MI}$:

$$\begin{aligned} \overline{HO} : \overline{HM} &= [1, \overline{MI} : \overline{MO}] = [1, 1, \overline{MO} : \overline{OI}] = [1, 1, \overline{LO} : \overline{HM}] = \\ &= [1, 1, 2, \overline{MI} : \overline{MO}] = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots] \end{aligned}$$

O fato de $\overline{LO} : \overline{HM} = \overline{MI} : \overline{MO}$ faz com que o mecanismo de antifairese retorne

à penúltima etapa de comparação.

CONCLUSÃO

Ao longo da busca por fontes históricas que relatassem o momento da descoberta da incomensurabilidade, percebemos que não há uma evidência direta que descreva com exatidão como a comunidade acadêmica grega tratou tal descoberta. Notamos que a grande maioria das publicações acerca de tal tema, defendem que a descoberta dos incomensuráveis abalou a estrutura do pensamento pitagórico. Por outro lado, alguns autores se aprofundaram em tentar compreender melhor como era o desenvolvimento matemático grego da época, chegando a conclusão de que a habilidade matemática grega, principalmente o desenvolvimento geométrico, era uma ferramenta bem desenvolvida e fundamental para o tratamento da incomensurabilidade.

Em alguns fragmentos históricos encontramos relatos de duas ferramentas que podem ter sido decisivas na compreensão da incomensurabilidade. No livro *Mênon* de Platão, encontramos uma forma de abordagem geométrica, sem o uso de associações numéricas, uma geometria não aritmetizada. Outro indicativo de que os gregos já poderiam ter se deparado com a incomensurabilidade, sem ter acontecido algum tipo de crise, vem do fato de que a escola pitagórica usava o pentagrama, formado a partir dos vértices de um pentágono regular, como símbolo de reconhecimento. A incomensurabilidade poderia ser notada na manipulação da diagonal e do lado do pentágono regular.

Outra ferramenta, que acreditamos ter sido fundamental na descoberta dos incomensuráveis, foi o mecanismo de subtrações recíprocas e contínuas, chamado de antifairese. Ao realizarmos a antifairese entre a diagonal e o lado de um pentágono regular, por exemplo, percebemos um processo de recorrência, gerando assim uma razão antifairética periódica e consequentemente infinita. Neste caso podemos afirmar que as magnitudes em questão são incomensuráveis a partir de um conceito de razão já existente na época.

Neste trabalho, abordamos estudos e experimentos mais recentes, como o da abordagem CPA, de Jerome Bruner, e o da teoria da metáfora conceitual, de Marcel Danesi, ambos sobre a importância do uso dos recursos pictográficos na compreensão de conceitos abstratos. A manipulação de objetos geométricos pode ter sido um caminho fundamental no tratamento da incomensurabilidade. Mencionamos também o estudo de Charles Peirce sobre o uso da lógica como um instinto de raciocínio que nos leva a fazer inferências e tomar decisões mesmo em meio ao desconhecido. A partir da teoria de Peirce, podemos imaginar que, por mais que a descoberta dos incomensuráveis tenha sido algo totalmente oposto ao pensamento pitagórico da época, é instintivo que se tente compreender tal fenômeno, ou ao menos conjecturar hipóteses. A descoberta da incomensurabilidade pode

ter sido o início de um novo campo de estudo, de curiosidades e de possibilidades.

Na teoria sobre antifaireses envolvendo áreas, desenvolvemos alguns resultados particulares, e outros gerais, utilizando o método dos gnômons. A partir da estratégia de comparação de áreas citada por Fowler no diálogo fictício entre Sócrates e o escravo de Mênon, onde podemos converter as regiões a serem comparadas em dois retângulos adjacentes de mesma altura, conseguimos reduzir a comparação entre duas regiões para uma comparação entre dois segmentos de reta. Pela teoria dos gnômons, determinamos uma região retangular específica e a partir dela construímos um ou mais gnômons com determinadas características. As regiões retangulares estabelecidas na construção podem ser comparadas a partir de equivalências de áreas existentes na construção geométrica. Não encontramos relatos sobre o uso de gnômons relacionados a incomensurabilidade na Grécia antiga, mas acreditamos que esse seria um dos estágios posteriores na investigação dos incomensuráveis.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, E. G. de. Onde estão os números irracionais? Dissertação PROFMAT, UEFS, 2020.
- ARASHIRO, V. K. Teoria das proporções de Eudoxo e os incomensuráveis. USP, 2020
- ARAÚJO, M. P. F. de. Introdução ao conceito de números Reais: uma proposta didática baseada na história da matemática. Dissertação (Mestrado em Ensino da matemática) - UFRJ Programa de pós-graduação em ensino da matemática, 2011.
- ATHIENITIS, A. The Concrete-Pictorial-Abstract approach in mathematics. Maths Shed, 2022. Disponível em: <https://blog.edshed.com/what-is-the-cpa-approach-explained/>
- ÁVILA, G. Grandezas incomensuráveis e números irracionais. Revista do professor de matemática (RPM) nº 05, 1984.
- BOYER, C. B. História da matemática: tradução: Elza F. Gomide. Blucher, Ed. da universidade de São Paulo, 1974.
- CHIASSON, P. Logica Utens. UNICAMP, 2001. Disponível em: www.digitalpeirce.fee.unicamp.br/p-logchi.htm.
- DANESI, M. Conceptual metaphor theory and the teaching of mathematics: Findings of a pilot project. Walter de Gruyter, 2003.
- DANESI, M. A conceptual metaphor framework for the teaching of mathematics. Springer, 2007.
- EUCLIDES. Os Elementos. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. Editora UNESP, 2009.
- EVES, H. Introdução à História da Matemática. Tradução Hygino H. Domingues. Editora da UNICAMP, 2004.
- FOWLER, D. H. The Mathematics of Plato's Academy: A New Reconstruction. Second Edition. Clarendon Press, 1999.

GONÇALVES, C. H. B. e POSSANI, C. Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na Grécia antiga. *Matemática Universitária* nº 47, 16-24, USP, 2010.

KNORR, W. R. The evolution of the Euclidean Elements: a study of the theory of incommensurable magnitudes and its significance. D. Reidel Publishing Company, 1975.

ROQUE, T. História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. ZAHAR, 2012.

SILVA, M. R. O. Uma análise crítica às afirmações associadas à razão áurea e à sequência de Fibonacci. Dissertação PROFMAT, UEM, 2019.

VON FRITZ, K. The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum. *Annals of Mathematics, Second Series*, Vol. 46, Nº 2 (Apr., 1945), pp. 242-264.