



Universidade do Estado do Rio de Janeiro  
Centro de Tecnologia e Ciências  
Instituto Politécnico

Rafael Barbosa Libotte

Método de solução da equação de transporte de nêutrons  
integradas transversalmente em cálculos bidimensionais usando a  
formulação  $S_N$  com aproximação de expansão polinomial  
quadrática para os termos de fuga transversal em problemas de  
fonte-fixa

Nova Friburgo

2025

Rafael Barbosa Libotte

Método de solução da equação de transporte de nêutrons integradas transversalmente em cálculos bidimensionais usando a formulação  $S_N$  com aproximação de expansão polinomial quadrática para os termos de fuga transversal em problemas de fonte-fixa



Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: D.Sc. Hermes Alves Filho

Coorientador: D.Sc. Fernando Carvalho da Silva

Nova Friburgo

2025

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/E

L696 Libotte, Rafael Barbosa.  
Método de solução da equação de transporte de nêutrons integradas transversalmente em cálculos bidimensionais usando a formulação  $S_N$  com aproximação de expansão polinomial quadrática para os termos de fuga transversal em problemas de fonte-fixa / Rafael Barbosa Libotte. - 2025.  
100 f. : il.

Orientador: Hermes Alves Filho  
Coorientador: Fernando Carvalho da Silva.

Tese (doutorado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico.

1. Teoria do transporte de nêutron – Modelos matemáticos – Teses. 2. Nêutrons – Transporte – Métodos de simulação – Teses. 3. Legendre, Polinômios de – Teses. I. Alves Filho, Hermes. II. Silva, Fernando Carvalho da. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto Politécnico. III. Título.

CDU 539.125.5:519.6

Bibliotecária Fernanda Souza Cruz CRB7/7361

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Rafael Barbosa Libotte

**Método de solução da equação de transporte de nêutrons integradas transversalmente em cálculos bidimensionais usando a formulação  $S_N$  com aproximação de expansão polinomial quadrática para os termos de fuga transversal em problemas de fonte-fixa**

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 28 de Fevereiro de 2025.

Banca Examinadora:

---

D.Sc. Hermes Alves Filho (Orientador)  
Instituto Politécnico - UERJ

---

D.Sc. Fernando Carvalho da Silva (Coorientador)  
Universidade Federal do Rio de Janeiro – COPPE

---

D. Sc. Hélio Pedro do Amaral Souto  
Instituto Politécnico - UERJ

---

D. Sc. Adilson Costa da Silva  
Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE

---

D. Sc. Alessandro da Cruz Gonçalves  
Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE

---

D. Sc. Dany Sanchez Dominguez  
Universidade Estadual de Santa Cruz

Nova Friburgo

2025

## DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus amados sobrinhos, Elisa e Eduardo.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente aos meus pais Eduardo e Maryandria, que me proporcionaram todo conforto necessário para que eu tivesse condições de seguir meus sonhos, e que por toda minha vida me ensinaram que a educação é a forma correta de abrir portas para o futuro.

Ao meu irmão Gustavo, pelo companheirismo de toda vida, e que em toda minha formação acadêmica foi incansável em toda ajuda possível para que eu pudesse trilhar o caminho da minha vida profissional.

À minha amada esposa Luísa, por todo amor e apoio nos momentos de dificuldade que foram enfrentados ao longo de toda nossa jornada, entendendo toda minha ausência e tornando mais leves os momentos caóticos.

Aos meus sobrinhos Elisa e Eduardo, que me fazem seguir a vida com um sorriso no rosto independente do problema a ser enfrentado.

Ao meu orientador de longa data Hermes, que me recebeu há mais de 10 anos do LabTran, sempre com bom humor e disposição para ajudar. Só o rock salva!

Ao meu orientador Fernando, que desde o começo confiou no meu potencial e trabalhou arduamente para que eu pudesse me tornar um melhor profissional.

A todos os profissionais da UERJ, que nos meus 11 anos como aluno no Instituto Politécnico, lutaram por uma educação digna e gratuita mediante todas as adversidades vividas.

It's the job that's never started as takes longest to finish.

J.R.R. Tolkien, *The Lord of the Rings*

## RESUMO

LIBOTTE, R. B. L. *Método de solução da equação de transporte de nêutrons integradas transversalmente em cálculos bidimensionais usando a formulação  $S_N$  com aproximação de expansão polinomial quadrática para os termos de fuga transversal em problemas de fonte-fixa*. 2025. 100 f. Tese (Doutorado em Modelagem Computacional) – Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2025.

Na solução de problemas envolvendo o fenômeno de transporte de nêutrons em geometria cartesiana bidimensional utilizando métodos espectralnodais, deve ser realizada uma integração transversal na equação de transporte de nêutrons, originando um termo denominado de fuga transversal de nêutrons. A fim de tornar este sistema de equações em um sistema possível e determinado, é necessário que seja realizada uma aproximação no termo de fuga transversal de nêutrons. Portanto, apresentamos nesta tese uma aproximação polinomial quadrática para este termo. Esta abordagem foi aplicada na solução de problemas de fonte-fixa, fazendo o uso da equação de transporte de nêutrons multigrupos de energia, na formulação das ordenadas discretas. Esse tipo de aproximação pode ainda ser truncado para obter além da aproximação quadrática, uma aproximação linear, ou constante, a qual é largamente usada em métodos espectralnodais. Foram resolvidos 4 problemas-modelo, usando os métodos espectralnodais Spectral Deterministic Method e Response Matrix. Os resultados numéricos obtidos tiveram as precisões e tempos de execução comparados entre as aproximações quadrática, linear e constante com um método de malha fina de referência, obtidas com diversas malhas e diferentes ordens de quadratura. Os resultados numéricos obtidos apresentaram baixos desvios relativos percentuais além de apresentar economia nos tempos de execução quando usadas as aproximações linear e quadrática usando malhas relativamente grossas, quando comparados com soluções que usam aproximação constante.

Palavras-chave: aproximação para fuga transversal de nêutrons; neutrônica computacional; transporte de nêutrons; métodos espectralnodais.

## ABSTRACT

LIBOTTE, R. B. L. *Solution method for the transverse integrated neutron transport equation in two-dimensional calculations using the  $S_N$  formulation with a quadratic polynomial expansion approximation for the transverse leakage terms in fixed-source problems*. 2025. 100 f. Tese (Doutorado em Modelagem Computacional) – Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2025.

In solving problems involving the phenomenon of neutron transport in two-dimensional Cartesian geometry using spectral nodal methods, a transverse integration must be performed in the neutron transport equation, giving originating a term known as transverse neutron leakage. In order to make this system of equations possible and determined, it is necessary to approximate the transverse neutron leakage term. Therefore, in this thesis, we present a quadratic polynomial approximation for this term. This approach was applied to the solution of fixed-source problems, making use of the multigroup energy neutron transport equation in the discrete ordinates formulation. This type of approximation can also be truncated to obtain, in addition to the quadratic approximation, a linear or constant approximation, which is widely used in spectral nodal methods. Four model problems were solved using the spectral nodal methods Spectral Deterministic Method and Response Matrix. The numerical results obtained were compared in terms of accuracy and execution times between the quadratic, linear, and constant approximations with a reference fine-mesh method, using various meshes and different quadrature orders. The numerical results obtained showed low relative percentage deviations, as well as time savings when using linear and quadratic approximations with relatively coarse meshes, compared to solutions that use constant approximation.

Keywords: transverse neutron leakage approximation; computational neutronics; neutron transport; spectral-nodal methods.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 -	Volume $V$ com contorno $S$ do domínio espacial estudado . . . . .	18
Figura 2 -	Discretização da variável energia em grupos de energia. . . . .	20
Figura 3 -	Representação de um nêutron na posição $\vec{r}$ migrando na direção $\hat{\Omega}$ . . . . .	22
Figura 4 -	Representação da Quadratura de Simetria de Nível de ordem 6 no plano $xy$ . . . . .	24
Figura 5 -	DIVisão do domínio espacial em $I \times J$ nodos $\Gamma_{i,j}$ com parâmetros físico-materiais uniformes. . . . .	25
Figura 6 -	Representação de um nodo arbitrário $\Gamma_{i,j}$ . . . . .	26
Figura 7 -	Representação das fugas transversais ao eixo coordenado $x$ em uma grade arbitrária. . . . .	36
Figura 8 -	Representação das fugas transversais ao eixo coordenado $y$ em uma grade arbitrária. . . . .	40
Figura 9 -	Condição de contorno - Noroeste para o eixo $x$ . . . . .	43
Figura 10 -	Condição de contorno - Oeste. . . . .	44
Figura 11 -	Condição de contorno - Noroeste para o eixo $y$ . . . . .	46
Figura 12 -	Condição de contorno - Norte. . . . .	46
Figura 13 -	Fluxos angulares médios de nêutrons incidentes e emergentes em $\Gamma_{i,j}$ na direção espacial $x$ . . . . .	55
Figura 14 -	Fluxos angulares médios de nêutrons incidentes e emergentes em $\Gamma_{i,j}$ na direção espacial $y$ . . . . .	55
Figura 15 -	Grade espacial inicial do processo iterativo. . . . .	56
Figura 16 -	Grade espacial com os primeiros fluxos angulares médios atualizados. . . . .	56
Figura 17 -	Grade espacial com os primeiros fluxos angulares médios atualizados. . . . .	56
Figura 18 -	Grade espacial no início da segunda varredura. . . . .	56
Figura 19 -	Geometria e parâmetros materiais do problema-modelo 1. . . . .	67
Figura 20 -	Desvio relativo percentual dos fluxos escalares médios - Problema-modelo 1 - $S_4$ . . . . .	69
Figura 21 -	Desvio relativo percentual das correntes líquidas - Problema-modelo 1 - $S_4$ . . . . .	69
Figura 22 -	Desvio relativo percentual dos fluxos escalares médios - Problema-modelo 1 - $S_8$ . . . . .	71
Figura 23 -	Desvio relativo percentual das correntes líquidas - Problema-modelo 1 - $S_8$ . . . . .	71
Figura 24 -	Desvio relativo percentual dos fluxos escalares médios - Problema-modelo 1 - $S_{16}$ . . . . .	73

Figura 25 - Desvio relativo percentual das correntes líquidas - Problema-modelo 1 - $S_{16}$ .	73
Figura 26 - Geometria do problema-modelo 2.	74
Figura 27 - Desvio relativo percentual dos fluxos escalares médios - Problema-modelo 2 - $S_4, g = 1$ .	76
Figura 28 - Desvio relativo percentual dos correntes líquidas - Problema-modelo 2 - $S_4, g = 2$ .	77
Figura 29 - Desvio relativo percentual dos fluxos escalares médios - Problema-modelo 2 - $S_8, g = 1$ .	78
Figura 30 - Desvio relativo percentual dos correntes líquidas - Problema-modelo 2 - $S_8, g = 2$ .	78
Figura 31 - Geometria do problema-modelo 3.	80
Figura 32 - Desvio relativo percentual dos fluxos escalares médios - Problema-modelo 3 - $S_4$ .	82
Figura 33 - Desvio relativo percentual dos fluxos escalares médios - Problema-modelo 3 - $S_8$ .	83
Figura 34 - Geometria e Parâmetros físico-materiais do problema-modelo 4.	85
Figura 35 - Desvio relativo percentual dos fluxos escalares médios - Problema-modelo 4 - $S_4$ .	87
Figura 36 - Desvio relativo percentual dos fluxos escalares médios - Problema-modelo 4 - $S_8$ .	89

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Resultados numéricos - Problema-modelo 1 - $S_4$ . . . . .	68
Tabela 2 - Resultados numéricos - Problema-modelo 1 - $S_8$ . . . . .	70
Tabela 3 - Resultados numéricos - Problema-modelo 1 - $S_{16}$ . . . . .	72
Tabela 4 - Fonte externa de nêutrons e parâmetros físico-materiais - problema-modelo 2 . . . . .	75
Tabela 5 - Resultados numéricos - Problema-modelo 2 - $S_4$ . . . . .	76
Tabela 6 - Resultados numéricos - Problema-modelo 2 - $S_8$ . . . . .	77
Tabela 7 - Parâmetros físico-materiais - Problema-modelo 3 . . . . .	79
Tabela 8 - Resultados numéricos - Problema-modelo 3 - $S_4$ . . . . .	81
Tabela 9 - Resultados numéricos - Problema-modelo 3 - $S_{16}$ . . . . .	83
Tabela 10 - Resultados numéricos - Problema-modelo 4 - $S_4$ . . . . .	86
Tabela 11 - Resultados numéricos - Problema-modelo 4 - $S_8$ . . . . .	88
Tabela 12 - Dados da quadratura $LQ_4$ . . . . .	95
Tabela 13 - Dados da quadratura $LQ_8$ . . . . .	96
Tabela 14 - Dados da quadratura $LQ_{16}$ - Parte 1 . . . . .	97
Tabela 15 - Dados da quadratura $LQ_{16}$ - Parte 2 . . . . .	98
Tabela 16 - Dados da quadratura $LQ_{16}$ - Parte 3 . . . . .	99
Tabela 17 - Dados da quadratura $LQ_{16}$ - Parte 4 . . . . .	100

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	13
1	<b>EQUAÇÃO DE TRANSPORTE</b> . . . . .	18
1.1	Tratamento da variável energia via formulação multigrupos de energia . . . . .	20
1.2	Tratamento da variável angular com a formulação das ordenadas discretas ( $S_N$ ) . . . . .	22
1.3	Equação multigrupo de transporte de nêutrons $S_N$ em geometria cartesiana bidimensional . . . . .	23
1.4	Condições de contorno . . . . .	26
1.5	Solução analítica intranodal da equação de transporte de nêutrons $S_N$ . . . . .	27
2	<b>APROXIMAÇÃO QUADRÁTICA DA FUGA TRANSVERSAL DE NÊUTRONS</b> . . . . .	33
2.1	Coefficientes de expansão da fuga quadrática de nêutrons no eixo $x$ . . . . .	34
2.2	Coefficientes de expansão da fuga quadrática de nêutrons no eixo $y$ . . . . .	38
2.3	<b>Tratamento das Condições de Contorno</b> . . . . .	42
2.3.1	<u>Fuga transversal como média dos fluxos angulares médios de nêutrons no eixo <math>x</math></u> . . . . .	42
2.3.2	<u>Fuga transversal como média dos fluxos angulares médios de nêutrons no eixo <math>y</math></u> . . . . .	45
2.4	Equações integradas transversalmente com aproximação quadrática para a fuga transversal nas direções $x$ . . . . .	47
2.5	Equações integradas transversalmente com aproximação quadrática para a fuga transversal nas direções $y$ . . . . .	49
2.6	Construção da componente particular da solução analítica local da equação de transporte integrada transversalmente . . . . .	52
3	<b>O MÉTODO SPECTRAL DETERMINISTIC METHOD - QUADRATIC (SDM-QUAD)</b> . . . . .	54
4	<b>O MÉTODO MATRIZ RESPOSTA-QUADRATIC (RM-QUAD)</b> . . . . .	58
5	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS</b> . . . . .	66
5.1	Problema-modelo 1 . . . . .	66
5.2	Problema-modelo 2 . . . . .	74
5.3	Problema-modelo 3 . . . . .	79
5.4	Problema-modelo 4 . . . . .	84
	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS</b> . . . . .	90

<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	92
<b>APÊNDICE A</b> – Dados da quadratura de simetria de nível . . . . .	95

## INTRODUÇÃO

O fenômeno que descreve as diferentes interações dos nêutrons com o meio material pode ser estudado a partir das teorias de transporte e da difusão de nêutrons. Áreas de engenharia como a geração de energia elétrica em usinas termonucleares (Eletronuclear, 2021), perfuração de poços de petróleo (Assaife, 2022), inspeção de defeitos em estruturas metálicas por neutrongrafia térmica (Silva, 1995), bem como áreas da medicina como tratamentos BNCT (*Boron Neutron Capture Treatment*) para tratamento de alguns tipos de câncer (UNICAMP, 2020), precisam de um estudo detalhado do comportamento das reações nucleares de feixes de nêutrons em meios materiais.

A modelagem deste fenômeno é realizada segundo a Equação Linear de Boltzmann, originalmente desenvolvida para o estudo da cinética de gases (Duderstadt; Hamilton et al., 1976). Este modelo determinístico pode ser representado matematicamente por uma equação integro-diferencial parcial de primeira ordem com sete variáveis independentes. Na solução de problemas de transporte de nêutrons, estas variáveis podem ser discretizadas usando diferentes teorias, como a formulação de ordenadas discretas ( $S_N$ ) para as variáveis angulares (Lewis; Miller, 1993) e a teoria de multigrupos de energia na variável energia (Duderstadt; Hamilton et al., 1976). Porém, ainda assim, são obtidas soluções analíticas apenas em casos simplificados, o que torna necessário o desenvolvimento de métodos numéricos para a solução destes problemas.

O estudo da interação de nêutrons em um meio material na solução de problemas de fonte-fixa e de autovalor é dividida em duas vertentes: a estocástica, que usa algoritmos de Monte Carlo (Spanier; Gelbard, 2008) em diversos *softwares*, como o Serpent (Technical Research Centre of Finland, 2024) e a API OpenMC (MIT, 2024); e a determinística, que através da solução da equação de transporte de nêutrons, trabalha com diversos métodos de malha fina e grossa.

Dentre os métodos determinísticos mais usados, podemos citar o Diamond Difference (Lewis; Miller, 1993) que é usado como referência até hoje na solução de problemas uni e multidimensionais. Nesse método, os fluxos angulares médios de nêutrons são aproximados pela média aritmética dos fluxos angulares de nêutrons incidentes e emergentes que migram em uma mesma direção no nodo estudado. Essa aproximação é consistente para nodos pequenos, porém induz uma quantidade significativa de erro de truncamento nos resultados. Portanto, é necessário que o domínio seja discretizado em uma maior quantidade de nodos, ou seja, uma malha considerada fina. Dessa forma, a geração de resultados acurados pode ser computacionalmente cara, ou até inviável, tanto do ponto de vista da memória ocupada no armazenamento das matrizes quanto do tempo de execução.

Nesse contexto, o desenvolvimento de métodos espectralnodais se mostra importante, visto que esses são projetados para que possam gerar resultados com boa precisão

sem a necessidade de um maior refinamento de malha, abrindo margem para soluções numéricas em menor tempo computacional e com a necessidade de menos memória, quando comparados com os métodos de malha fina. Diferentes abordagens foram realizadas dentre os métodos de malha grossa acerca da discretização da variável espacial da equação de transporte de nêutrons, as quais deram origem a diversos métodos de solução numérica determinística para estes problemas.

O primeiro método a empregar uma solução em malha grossa para casos uni e multidimensionais foi o *spectral Green's function* (SGF) (Barros, 1990; Barros; Larsen, 1992). Neste, a única aproximação realizada é no termo de fuga transversal de nêutrons (no caso multidimensional), o qual foi inicialmente feito usando uma aproximação constante, daí denominando-o de *SGF-Constant Nodal* (SGF-CN). Esse método usa um esquema iterativo do tipo *node block inversion* (NBI), onde os fluxos angulares de nêutrons emergentes são estimados segundo os fluxos angulares de nêutrons incidentes no nodo estudado. Apesar dos resultados numéricos precisos em muitos problemas, o desenvolvimento matemático e a implementação do algoritmo são custosos.

Com o intuito de construir um método matematicamente mais simples e de implementação menos custosa, foi desenvolvido o *Spectral Deterministic Method* (SDM) (Oliva, 2018; Oliva et al., 2018). Nesse método, assim como no SGF, o domínio espacial é dividido em nodos com parâmetros físico-materiais uniformes, possibilitando a obtenção de uma solução analítica intranodal da equação de transporte, livre de erro de truncamento espacial no caso unidimensional, e com aproximação nos termos de fuga transversal de nêutrons em problemas multidimensionais. Neste, são usados os fluxos angulares incidentes no nodo para calcular um conjunto de parâmetros usando a solução analítica intranodal das equações  $S_N$ , e com essas mesmas equações, um sistema é construído para calcular os fluxos angulares de nêutrons emergentes do mesmo nodo usando os parâmetros calculados.

Na concepção original do SDM, era utilizado um esquema iterativo com varredura da grade espacial em apenas uma direção, calculando os fluxos angulares de nêutrons emergentes em todas as direções do nodo estudado. Visto que a solução de problemas em geometria *slab* é livre de erro de truncamento espacial, e, por consequência, é possível executar o método em malha grossa, esse esquema funcionou sem apresentar problemas. Quando aplicado o método na solução de problemas de fonte-fixa em geometria cartesiana bidimensional, devido à aproximação constante no termo de fuga transversal (SDM-CN), para que fossem gerados resultados acurados, era necessário que o domínio espacial fosse dividido em nodos menores, e, então, apareceram instabilidades numéricas no processo de varredura do caso bidimensional.

Após investigações desse problema, foi desenvolvida uma modificação para esse método que ao invés de usar cálculos matriciais para iterar os fluxos angulares de nêutrons emergentes, seria usada a equação de balanço espacial, de forma semelhante ao processo

iterativo que é adotado do DD, denominado *Source Iteration*. Nesse processo iterativo, para casos bidimensionais, eram necessárias 4 direções de varredura em uma iteração, calculando os fluxos angulares de nêutrons emergentes apenas na direção de varredura. Com isso, foram construídas as equações para o *Modified Spectral Deterministic-Constant Nodal* (MSD-CN) (Libotte; Alves Filho; Barros, 2020a; Libotte; Alves Filho; Barros, 2020b; Libotte, 2021), o qual possibilitava a solução de problemas bidimensionais em malhas mais finas, levando a resultados numéricos mais precisos.

Visto os resultados obtidos com o método MSD, notou-se que os problemas surgidos ao refinar a malha em uma maior quantidade de nodos partia do modo de varredura empregado inicialmente. Portanto, foi realizada uma alteração no processo iterativo do SDM a fim de comportar 4 direções de varredura, calculando os fluxos angulares de nêutrons emergentes apenas nas direções da varredura. Com essas modificações, foi possível usar o SDM em casos com maior número de nodos, sem que houvesse os problemas de instabilidade numérica citados acima.

Um outro método, que assim como o SGF usa um processo iterativo do tipo NBI, é o *Response Matrix-Constant Nodal* (RM-CN) (Silva, 2018b). Nele, que pode até mesmo ser derivado partindo das equações constituintes do método SDM, são construídas matrizes auxiliares usadas no processo iterativo junto aos fluxos angulares incidentes para calcular os fluxos angulares de nêutrons emergentes. Nesse método, não é necessário o cálculo dos coeficientes da expansão das autofunções da solução analítica local da equação de transporte nos nodos, resultando em um processo iterativo computacionalmente menos custoso que os do SDM e MSD. Vale ressaltar que para problemas unidimensionais esse método também não necessita de realizar aproximações para obter a solução analítica local da equação de transporte de nêutrons, possibilitando a geração de resultados numéricos livres de erro de truncamento espacial, mas assim como nos demais, para problemas multidimensionais, o termo de fuga transversal deve ser aproximado.

Analisando a construção do algoritmo do RM, nota-se que para que se tenha um processo iterativo mais simples, é necessária uma maior quantidade de rotinas computacionais para construir as matrizes auxiliares (Silva, 2018b). Em contrapartida, nos métodos SDM e MSD é necessária uma quantidade maior de cálculos durante o processo iterativo (Oliva, 2018; Libotte, 2021; Libotte; Alves Filho; Barros, 2020a), porém a construção do algoritmo até o início do processo iterativo é mais simples que o do RM. Esse fato resulta em tempos de execução geralmente mais curtos do RM em problemas multidimensionais, uma vez que a repetição dos cálculos presentes no SDM e MSD durante o processo iterativo em problemas com malha mais fina é computacionalmente custosa.

No método *Analytical Discrete Ordinates* (ADO) (Barichello; Pazinato; Rui, 2020; Barichello; Cabrera; Filho, 2011; Picoloto et al., 2017), uma abordagem diferente de cálculo de fluxos angulares de nêutrons emergentes é realizada, onde as equações de transporte de nêutrons integradas transversalmente em cada eixo coordenado são construídas

explicitamente em termos das variáveis espaciais (Cromianski; Rui; Barichello, 2019). Diferente dos métodos citados acima, no ADO, não é realizado um processo iterativo que percorre os nodos calculando os fluxos angulares de nêutrons emergentes, mas sim é construído um sistema de equações lineares resolvido apenas uma vez calculando todas estas variáveis.

Diferentes abordagens já foram estudadas para realizar uma aproximação nos termos de fuga transversal de nêutrons. Métodos espectralnodais foram originalmente desenvolvidos considerando uma aproximação constante para esses termos (Barros; Larsen, 1992), e.g. SDM-CN (*Spectral Deterministic Method-Constant Nodal*) (Oliva, 2018) e RM-CN (*Response Matrix-Constant Nodal*) (Silva, 2018a). Nesse tipo de aproximação, os termos de fuga transversal são considerados como uma constante no interior do nodo estudado, aproximando os fluxos angulares de nêutrons como os fluxos angulares médios de nêutrons, e usados ao longo do processo iterativo na solução analítica intranodal da equação de transporte de nêutrons. Ao observar os resultados obtidos com os métodos que usam essa aproximação, nota-se a necessidade de refinamento de malha para obtenção de resultados precisos, como feito nos métodos de malha fina em casos multidimensionais. Uma outra abordagem realizada foi no método *spectral Green's function* por Dominguez (2006) e no método *Response Matrix* por Ortiz (2022), que realizaram uma expansão linear do fluxo angular de nêutrons. Além destas, foi também estudada uma forma de aproximação exponencial desses termos usando o método *spectral Green's function* no trabalho de Mello e Barros (2002).

Esta tese tem como principal objetivo mostrar o desenvolvimento de um método para solução de problemas de fonte-fixa realizando uma expansão quadrática nos termos de fuga transversal de nêutrons usando polinômios de Legendre. Nessa abordagem, são construídos conjuntos de equações lineares usando o método das diferenças finitas, que são usados no cálculo dos coeficientes do polinômio quadrático usado para aproximar os termos de fuga transversal no interior de cada nodo espacial do domínio. Essa técnica tem como principal objetivo gerar resultados acurados sem a necessidade de um refinamento de malha expressivo, como necessário nos métodos com aproximação constante. Dentro dessa metodologia, há ainda a possibilidade de truncar o polinômio usado na expansão no termo de grau zero, derivando a largamente usada aproximação constante, ou no termo de grau 1, gerando uma aproximação linear. No desenvolvimento dessas abordagens, foram aplicadas as aproximações constante, linear e quadrática em dois métodos espectralnodais, sendo estes o *Spectral Deterministic Method* e o *Matriz Resposta*.

No Capítulo 2, é mostrada resumidamente a dedução da equação de transporte de nêutrons aplicada a problemas de fonte-fixa. A partir dessa equação são mostradas as discretizações das variáveis angulares e de energia para a sua aplicação em geometria cartesiana bidimensional. São também mostrados os tipos de condições de contorno usados nos problemas estudados nesta tese. Ainda nesse capítulo, é mostrada a solução analítica

intranodal da equação de transporte de nêutrons  $S_N$ , utilizada na proposta da aproximação quadrática dos termos de fuga transversal, e no desenvolvimento dos métodos RM e SDM.

No Capítulo 3, é mostrada a proposta de aproximação quadrática dos termos de fuga transversal. Nesse capítulo, são deduzidas as equações para o cálculo dos coeficientes da expansão polinomial para os eixos coordenados  $x$  e  $y$ , bem como o tratamento das condições de contorno usando uma aproximação da média dos fluxos angulares de nêutrons médios nas faces dos nodos. Além disso, ainda é mostrada a dedução das equações integradas transversalmente com aproximação quadrática para a fuga transversal.

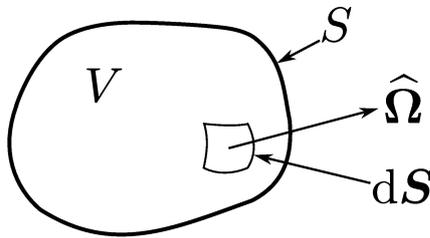
Nos Capítulos 4 e 5, são deduzidos respectivamente os métodos *Spectral Deterministic Method* e *Response Matrix*, mostrando os seus processos iterativos para o cálculo dos fluxos angulares de nêutrons emergentes nos nodos espaciais, aplicado a casos de blindagem de nêutrons.

Os resultados numéricos para quatro problemas-modelo são mostrados no Capítulo 6. Sendo um caso idealizado, e um caso mais realístico de blindagem de nêutrons em um meio material homogêneo, onde devem ser calculadas as correntes líquidas nos contornos do domínio espacial, e um caso que simula a perfilagem de um poço de petróleo e um de blindagem em um domínio heterogêneo, com objetivo de calcular o fluxo escalar de nêutrons em um detector na presença de uma fonte-fixa. Todos os problemas-modelo foram resolvidos com um método de malha-fina de referência, além dos métodos SDM e RM com aproximações constante, linear e quadrática nos termos de fuga transversal, e tiveram sua acurácia e tempo médio de execução comparados. Por fim, foram apresentadas no Capítulo 7, as conclusões e discussões acerca dos resultados obtidos nesta tese.

## 1 EQUAÇÃO DE TRANSPORTE

O transporte de nêutrons em um meio material, é realizado um estudo do comportamento do fluxo angular dessas partículas no interior de um volume arbitrário  $V$ , e superfície  $S$ , conforme mostrado na Figura 1. Nesta modelagem matemática, devem ser considerados mecanismos de ganho e perda de nêutrons que contribuem para o balanço de partículas no meio material (Duderstadt; Hamilton et al., 1976).

Figura 1 - Volume  $V$  com contorno  $S$  do domínio espacial estudado



Fonte: O autor, 2025.

Dentre estes, consideramos como mecanismos de ganho:

- Fontes emissoras de nêutrons.
- Nêutrons que migram para o interior de  $V$  através de  $S$ .
- Nêutrons que migram em uma direção qualquer  $\hat{\Omega}'$  com energia  $E'$  e após uma interação de espalhamento dentro de  $V$ , passam a ter uma direção e energia de interesse  $\hat{\Omega}$  e  $E$ .

E os de perda:

- Migração de nêutrons para fora do volume estudado através de  $S$ .
- Nêutrons que sofreram uma reação qualquer.

A partir desses mecanismos, é construída uma equação denominada equação de transporte de nêutrons, uma equação integro-diferencial parcial de primeira ordem que contabiliza o balanço de nêutrons produzidos e perdidos dentro de um volume arbitrário (Duderstadt; Hamilton et al., 1976). Essa é uma equação com 7 variáveis independentes, sendo estas a posição em geometria cartesiana tridimensional  $\vec{r} = (x, y, z)$ , a direção de migração dos nêutrons  $\hat{\Omega} = (\theta, \varphi)$ , a energia  $E$  e o tempo  $t$ . Visto que neste

trabalho, apenas problemas estacionários em meios não-multiplicativos são estudados, pode-se escrever a equação de transporte de nêutrons independente do tempo na forma

$$\widehat{\Omega} \cdot \nabla \psi(\vec{r}, E, \widehat{\Omega}) + \sigma_t(\vec{r}, E) \psi(\vec{r}, E, \widehat{\Omega}) = \int_{4\pi} d\widehat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \sigma_S(\vec{r}, E' \rightarrow E, \widehat{\Omega}' \rightarrow \widehat{\Omega}) \psi(\vec{r}, E', \widehat{\Omega}') + \frac{1}{4\pi} s(\vec{r}, E). \quad (1)$$

Onde as variáveis são definidas como:

- $\psi(\vec{r}, E, \widehat{\Omega})$ : Fluxo angular de nêutrons na posição  $\vec{r}$  com energia  $E$  migrando na direção  $\widehat{\Omega}$ .
- $\widehat{\Omega}$ : Direção de migração dos nêutrons.
- $\sigma_t(\vec{r}, E)$ : Seção de choque macroscópica total na posição  $\vec{r}$  para a energia  $E$ .
- $\sigma_S(\vec{r}, E' \rightarrow E, \widehat{\Omega}' \rightarrow \widehat{\Omega})$ : Seção de choque macroscópica diferencial de espalhamento na posição  $\vec{r}$  com mudança de energia de  $E'$  para  $E$ , sendo espalhado da direção  $\widehat{\Omega}'$  para  $\widehat{\Omega}$ .
- $\frac{1}{4\pi} s(\vec{r}, E)$ : Fonte externa de nêutrons na posição  $\vec{r}$  emitindo nêutrons isotropicamente com energia  $E$ .

e foi adotada a notação reduzida da integral na variável angular como

$$\int_{4\pi} (\cdot) d\widehat{\Omega} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\cdot) d\theta d\phi. \quad (2)$$

Para a dedução dessa equação, algumas hipóteses físicas simplificadoras quanto à interação dos nêutrons com o meio material são assumidas (Lewis; Miller, 1993)

- Os elementos de espaço e velocidade são considerados grandes o suficiente para que possam ser desprezadas flutuações estatísticas no interior do volume de interesse. Dessa forma, apenas valores médios para a densidade de nêutrons são considerados.
- O tempo de colisão dos nêutrons com os núcleos do meio material é considerado nulo. Dessa forma, após uma colisão, as partículas resultantes são emitidas instantaneamente.
- Os nêutrons são considerados como pontos, uma vez que um nêutron migra, em média, muitas distâncias interatômicas entre as interações. Sendo assim, essas partículas são descritas como um ponto no espaço com uma dada velocidade.

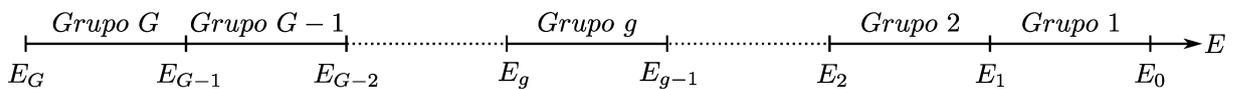
- Os nêutrons migram em linha reta entre suas interações. Essa aproximação é razoável, visto que essas partículas não possuem carga elétrica, portanto, sua trajetória não é influenciada por campos eletromagnéticos. Além disso, as forças gravitacionais são fracas demais para alterarem o movimento de nêutrons.
- A interação entre nêutrons é desconsiderada. Uma vez que a densidade de nêutrons é muito menor que a densidade de partículas componentes do meio material, portanto, é viável considerar apenas interações nêutron-núcleo.
- Os meios materiais são considerados isotrópicos e os seus parâmetros físico-materiais são independentes do tempo.

### 1.1 Tratamento da variável energia via formulação multigrupos de energia

A equação de transporte de nêutrons no formato apresentado na Eq. (1) não possui solução analítica conhecida. Porém, métodos numéricos podem ser usados para gerar soluções aproximadas de problemas que utilizam esse modelo matemático. A fim de usar esses métodos, é necessário que as variáveis independentes sejam discretizadas. Portanto, aqui mostraremos a discretização da variável energia usando a formulação multigrupos de energia.

Essa formulação consiste em dividir o espectro contínuo da energia de interesse em um número finito de grupos, como mostrado na Figura 2. Dessa forma, o contínuo de energia é segmentado em  $G$  grupos de energia, onde um grupo arbitrário  $g$  representa um intervalo que abrange nêutrons migrando com energia na faixa de  $E_g$  até  $E_{g-1}$  (Lewis; Miller, 1993).

Figura 2 - Discretização da variável energia em grupos de energia.



Fonte: O autor, 2025.

Para tratar a variável energia da equação de transporte de nêutrons, considera-se a integral definida de uma função arbitrária dependente da energia  $E$  (Lewis; Miller, 1993)

$$\int_0^{\infty} f(E') dE' = \sum_{g'=1}^G \int_{E_{g'}}^{E_{g'-1}} f(E') dE'. \quad (3)$$

Integrando a Eq.(1), em um dado grupo de energia  $g$  no intervalo  $[E_g, E_{g-1}]$ , obtemos uma equação que acopla os demais grupos ao grupo  $g$ , através das diferentes reações de espalhamento. Estendendo este conceito a todo o espectro de energia, temos um sistema de  $G$  equações acopladas, onde a equação de transporte de nêutrons multigrupos pode ser escrita da seguinte forma

$$\widehat{\Omega} \cdot \nabla \psi_g(\vec{r}, \widehat{\Omega}) + \sigma_{t,g}(\vec{r}) \psi_g(\vec{r}, \widehat{\Omega}) = \sum_{g'=1}^G \int_{4\pi} d\widehat{\Omega}' \sigma_{S,gg'}(\vec{r}, \widehat{\Omega}' \rightarrow \widehat{\Omega}) \psi_{g'}(\vec{r}, \widehat{\Omega}') + s_g(\vec{r}), \quad g = 1 : G, \quad (4)$$

onde o fluxo angular de nêutrons e a fonte externa no grupo  $g$  são, respectivamente, definidos como

$$\psi_g(\vec{r}, \widehat{\Omega}) \equiv \int_{E_g}^{E_{g-1}} \psi(\vec{r}, E, \widehat{\Omega}) dE, \quad (5)$$

e

$$s_g(\vec{r}) \equiv \int_{E_g}^{E_{g-1}} s(\vec{r}, E) dE. \quad (6)$$

Para as seções de choque macroscópicas de espalhamento e total, são conservadas as taxas de reação. Sendo assim, para a seção de choque macroscópica total do grupo  $g$ , é escrita

$$\sigma_{t,g}(\vec{r}) \equiv \frac{\int_{E_g}^{E_{g-1}} \sigma_t(\vec{r}, E) \psi(\vec{r}, E, \widehat{\Omega}) dE}{\psi_g(\vec{r}, \widehat{\Omega})}, \quad (7)$$

e para a seção de choque macroscópica de espalhamento do grupo  $g'$  para  $g$ , é obtido

$$\sigma_{s,gg'}(\vec{r}, \widehat{\Omega}' \rightarrow \widehat{\Omega}) \equiv \frac{\int_{E_g}^{E_{g-1}} \int_{E_{g'}}^{E_{g'-1}} \sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, \widehat{\Omega}' \rightarrow \widehat{\Omega}) \psi(\vec{r}, E', \widehat{\Omega}') dE' dE}{\psi_{g'}(\vec{r}, \widehat{\Omega})}. \quad (8)$$

Vale ressaltar que após este passo, ainda é necessário realizar a discretização das variáveis espaciais e angulares. Portanto, agora será realizada a discretização da variável angular.

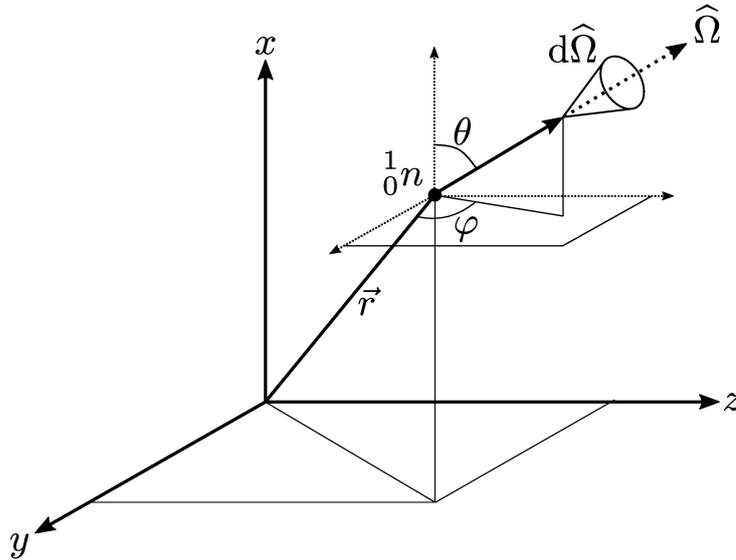
## 1.2 Tratamento da variável angular com a formulação das ordenadas discretas ( $S_N$ )

Usando o sistema de coordenadas mostrado na Figura 3, pode-se escrever a direção de migração com base nos ângulos polar ( $\theta$ ) e azimutal ( $\varphi$ ), como

$$\hat{\Omega} \cdot \nabla = \left[ (\cos\theta)\hat{i} + (\sin\theta \cos\varphi)\hat{j} + (\sin\theta \sin\varphi)\hat{k} \right] \cdot \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (9)$$

Figura 3 - Representação de um nêutron na posição  $\vec{r}$  migrando na direção  $\hat{\Omega}$ .



Fonte: O autor, 2025.

Adotando as definições  $\mu \equiv \cos(\theta)$ ,  $\eta \equiv \sin(\theta) \cos(\varphi)$  e  $\zeta \equiv \sin(\theta) \sin(\varphi)$ , a equação de transporte de nêutrons pode ser escrita como

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi_g(\vec{r}, \hat{\Omega}) + \eta \frac{\partial}{\partial y} \psi_g(\vec{r}, \hat{\Omega}) + \zeta \frac{\partial}{\partial z} \psi_g(\vec{r}, \hat{\Omega}) +$$

$$+ \sigma_{t,g}(\vec{r}) \psi_g(\vec{r}, \hat{\Omega}) = \sum_{g'=1}^G \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \sigma_{S,gg'}(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}) \psi_{g'}(\vec{r}, \hat{\Omega}') + \frac{1}{4\pi} s_g(\vec{r}), \quad g = 1 : G. \quad (10)$$

Nessa formulação, a variável angular  $\hat{\Omega}$  é discretizada em  $M$  direções discretas, assumindo assim a notação  $\hat{\Omega}_n$ , onde  $n = 1, 2, \dots, M$ , de forma que pode-se realizar a

aproximação da integral

$$\int_{4\pi} d\hat{\Omega} f(\hat{\Omega}) \approx \sum_{n=1}^N \omega_n f(\hat{\Omega}_n), \quad (11)$$

onde os parâmetros  $\omega_n$  são os pesos da quadratura a ser escolhida adequadamente para o tratamento da variável angular do modelo (Lewis; Miller, 1993).

Agora, a fim de escrever a equação de transporte de nêutrons usando direções discretas de migração das partículas em geometria cartesiana bidimensional, é usada a definição da aproximação de quadratura gaussiana da Eq. (11) e a teoria de expansão em harmônicos esféricos para o termo diferencial de espalhamento, na Eq. (10) (Lewis; Miller, 1993), resultando na formulação  $S_N$  da equação de transporte de nêutrons, dado pelo sistema de equações onde  $m = 1 : M$  e  $g = 1 : G$ ,

$$\begin{aligned} \mu_m \frac{\partial}{\partial x} \psi_g(\vec{r}, \hat{\Omega}_m) + \eta_m \frac{\partial}{\partial y} \psi_g(\vec{r}, \hat{\Omega}_m) + \zeta_m \frac{\partial}{\partial z} \psi_g(\vec{r}, \hat{\Omega}_m) + \sigma_{t,g}(\vec{r}) \psi_g(\vec{r}, \hat{\Omega}_m) = \\ \sum_{g'=1}^G \left( \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} \sigma_{S,l,gg'}(\vec{r}) \sum_{n=1}^M P_l(\hat{\Omega}_m \cdot \hat{\Omega}_n) \psi_{g'}(\vec{r}, \hat{\Omega}_n) \omega_n \right) + \frac{1}{4\pi} s_g(\vec{r}), \quad (12) \end{aligned}$$

uma vez que a seção de choque diferencial de espalhamento depende efetivamente do cosseno do ângulo de espalhamento  $\hat{\Omega}_m \cdot \hat{\Omega}_n$ , a expansão em polinômios de Legendre de grau  $l$  usada é dada como  $P_l(\hat{\Omega}_m \cdot \hat{\Omega}_n)$  até a ordem  $L$ . Adotando a notação reduzida  $\psi_m(\vec{r}) = \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}_m)$ , pode-se reescrever a Eq. (12) como

$$\begin{aligned} \mu_m \frac{\partial}{\partial x} \psi_{m,g}(\vec{r}) + \eta_m \frac{\partial}{\partial y} \psi_{m,g}(\vec{r}) + \zeta_m \frac{\partial}{\partial z} \psi_{m,g}(\vec{r}) + \sigma_{t,g}(\vec{r}) \psi_{m,g}(\vec{r}) = \\ \sum_{g'=1}^G \left( \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} \sigma_{S,l,gg'}(\vec{r}) \sum_{n=1}^M P_l(\hat{\Omega}_m \cdot \hat{\Omega}_n) \psi_{n,g'}(\vec{r}) \omega_n \right) + \frac{1}{4\pi} s_g(\vec{r}). \quad (13) \end{aligned}$$

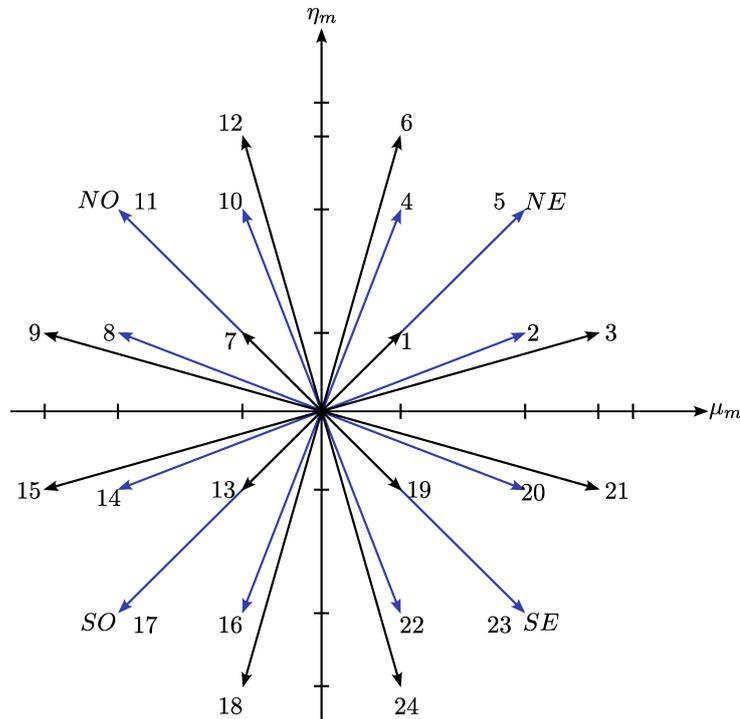
### 1.3 Equação multigrupo de transporte de nêutrons $S_N$ em geometria cartesiana bidimensional

Neste trabalho, apenas problemas de fonte-fixa em geometria cartesiana bidimensional serão estudados. Portanto, em geometria retangular bidimensional, a Eq. (13) assume a seguinte forma para o plano  $xy$ :

$$\mu_m \frac{\partial}{\partial x} \psi_{m,g}(x, y) + \eta_m \frac{\partial}{\partial y} \psi_{m,g}(x, y) + \sigma_{t,g}(x, y) \psi_{m,g}(x, y) = \sum_{g'=1}^G \left( \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4} \sigma_{S,l,gg'}(x, y) \sum_{n=1}^M P_l(\hat{\Omega}_m \cdot \hat{\Omega}_n) \psi_{n,g'}(x, y) \omega_n \right) + \frac{1}{4} s_g(x, y). \quad (14)$$

Neste trabalho, a quadratura escolhida para a discretização da variável angular foi a Quadratura de Simetria de Nível de grau  $N$  ( $LQ_N$ ) (Lewis; Miller, 1993). Usando essa formulação, o mesmo conjunto de  $N/2$  cossenos diretores são usados para cada quadrante de acordo com as direções coordenadas  $x$  e  $y$ , configurando assim um total de  $M = N(N+2)/2$  direções discretas, conforme mostrado na Figura 4 (Lewis; Miller, 1993). Nessa figura, as diferentes cores de setas representam os pesos  $\omega_n$  associados à direção de migração  $(\mu_m, \omega_m)$ , cujas numerações das setas representam o índice  $m$  adotado neste trabalho.

Figura 4 - Representação da Quadratura de Simetria de Nível de ordem 6 no plano  $xy$ .

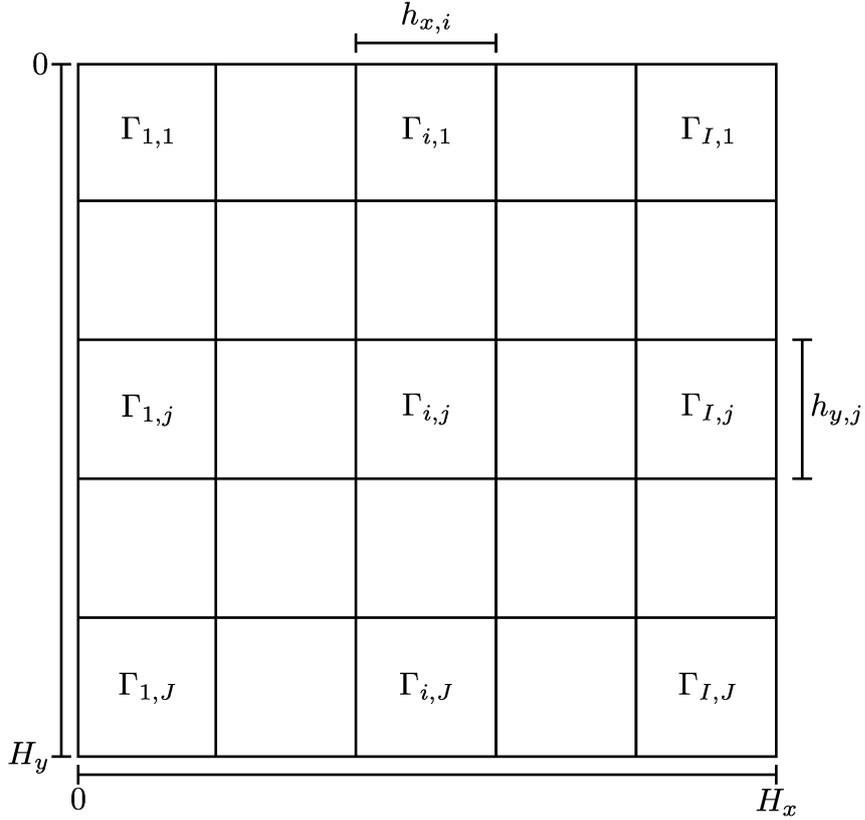


Fonte: O autor, 2025.

Após a obtenção da equação de transporte de nêutrons multigrupo  $S_N$ , representada pela Eq. (14), ainda não é possível obter uma solução analítica, uma vez que os parâmetros físico-materiais dependem da posição no domínio espacial. Sendo assim, considere um domínio espacial  $xy$ , dividido em  $I$  nodos na direção coordenada  $x$  com tamanho

$h_{x,i}$  e  $J$  nodos na direção coordenada  $y$  com tamanho  $h_{y,j}$ , conforme mostrado na Figura 5, onde cada nodo  $\Gamma_{i,j}$  possui parâmetros físico-materiais uniformes.

Figura 5 - DÍvisão do domínio espacial em  $I \times J$  nodos  $\Gamma_{i,j}$  com parâmetros físico-materiais uniformes.



Fonte: O autor, 2025.

Ao usar a Eq. (14) no interior de um nodo  $\Gamma_{i,j}$ , com parâmetros físico-materiais e fonte externa de nêutrons uniformes, ela assume a forma para cada nodo com índices  $i = i : I$  e  $j = 1 : J$  como

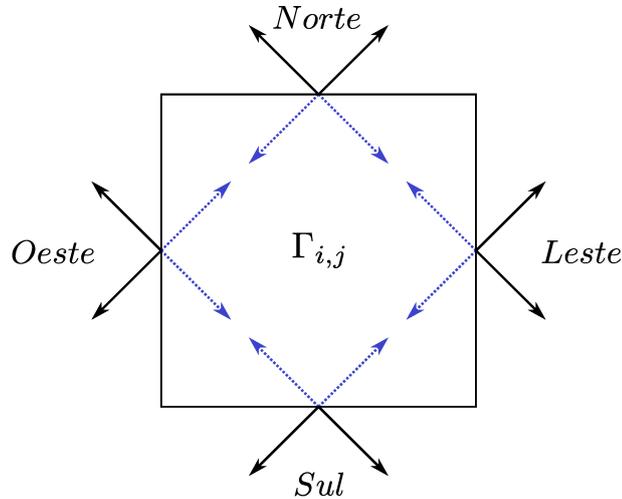
$$\mu_m \frac{\partial}{\partial x} \psi_{m,g}(x, y) + \eta_m \frac{\partial}{\partial y} \psi_{m,g}(x, y) + \sigma_{i,j}^{i,j} \psi_{m,g}(x, y) = \sum_{g'=1}^G \left( \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4} \sigma_{S,l,gg'}^{i,j} \sum_{n=1}^M P_l(\hat{\Omega}_m \cdot \hat{\Omega}_n) \psi_{n,g'}(x, y) \omega_n \right) + \frac{1}{4} s_g^{i,j}. \quad (15)$$

Dessa forma, a partir da Eq.(15) é possível obter uma solução analítica local para cada nodo  $\Gamma_{i,j}$ . Impondo continuidade de fluxo angular na interface do nodo com o seu nodo vizinho, podemos estender esta solução a outras regiões que compõem o domínio espacial (Barros, 1990).

#### 1.4 Condições de contorno

No sistema de equações diferenciais parciais dado pela Eq. (15) são impostas condições de contorno para os fluxos angulares de nêutrons incidentes no domínio espacial de 3 tipos diferentes (Lewis; Miller, 1993). A fim de se impor essas condições de contorno, devem ser considerados os nodos que fazem os contornos do domínio espacial, como mostrado na Figura 5, além disso, é mostrada a representação das posições das faces de um nodo arbitrário  $\Gamma_{i,j}$ , Figura 6, onde as setas sólidas pretas representam os fluxos angulares médios de nêutrons emergentes, e as setas pontilhadas azuis, os fluxos angulares médios de nêutrons incidentes.

Figura 6 - Representação de um nodo arbitrário  $\Gamma_{i,j}$



Fonte: O autor, 2025.

- Condição de contorno do tipo prescrita: Os fluxos angulares de nêutrons incidentes nos contornos possuem um valor conhecido, na forma

$$\text{Norte: } \psi_{m,g}(x, 0) = cc_{n,m,g}(x), \quad m = M/2 + 1 : M.$$

$$\text{Sul: } \psi_{m,g}(x, H_y) = cc_{s,m,g}(x), \quad m = 1 : M/2.$$

$$\text{Oeste: } \psi_{m,g}(0, y) = cc_{o,m,g}(y), \quad m = 1 : M/4 \text{ e } m = 3M/4 + 1 : M.$$

Leste:  $\psi_{m,g}(H_x, y) = cc_{l,m,g}(y)$ ,  $m = M/4 + 1 : 3M/4$ .

onde  $cc_{n,m,g}(x)$ ,  $cc_{s,m,g}(x)$ ,  $cc_{o,m,g}(y)$  e  $cc_{l,m,g}(y)$  representam os valores prescritos do fluxo angular de nêutrons respectivamente nos contornos norte, sul, oeste e leste.

- Condição de contorno do tipo vácuo: Nesta, que pode ser entendida como um caso particular da prescrita, os valores de fluxos angulares médios de nêutrons incidentes nos contornos são nulos, ou seja,

Norte:  $\psi_{m,g}(x, 0) = 0$ ,  $m = M/2 + 1 : M$ .

Sul:  $\psi_{m,g}(x, H_y) = 0$ ,  $m = 1 : M/2$ .

Oeste:  $\psi_{m,g}(0, y) = 0$ ,  $m = 1 : M/4$  e  $m = 3M/4 + 1 : M$ .

Leste:  $\psi_{m,g}(H_x, y) = 0$ ,  $m = M/4 + 1 : 3M/4$ .

- Condição de contorno reflexiva: Os fluxos angulares de nêutrons incidentes nas faces do contorno dependem do valor dos fluxos angulares de nêutrons emergentes de seus ângulos complementares,

Norte:  $\psi_{m,g}(x, 0) = \psi_{k,g}(x, 0)$ ,  $k = m - M/4$ , para  $m = M/2 + 1 : 3M/4$ ,  
e  $k = m - 3M/4$ , para  $m = 3M/4 + 1 : M$ .

Sul:  $\psi_{m,g}(x, H_y) = \psi_{k,g}(x, H_y)$ ,  $k = m + 3M/4$ , para  $m = 1 : M/4$ ,  
e  $k = m + M/4$ , para  $m = M/4 + 1 : M/2$ .

Oeste:  $\psi_{m,g}(0, y) = \psi_{k,g}(0, y)$ ,  $k = m + 3M/4$ , para  $m = 1 : M/4$ ,  
e  $k = m + M/4$ , para  $m = M/4 + 1 : M/2$ .

Leste:  $\psi_{m,g}(H_x, y) = \psi_{k,g}(H_x, y)$ ,  $k = m - M/4$ , para  $m = M/2 + 1 : M/2$ ,  
e  $k = m + M/4$ , para  $m = M/2 + 1 : 3M/4$ .

## 1.5 Solução analítica intranodal da equação de transporte de nêutrons $S_N$

Nesta proposta, o termo de espalhamento diferencial é truncado com ordem  $L = 1$ , sendo assim, considerando o termo de fonte de espalhamento linearmente anisotrópico, a Eq. (15) assume a forma

$$\begin{aligned} & \mu_m \frac{\partial}{\partial x} \psi_{m,g}(x, y) + \eta_m \frac{\partial}{\partial y} \psi_{m,g}(x, y) + \sigma_{t,g}^{i,j} \psi_{m,g}(x, y) = \\ & \sum_{g'=1}^G \left( \frac{1}{4} \sigma_{S0,gg'}^{i,j} \sum_{n=1}^M \psi_{n,g'}(x, y) \omega_n + \frac{3}{4} \sigma_{S1,gg'}^{i,j} \sum_{n=1}^M \psi_{n,g'}(x, y) (\mu_m \mu_n + \eta_m \eta_n) \omega_n \right) + \frac{1}{4} s_g^{i,j}. \end{aligned} \quad (16)$$

O primeiro passo para a obtenção da solução analítica da Eq. (16), é a aplicação do operador média,

$$\frac{1}{h_{u_s}} \int_{u_{s-1/2}}^{u_{s+1/2}} (\cdot) du, \quad (17)$$

onde  $u = x$  ou  $y$ , e  $s = i$  ou  $j$ , respectivamente. Ao aplicar esse operador à Eq. (16), para  $u = y$ , é obtida a equação de transporte de nêutrons  $S_N$  integrada transversalmente a  $x$ ,

$$\begin{aligned} & \mu_m \frac{d}{dx} \bar{\psi}_{x,m,g}^{i,j}(x) + \frac{\eta_m}{h_{y_j}} (\psi_{m,g}(x, y_{j+1/2}) - \psi_{m,g}(x, y_{j-1/2})) + \sigma_{t,g}^{i,j} \bar{\psi}_{x,m,g}^{i,j}(x) = \\ & \sum_{g'=1}^G \left( \frac{1}{4} \sigma_{S0,gg'}^{i,j} \sum_{n=1}^M \bar{\psi}_{x,n,g'}^{i,j}(x) \omega_n + \frac{3}{4} \sigma_{S1,gg'}^{i,j} \sum_{n=1}^M \bar{\psi}_{x,n,g'}^{i,j}(x) (\mu_m \mu_n + \eta_m \eta_n) \omega_n \right) + \frac{1}{4} s_g^{i,j}, \end{aligned} \quad (18)$$

onde o fluxo angular médio de nêutrons transversal à direção  $x$  ( $\bar{\psi}_{x,m,g}^{i,j}(x)$ ) é escrito como

$$\bar{\psi}_{x,m,g}^{i,j}(x) \equiv \frac{1}{h_{y_j}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \psi_{m,g}(x, y) dy. \quad (19)$$

Analogamente, ao aplicar o operador da Eq. (17) na Eq. (16), para  $u = x$ , é obtida a equação de transporte de nêutrons  $S_N$  integrada transversalmente a  $y$ , dada por

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_m}{h_{y_j}} (\psi_{m,g}(x_{i+1/2}, y) - \psi_{m,g}(x_{i-1/2}, y)) + \eta_m \frac{d}{dy} \bar{\psi}_{y,m,g}^{i,j}(y) + \sigma_{t,g}^{i,j} \bar{\psi}_{y,m,g}^{i,j}(y) = \\ & \sum_{g'=1}^G \left( \frac{1}{4} \sigma_{S0,gg'}^{i,j} \sum_{n=1}^M \bar{\psi}_{y,n,g'}^{i,j}(y) \omega_n + \frac{3}{4} \sigma_{S1,gg'}^{i,j} \sum_{n=1}^M \bar{\psi}_{y,n,g'}^{i,j}(y) (\mu_m \mu_n + \eta_m \eta_n) \omega_n \right) + \frac{1}{4} s_g^{i,j} \end{aligned} \quad (20)$$

com fluxo angular médio de nêutrons transversal à direção  $y$  dado por

$$\bar{\psi}_{y,m,g}^{i,j}(y) \equiv \frac{1}{h_{x,i}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \psi_{m,g}(x,y) dx. \quad (21)$$

Escrevendo os termos de fuga transversal para a direção espacial  $x$  e para a direção espacial  $y$ , respectivamente, como

$$L_{x,m,g}^{i,j}(x) \equiv \frac{\eta_m}{h_{y_j}} (\psi_{m,g}(x, y_{j+1/2}) - \psi_{m,g}(x, y_{j-1/2})), \quad (22)$$

e

$$L_{y,m,g}^{i,j}(y) \equiv \frac{\mu_m}{h_{x_i}} (\psi_{m,g}(x_{i+1/2}, y) - \psi_{m,g}(x_{i-1/2}, y)), \quad (23)$$

as equações de transporte de nêutrons integradas transversalmente podem ser escritas como equações diferenciais ordinárias nas formas

$$\begin{aligned} \mu_m \frac{d}{dx} \bar{\psi}_{x,m,g}^{i,j}(x) + \sigma_{t,g}^{i,j} \bar{\psi}_{x,m,g}^{i,j}(x) = \\ \sum_{g'=1}^G \left( \frac{1}{4} \sigma_{S0,l,gg'}^{i,j} \sum_{n=1}^M \bar{\psi}_{x,n,g'}^{i,j}(x) \omega_n + \frac{3}{4} \sigma_{S1,l,gg'}^{i,j} \sum_{n=1}^M \bar{\psi}_{x,n,g'}^{i,j}(x) (\mu_m \mu_n + \eta_m \eta_n) \omega_n \right) + s_g^{i,j} - L_{x,m,g}^{i,j}(x), \end{aligned} \quad (24)$$

e

$$\begin{aligned} \eta_m \frac{d}{dy} \bar{\psi}_{y,m,g}^{i,j}(y) + \sigma_{t,g}^{i,j} \bar{\psi}_{y,m,g}^{i,j}(y) = \\ \sum_{g'=1}^G \left( \frac{1}{4} \sigma_{S0,l,gg'}^{i,j} \sum_{n=1}^M \bar{\psi}_{y,n,g'}^{i,j}(y) \omega_n + \frac{3}{4} \sigma_{S1,l,gg'}^{i,j} \sum_{n=1}^M \bar{\psi}_{y,n,g'}^{i,j}(y) (\mu_m \mu_n + \eta_m \eta_n) \omega_n \right) + s_g^{i,j} - L_{y,m,g}^{i,j}(y). \end{aligned} \quad (25)$$

Conhecidos os termos de fugas transversal, cada uma das Eqs. (24) e (25) representam um sistema de  $MG$  equações lineares acopladas em direções e grupos de energia, e  $MG$  incógnitas. As Eqs. (24) e (25) possuem solução analítica composta de uma componente homogênea  $(\bar{\psi}_{u,m,g}^{i,j,H}(u))$  e uma particular  $(\bar{\psi}_{u,m,g}^{i,j,P}(u))$ , sendo para  $x$  e  $y$  respectivamente

$$\bar{\psi}_{x,m,g}^{i,j}(x) = \bar{\psi}_{x,m,g}^{i,j,H}(x) + \bar{\psi}_{x,m,g}^{i,j,P}(x) \quad (26)$$

e

$$\bar{\psi}_{y,m,g}^{i,j}(y) = \bar{\psi}_{y,m,g}^{i,j,H}(y) + \bar{\psi}_{y,m,g}^{i,j,P}(y). \quad (27)$$

A fim de calcular a componente homogênea da solução, esta componente é substituída na parte homogênea da Eq. (24), resultando, para  $x$ , na equação

$$\begin{aligned} \mu_m \frac{d}{dx} \bar{\psi}_{x,m,g}^{i,j,H}(x) + \sigma_{T,g}^{i,j} \bar{\psi}_{x,m,g}^{i,j,H}(x) = \sum_{g'=1}^G \left( \sigma_{S0,gg'}^{i,j} \left\{ \frac{1}{4} \sum_{n=1}^M \omega_n \bar{\psi}_{x,n,g'}^{i,j,H}(x) \right\} + \right. \\ \left. + 3\sigma_{S1,gg'}^{i,j} \left\{ \frac{1}{4} \sum_{n=1}^M \omega_n (\mu_m \mu_n + \eta_m \eta_n) \bar{\psi}_{x,n,g'}^{i,j,H}(x) \right\} \right) \quad (28) \end{aligned}$$

Analogamente, para a direção espacial  $y$ , fazendo a substituição na Eq. (25), resulta em

$$\begin{aligned} \eta_m \frac{d}{dy} \bar{\psi}_{y,m,g}^{i,j,H}(y) + \sigma_{T,g}^{i,j} \bar{\psi}_{y,m,g}^{i,j,H}(y) = \sum_{g'=1}^G \left( \sigma_{S0,gg'}^{i,j} \left\{ \frac{1}{4} \sum_{n=1}^M \omega_n \bar{\psi}_{y,n,g'}^{i,j,H}(y) \right\} + \right. \\ \left. + 3\sigma_{S1,gg'}^{i,j} \left\{ \frac{1}{4} \sum_{n=1}^M \omega_n (\mu_m \mu_n + \eta_m \eta_n) \bar{\psi}_{y,n,g'}^{i,j,H}(y) \right\} \right). \quad (29) \end{aligned}$$

Agora, considere as seguintes expressões onde são definidos os autovalores  $\lambda_u$  e suas respectivas componentes de autovetores  $A_{u,m,g}^{i,j}(\lambda_u)$ , onde para o eixo  $x$  tem-se (Menezes et al., 2012)

$$\bar{\psi}_{x,m,g}^{i,j,H}(x) = A_{x,m,g}^{i,j}(\lambda_x) e^{-\lambda_x(x-x_{i-1/2})} \quad (30)$$

e para o eixo  $y$ ,

$$\bar{\psi}_{y,m,g}^{i,j,H}(y) = A_{y,m,g}^{i,j}(\lambda_y) e^{-\lambda_y(y-y_{j-1/2})}. \quad (31)$$

Substituindo as Eqs. (30) e (31) respectivamente nas Eqs. (28) e (29), são construídos 2 problemas de autovalor, sendo para o eixo  $x$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_m} \sum_{g'=1}^G \sum_{n=1}^M \left( \sigma_{T,g}^{i,j} \delta_{mn} \delta_{g'g} - \frac{1}{4} \sigma_{S0,gg'}^{i,j} \omega_n - \frac{3}{4} \sigma_{S1,gg'}^{i,j} (\mu_m \mu_n + \eta_m \eta_n) \omega_n \right) A_{x,n,g'}^{i,j}(\lambda_x) \\ = \lambda_x A_{x,m,g}^{i,j}(\lambda_x). \end{aligned} \quad (32)$$

e, para o eixo  $y$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta_m} \sum_{g'=1}^G \sum_{n=1}^M \left( \sigma_{T,g}^{i,j} \delta_{mn} \delta_{g'g} - \frac{1}{4} \sigma_{S0,gg'}^{i,j} \omega_n - \frac{3}{4} \sigma_{S1,gg'}^{i,j} (\mu_m \mu_n + \eta_m \eta_n) \omega_n \right) A_{y,n,g'}^{i,j}(\lambda_y) \\ = \lambda_y A_{y,m,g}^{i,j}(\lambda_y). \end{aligned} \quad (33)$$

Onde  $\delta_{mn}$  e  $\delta_{g'g}$  representam os deltas de Kröneckner. A solução desses problemas de autovalor são dois conjuntos de  $MG$  autovalores e seus respectivos autovetores, sendo um conjunto para cada eixo coordenado. Eles são calculados em ordens diferentes, visto que  $\mu_m$  e  $\eta_m$  também possuem os mesmos valores, porém em ordens diferentes. Ao resolver esse problema, um sistema de equações para cada eixo coordenado é construído para a componente homogênea da solução analítica local, sendo para o eixo coordenado  $x$

$$\bar{\psi}_{x,m,g}^{i,j,H}(x) = \sum_{l=1}^{MG} \alpha_l^{i,j} A_{x,m,g}^{i,j}(\lambda_{x,l}) e^{-\lambda_{x,l}(x-x_{i-1/2})}, \quad (34)$$

e, para o eixo coordenado  $y$ ,

$$\bar{\psi}_{y,m,g}^{i,j,H}(y) = \sum_{l=1}^{MG} \beta_l^{i,j} A_{y,m,g}^{i,j}(\lambda_{y,l}) e^{-\lambda_{y,l}(y-y_{j-1/2})}, \quad (35)$$

onde os coeficientes da expansão das autofunções  $\alpha$  e  $\beta$ , que dependem das condições de contorno do problema e dos fluxos angulares médios de nêutrons incidentes nas faces dos nodos  $\Gamma_{i,j}$  (Oliva, 2018). Sendo assim, a solução geral intranodal da equação multigrupo de transporte de nêutrons  $S_N$  pode ser escrita de forma genérica para o eixo  $x$  como

$$\bar{\psi}_{x,m,g}^{i,j}(x) = \sum_{l=1}^L \alpha_l^{i,j} A_{x,m,g}^{i,j}(\lambda_{x,l}) e^{-\lambda_{x,l}(x-x_{i-1/2})} + \bar{\psi}_{x,m,g}^{i,j,P}(x), \quad (36)$$

e, para o eixo  $y$ ,

$$\bar{\psi}_{y,m,g}^{i,j}(y) = \sum_{l=1}^L \beta_l^{i,j} A_{y,m,g}^{i,j}(\lambda_{y,l}) e^{-\lambda_{y,l}(y-y_{j-1/2})} + \bar{\psi}_{y,m,g}^{i,j,P}(y). \quad (37)$$

A construção do sistema de equações para calcular as componentes particulares da solução da equação  $S_N$  dependem do tipo de tratamento dado ao termo de fuga transversal (Barros, 1990; Barros; Larsen, 1992; Oliva, 2018; Silva, 2018b; Libotte, 2021). Portanto, será apresentada uma abordagem para aproximação do termo de fuga transversal de nêutrons usando uma expansão polinomial quadrática, e então o cálculo das componentes particulares da solução da equação de transporte de nêutrons integradas transversalmente utilizando a formulação proposta.

## 2 APROXIMAÇÃO QUADRÁTICA DA FUGA TRANSVERSAL DE NÊUTRONS

A solução analítica local de problemas de blindagem de nêutrons em geometria unidimensional é livre de erro de truncamento espacial, visto que neste caso não é realizada nenhuma aproximação dentro dos nodos. Dessa forma, não é necessário que seja feita a divisão das regiões materiais em nodos, como se faz em métodos de malha fina, como no *Diamond Difference*, possibilitando a solução de problemas com apenas um nodo por região de forma eficiente e com boa precisão (Barros, 1990; Oliva, 2018; Libotte, 2021).

Em problemas bidimensionais, a presença do termo de fuga transversal de nêutrons, presente nas Eqs. (24) e (25), torna o sistema possível e indeterminado. Portanto, devem ser feitas aproximações nesse termo a fim de tornar a solução deste problema possível e determinada.

Dentre as abordagens usadas para a aproximação desse termo, a mais simples e também mais utilizada é a aproximação constante (Barros, 1990; Oliva, 2018; Silva, 2018a). Nela, os fluxos angulares de nêutrons que compõem o termo de fuga transversal são aproximados por fluxos angulares médios de nêutrons nas interfaces nodais em  $x$  e  $y$ ,

$$\bar{L}_{x,m,g}^{i,j} \equiv \frac{\eta_m}{h_{y_j}} \left( \bar{\psi}_{y,m,g}^{i,j+1/2} - \bar{\psi}_{y,m,g}^{i,j-1/2} \right), \quad m = 1 : M, \quad g = 1 : G, \quad (38)$$

e

$$\bar{L}_{y,m,g}^{i,j} \equiv \frac{\mu_m}{h_{x_i}} \left( \bar{\psi}_{x,m,g}^{i+1/2,j} - \bar{\psi}_{x,m,g}^{i-1/2,j} \right), \quad m = 1 : M, \quad g = 1 : G. \quad (39)$$

Usando essa aproximação, a depender do gradiente de fluxo, pode ser necessária a divisão de regiões materiais em uma grande quantidade de nodos, a fim de obter resultados acurados (Libotte; Alves Filho; Barros, 2020a; Libotte, 2021). Esse passo pode dificultar a obtenção da solução do problema, visto que quanto maior a quantidade de nodos, maior se torna o esforço computacional para a obtenção da solução do problema.

Com base nesse fato, é proposta uma forma de aproximação quadrática da fuga transversal de nêutrons, com o objetivo de resolver problemas de fonte-fixa com boa acurácia usando malhas grossas, conforme usados no método *Nodal Expansion Method* (Mendes et al., 2024; Alvim; Silva; Martinez, 2012; Paixão; Silva, 2022). Nessa abordagem, é realizada uma expansão polinomial no termo de fuga de nêutrons transversal dependente da variável espacial  $x$

$$L_{x,m,g}^{i,j}(x) = c_{0,x,m,g}^{i,j} + c_{1,x,m,g}^{i,j}f_1(x) + c_{2,x,m,g}^{i,j}f_2(x), \quad (40)$$

e transversal ao eixo  $y$

$$L_{y,m,g}^{i,j}(y) = c_{0,y,m,g}^{i,j} + c_{1,y,m,g}^{i,j}f_1(y) + c_{2,y,m,g}^{i,j}f_2(y). \quad (41)$$

Onde  $f_1(u)$  e  $f_2(u)$  são respectivamente os polinômios de Legendre de primeira e segunda ordem, os quais possuem a forma

$$f_1(u) = \frac{2}{h_{u,s}}(u - u_{s-1/2}) - 1 \quad (42)$$

e

$$f_2(u) = \frac{6}{h_{u,s}}(u - u_{s-1/2}) \left[ 1 - \frac{1}{h_{u,s}}(u - u_{s-1/2}) \right] - 1, \quad (43)$$

para  $u = x$  ou  $y$  e  $s = i$  ou  $j$ , respectivamente. Neste ponto, vale destacar que as funções  $f_1(u)$  e  $f_2(u)$  são definidas dentro dos subdomínios de cada nodo  $\Gamma_{i,j}$ , portanto, definidas entre  $[u_{s-1/2}, u_{s+1/2}]$ . Dessa forma, essas funções são calculadas nas interfaces nodais como

$$f_1(u_{s-1/2}) = -1, \quad f_1(u_{s+1/2}) = 1 \quad (44)$$

e

$$f_2(u_{s-1/2}) = -1, \quad f_2(u_{s+1/2}) = -1. \quad (45)$$

Considerando essas definições, os coeficientes das expansões das Eqs. (40) e (41) podem ser obtidos.

## 2.1 Coeficientes de expansão da fuga quadrática de nêutrons no eixo $x$

Agora, a fim de calcular os coeficientes da expansão, presente na Eq. (40), as fugas transversais médias no nodo  $\Gamma_{i,j}$  devem ser definidas. Sendo assim, as fugas transversais médias transversais a  $x$  possuem a forma

$$\bar{L}_{x,m,g}^{i,j} \equiv \frac{1}{h_{x,i}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} L_{x,m,g}^{i,j}(x) dx \quad (46)$$

Substituindo a Eq. (40) na Eq. (46), obtém-se

$$\bar{L}_{x,m,g}^{i,j} = \frac{1}{h_{x,i}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (c_{0,x,m,g}^{i,j} + c_{1,x,m,g}^{i,j} f_1(x) + c_{2,x,m,g}^{i,j} f_2(x)) dx. \quad (47)$$

Sabendo que as funções  $f_1(u)$  e  $f_2(u)$  são ortogonais, pode-se escrever

$$\int_{u_{s-1/2}}^{u_{s+1/2}} f_k(u) du = 0, \quad k = 1, 2. \quad (48)$$

Portanto, como resultado da Eq. (47), obtém-se

$$c_{0,x,m,g}^{i,j} = \bar{L}_{x,m,g}^{i,j} \quad (49)$$

Neste ponto, ao substituir a Eq. (22) na Eq. (49) é obtido

$$c_{0,x,m,g} = \bar{L}_{x,m,g}^{i,j} = \frac{\eta_m}{h_{y,j}} \left[ \frac{1}{h_{x,i}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \psi_{m,g}(x, y_{j+1/2}) dx - \frac{1}{h_{x,i}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \psi_{m,g}(x, y_{j-1/2}) dx \right] = \frac{\eta_m}{h_{y,j}} (\bar{\psi}_{y,m,g}^{i,j+1/2} - \bar{\psi}_{y,m,g}^{i,j-1/2}). \quad (50)$$

Agora, os coeficientes  $c_{0,x,m,g}$  podem ser substituídos na expansão da Eq. (40). E, fazendo uso das funções  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  nos contornos esquerdo ( $x_{i-1/2}$ ) e direito ( $x_{i+1/2}$ ) dos nodos, de acordo com os resultados obtidos nas Eqs. (44) e (45), resulta no seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} L_{x,m,g}^{i,j}(x_{i-1/2}) = \bar{L}_{x,m,g}^{i,j} - c_{1,x,m,g}^{i,j} - c_{2,x,m,g}^{i,j} \\ L_{x,m,g}^{i,j}(x_{i+1/2}) = \bar{L}_{x,m,g}^{i,j} + c_{1,x,m,g}^{i,j} - c_{2,x,m,g}^{i,j} \end{cases} \quad (51)$$

Após algumas operações algébricas envolvendo as equações do sistema de Eqs. (51), é

possível isolar os coeficientes  $c_{1,x,m,g}^{i,j}$  e  $c_{2,x,m,g}^{i,j}$  respectivamente como

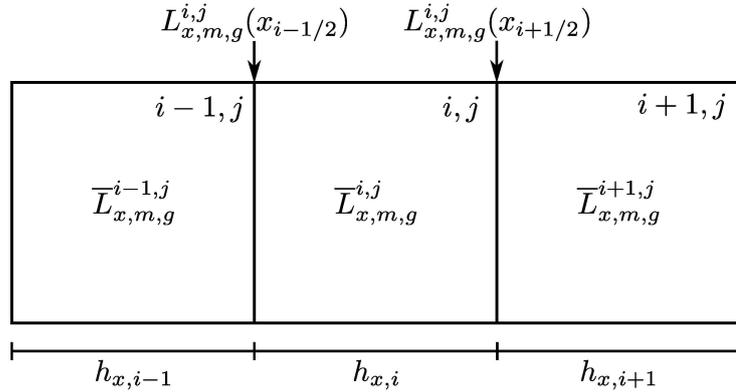
$$c_{1,x,m,g}^{i,j} = \frac{1}{2} [L_{x,m,g}^{i,j}(x_{i+1/2}) - L_{x,m,g}^{i,j}(x_{i-1/2})] \quad (52)$$

e

$$c_{2,x,m,g}^{i,j} = \bar{L}_{x,m,g}^{i,j} - \frac{1}{2} [L_{x,m,g}^{i,j}(x_{i+1/2}) + L_{x,m,g}^{i,j}(x_{i-1/2})]. \quad (53)$$

Neste ponto, uma outra aproximação deve ser realizada a fim de se calcular os valores para as fugas transversais de nêutrons em cada interface nodal ( $L_{x,m,g}^{i,j}(x_{i+1/2})$  e  $L_{x,m,g}^{i,j}(x_{i-1/2})$ ). Para isso, considere como exemplo a grade espacial representando 3 nodos na Figura 7, onde são mostradas por setas as localizações dos termos de fuga transversais a  $x$  de nêutrons dentro de um nodo arbitrário interno da malha  $\Gamma_{i,j}$ .

Figura 7 - Representação das fugas transversais ao eixo coordenado  $x$  em uma grade arbitrária.



Fonte: O autor, 2025.

Observando a Figura 7, pode-se constatar que as fugas transversais de nêutrons à direita do nodo  $\Gamma_{i-1,j}$ , ou seja  $L_{x,m,g}^{i-1,j}(x_{i-1+1/2})$ , coincidem com as fugas transversais de nêutrons à esquerda do nodo central,  $L_{x,m,g}^{i,j}(x_{i-1/2})$ , visto que esta é uma condição física derivada da continuidade do fluxo de nêutrons nas interfaces nodais. Portanto, pode-se escrever a igualdade

$$L_{x,m,g}^{i,j}(x_{i-1/2}) = L_{x,m,g}^{i-1,j}(x_{i-1+1/2}). \quad (54)$$

Aqui é realizada uma aproximação, onde se estabelece que esses termos de fuga transversal de nêutrons possuem a mesma derivada na interface. Dessa forma, impõe-se que

$$\left. \frac{d}{dx} L_{x,m,g}^{i,j}(x) \right|_{x=x_{i-1/2}} = \left. \frac{d}{dx} L_{x,m,g}^{i-1,j}(x) \right|_{x=x_{i-1+1/2}}. \quad (55)$$

Agora, considerando a aproximação por diferenças finitas recuadas (Nakamura, 1977), usando o centro geométrico do nodo  $\Gamma_{i,j}$  como a posição para a fuga transversal média de nêutrons, as derivadas da Eq. (55) são escritas na forma:

$$\frac{\overline{L}_{x,m,g}^{i,j} - L_{x,m,g}^{i,j}(x_{i-1/2})}{\frac{h_{x,i}}{2}} = \frac{L_{x,m,g}^{i-1,j}(x_{i-1+1/2}) - \overline{L}_{x,m,g}^{i-1,j}}{\frac{h_{x,i-1}}{2}}. \quad (56)$$

Usando a Eq. (54), após alguns passos algébricos, é possível isolar o termo de fuga transversal na face esquerda do nodo central, resultando em uma equação que depende apenas das dimensões dos nodos estudados no problema, e das fugas transversais médias de nêutrons calculadas anteriormente com a Eq. (50)

$$L_{x,m,g}^{i,j}(x_{j-1/2}) = \frac{h_{x,i-1} \overline{L}_{x,m,g}^{i,j} + h_{x,i} \overline{L}_{x,m,g}^{i-1,j}}{h_{x,i-1} + h_{x,i}}. \quad (57)$$

Agora, analogamente ao que foi feito para a face esquerda do nodo  $\Gamma_{i,j}$ , ao observar a Figura 7, nota-se que as fugas transversais de nêutrons à direita do nodo central,  $L_{x,m,g}^{i,j}(x_{i+1/2})$ , e à esquerda do nodo da direita,  $L_{x,m,g}^{i+1,j}(x_{i+1-1/2})$ , são coincidentes. Portanto, pode-se escrever

$$L_{x,m,g}^{i,j}(x_{i+1/2}) = L_{x,m,g}^{i+1,j}(x_{i+1-1/2}). \quad (58)$$

Novamente, é realizada uma aproximação impondo que as derivadas da fuga transversal na interface também são iguais, ou seja,

$$\left. \frac{d}{dx} L_{x,m,g}^{i,j}(x) \right|_{x=x_{i+1/2}} = \left. \frac{d}{dx} L_{x,m,g}^{i+1,j}(x) \right|_{x=x_{i+1-1/2}}. \quad (59)$$

Agora usando a aproximação por diferenças avançadas, essas derivadas podem ser escritas na seguinte forma

$$\frac{L_{x,m,g}^{i,j}(x_{i+1/2}) - \bar{L}_{x,m,g}^{i,j}}{\frac{h_{x,i}}{2}} = \frac{\bar{L}_{x,m,g}^{i+1,j} - L_{x,m,g}^{i+1,j}(x_{i+1-1/2})}{\frac{h_{x,i+1}}{2}}. \quad (60)$$

Agora, usando a Eq. (58) o termo de fuga transversal à direita do nodo  $\Gamma_{i,j}$  pode ser isolado, e calculado pela equação

$$L_{x,m,g}^{i,j}(x_{i+1/2}) = \frac{h_{x,i}\bar{L}_{x,m,g}^{i+1,j} + h_{x,i+1}\bar{L}_{x,m,g}^{i,j}}{h_{x,i} + h_{x,i+1}}. \quad (61)$$

## 2.2 Coeficientes de expansão da fuga quadrática de nêutrons no eixo $y$

Agora, devem ser realizados os mesmos passos apresentados na subseção anterior analogamente para eixo  $y$ . Primeiramente, devem ser calculadas as fugas transversais de nêutrons no nodo  $\Gamma_{i,j}$  para a direção  $y$

$$\bar{L}_{y,m,g}^{i,j} \equiv \frac{1}{h_{y,j}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} L_{y,m,g}^{i,j}(y) dy \quad (62)$$

Substituindo a Eq. (41) na Eq. (62), é construído o problema na forma

$$\bar{L}_{y,m,g}^{i,j} \equiv \frac{1}{h_{y,j}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} (c_{0,x,m,g}^{i,j} + c_{1,x,m,g}^{i,j} f_1(y) + c_{2,x,m,g}^{i,j} f_2(y)) dy \quad (63)$$

Que, devido à ortogonalidade das funções  $f_1$  e  $f_2$ , resulta em

$$\bar{L}_{y,m,g}^{i,j} \equiv \frac{1}{h_{y,j}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} (c_{0,y,m,g}^{i,j} + c_{1,y,m,g}^{i,j} f_1(y) + c_{2,y,m,g}^{i,j} f_2(y)) dy = c_{0,y,m,g}^{i,j} \quad (64)$$

Neste ponto, ao substituir a Eq. (23) na Eq. (64), é construído um sistema no formato

$$c_{0,y,m,g} = \bar{L}_{y,m,g}^{i,j} = \frac{\mu_m}{h_{x,i}} \left[ \frac{1}{h_{y,j}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \psi_{m,g}(x_{j+1/2}, y) dy - \frac{1}{h_{y,j}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \psi_{m,g}(x_{j-1/2}, y) dx \right] = \frac{\mu_m}{h_{x,i}} \left( \bar{\psi}_{x,m,g}^{i+1/2,j} - \bar{\psi}_{x,m,g}^{i-1/2,j} \right), \quad (65)$$

portanto, a fim de se derivar as equações para a aproximação quadrática do termo de fuga transversal, primeiramente calcula-se o termo de fuga transversal com aproximação constante.

De posse dos coeficientes  $c_{0,y,m,g}$ , eles podem ser substituídos na expansão da Eq. (41). Avaliando as funções  $f_1(y)$  e  $f_2(y)$  nos contornos sul ( $y_{j-1/2}$ ) e norte ( $y_{j+1/2}$ ) dos nodos, de acordo com os resultados obtidos nas Eqs. (44) e (45), tem-se como resultado o sistema de equações:

$$\begin{cases} L_{y,m,g}^{i,j}(y_{j-1/2}) = \bar{L}_{y,m,g}^{i,j} - c_{1,y,m,g}^{i,j} - c_{2,y,m,g}^{i,j} \\ L_{y,m,g}^{i,j}(y_{j+1/2}) = \bar{L}_{y,m,g}^{i,j} + c_{1,y,m,g}^{i,j} - c_{2,y,m,g}^{i,j}. \end{cases} \quad (66)$$

Após alguns passos algébricos, é possível isolar os coeficientes que acompanham os termos de primeira e segunda ordem do sistema de Eqs. (66),

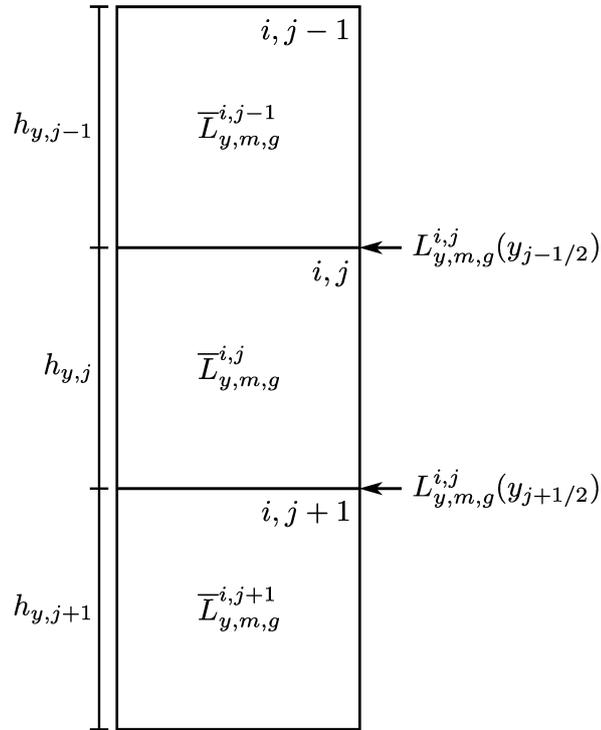
$$c_{1,y,m,g}^{i,j} = \frac{1}{2} [L_{y,m,g}^{i,j}(y_{j+1/2}) - L_{y,m,g}^{i,j}(y_{j-1/2})] \quad (67)$$

e

$$c_{2,y,m,g}^{i,j} = \bar{L}_{y,m,g}^{i,j} - \frac{1}{2} [L_{y,m,g}^{i,j}(y_{j+1/2}) + L_{y,m,g}^{i,j}(y_{j-1/2})]. \quad (68)$$

Neste ponto, são feitas algumas considerações acerca das interfaces nodais a fim de calcular os termos  $L_{y,m,g}^{i,j}(y_{j+1/2})$  e  $L_{x,m,g}^{i,j}(y_{j-1/2})$ . Para isso, é considerada uma representação de 3 nodos da grade espacial, visto na Figura 8, na qual as setas indicam as posições dos termos de fuga transversal de nêutrons no eixo  $y$  em relação a um nodo arbitrário  $\Gamma_{i,j}$ .

Figura 8 - Representação das fugas transversais ao eixo coordenado  $y$  em uma grade arbitrária.



Fonte: O autor, 2025.

Analisando a Figura 8, pode-se constatar que as fugas transversais de nêutrons ao sul do nodo  $\Gamma_{i,j-1}$ , ou seja  $L_{y,m,g}^{i,j-1}(y_{j+1/2})$ , coincidem com as fugas transversais de nêutrons ao norte do nodo central,  $L_{y,m,g}^{i,j}(y_{j-1/2})$ . Portanto, pode-se escrever a equação

$$L_{y,m,g}^{i,j}(y_{j-1/2}) = L_{y,m,g}^{i,j-1}(y_{j-1+1/2}). \quad (69)$$

Agora, é estabelecido que os termos da Eq. (69) possuem a mesma derivada,

$$\left. \frac{d}{dy} L_{y,m,g}^{i,j} \right|_{y=y_{j-1/2}} = \left. \frac{d}{dy} L_{y,m,g}^{i,j-1} \right|_{y=y_{j-1+1/2}}. \quad (70)$$

Neste ponto, é usado o método das diferenças finitas recuado para calcular uma aproximação das derivadas da Eq. (70), usando o centro geométrico do nodo  $\Gamma_{i,j}$  como a posição da fuga transversal média de nêutrons. Usando essa aproximação, as derivadas da Eq. (70) podem ser escritas como:

$$\frac{\bar{L}_{y,m,g}^{i,j} - L_{y,m,g}^{i,j}(y_{j-1/2})}{\frac{h_{y,j}}{2}} = \frac{L_{y,m,g}^{i,j-1}(y_{j-1+1/2}) - \bar{L}_{y,m,g}^{i,j-1}}{\frac{h_{y,j-1}}{2}}. \quad (71)$$

Substituindo a Eq. (69) na Eq. (71), após alguns passos algébricos, é possível isolar o termo de fuga transversal na face norte do nodo central, no formato

$$L_{y,m,g}^{i,j}(y_{j-1/2}) = \frac{h_{y,j-1}\bar{L}_{y,m,g}^{i,j} + h_{y,j}\bar{L}_{y,m,g}^{i,j-1}}{h_{y,j-1} + h_{y,j}}. \quad (72)$$

Como feito para a face norte do nodo  $\Gamma_{i,j}$ , ao observar a Figura 8, nota-se que as fugas transversais de nêutrons na face sul do nodo central,  $L_{y,m,g}^{i,j}(y_{j+1/2})$ , e na face norte do nodo de baixo,  $L_{y,m,g}^{i,j+1}(x_{j+1-1/2})$ , são coincidentes. Portanto, pode-se escrever a equação

$$L_{y,m,g}^{i,j}(y_{j+1/2}) = L_{y,m,g}^{i,j+1}(y_{j+1-1/2}). \quad (73)$$

Neste ponto, é realizada uma aproximação, onde considera-se que as derivadas da Eq. (73) também são iguais,

$$\left. \frac{d}{dy} L_{y,m,g}^{i,j} \right|_{y=y_{j+1/2}} = \left. \frac{d}{dy} L_{x,m,g}^{i,j+1} \right|_{y=y_{j+1-1/2}}. \quad (74)$$

Usando o método das diferenças finitas, essas derivadas podem ser aproximadas na forma

$$\frac{L_{y,m,g}^{i,j}(y_{j+1/2}) - \bar{L}_{x,m,g}^{i,j}}{\frac{h_{y,j}}{2}} = \frac{\bar{L}_{y,m,g}^{i,j+1} - L_{y,m,g}^{i,j+1}(y_{j+1-1/2})}{\frac{h_{y,j+1}}{2}}. \quad (75)$$

Usando a Eq. (73) o termo de fuga transversal na face norte do nodo  $\Gamma_{i,j}$  pode ser isolado, e calculado pela equação

$$L_{y,m,g}^{i,j}(y_{j+1/2}) = \frac{h_{y,j}\bar{L}_{y,m,g}^{i,j+1} + h_{y,j+1}\bar{L}_{y,m,g}^{i,j}}{h_{y,j} + h_{y,j+1}}. \quad (76)$$

Após a dedução das Eqs.(72) e (76), as equações do sistema de Eqs.(66) podem ser montados para os nodos internos da malha. Assim como na solução para o eixo  $x$ ,

aqui os nodos que faceiam os contornos do domínio espacial também devem ser tratados separadamente.

### 2.3 Tratamento das Condições de Contorno

No cálculo dos coeficientes da expansão dos termos de fuga transversal de nêutrons, Eqs. (57) e (61) para o eixo  $x$ , e Eqs. (72) e (76) para o eixo  $y$ , nota-se a necessidade da presença de 2 nodos adjacentes a um nodo central  $\Gamma_{i,j}$  em cada direção. Uma vez que os nodos que faceiam as condições de contorno não possuem vizinhos em todas as suas faces, o uso da abordagem mostrada anteriormente é impossibilitada. Dessa forma, se faz necessário que as fugas transversais de nêutrons nos limites do domínio espacial sejam tratadas de forma diferente. Diversas abordagens podem ser aplicadas aos cálculos das fugas transversais de nêutrons nos contornos do domínio espacial. Aqui será considerada uma aproximação para os fluxos angulares nos cantos dos nodos, possibilitando a aplicação da abordagem descrita anteriormente.

#### 2.3.1 Fuga transversal como média dos fluxos angulares médios de nêutrons no eixo $x$

Neste tratamento, as fugas transversais das interfaces nodais que faceiam os contornos do domínio espacial são aproximadas segundo a equação

$$L_{x,m,g}^{i,j}(x_{i\pm 1/2}) = \frac{\eta_m}{h_{y,j}} \{ \psi_{m,g}(x_{i\pm 1/2}, y_{j+1/2}) - \psi_{m,g}(x_{i\pm 1/2}, y_{j-1/2}) \}, \quad (77)$$

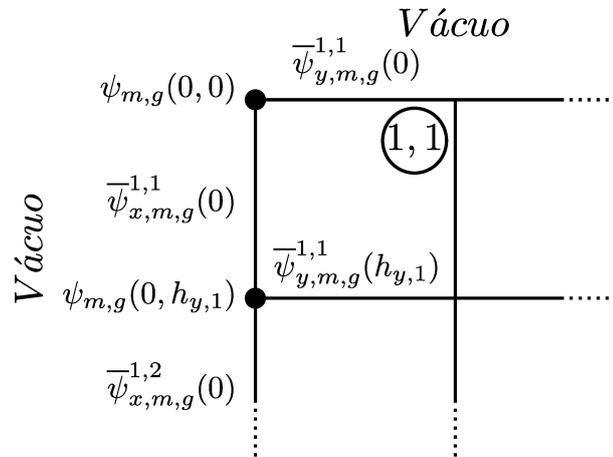
de forma que os fluxos angulares de nêutrons nos cantos dos nodos são aproximados usando a média aritmética dos fluxos angulares médios nas faces concorrentes naquele canto. Portanto, a fim calcular a fuga transversal de nêutrons no canto noroeste do domínio espacial, é considerada a representação desta região do domínio espacial mostrado na Figura 9.

Para obter a fuga transversal de nêutrons  $L_{x,m,g}^{1,1}(0)$ , as seguintes aproximações são consideradas:

$$\psi_{m,g}(0,0) \approx \frac{\bar{\psi}_{x,m,g}^{-1,1}(0) + \bar{\psi}_{y,m,g}^{-1,1}(0)}{2} \quad (78)$$

e

Figura 9 - Condição de contorno - Noroeste  
para o eixo  $x$ .



Fonte: O autor, 2025.

$$\psi_{m,g}(0, h_{y,1}) \approx \frac{\bar{\psi}_{x,m,g}^{1,1}(0) + \bar{\psi}_{x,m,g}^{1,2}(0) + \bar{\psi}_{y,m,g}^{1,1}(h_{y,1})}{3}. \quad (79)$$

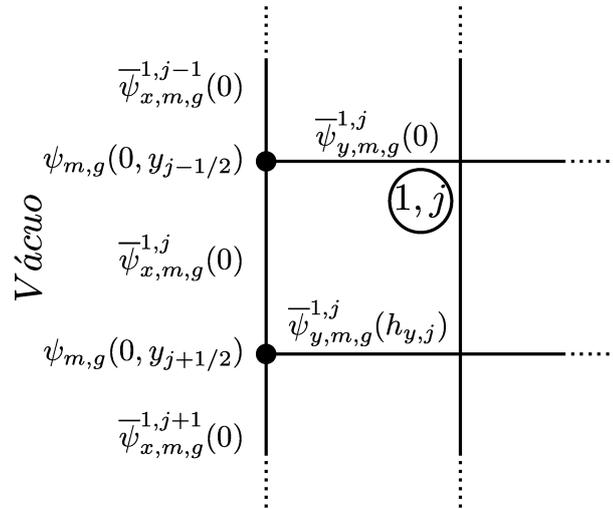
Substituindo as Eqs.(78) e (79) na Eq.(77), é obtida uma aproximação para a fuga transversal de nêutrons na face oeste na forma

$$L_{x,m,g}^{1,1}(0) = \frac{\eta_m}{h_{y,j}} \left( \frac{\bar{\psi}_{x,m,g}^{1,1}(0) + 3\bar{\psi}_{y,m,g}^{1,1}(0) - 2\bar{\psi}_{x,m,g}^{1,2}(0) - 2\bar{\psi}_{y,m,g}^{1,1}(h_{y,1})}{6} \right). \quad (80)$$

Visto que essa aproximação depende apenas de fluxos angulares médios de nêutrons nas faces, é possível calcular os termos de fuga transversal à medida que os fluxos angulares de nêutrons são calculados no processo iterativo.

Agora, considera-se um nó arbitrário na face oeste do domínio espacial  $\Gamma_{0,j}$ , que não nos cantos noroeste ou sudoeste do domínio espacial, como mostrado na Figura 10.

Figura 10 - Condição de contorno - Oeste.



Fonte: O autor, 2025.

Os fluxos angulares de nêutrons nos cantos noroeste e sudeste desse nodo podem ser aproximados usando os mesmos passos mostrados anteriormente. Nesse caso, os fluxos angulares de nêutrons nos cantos são aproximados respectivamente como:

$$\psi_{m,g}(0, y_{j-1/2}) \approx \frac{\bar{\psi}_{x,m,g}^{-1,j-1}(0) + \bar{\psi}_{x,m,g}^{-1,j}(0) + \bar{\psi}_{y,m,g}^{-1,j}(0)}{3}. \quad (81)$$

e

$$\psi_{m,g}(0, y_{j+1/2}) \approx \frac{\bar{\psi}_{x,m,g}^{-1,j}(0) + \bar{\psi}_{x,m,g}^{-1,j+1}(0) + \bar{\psi}_{y,m,g}^{-1,j}(h_{y,j})}{3}. \quad (82)$$

De posse das aproximações para esses fluxos angulares de nêutrons nesses nós, eles podem ser substituídos na Eq. (77), resultando em uma equação para se calcular a aproximação das fuga transversal de nêutrons na face oeste,

$$L_{x,m,g}^{1,j}(0) = \frac{\eta_m}{h_{y,j}} \left( \frac{\bar{\psi}_{x,m,g}^{-1,j-1}(0) - \bar{\psi}_{x,m,g}^{-1,j+1}(0) + \bar{\psi}_{y,m,g}^{-1,j}(0) - \bar{\psi}_{y,m,g}^{-1,j}(h_{y,j})}{3} \right). \quad (83)$$

Deduzidas as Eqs. (80) e (83), e sabendo que o tratamento do nodo sudoeste da malha ( $L_{x,m,g}^{0,J}(0)$ ) é análogo ao noroeste, todo os termos fuga transversal do contorno oeste do domínio espacial pode ser tratado. Após o cálculo desses termos, as fugas transversais de nêutrons das interfaces leste dos nodos que compõem o contorno oeste podem ser

calculadas usando a Eq. (61), uma vez que esta interface está entre dois nodos. Além disto, todos os nodos que pertencem ao contorno leste do domínio espacial podem ser tratados de forma análoga a do contorno oeste.

### 2.3.2 Fuga transversal como média dos fluxos angulares médios de nêutrons no eixo $y$

A dedução das equações para a fuga transversal nos contornos para o eixo  $y$  é toda análoga à dedução realizada para o eixo  $x$ . Portanto, considerando os fluxos angulares de nêutrons no canto noroeste do domínio espacial, mostrado na Figura 11, são obtidas aproximações para os fluxos angulares de nêutrons nos cantos noroeste e nordeste do nodo  $\Gamma_{i,j}$  respectivamente como:

$$\psi_{m,g}(0,0) \approx \frac{\bar{\psi}_{x,m,g}^{1,1}(0) + \bar{\psi}_{y,m,g}^{1,1}(0)}{2} \quad (84)$$

e

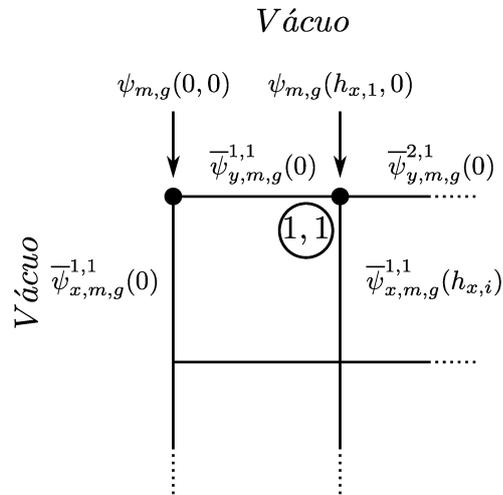
$$\psi_{m,g}(h_{x,1},0) \approx \frac{\bar{\psi}_{y,m,g}^{1,1}(0) + \bar{\psi}_{y,m,g}^{2,1}(0) + \bar{\psi}_{x,m,g}^{1,1}(h_{x,1})}{3}. \quad (85)$$

resultando em uma aproximação para a fuga transversal de nêutrons entre os pontos  $(0,0)$  e  $(h_{x,1},0)$  na forma

$$L_{y,m,g}^{1,1}(0) = \frac{\mu_m}{h_{x,1}} \left( \frac{-\bar{\psi}_{y,m,g}^{1,1}(0) + 2\bar{\psi}_{y,m,g}^{1,2}(0) - 3\bar{\psi}_{x,m,g}^{1,1}(0) + 2\bar{\psi}_{x,m,g}^{1,1}(h_{x,1})}{6} \right). \quad (86)$$

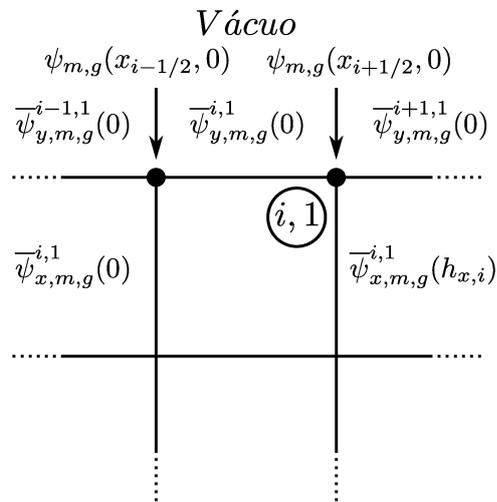
Assim como no contorno oeste, para o eixo  $x$ , pode ser feita uma aproximação para o contorno norte em relação ao eixo coordenado  $y$ , como na Eq. (83). Para esse contorno, considere a representação do meio da malha na parte norte mostrado na Figura 12.

Figura 11 - Condição de contorno -  
Noroeste para o eixo  $y$ .



Fonte: O autor, 2025.

Figura 12 - Condição de contorno -  
Norte.



Fonte: O autor, 2025.

Usando os mesmos passos usados na condição de contorno oeste, uma aproximação para os fluxos angulares de nêutrons nos cantos noroeste e nordeste de um nodo na face norte do domínio espacial é dada por

$$\psi_{m,g}(x_{i-1/2}, 0) \approx \frac{\bar{\psi}_{y,m,g}^{i-1,1}(0) + \bar{\psi}_{x,m,g}^{i,1}(0) + \bar{\psi}_{y,m,g}^{i,1}(0)}{3}, \quad (87)$$

e

$$\psi_{m,g}(x_{i+1/2}, 0) \approx \frac{\bar{\psi}_{y,m,g}^{i,1}(0) + \bar{\psi}_{x,m,g}^{i,1}(h_{x,i}) + \bar{\psi}_{y,m,g}^{i+1,1}(0)}{3}, \quad (88)$$

e, para uma aproximação para as fugas transversais de nêutrons no contorno norte,

$$L_{y,m,g}^{i,1}(0) = \frac{\mu_m}{h_{x,i}} \left( \frac{\bar{\psi}_{y,m,g}^{i-1,1}(0) - \bar{\psi}_{y,m,g}^{i+1,1}(0) + \bar{\psi}_{x,m,g}^{i,1}(0) - \bar{\psi}_{x,m,g}^{i,1}(h_{x,i})}{3} \right). \quad (89)$$

Agora, as fugas transversais de nêutrons para o contorno nordeste podem ser calculadas de forma análoga ao contorno noroeste. Além disso, as fugas transversais de nêutrons na face sul dos nodos do contorno norte do domínio espacial podem ser tratados como as do interior da malha, já que possuem um nodo vizinho. Finalmente, os nodos que compõem o contorno sul podem ser todos tratados aplicando a mesma metodologia usada para os que fazem parte do contorno norte da malha.

#### 2.4 Equações integradas transversalmente com aproximação quadrática para a fuga transversal nas direções $x$

Agora, após calcular os coeficientes da expansão da fuga transversal no nodo  $\Gamma_{i,j}$ , ela pode ser substituída na Eq. (24), resultando em

$$\begin{aligned} \mu_m \frac{d}{dx} \bar{\psi}_{x,m,g}^{i,j}(x) + \sigma_{T,g}^{i,j} \bar{\psi}_{x,m,g}^{i,j}(x) = \\ \sum_{g'=1}^G \left[ \sigma_{S0,gg'}^{i,j} \left( \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \omega_n \bar{\psi}_{x,n,g'}^{i,j}(x) \right) + 3\sigma_{S1,gg'}^{i,j} \left( \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \omega_n (\mu_m \mu_n + \eta_m \eta_n) \bar{\psi}_{x,n,g'}^{i,j}(x) \right) \right] + \\ + S_{m,g}^{i,j} - \bar{L}_{x,m,g}^{i,j} - c_{1,x,m,g}^{i,j} f_1(x) - c_{2,x,m,g}^{i,j} f_2(x). \quad (90) \end{aligned}$$

Como o termo independente da Eq. (90) é uma expansão polinomial de segundo grau, a solução particular  $\left( \bar{\psi}_{x,m,g}^{i,j,P}(x) \right)$  também é uma expansão polinomial de segundo grau com coeficientes  $b_{0,x,m,g}^{i,j}$ ,  $b_{1,x,m,g}^{i,j}$  e  $b_{2,x,m,g}^{i,j}$  a serem determinados, portanto a solução analítica intranodal pode ser escrita como

$$\bar{\psi}_{x,m,g}^{i,j}(x) = \bar{\psi}_{x,m,g}^{i,j,H}(x) + b_{0,x,m,g}^{i,j} + b_{1,x,m,g}^{i,j} f_1(x) + b_{2,x,m,g}^{i,j} f_2(x). \quad (91)$$

Substituindo a Eq. (91) na Eq. (90), resulta em

$$\begin{aligned}
& \mu_m \frac{d}{dx} (b_{0,x,m,g}^{i,j} + b_{1,x,m,g}^{i,j} f_1(x) + b_{2,x,m,g}^{i,j} f_2(x)) + \\
& + \sigma_{T,g}^{i,j} (b_{0,x,m,g}^{i,j} + b_{1,x,m,g}^{i,j} f_1(x) + b_{2,x,m,g}^{i,j} f_2(x)) - \\
& \sum_{g'=1}^G \left\{ \sigma_{S0,gg'}^{i,j} \left[ \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \omega_n (b_{0,x,m,g}^{i,j} + b_{1,x,m,g}^{i,j} f_1(x) + b_{2,x,m,g}^{i,j} f_2(x)) \right] + \right. \\
& \left. 3\sigma_{S1,gg'}^{i,j} \left[ \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \omega_n (\mu_m \mu_n + \eta_m \eta_n) (b_{0,x,m,g}^{i,j} + b_{1,x,m,g}^{i,j} f_1(x) + b_{2,x,m,g}^{i,j} f_2(x)) \right] \right\} = \\
& = S_g^{i,j} - \bar{L}_{x,m,g}^{i,j} - c_{1,x,m,g}^{i,j} f_1(x) - c_{2,x,m,g}^{i,j} f_2(x) \quad (92)
\end{aligned}$$

Calculando as derivadas das funções  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$ , usadas na expansão, pode-se escrever para  $f_1(x)$

$$\frac{d}{dx} f_1(x) = \frac{2}{h_{x,i}}, \quad (93)$$

e para  $f_2(x)$

$$\frac{d}{dx} f_2(x) = \frac{6}{h_{x,i}} \left( 1 - \frac{2}{h_{x,i}} (x - x_{i-1/2}) \right) = \frac{-6}{h_{x,i}} f_1(x). \quad (94)$$

Substituindo os resultados das Eqs. (93) e (94) na Eq. (92), é obtida a equação que será usada para calcular os coeficientes da expansão presente na solução particular descrita pela Eq. (91), dado por

$$\begin{aligned}
& 2 \left( \frac{\mu_m}{h_{x,i}} \right) b_{1,x,m,g}^{i,j} - 6 \left( \frac{\mu_m}{h_{x,i}} \right) b_{2,x,m,g}^{i,j} f_1(x) + \sigma_{T,g}^{i,j} (b_{0,x,m,g}^{i,j} + b_{1,x,m,g}^{i,j} f_1(x) + b_{2,x,m,g}^{i,j} f_2(x)) - \\
& \sum_{g'=1}^G \left\{ \sigma_{S0,gg'}^{i,j} \left[ \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \omega_n (b_{0,x,m,g}^{i,j} + b_{1,x,m,g}^{i,j} f_1(x) + b_{2,x,m,g}^{i,j} f_2(x)) \right] + \right. \\
& \left. 3\sigma_{S1,gg'}^{i,j} \left[ \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \omega_n (\mu_m \mu_n + \eta_m \eta_n) (b_{0,x,m,g}^{i,j} + b_{1,x,m,g}^{i,j} f_1(x) + b_{2,x,m,g}^{i,j} f_2(x)) \right] \right\} = \\
& = S_{m,g}^{i,j} - \bar{L}_{x,m,g}^{i,j} - c_{1,x,m,g}^{i,j} f_1(x) - c_{2,x,m,g}^{i,j} f_2(x) \\
& m = 1 : M, \quad g = 1 : G. \quad (95)
\end{aligned}$$

Avaliando os termos de mesmo grau por identificação, são construídos três sistemas de equações para calcular os coeficientes da solução particular. Na seguinte ordem: para calcular os coeficientes  $b_{2,x,m,g}^{i,j}$ , usamos os sistema de equações

$$\begin{aligned} \sigma_{T,g}^{i,j} b_{2,x,m,g}^{i,j} - \sum_{g'=1}^G \left[ \sigma_{S0,gg'}^{i,j} \left( \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \omega_n b_{2,x,m,g}^{i,j} \right) + \right. \\ \left. + 3\sigma_{S1,gg'}^{i,j} \left( \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \omega_n (\mu_m \mu_n + \eta_m \eta_n) b_{2,x,m,g}^{i,j} \right) \right] = -c_{2,x,m,g}^{i,j}, \end{aligned}$$

$m = 1 : M, g = 1 : G. \quad (96)$

Agora, de posse dos coeficientes  $b_{2,x,m,g}^{i,j}$ , podem ser calculados os coeficientes  $b_{1,x,m,g}^{i,j}$  com um sistema de equações na forma

$$\begin{aligned} \sigma_{T,g}^{i,j} b_{1,x,m,g}^{i,j} - \sum_{g'=1}^G \left[ \sigma_{S0,gg'}^{i,j} \left( \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \omega_n b_{1,x,m,g}^{i,j} \right) + \right. \\ \left. + 3\sigma_{S1,gg'}^{i,j} \left( \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \omega_n (\mu_m \mu_n + \eta_m \eta_n) b_{1,x,m,g}^{i,j} \right) \right] = 6 \left( \frac{\mu_m}{h_{x,i}} \right) b_{2,x,m,g}^{i,j} - c_{1,x,m,g}^{i,j} \end{aligned}$$

$m = 1 : M, g = 1 : G. \quad (97)$

Finalmente, com os coeficientes  $b_{1,x,m,g}^{i,j}$ , os termos  $b_{0,x,m,g}^{i,j}$  podem ser calculados usando o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} \sigma_{T,g}^{i,j} b_{0,x,m,g}^{i,j} - \sum_{g'=1}^G \left[ \sigma_{S0,gg'}^{i,j} \left( \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \omega_n b_{0,x,m,g}^{i,j} \right) + \right. \\ \left. + 3\sigma_{S1,gg'}^{i,j} \left( \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \omega_n (\mu_m \mu_n + \eta_m \eta_n) b_{0,x,m,g}^{i,j} \right) \right] = S_{m,g}^{i,j} - \bar{L}_{x,m,g}^{i,j} - 2 \left( \frac{\mu_m}{h_{x,i}} \right) b_{1,x,m,g}^{i,j}, \end{aligned}$$

$m = 1 : M, g = 1 : G. \quad (98)$

## 2.5 Equações integradas transversalmente com aproximação quadrática para a fuga transversal nas direções $y$

O mesmo procedimento deve ser realizado para as direções do eixo  $y$ , a fim de calcular os coeficientes de expansão da solução particular. Após a obtenção dos coeficientes da expansão da fuga transversal no nodo  $\Gamma_{i,j}$ , ela é substituída na Eq. (25), resultando em

$$\begin{aligned}
& \eta_m \frac{d}{dy} \bar{\psi}_{y,m,g}^{i,j}(y) + \sigma_{T,g}^{i,j} \bar{\psi}_{y,m,g}^{i,j}(y) = \\
& \sum_{g'=1}^G \left[ \sigma_{S0,gg'}^{i,j} \left( \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \omega_n \bar{\psi}_{y,n,g'}^{i,j}(y) \right) + 3\sigma_{S1,gg'}^{i,j} \left( \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \omega_n (\mu_m \mu_n + \eta_m \eta_n) \bar{\psi}_{y,n,g'}^{i,j}(y) \right) \right] + \\
& \quad + S_{m,g}^{i,j} - \bar{L}_{y,m,g}^{i,j} - c_{1,y,m,g}^{i,j} f_1(y) - c_{2,y,m,g}^{i,j} f_2(y). \quad (99)
\end{aligned}$$

Realizando uma expansão polinomial quadrática também na componente de solução particular da solução analítica local da equação de transporte integrada transversalmente a  $y$ , é obtida uma equação com coeficientes  $b_{0,y,m,g}^{i,j}$ ,  $b_{1,y,m,g}^{i,j}$  e  $b_{2,y,m,g}^{i,j}$  a serem determinados, na forma

$$\bar{\psi}_{y,m,g}^{i,j}(y) = \bar{\psi}_{y,m,g}^{i,j,H}(y) + b_{0,y,m,g}^{i,j} + b_{1,y,m,g}^{i,j} f_1(y) + b_{2,y,m,g}^{i,j} f_2(y). \quad (100)$$

Substituindo a Eq. (110) na Eq. (99), é obtido

$$\begin{aligned}
& \eta_m \frac{d}{dy} (b_{0,y,m,g}^{i,j} + b_{1,y,m,g}^{i,j} f_1(y) + b_{2,y,m,g}^{i,j} f_2(y)) + \\
& + \sigma_{T,g}^{i,j} (b_{0,y,m,g}^{i,j} + b_{1,y,m,g}^{i,j} f_1(y) + b_{2,y,m,g}^{i,j} f_2(y)) - \\
& \sum_{g'=1}^G \left\{ \sigma_{S0,gg'}^{i,j} \left[ \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \omega_n (b_{0,y,m,g}^{i,j} + b_{1,y,m,g}^{i,j} f_1(y) + b_{2,y,m,g}^{i,j} f_2(y)) \right] + \right. \\
& \left. 3\sigma_{S1,gg'}^{i,j} \left[ \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \omega_n (\mu_m \mu_n + \eta_m \eta_n) (b_{0,y,m,g}^{i,j} + b_{1,y,m,g}^{i,j} f_1(y) + b_{2,y,m,g}^{i,j} f_2(y)) \right] \right\} = \\
& \quad = S_g^{i,j} - \bar{L}_{y,m,g}^{i,j} - c_{1,y,m,g}^{i,j} f_1(y) - c_{2,y,m,g}^{i,j} f_2(y) \quad (101)
\end{aligned}$$

Calculando as derivadas das funções  $f_1(y)$  e  $f_2(y)$ , usadas na expansão, pode-se escrever para  $f_1(y)$

$$\frac{d}{dy} f_1(y) = \frac{2}{h_{y,j}}, \quad (102)$$

e para  $f_2(y)$

$$\frac{d}{dy} f_2(y) = \frac{6}{h_{y,j}} \left( 1 - \frac{2}{h_{y,j}} (y - y_{j-1/2}) \right) = \frac{-6}{h_{y,j}} f_1(y). \quad (103)$$

Usando os resultados das Eqs. (102) e (103), pode-se reescrever a Eq. (101) como

$$\begin{aligned}
& 2 \left( \frac{\eta_m}{h_{y,j}} \right) b_{1,y,m,g}^{i,j} - 6 \left( \frac{\eta_m}{h_{y,j}} \right) b_{2,y,m,g}^{i,j} f_1(y) + \sigma_{T,g}^{i,j} (b_{0,y,m,g}^{i,j} + b_{1,y,m,g}^{i,j} f_1(y) + b_{2,y,m,g}^{i,j} f_2(y)) - \\
& \sum_{g'=1}^G \left\{ \sigma_{S0,gg'}^{i,j} \left[ \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \omega_n (b_{0,y,m,g}^{i,j} + b_{1,y,m,g}^{i,j} f_1(y) + b_{2,y,m,g}^{i,j} f_2(y)) \right] + \right. \\
& \left. 3\sigma_{S1,gg'}^{i,j} \left[ \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \omega_n (\mu_m \mu_n + \eta_m \eta_n) (b_{0,y,m,g}^{i,j} + b_{1,y,m,g}^{i,j} f_1(y) + b_{2,y,m,g}^{i,j} f_2(y)) \right] \right\} = \\
& = S_{m,g}^{i,j} - \bar{L}_{y,m,g}^{i,j} - c_{1,y,m,g}^{i,j} f_1(y) - c_{2,y,m,g}^{i,j} f_2(y) \\
& m = 1 : M, \quad g = 1 : G. \quad (104)
\end{aligned}$$

Avaliando os termos de mesmo grau, primeiramente é construído um sistema de equações para calcular os coeficientes  $b_{2,y,m,g}^{i,j}$ , usamos os sistema de equações

$$\begin{aligned}
& \sigma_{T,g}^{i,j} b_{2,y,m,g}^{i,j} - \sum_{g'=1}^G \left[ \sigma_{S0,gg'}^{i,j} \left( \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \omega_n b_{2,y,m,g}^{i,j} \right) + \right. \\
& \left. + 3\sigma_{S1,gg'}^{i,j} \left( \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \omega_n (\mu_m \mu_n + \eta_m \eta_n) b_{2,y,m,g}^{i,j} \right) \right] = -c_{2,y,m,g}^{i,j}, \\
& m = 1 : M, \quad g = 1 : G. \quad (105)
\end{aligned}$$

Com os coeficientes  $b_{2,y,m,g}^{i,j}$ , são calculados os coeficientes  $b_{1,y,m,g}^{i,j}$  com um sistema de equações na forma

$$\begin{aligned}
& \sigma_{T,g}^{i,j} b_{1,y,m,g}^{i,j} - \sum_{g'=1}^G \left[ \sigma_{S0,gg'}^{i,j} \left( \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \omega_n b_{1,y,m,g}^{i,j} \right) + \right. \\
& \left. + 3\sigma_{S1,gg'}^{i,j} \left( \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \omega_n (\mu_m \mu_n + \eta_m \eta_n) b_{1,y,m,g}^{i,j} \right) \right] = 6 \left( \frac{\eta_m}{h_{y,j}} \right) b_{2,y,m,g}^{i,j} - c_{1,y,m,g}^{i,j} \\
& m = 1 : M, \quad g = 1 : G. \quad (106)
\end{aligned}$$

Por último, são calculados os coeficientes  $b_{0,y,m,g}^{i,j}$  o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
& \sigma_{T,g}^{i,j} b_{0,y,m,g}^{i,j} - \sum_{g'=1}^G \left[ \sigma_{S0,gg'}^{i,j} \left( \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \omega_n b_{0,y,m,g}^{i,j} \right) + \right. \\
& \left. + 3\sigma_{S1,gg'}^{i,j} \left( \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \omega_n (\mu_n \mu_n + \eta_n \eta_n) b_{0,y,m,g}^{i,j} \right) \right] = S_{m,g}^{i,j} - \bar{L}_{y,m,g}^{i,j} - 2 \left( \frac{\eta_m}{h_{y,j}} \right) b_{1,y,m,g}^{i,j}, \\
& m = 1 : M, \quad g = 1 : G. \quad (107)
\end{aligned}$$

Agora, de posse de todos os coeficientes da expansão da componente particular da solução analítica local da equação de transporte integrada transversalmente a  $y$ , a solução geral dessa equação pode ser escrita.

## 2.6 Construção da componente particular da solução analítica local da equação de transporte integrada transversalmente

Vale ressaltar que a partir das Eqs. (96)-(98) para as direções em  $x$  e as Eqs.(105)-(107) para  $y$ , é possível deduzir aproximações constante ou com expansão polinomial linear. Ao zerar os coeficientes  $b_{2,x,m,g}^{i,j}$  e  $b_{2,y,m,g}^{i,j}$  é possível usar ainda as Eqs. (97)-(98) e calcular os coeficientes  $b_{1,x,m,g}^{i,j}$  e  $b_{0,x,m,g}^{i,j}$  para as direções  $x$  e  $b_{1,y,m,g}^{i,j}$  e  $b_{0,y,m,g}^{i,j}$  para as direções  $y$ , construindo um aproximações lineares para solução particular respectivamente para  $x$  no formato

$$\bar{\psi}_{x,m,g}^{i,j}(x) = \bar{\psi}_{x,m,g}^{i,j,H}(x) + b_{0,x,m,g}^{i,j} + b_{1,x,m,g}^{i,j} f_1(x). \quad (108)$$

e  $y$  na forma

$$\bar{\psi}_{y,m,g}^{i,j}(y) = \bar{\psi}_{y,m,g}^{i,j,H}(y) + b_{0,y,m,g}^{i,j} + b_{1,y,m,g}^{i,j} f_1(y). \quad (109)$$

De forma análoga, os coeficientes  $b_{2,x,m,g}^{i,j}$ ,  $b_{1,x,m,g}^{i,j}$ ,  $b_{2,y,m,g}^{i,j}$  e  $b_{1,y,m,g}^{i,j}$  podem ser zerados, e usando a Eq. (98) e (107) são calculados os coeficientes  $b_{0,x,m,g}^{i,j}$  e  $b_{0,y,m,g}^{i,j}$ , semelhante à aproximação constante da fuga transversal de nêutrons, presente em métodos como o SDM-CN, MR-CN e SGF-CN.

Ao considerar todos os coeficientes para aproximação quadrática da fuga transversal de nêutrons, duas soluções analíticas locais da equação integrada transversalmente são obtidas, sendo para  $x$

$$\bar{\psi}_{x,m,g}^{i,j}(x) = \bar{\psi}_{x,m,g}^{i,j,H}(x) + b_{0,x,m,g}^{i,j} + b_{1,x,m,g}^{i,j}f_1(x) + b_{2,x,m,g}^{i,j}f_2(x), \quad (110)$$

e para  $y$

$$\bar{\psi}_{y,m,g}^{i,j}(y) = \bar{\psi}_{y,m,g}^{i,j,H}(y) + b_{0,y,m,g}^{i,j} + b_{1,y,m,g}^{i,j}f_1(y) + b_{2,y,m,g}^{i,j}f_2(y). \quad (111)$$

Após calcular todos os coeficientes da expansão realizada para a componente particular da solução analítica intranodal em ambos os eixos coordenados, mostradas nas Eqs. (91) e (110), a solução analítica geral intranodal pode ser usada no desenvolvimento de métodos de malha grossa para solução de problemas de fonte-fixa. A seguir serão mostradas as deduções dos métodos *Spectral Deterministic Method* e *Response Matrix*, que foram os métodos espectralnodais usados para gerar os resultados desta tese.

### 3 O MÉTODO SPECTRAL DETERMINISTIC METHOD - QUADRATIC (SDM-QUAD)

O método *Spectral Deterministic Method* (SDM) foi originalmente proposto por (Oliva, 2018) com aproximação constante para os termos de fuga transversal (SDM-CN). Nesse método, é usada a solução analítica local da equação de transporte  $S_N$  a fim de calcular um conjunto dos coeficientes de expansão das autofunções  $\alpha$  e  $\beta$  usando os fluxos angulares médios incidentes no nodo  $\Gamma_{i,j}$ . A partir dos valores estimados desses parâmetros, os fluxos angulares médios de nêutrons emergentes de  $\Gamma_{i,j}$  são calculados novamente usando a solução analítica intranodal. Originalmente, o processo iterativo associado à tarefa descrita anteriormente consistia em uma única direção de varredura percorrendo todo o domínio espacial, calculando os fluxos angulares emergentes de nêutrons em todas as direções do nodo  $\Gamma_{i,j}$ . Porém, foi observado que esse processo iterativo ocasionava problemas de instabilidade numérica quando eram utilizadas malhas com maior quantidade de nodos. Portanto, foram feitas alterações para que ele passasse a varrer a grade espacial em 4 direções diferentes, calculando os fluxos angulares médios de nêutrons somente na direção da varredura.

No entanto, usando a aproximação constante nos termos de fuga transversal, para se obter resultados com desvios pequenos em relação à solução referência obtida com uma malha fina, é necessário que se refine a malha, tornando a solução via SDM-CN computacionalmente custosa. Por isso, nesta tese, a fim de se obter resultados precisos em malhas mais grossas, é usada a aproximação de expansão polinomial quadrática nos termos de fuga transversal de nêutrons. Para construção deste processo iterativo, os fluxos angulares médios assumem a seguinte forma, para o eixo  $x$ ,

$$\bar{\psi}_{x,m,g}^{i,j}(x) = \sum_{l=1}^M \alpha_l^{i,j} A_{x,m,g}^{i,j}(\lambda_{x,l}) e^{-\lambda_{x,l}(x-x_{i-1/2})} + b_{0,x,m,g}^{i,j} + b_{1,x,m,g}^{i,j} f_1(x) + b_{2,x,m,g}^{i,j} f_2(x), \quad (112)$$

e para  $y$ ,

$$\bar{\psi}_{y,m,g}^{i,j}(y) = \sum_{l=1}^M \beta_l^{i,j} A_{y,m,g}^{i,j}(\lambda_{y,l}) e^{-\lambda_{y,l}(y-y_{j-1/2})} + b_{0,y,m,g}^{i,j} + b_{1,y,m,g}^{i,j} f_1(y) + b_{2,y,m,g}^{i,j} f_2(y). \quad (113)$$

O primeiro passo para usar esse método, é calcular os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente para as direções espaciais  $x$  e  $y$  no nodo em questão. Para isso, são construídos sistemas de equações usando as Eqs. (112) e (113) com os fluxos angulares médios de nêutrons incidentes no nodo  $\Gamma_{i,j}$ . Nas Figuras 13 e 14, são mostradas representações dos fluxos

angulares médios de nêutrons incidentes, representados pelas setas em vermelho, e os emergentes, pelas setas azuis, referentes a cada quadrante  $Q_1$  a  $Q_4$ , respectivamente para  $x$  e  $y$ .

Figura 13 - Fluxos angulares médios de nêutrons incidentes e emergentes em  $\Gamma_{i,j}$  na direção espacial  $x$ .

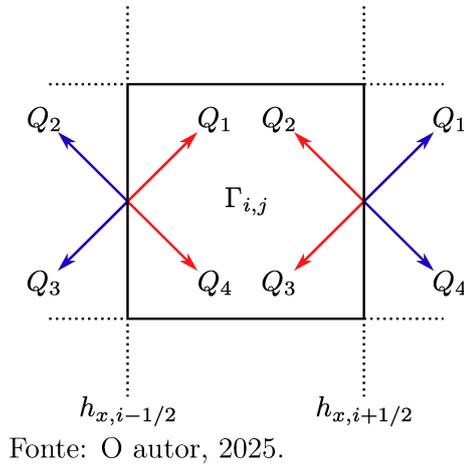
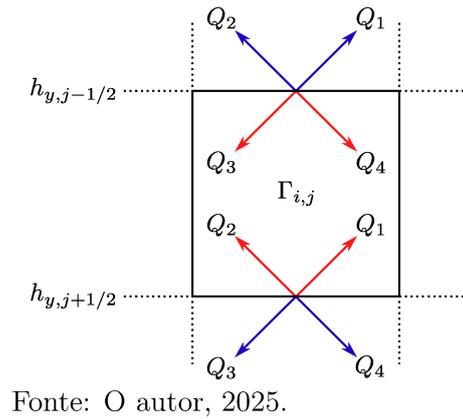


Figura 14 - Fluxos angulares médios de nêutrons incidentes e emergentes em  $\Gamma_{i,j}$  na direção espacial  $y$ .

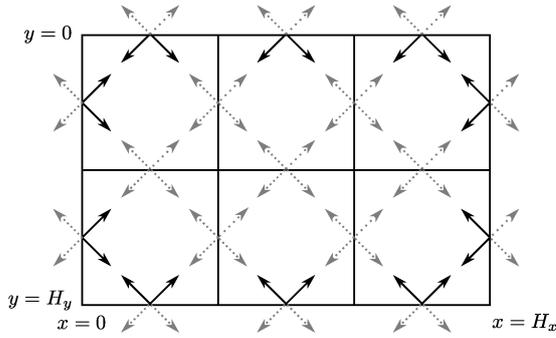


Uma vez calculado os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , as Eqs. (112) e (113) são usadas novamente para se obter os fluxos angulares médios de nêutrons emergentes nas faces do nodo  $\Gamma_{i,j}$ . Como os fluxos angulares incidentes são iguais aos fluxos angulares emergentes nas interfaces com os nodos vizinhos ao nodo  $\Gamma_{i,j}$ , o procedimento do cálculo dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , e dos fluxos angulares médios emergentes constituem um processo iterativo de cálculo, que é composto por quatro direções de varredura. Antes do início desse processo, deve ser considerada a Figura 15, onde as setas sólidas pretas representam as condições de contorno, que juntamente com as fontes internas em cada nodo são conhecidas, e as setas pontilhadas em cinza representam os fluxos angulares médios de nêutrons a serem calculados. Na primeira direção de varredura, no sentido  $SO \rightarrow NE$ , o primeiro nodo a ser considerado é aquele no canto inferior esquerdo, e, neste sentido de varredura, são calculados os fluxos angulares médios de nêutrons emergentes no quadrante  $Q_1$ , como mostrado na Figura 16, através das setas tracejadas em vermelho.

Esse processo é repetido para os demais nodos da grade espacial, até que todos os fluxos angulares médios nos eixos  $x$  e  $y$  na direção do quadrante  $Q_1$  sejam calculados, resultando no esquema mostrado na Figura 17. Após se finalizar a primeira varredura é iniciada a varredura na direção  $SE \rightarrow NO$ , calculando os fluxos angulares médios emergentes no quadrante  $Q_2$ , como mostrado na Figura 18, representado pela cor azul.

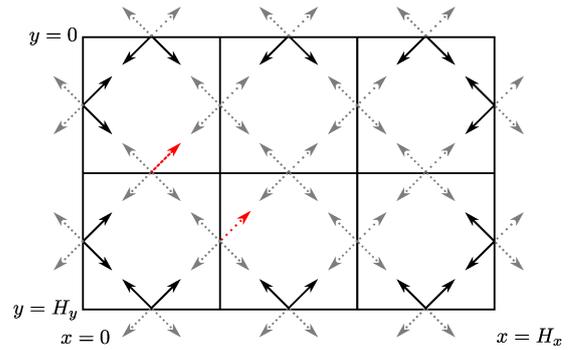
Neste ponto, o algoritmo é repetido por toda a malha, calculado os fluxos angulares médios na direção  $Q_2$ . Em seguida, as duas últimas varreduras são realizadas, na direção

Figura 15 - Grade espacial inicial do processo iterativo.



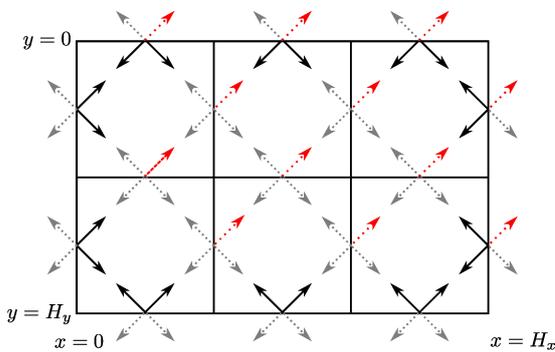
Fonte: O autor, 2025.

Figura 16 - Grade espacial com os primeiros fluxos angulares médios atualizados.



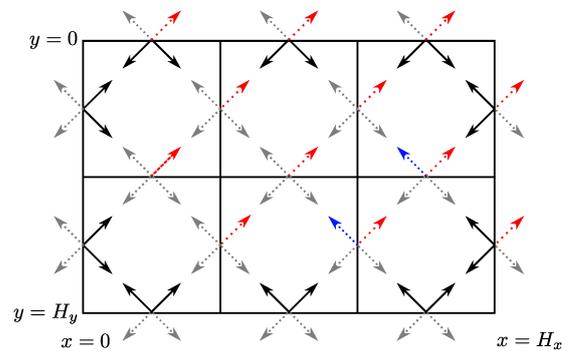
Fonte: O autor, 2025.

Figura 17 - Grade espacial com os primeiros fluxos angulares médios atualizados.



Fonte: O autor, 2025.

Figura 18 - Grade espacial no início da segunda varredura.



Fonte: O autor, 2025.

$NE \rightarrow SO$  para o quadrante 3, e finalmente na direção  $NO \rightarrow SE$  para os fluxos angulares médios nas direções do quadrante  $Q_4$ . Esse processo de quatro direções de varredura caracteriza uma iteração.

De posse de todos os fluxos angulares médios nas faces dos nodos atualizados na iteração, o critério de parada deve ser testado. Neste trabalho, o processo iterativo é interrompido quando o módulo do desvio relativo entre os fluxos escalares médios de nêutrons em todos os nodos entre duas iterações ( $k$ ) subsequentes for menor que um parâmetro  $\xi$  predefinido. O cálculo dos fluxos escalares médios de nêutrons em um nodo  $\Gamma_{i,j}$  é dado na forma,

$$\bar{\phi}_g^{i,j} = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^M \omega_m \bar{\psi}_{m,g}^{i,j}, \quad g = 1 : G \quad (114)$$

onde os fluxos angulares médios de nêutrons são calculados conforme

$$\bar{\psi}_{m,g}^{i,j} = \frac{1}{h_{u,s}} \int_{u_{s-1/2}}^{u_s+1/2} \bar{\psi}_{u,m,g}^{i,j}(u) du = \frac{1}{h_{u,s}} \sum_{l=1}^{MG} \gamma_l \lambda_{u,l} A_{u,m,g}^{i,j}(\lambda_{u,l}) (e^{-\lambda_{u,l} h_{u,s}} - 1) + b_{0,u,m,g}^{i,j}. \quad (115)$$

Vale ressaltar que pelo fato dos polinômios de Legendre usados na expansão da solução particular,  $f_1(u)$  e  $f_2(u)$ , serem funções ortogonais, ao realizar a integração presente na Eq.(115), os coeficientes  $b_{1,u,m,g}^{i,j}$  e  $b_{2,u,m,g}^{i,j}$  iram ser anulados. Dessa forma, a função para calcular os fluxos angulares médios de nêutrons no nodo possui o mesmo formato, independente do tipo de aproximação adotada com esta formulação, seja constante, linear ou quadrática. De posse dos fluxos escalares médios, o critério de parada pode ser testado como

$$\text{MAX}_{i,j,g} \left| \frac{\bar{\phi}_g^{i,j(k)} - \bar{\phi}_g^{i,j(k-1)}}{\bar{\phi}_g^{i,j(k-1)}} \right| < \xi \quad (116)$$

Como visto adiante, os mesmos critérios de convergência são usados para todos os métodos numéricos usados neste trabalho, seja o método de malha fina ou os método espectralnodais.

#### 4 O MÉTODO MATRIZ RESPOSTA-QUADRATIC (RM-QUAD)

O método Matriz Resposta (RM, do inglês *Response Matrix*), proposto com aproximação constante nos termos de fuga transversal de nêutrons por Silva (2018a), Silva et al. (2020), é um método da classe dos espectralnodais para solução de problemas de fonte-fixa em geometria uni e bidimensional. Nele, são construídas matrizes auxiliares com o intuito de serem usadas durante o processo iterativo para calcular os fluxos angulares médios de nêutrons emergentes de um nodo  $\Gamma_{i,j}$ , a partir dos fluxos angulares médios de nêutrons incidentes e possíveis fontes externas de nêutrons neste nodo sem a necessidade de se calcular os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ . Nos trabalhos supracitados, uma formulação para a construção destas matrizes é apresentada, porém, nesta tese, será mostrada uma forma de se obter esse método a partir das equações constitutivas do SDM, mostrado no capítulo anterior.

Como visto anteriormente, o método SDM para a solução de um problema de fonte fixa depende de 3 passos:

- Construção das matrizes dos sistemas de equações lineares e algébricos associados com a solução particular.
- Cálculo dos parâmetros  $\alpha$  na solução dependente de  $x$  e  $\beta$  na de  $y$  usando as fontes externas e os fluxos angulares médios incidentes no nodo  $\Gamma_{i,j}$ .
- Cálculo dos fluxos angulares médios emergentes do nodo  $\Gamma_{i,j}$  usando os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ .

Na constituição das equações do RM, a solução particular é mantida, inclusive, seguindo os mesmos passos da obtida para o método SDM. Porém, neste, o cálculo dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  pode ser suprimido com o auxílio da construção de matrizes auxiliares que vinculam o cálculo dos fluxos angulares médios de nêutrons emergentes diretamente aos fluxos angulares médios incidentes.

A solução intranodal da equação de transporte de nêutrons na forma matricial assume a forma para as direções em  $x$  como,

$$\bar{\psi}(x) = \mathbf{A}_x \mathbf{f}_e^x(x) \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\psi}_x^P(x) \quad (117)$$

e para  $y$  na forma

$$\bar{\psi}(y) = \mathbf{A}_y \mathbf{f}_e^y(y) \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\psi}_y^P(y) \quad (118)$$

de forma que as matrizes  $\mathbf{A}_x$  e  $\mathbf{A}_y$  representam as matrizes com dimensões  $MG \times MG$  constituídas pelas componentes dos autovetores dispostas em colunas, para  $x$  na forma

$$\mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} A_{x,1}(\lambda_{x,1}) & A_{x,1}(\lambda_{x,2}) & \cdots & A_{x,1}(\lambda_{x,MG}) \\ A_{x,2}(\lambda_{x,2}) & A_{x,2}(\lambda_{x,2}) & \cdots & A_{x,2}(\lambda_{x,MG}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{x,MG}(\lambda_{x,MG}) & A_{x,MG}(\lambda_{x,2}) & \cdots & A_{x,MG}(\lambda_{x,MG}) \end{bmatrix}, \quad (119)$$

e para  $y$  como

$$\mathbf{A}_y = \begin{bmatrix} A_{y,1}(\lambda_{y,1}) & A_{y,1}(\lambda_{y,2}) & \cdots & A_{y,1}(\lambda_{y,MG}) \\ A_{y,2}(\lambda_{y,1}) & A_{y,2}(\lambda_{y,2}) & \cdots & A_{y,2}(\lambda_{y,MG}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{y,MG}(\lambda_{y,1}) & A_{y,MG}(\lambda_{y,2}) & \cdots & A_{y,MG}(\lambda_{y,MG}) \end{bmatrix} \quad (120)$$

As matrizes com as componentes da função exponencial  $\mathbf{f}_e^x(x)$  e  $\mathbf{f}_e^y(y)$ , que também são matrizes de dimensão  $MG \times MG$ , são construídas conforme as posições dos fluxos angulares médios de nêutrons incidentes ou emergentes nos nodos. A construção dessas matrizes deve obedecer às posições nas faces dos nodos onde se encontram os fluxos incidentes ou emergentes de acordo com a direção de migração em cada quadrante. Dessa forma, as matrizes são divididas em 4 partes, aqui separadas por linhas pontilhadas, de forma que cada coluna dessa matriz representa uma direção de migração, e portanto, cada divisória possui as  $MG/4$  direções discretas correspondentes de cada quadrante. Com um formato de divisão como:

$$\mathbf{f}^{in}(\mathbf{u}) = \left[ Q_1 \mid Q_2 \mid Q_3 \mid Q_4 \right], \quad (121)$$

As matrizes de função exponencial para os fluxos incidentes e emergentes nas direções  $x$  são dadas respectivamente como

$$\mathbf{f}_e^{x,in}(\mathbf{x}) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & \dots & 1 & e^{-\lambda_x,1h_{xi}} & \dots & e^{-\lambda_x,1h_{xi}} & e^{-\lambda_x,1h_{xi}} & \dots & e^{-\lambda_x,1h_{xi}} & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & e^{-\lambda_x,2h_{xi}} & \dots & e^{-\lambda_x,2h_{xi}} & e^{-\lambda_x,2h_{xi}} & \dots & e^{-\lambda_x,2h_{xi}} & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & e^{-\lambda_x,MGh_{xi}} & \dots & e^{-\lambda_x,MGh_{xi}} & e^{-\lambda_x,MGh_{xi}} & \dots & e^{-\lambda_x,MGh_{xi}} & 1 & \dots & 1 \end{array} \right] \quad (122)$$

e

$$\mathbf{f}_e^{x,em}(\mathbf{x}) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} e^{-\lambda_x,1h_{xi}} & \dots & e^{-\lambda_x,1h_{xi}} & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & e^{-\lambda_x,1h_{xi}} & \dots & e^{-\lambda_x,1h_{xi}} \\ e^{-\lambda_x,2h_{xi}} & \dots & e^{-\lambda_x,2h_{xi}} & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & e^{-\lambda_x,2h_{xi}} & \dots & e^{-\lambda_x,2h_{xi}} \\ \vdots & \vdots \\ e^{-\lambda_x,MGh_{xi}} & \dots & e^{-\lambda_x,MGh_{xi}} & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & e^{-\lambda_x,MGh_{xi}} & \dots & e^{-\lambda_x,MGh_{xi}} \end{array} \right], \quad (123)$$

Para as direções em  $y$ , as matrizes de função exponencial incidente e emergente são construídas respectivamente como:

$$\mathbf{f}_e^{y,in}(\mathbf{y}) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} e^{-\lambda_y,1h_{yj}} & \dots & e^{-\lambda_y,1h_{yj}} & e^{-\lambda_y,1h_{yj}} & \dots & e^{-\lambda_y,1h_{yj}} & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-\lambda_y,2h_{yj}} & \dots & e^{-\lambda_y,2h_{yj}} & e^{-\lambda_y,2h_{yj}} & \dots & e^{-\lambda_y,2h_{yj}} & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots \\ e^{-\lambda_y,MGh_{yj}} & \dots & e^{-\lambda_y,MGh_{yj}} & e^{-\lambda_y,MGh_{yj}} & \dots & e^{-\lambda_y,MGh_{yj}} & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \end{array} \right] \quad (124)$$

e

$$\mathbf{f}_e^{y,em}(y) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & | & 1 & \cdots & 1 & | & e^{-\lambda_{y,1}h_{yj}} & \cdots & e^{-\lambda_{y,1}h_{yj}} & | & e^{-\lambda_{y,1}h_{yj}} & \cdots & e^{-\lambda_{y,1}h_{yj}} \\ 1 & \cdots & 1 & | & 1 & \cdots & 1 & | & e^{-\lambda_{y,2}h_{yj}} & \cdots & e^{-\lambda_{y,2}h_{yj}} & | & e^{-\lambda_{y,2}h_{yj}} & \cdots & e^{-\lambda_{y,2}h_{yj}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & | & 1 & \cdots & 1 & | & e^{-\lambda_{y,MG}h_{yj}} & \cdots & e^{-\lambda_{y,MG}h_{yj}} & | & e^{-\lambda_{y,MG}h_{yj}} & \cdots & e^{-\lambda_{y,MG}h_{yj}} \end{bmatrix}. \quad (125)$$

Neste ponto, é importante ressaltar a dependência espacial da solução particular, quando usada a aproximação linear e quadrática. Por esse motivo, serão definidas aqui duas variáveis na direção  $x$ ,  $\psi_x^{P, in}$  e  $\psi_x^{P, em}$ , e duas na direção  $y$ ,  $\psi_y^{P, in}$  e  $\psi_y^{P, em}$  as quais representam a solução particular da equação intranodal de transporte de nêutrons, quando construídos os sistemas de equação de acordo com os fluxos angulares médios de nêutrons incidentes e emergentes. Elas são construídas de acordo com as funções avaliadas nas interfaces nodais presentes nas Eqs.(44) e (45), avaliadas na interface esquerda e direita de  $\Gamma_{i,j}$ , na direção  $x$  na forma

$$\psi^P(x) = \begin{bmatrix} b_{0,x,1,1}^{i,j} + b_{1,x,1,1}^{i,j}f_1(x) + b_{2,x,1,1}^{i,j}f_2(x) \\ b_{0,x,2,1}^{i,j} + b_{1,x,2,1}^{i,j}f_1(x) + b_{2,x,2,1}^{i,j}f_2(x) \\ \vdots \\ b_{0,x,M,G}^{i,j} + b_{1,x,M,G}^{i,j}f_1(x) + b_{2,x,M,G}^{i,j}f_2(x) \end{bmatrix}, \quad (126)$$

e nas interfaces superior e inferior de  $\Gamma_{i,j}$ , na direção  $y$  como

$$\psi^P(y) = \begin{bmatrix} b_{0,y,1,1}^{i,j} + b_{1,y,1,1}^{i,j}f_1(y) + b_{2,y,1,1}^{i,j}f_2(y) \\ b_{0,y,2,1}^{i,j} + b_{1,y,2,1}^{i,j}f_1(y) + b_{2,y,2,1}^{i,j}f_2(y) \\ \vdots \\ b_{0,y,M,G}^{i,j} + b_{1,y,M,G}^{i,j}f_1(y) + b_{2,y,M,G}^{i,j}f_2(y) \end{bmatrix}. \quad (127)$$

Dessa forma, os vetores de solução particular correspondentes aos fluxos angulares médios incidentes e emergentes devem ser construídos de forma adequada às posições e direções de migração. Portanto, este vetor é dividido em 4 partes, assim como feito nas matrizes de função exponencial. Para as direções  $x$ , os vetores de solução particular incidente e emergente assumem as respectivas formas

$$\psi_x^{P, in} = \begin{bmatrix} b_{0,x,1,1}^{i,j} - b_{1,x,1,1}^{i,j} + b_{2,x,1,1}^{i,j} \\ \vdots \\ \frac{b_{0,x,M/4,1}^{i,j} - b_{1,x,M/4,G}^{i,j} + b_{2,x,M/4,G}^{i,j}}{b_{0,x,M/4+1,1}^{i,j} + b_{1,x,M/4+1,1}^{i,j} + b_{2,x,M/4+1,1}^{i,j}} \\ \vdots \\ \frac{b_{0,x,M/2,G}^{i,j} + b_{1,x,M/2,G}^{i,j} + b_{2,x,M/2,G}^{i,j}}{b_{0,x,M/2+1,1}^{i,j} + b_{1,x,M/2+1,1}^{i,j} + b_{2,x,M/2+1,1}^{i,j}} \\ \vdots \\ \frac{b_{0,x,3M/4,G}^{i,j} + b_{1,x,3M/4,G}^{i,j} + b_{2,x,3M/4,G}^{i,j}}{b_{0,x,3M/4+1,1}^{i,j} - b_{1,x,3M/4+1,1}^{i,j} + b_{2,x,3M/4+1,1}^{i,j}} \\ \vdots \\ b_{0,x,M,G}^{i,j} - b_{1,x,M,G}^{i,j} + b_{2,x,M,G}^{i,j} \end{bmatrix}, \quad (128)$$

e

$$\psi_x^{P, em} = \begin{bmatrix} b_{0,x,1,1}^{i,j} + b_{1,x,1,1}^{i,j} + b_{2,x,1,1}^{i,j} \\ \vdots \\ \frac{b_{0,x,M/4,1}^{i,j} + b_{1,x,M/4,G}^{i,j} + b_{2,x,M/4,G}^{i,j}}{b_{0,x,M/4+1,1}^{i,j} - b_{1,x,M/4+1,1}^{i,j} + b_{2,x,M/4+1,1}^{i,j}} \\ \vdots \\ \frac{b_{0,x,M/2,G}^{i,j} - b_{1,x,M/2,G}^{i,j} + b_{2,x,M/2,G}^{i,j}}{b_{0,x,M/2+1,1}^{i,j} - b_{1,x,M/2+1,1}^{i,j} + b_{2,x,M/2+1,1}^{i,j}} \\ \vdots \\ \frac{b_{0,x,3M/4,G}^{i,j} - b_{1,x,3M/4,G}^{i,j} + b_{2,x,3M/4,G}^{i,j}}{b_{0,x,3M/4+1,1}^{i,j} + b_{1,x,3M/4+1,1}^{i,j} + b_{2,x,3M/4+1,1}^{i,j}} \\ \vdots \\ b_{0,x,M,G}^{i,j} + b_{1,x,M,G}^{i,j} + b_{2,x,M,G}^{i,j} \end{bmatrix}. \quad (129)$$

Para as direções  $y$ , o vetor de solução particular incidente é construído na forma

$$\psi_y^{P, in} = \begin{bmatrix} b_{0,y,1,1}^{i,j} + b_{1,y,1,1}^{i,j} + b_{2,y,1,1}^{i,j} \\ \vdots \\ b_{0,y,M/4,1}^{i,j} + b_{1,y,M/4,G}^{i,j} + b_{2,y,M/4,G}^{i,j} \\ b_{0,y,M/4+1,1}^{i,j} + b_{1,y,M/4+1,1}^{i,j} + b_{2,y,M/4+1,1}^{i,j} \\ \vdots \\ b_{0,y,M/2,G}^{i,j} + b_{1,y,M/2,G}^{i,j} + b_{2,y,M/2,G}^{i,j} \\ b_{0,y,M/2+1,1}^{i,j} - b_{1,y,M/2+1,1}^{i,j} + b_{2,y,M/2+1,1}^{i,j} \\ \vdots \\ b_{0,y,3M/4,G}^{i,j} - b_{1,y,3M/4,G}^{i,j} + b_{2,y,3M/4,G}^{i,j} \\ b_{0,y,3M/4+1,1}^{i,j} - b_{1,y,3M/4+1,1}^{i,j} + b_{2,y,3M/4+1,1}^{i,j} \\ \vdots \\ b_{0,x,M,G}^{i,j} - b_{1,y,M,G}^{i,j} + b_{2,y,M,G}^{i,j} \end{bmatrix}, \quad (130)$$

e o de solução particular emergente como

$$\psi_y^{P, em} = \begin{bmatrix} b_{0,y,1,1}^{i,j} - b_{1,y,1,1}^{i,j} + b_{2,y,1,1}^{i,j} \\ \vdots \\ b_{0,y,M/4,1}^{i,j} - b_{1,y,M/4,G}^{i,j} + b_{2,y,M/4,G}^{i,j} \\ b_{0,y,M/4+1,1}^{i,j} - b_{1,y,M/4+1,1}^{i,j} + b_{2,y,M/4+1,1}^{i,j} \\ \vdots \\ b_{0,y,M/2,G}^{i,j} - b_{1,y,M/2,G}^{i,j} + b_{2,y,M/2,G}^{i,j} \\ b_{0,y,M/2+1,1}^{i,j} + b_{1,y,M/2+1,1}^{i,j} + b_{2,y,M/2+1,1}^{i,j} \\ \vdots \\ b_{0,y,3M/4,G}^{i,j} + b_{1,y,3M/4,G}^{i,j} + b_{2,y,3M/4,G}^{i,j} \\ b_{0,y,3M/4+1,1}^{i,j} + b_{1,y,3M/4+1,1}^{i,j} + b_{2,y,3M/4+1,1}^{i,j} \\ \vdots \\ b_{0,x,M,G}^{i,j} + b_{1,y,M,G}^{i,j} + b_{2,y,M,G}^{i,j} \end{bmatrix}. \quad (131)$$

De acordo com a solução analítica da equação de transporte integrada transversalmente, o cálculo dos parâmetros  $\alpha$  pode ser realizado invertendo a matriz do sistema e invertendo-o na Eq.(117), portanto, assumindo a forma:

$$\alpha = (\mathbf{A} \mathbf{f}_e^{in}(x))^{-1} \left( \overline{\psi}^{in}(x) - \psi_x^{P, in} \right), \quad (132)$$

de forma que a matriz com as componentes da função exponencial para fluxos angulares incidentes  $\mathbf{f}_e^{in}(x)$  deve ser construída adequadamente a fim de representar os fluxos angulares médios de nêutrons que incidem no nodo  $\Gamma_{i,j}$  ( $\overline{\boldsymbol{\psi}}^{in}(x)$ ) migrando nas direções de cada um dos quadrantes.

Ao substituir a Eq.(132) na Eq.(117), obtém-se uma equação para calcular os fluxos angulares médios de nêutrons emergentes  $\overline{\boldsymbol{\psi}}^{em}(x)$ , na forma:

$$\overline{\boldsymbol{\psi}}^{em} = \mathbf{A}\mathbf{f}_e^{em} (\mathbf{A}\mathbf{f}_e^{in})^{-1} \left( \overline{\boldsymbol{\psi}}^{in}(x) - \boldsymbol{\psi}_x^{P, in} \right) + \boldsymbol{\psi}_x^{P, em} \quad (133)$$

Definindo agora, uma matriz auxiliar  $\mathbf{A}_{aux}$ , a qual é uma matriz quadrada de dimensões  $MG \times MG$  construída usando apenas as componentes de autovetores e os autovalores, portanto, pode ser construída e armazenada, sendo usada no processo iterativo sem a necessidade de modificações em sua estrutura. Essa matriz possui a forma

$$\mathbf{A}_{aux} = \mathbf{A}\mathbf{f}_e^{em} (\mathbf{A}\mathbf{f}_e^{in})^{-1} \quad (134)$$

E realizando-se algumas operações algébricas, pode-se rearranjar a Eq.(133), chegando-se à equação usada no processo iterativo do método RM para calcular os fluxos angulares médios emergentes de nêutrons em um nodo  $\Gamma_{i,j}$ :

$$\overline{\boldsymbol{\psi}}^{em} = \mathbf{A}_{aux}(\overline{\boldsymbol{\psi}}^{in} - \boldsymbol{\psi}_x^{P, in}) + \boldsymbol{\psi}_x^{P, em}, \quad (135)$$

Ao se considerar uma aproximação constante nos termos de fuga transversal de nêutrons, a Eq.(135) pode ser simplificada e assumir a mesma forma proposta por Silva (2018a), visto que não há dependência espacial na solução particular quando usado desse tipo de aproximação. Portanto, nesse caso, escreve-se a solução particular como  $\boldsymbol{\psi}_x^P = \boldsymbol{\psi}_x^{P, em} = \boldsymbol{\psi}_x^{P, in} = \mathbf{b}_{x,0}$ .

Pode-se também construir um sistema de equações no formato:

$$\overline{\boldsymbol{\psi}}^{em} = \mathbf{A}_{aux}\overline{\boldsymbol{\psi}}^{in} + \mathbf{A}_{aux}^P \boldsymbol{\psi}_x^P, \quad (136)$$

onde a matriz auxiliar usada na solução particular é definida como:

$$\mathbf{A}_{aux}^P = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{aux}). \quad (137)$$

A estratégia de varredura realizada nesse método é exatamente igual à mostrada

para o método SDM no capítulo anterior, calculando os fluxos angulares médios de nêutron somente na direção de cada uma das 4 varreduras. Porém, durante o processo iterativo, os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  não são calculados, o que leva a um algoritmo com um menor número de operações elementares durante o processo iterativo, em contrapartida a precisar construir uma maior quantidade de matrizes auxiliares para iniciar o processo iterativo.

## 5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, são mostrados os resultados numéricos para 4 problemas-modelo obtidos com o *Spectral Deterministic Method* (SDM) e o *Response Matrix* (RM) usando aproximações constante, linear e quadrática para os termos de fuga transversal de nêutrons. No primeiro caso, estuda-se o fluxo escalar médio de nêutrons e a fuga pelos contornos em uma região homogênea quadrada de 20 *cm* de lado na presença de uma fonte externa de nêutrons e condições de contorno do tipo vácuo. O segundo problema-modelo trata-se de um caso mais realístico de blindagem de nêutrons, com parâmetros físicos materiais a dois grupos de energia, onde é estudada a corrente líquida em  $x$  de nêutrons do contorno leste do domínio. No terceiro, é modelado um caso heterogêneo de perfilagem de um poço de petróleo, em que é calculado o fluxo escalar de nêutrons em um detector na presença de uma fonte externa de nêutrons. No quarto e último problema-modelo estudado nesta tese, é calculado o fluxo escalar de nêutrons em um detector na extremidade do domínio espacial na presença de uma fonte de alta intensidade cercada por 3 camadas de blindagem.

Como será visto, ambos os métodos testados apresentaram os mesmos resultados numéricos para os problemas estudados, portanto, eles são mostrados de acordo com o tipo de aproximação nos termos de fuga transversal, independente do método usado. Apesar de gerarem os mesmos resultados, os tempos de CPU gerados associados aos dois métodos foram significativamente diferentes. Sendo assim, cada caso-exemplo foi executado 10 vezes com cada método e tipo de aproximação, e realizada uma média aritmética dos tempos de execução. Além dos testes de desempenho, foram calculados os desvios relativos percentuais entre cada um dos métodos com as diferentes aproximações e uma solução de referência gerada em malha fina com o método *Diamond Difference* (DD).

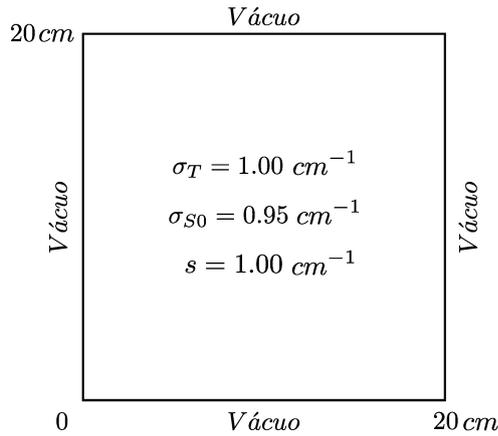
Todos os resultados foram executados em um PC com processador *Ryzen 7 3700U*, com 12 *Gb* de memória *RAM*, com algoritmos desenvolvidos na linguagem de programação C++ (GNU), com a biblioteca de álgebra linear ALGLIB (Bochkanov, 2025) para o cálculo das inversas de matrizes e autovalores e autovetores presentes na componente homogênea da solução analítica intranodal.

### 5.1 Problema-modelo 1

O primeiro problema-modelo estudado nesta tese, trata-se de um caso monoenergético homogêneo com domínio espacial quadrado de 20 *cm* de lado. A região é composta de uma zona material com seção de choque macroscópica total  $\sigma_T = 1,00 \text{ cm}^{-1}$  e seção

de choque macroscópica de espalhamento isotrópico  $\sigma_{S0} = 0,95 \text{ cm}^{-1}$ . Uma fonte externa isotrópica de nêutrons unitária está distribuída uniformemente por todo domínio espacial, o qual possui condições de contorno do tipo vácuo em todas as faces. Uma representação da geometria, bem como os parâmetros físico-materiais e as condições de contorno são mostrados na Figura 19.

Figura 19 - Geometria e parâmetros materiais do problema-modelo 1.



Fonte: O autor, 2025.

Nesse problema, são analisados o fluxo escalar médio de nêutrons na região homogênea, e a corrente líquida no eixo  $x$  no contorno leste ( $F_{x,g}^+$ ) do domínio espacial,

$$F_{x,g}^+ = \sum_{j=1}^{J_y} h_{y,j} \left( \sum_{n=1}^{M/4} \omega_n \mu_n \bar{\psi}_{x,n,g}^{i,j}(H_x) + \sum_{n=3M/4+1}^M \omega_n \mu_n \bar{\psi}_{x,n,g}^{i,j}(H_x) \right), \quad g = 1 : G. \quad (138)$$

O problema foi resolvido usando ordens de quadratura  $S_4$ ,  $S_8$  e  $S_{16}$ . Um cálculo de referência foi feito usando o método de malha fina *Diamond Difference*, com uma malha de  $300 \times 300$  nodos, resultando em nodos quadrados de  $0,066 \text{ cm}$  de lado. No método DD, a malha foi refinada até que não houvesse mudanças até a sexta casa decimal dos fluxos escalares médios de nêutrons em cada nodo, para os demais métodos foi usado um critério de parada  $\xi = 10^{-7}$ . Os métodos SDM e RM foram executados com aproximação nas fugas transversais de nêutrons constante, linear e quadrática usando diversas malhas, e comparados cada um dos resultados numéricos com a referência. Nas Tabelas 1 - 3, são mostrados os resultados numéricos para cada uma das ordens de quadratura usadas, calculados com os métodos de malha grossa, bem como os desvios percentuais em relação à referência e os tempos médios de execução de cada método espectral. Além disso,

esses resultados numéricos são dispostos graficamente nas Figuras 20-25.

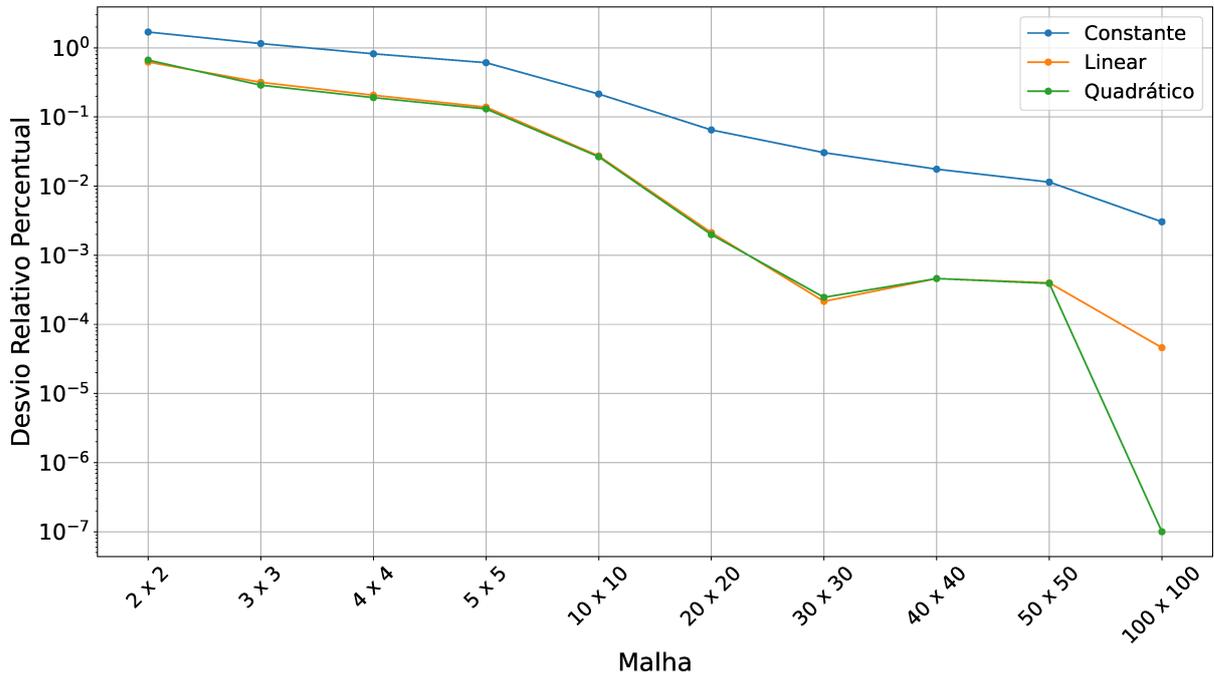
Tabela 1 - Resultados numéricos - Problema-modelo 1 -  $S_4$

Aproximação	Grade	Fluxo escalar ( $cm^{-2}s^{-1}$ )	Corrente líquida em $x$ ( $cm^{-2}s^{-1}$ )	Tempo de execução (s)	
DD	300×300	1,303422e+01	3,482860e+01	RM	SDM
Quadrática	2×2	1,312098e+01 (0,665663 %)	3,408170e+01 (2,144513 %)	0,002831	0,001808
	3×3	1,307185e+01 (0,288694 %)	3,448739e+01 (0,979675 %)	0,002682	0,003320
	4×4	1,305908e+01 (0,190729 %)	3,461807e+01 (0,604486 %)	0,004634	0,005682
	5×5	1,305127e+01 (0,130817 %)	3,468905e+01 (0,400662 %)	0,007698	0,009901
	10×10	1,303768e+01 (0,026553 %)	3,479822e+01 (0,087233 %)	0,040675	0,051150
	20×20	1,303448e+01 (0,001987 %)	3,482383e+01 (0,013684 %)	0,285679	0,462194
	30×30	1,303419e+01 (0,000246 %)	3,482715e+01 (0,004160 %)	1,351822	2,311975
	40×40	1,303416e+01 (0,000460 %)	3,482800e+01 (0,001726 %)	4,041028	5,961547
	50×50	1,303417e+01 (0,000391 %)	3,482829e+01 (0,000879 %)	8,570817	12,299293
	100×100	1,303422e+01 (0,000000 %)	3,482856e+01 (0,000109 %)	151,117670	215,836718
Linear	2×2	1,311547e+01 (0,623397 %)	3,439529e+01 (1,244121 %)	0,003951	0,002857
	3×3	1,307561e+01 (0,317549 %)	3,459820e+01 (0,661525 %)	0,003172	0,002813
	4×4	1,306115e+01 (0,206641 %)	3,467402e+01 (0,443836 %)	0,004320	0,004962
	5×5	1,305234e+01 (0,138988 %)	3,472138e+01 (0,307862 %)	0,006565	0,009515
	10×10	1,303778e+01 (0,027351 %)	3,480297e+01 (0,073580 %)	0,035120	0,045090
	20×20	1,303450e+01 (0,002125 %)	3,482430e+01 (0,012332 %)	0,240187	0,404132
	30×30	1,303419e+01 (0,000215 %)	3,482728e+01 (0,003799 %)	0,961996	2,039745
	40×40	1,303416e+01 (0,000460 %)	3,482806e+01 (0,001553 %)	2,861009	5,300093
	50×50	1,303417e+01 (0,000399 %)	3,482834e+01 (0,000738 %)	6,453116	11,137798
	100×100	1,303421e+01 (0,000046 %)	3,482860e+01 (0,000000 %)	87,555943	151,363927
Constante	2×2	1,325513e+01 (1,694877 %)	3,372419e+01 (3,170977 %)	0,003066	0,001749
	3×3	1,318465e+01 (1,154108 %)	3,407662e+01 (2,159096 %)	0,002993	0,002911
	4×4	1,314118e+01 (0,820578 %)	3,429398e+01 (1,534994 %)	0,003327	0,005070
	5×5	1,311376e+01 (0,610247 %)	3,443106e+01 (1,141418 %)	0,005110	0,007982
	10×10	1,306225e+01 (0,215072 %)	3,468860e+01 (0,401966 %)	0,022973	0,042775
	20×20	1,304269e+01 (0,064960 %)	3,478643e+01 (0,121076 %)	0,143876	0,382527
	30×30	1,303819e+01 (0,030497 %)	3,480889e+01 (0,056580 %)	0,920346	1,902755
	40×40	1,303651e+01 (0,017584 %)	3,481731e+01 (0,032427 %)	2,646203	5,344455
	50×50	1,303571e+01 (0,011431 %)	3,482131e+01 (0,020920 %)	5,659834	11,433520
	100×100	1,303462e+01 (0,003046 %)	3,482678e+01 (0,005220 %)	59,652877	121,698107

Fonte: O autor, 2025.

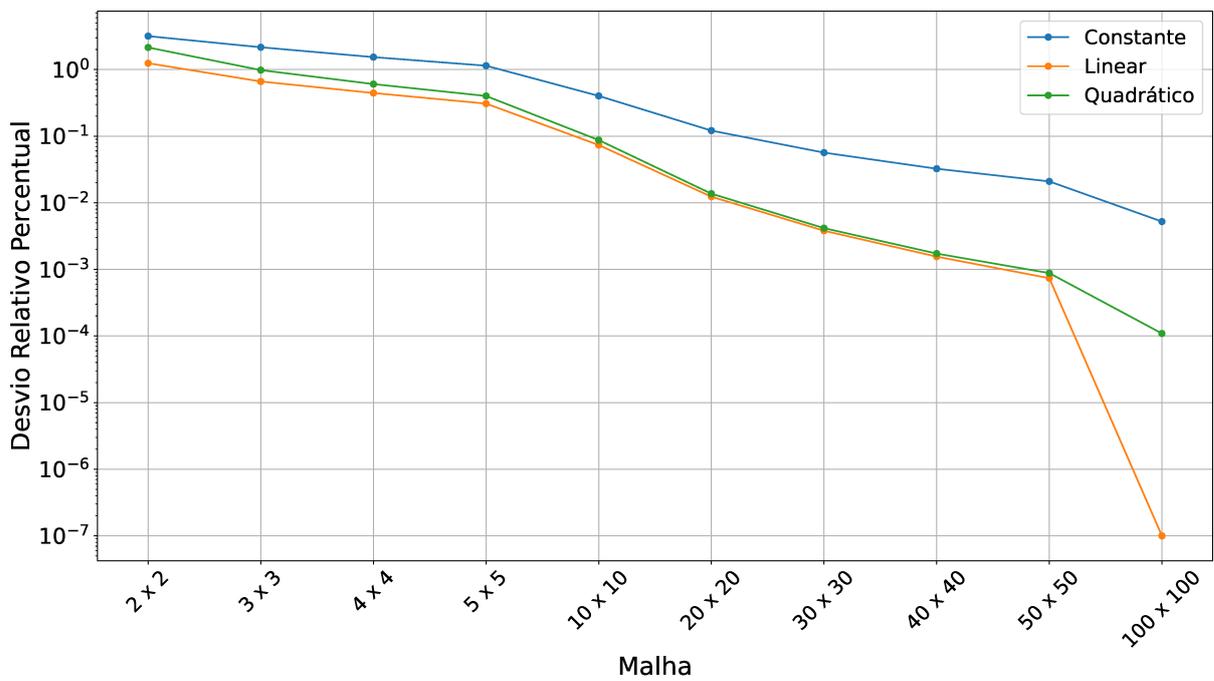
Ao se observar os resultados, nota-se que as aproximações linear e quadrática dos termos de fuga possibilitaram executar os métodos com resultados melhores que o RM-CN e SDM-CN com a mesma malha em todos os casos testados nesse problema-modelo. Nos resultados para  $S_4$ , foi obtido um resultado para o fluxo escalar de nêutrons com desvio próximo a 0,66% já na primeira malha testada,  $2 \times 2$ , a qual resulta na divisão do domínio em 4 nodos quadrados com 10 cm de lado. Foi obtido um resultado semelhante no RM-CN e SDM-CN apenas com a malha  $5 \times 5$ . Os métodos com aproximação quadrática conseguiram um resultado para o fluxo escalar de nêutrons na região igual à referência com a malha  $100 \times 100$ . Foi também atingido um resultado exato dentro das 6 casas decimais estudadas para a corrente líquida usando os métodos com aproximação linear em malha  $100 \times 100$ . Dessa análise, pode-se constatar uma grande diferença entre os resultados dessa malha com aproximação quadrática e constante, a qual obteve resultado com cerca de 0,003 % de desvio no fluxo escalar e 0,005 % na corrente líquida.

Figura 20 - Desvio relativo percentual dos fluxos escalares médios - Problema-modelo 1 -  $S_4$ .



Fonte: O autor, 2025.

Figura 21 - Desvio relativo percentual das correntes líquidas - Problema-modelo 1 -  $S_4$ .



Fonte: O autor, 2025.

Quanto aos tempos de execução usando essa ordem de quadratura, é possível notar que ao fixar o melhor resultado obtido com aproximação constante (malha de  $100 \times 100$  nodos), tanto os métodos com aproximação linear quanto quadrática obtiveram resultados com desvios semelhantes em tempos de execução inferiores aos dos métodos com aproximação constante, com o método linear chegando a ter uma execução em cerca de 1,6% do tempo dos com aproximação constante. O que mostra, para esse caso, um ganho do ponto de vista de acurácia e tempo de computação do algoritmo.

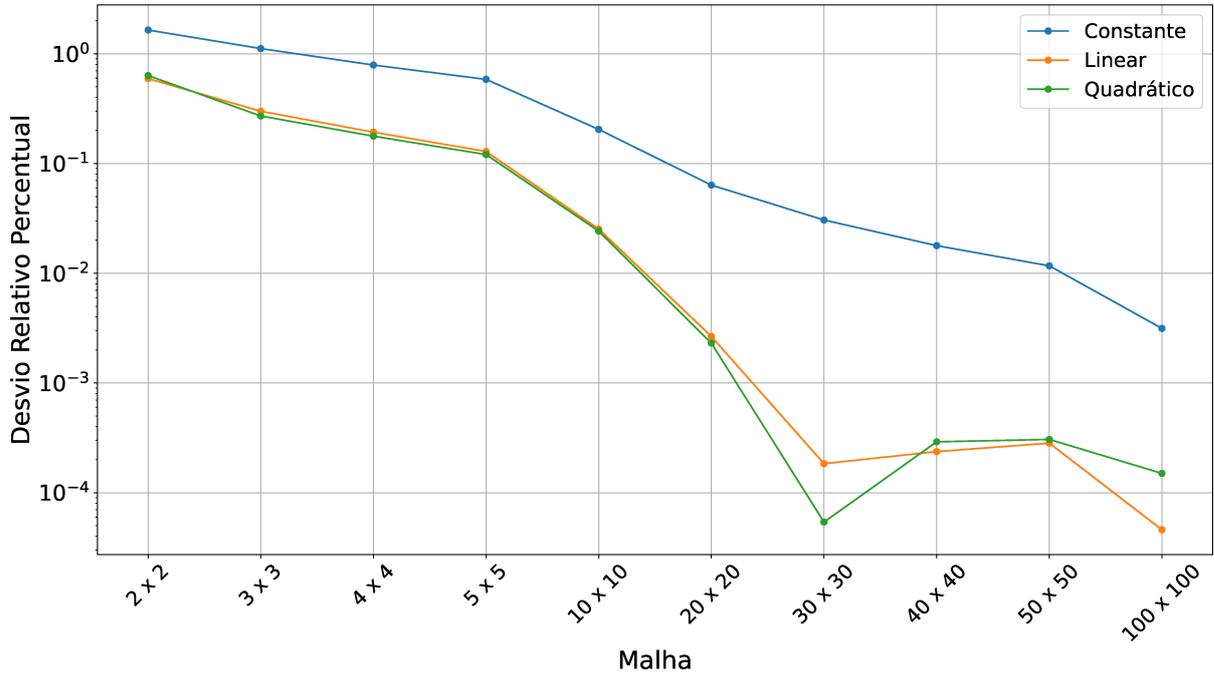
Tabela 2 - Resultados numéricos - Problema-modelo 1 -  $S_8$ 

Método	Grade	Fluxo escalar ( $cm^{-2}s^{-1}$ )	Corrente líquida em $x$ ( $cm^{-2}s^{-1}$ )	Tempo de execução (s)	
DD	$200 \times 200$	1,307041e+01	3,464766e+01	RM	SDM
Quadrática	$2 \times 2$	1,315323e+01 (0,633614 %)	3,392806e+01 (2,076922 %)	0,014585	0,014455
	$3 \times 3$	1,310585e+01 (0,271177 %)	3,432204e+01 (0,939792 %)	0,021244	0,022780
	$4 \times 4$	1,309362e+01 (0,177607 %)	3,444841e+01 (0,575060 %)	0,034065	0,037617
	$5 \times 5$	1,308619e+01 (0,120731 %)	3,451651e+01 (0,378510 %)	0,054729	0,062746
	$10 \times 10$	1,307357e+01 (0,024192 %)	3,461910e+01 (0,082430 %)	0,290561	0,422150
	$20 \times 20$	1,307071e+01 (0,002303 %)	3,464267e+01 (0,014391 %)	2,530372	3,804159
	$30 \times 30$	1,307042e+01 (0,000054 %)	3,464598e+01 (0,004843 %)	9,231761	13,993984
	$40 \times 40$	1,307037e+01 (0,000291 %)	3,464691e+01 (0,002156 %)	22,893354	34,971440
	$50 \times 50$	1,307037e+01 (0,000306 %)	3,464726e+01 (0,001146 %)	46,077958	71,057626
	$100 \times 100$	1,307040e+01 (0,000038 %)	3,464761e+01 (0,000150 %)	377,759590	603,311003
Linear	$2 \times 2$	1,314813e+01 (0,594626 %)	3,423382e+01 (1,194415 %)	0,012842	0,010161
	$3 \times 3$	1,310954e+01 (0,299386 %)	3,443007e+01 (0,627999 %)	0,019881	0,021382
	$4 \times 4$	1,309565e+01 (0,193085 %)	3,450285e+01 (0,417939 %)	0,029386	0,032124
	$5 \times 5$	1,308724e+01 (0,128764 %)	3,454796e+01 (0,287751 %)	0,045291	0,052891
	$10 \times 10$	1,307371e+01 (0,025286 %)	3,462389e+01 (0,068602 %)	0,219096	0,340724
	$20 \times 20$	1,307076e+01 (0,002655 %)	3,464318e+01 (0,012916 %)	1,784620	3,057946
	$30 \times 30$	1,307043e+01 (0,000184 %)	3,464612e+01 (0,004459 %)	6,520315	11,432861
	$40 \times 40$	1,307038e+01 (0,000237 %)	3,464697e+01 (0,001989 %)	16,366669	29,147137
	$50 \times 50$	1,307037e+01 (0,000283 %)	3,464731e+01 (0,001019 %)	33,461437	59,768598
	$100 \times 100$	1,307040e+01 (0,000046 %)	3,464764e+01 (0,000058 %)	292,859540	530,099739
Constante	$2 \times 2$	1,328562e+01 (1,646574 %)	3,357174e+01 (3,105309 %)	0,011578	0,012295
	$3 \times 3$	1,321628e+01 (1,116063 %)	3,391844e+01 (2,104667 %)	0,016962	0,020871
	$4 \times 4$	1,317363e+01 (0,789715 %)	3,413172e+01 (1,489111 %)	0,027291	0,032182
	$5 \times 5$	1,314684e+01 (0,584725 %)	3,426568e+01 (1,102461 %)	0,041053	0,051239
	$10 \times 10$	1,309716e+01 (0,204630 %)	3,451409e+01 (0,385518 %)	0,182336	0,321106
	$20 \times 20$	1,307872e+01 (0,063594 %)	3,460626e+01 (0,119494 %)	1,210681	2,685697
	$30 \times 30$	1,307440e+01 (0,030565 %)	3,462784e+01 (0,057199 %)	4,025163	10,131827
	$40 \times 40$	1,307274e+01 (0,017857 %)	3,463615e+01 (0,033229 %)	9,649632	26,209434
	$50 \times 50$	1,307194e+01 (0,011691 %)	3,464017e+01 (0,021606 %)	19,377169	55,877281
	$100 \times 100$	1,307082e+01 (0,003145 %)	3,464576e+01 (0,005475 %)	173,000930	513,431602

Fonte: O autor, 2025.

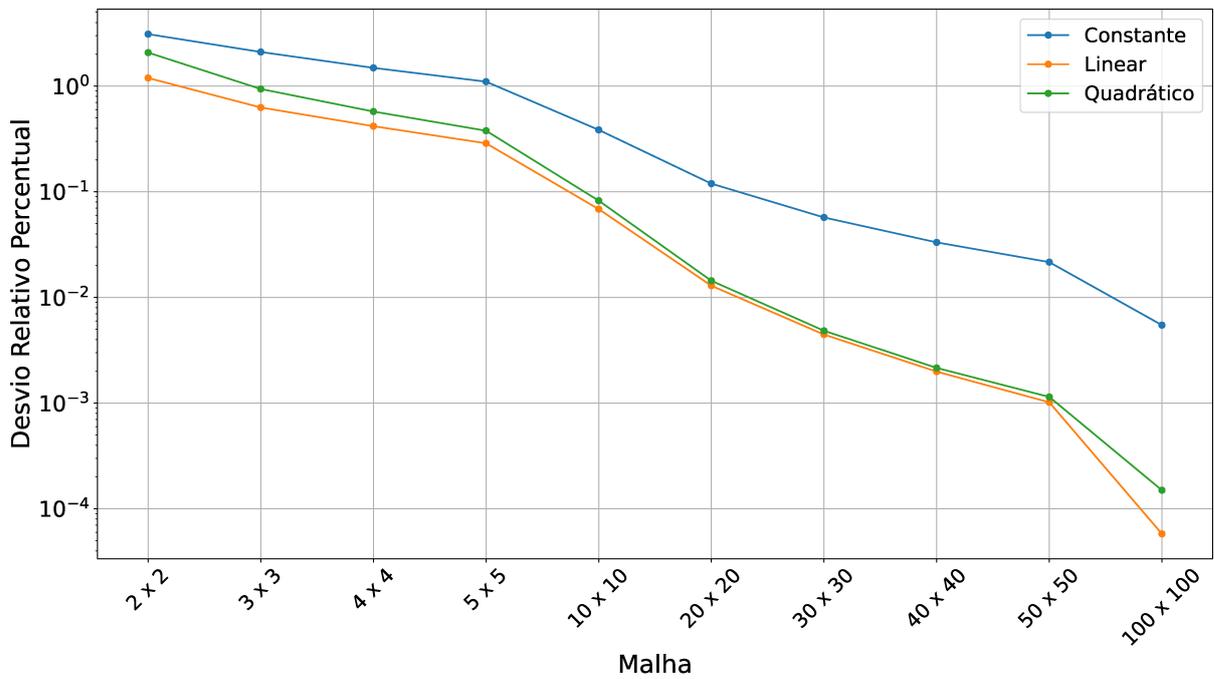
Para o caso  $S_8$ , foi observado um comportamento semelhante ao  $S_4$ , com os métodos com aproximação linear e quadrática gerando resultados com menor desvio que o RM-CN e SDM-CN em todas as malhas analisadas. Nesse problema, é importante ressaltar que o máximo de precisão atingida pelos métodos com aproximação constante foi de 4 casas decimais no fluxo escalar e 3 casas na corrente líquida usando uma malha de  $100 \times 100$  nodos. Analisando os métodos com aproximações linear e quadrática, é possível notar

Figura 22 - Desvio relativo percentual dos fluxos escalares médios - Problema-modelo 1 -  $S_8$ .



Fonte: O autor, 2025.

Figura 23 - Desvio relativo percentual das correntes líquidas - Problema-modelo 1 -  $S_8$ .



Fonte: O autor, 2025.

que eles atingiram resultados semelhantes com malha de  $20 \times 20$  nodos, sendo executados em uma fração do tempo de execução dos métodos com aproximação constante.

Tabela 3 - Resultados numéricos - Problema-modelo 1 -  $S_{16}$

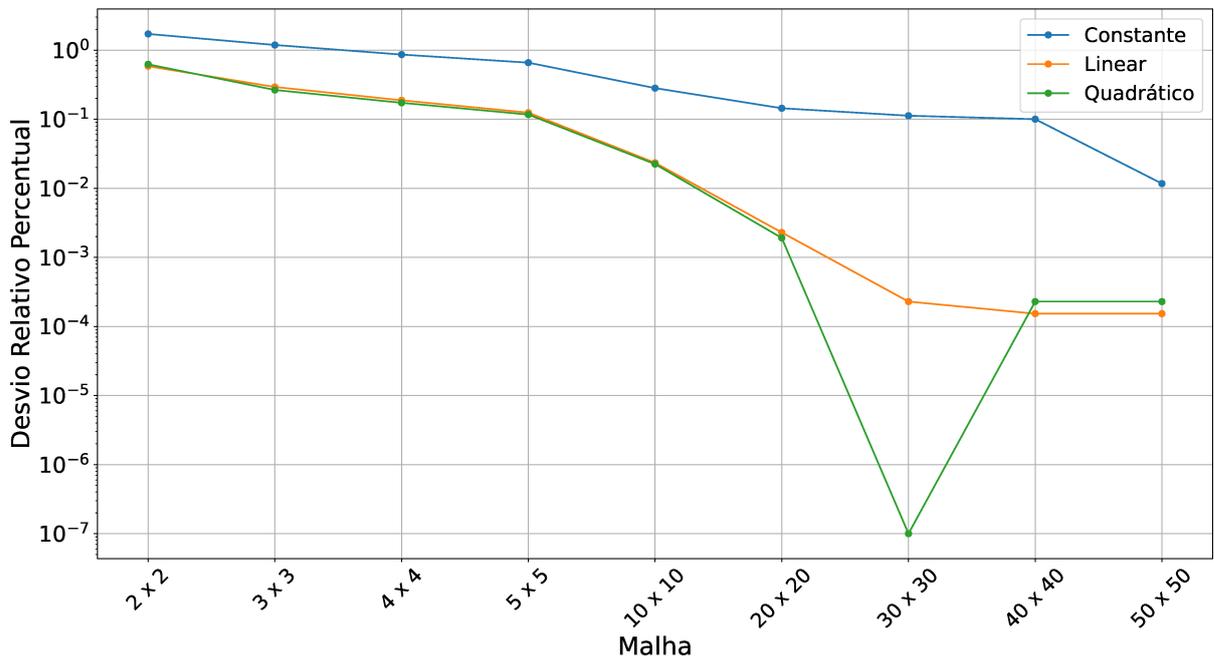
Método	Grade	Fluxo escalar ( $cm^{-2}s^{-1}$ )	Corrente líquida em $x$ ( $cm^{-2}s^{-1}$ )	Tempo de execução (s)	
DD	200×200	1,308099e+01	3,459394e+01	RM	SDM
Quadrática	2×2	1,316247e+01 (0,622886 %)	3,388342e+01 (2,053886 %)	0,282802	0,392491
	3×3	1,311563e+01 (0,264812 %)	3,427395e+01 (0,924989 %)	0,426797	0,511900
	4×4	1,310357e+01 (0,172617 %)	3,439905e+01 (0,563365 %)	0,656104	0,800245
	5×5	1,309625e+01 (0,116658 %)	3,446629e+01 (0,368995 %)	0,971596	1,233730
	10×10	1,308392e+01 (0,022399 %)	3,456686e+01 (0,078280 %)	4,583171	5,922853
	20×20	1,308124e+01 (0,001911 %)	3,458928e+01 (0,013471 %)	32,866125	46,247849
	30×30	1,308099e+01 (0,000000 %)	3,459232e+01 (0,004683 %)	111,185900	160,505695
	40×40	1,308096e+01 (0,000229 %)	3,459319e+01 (0,002168 %)	267,963900	394,151253
	50×50	1,308096e+01 (0,000229 %)	3,459354e+01 (0,001156 %)	528,571170	787,118490
Linear	2×2	1,315749e+01 (0,584818 %)	3,418678e+01 (1,176969 %)	0,259747	0,277028
	3×3	1,311927e+01 (0,292638 %)	3,438107e+01 (0,615339 %)	0,376105	0,414543
	4×4	1,310555e+01 (0,187753 %)	3,445293e+01 (0,407615 %)	0,555528	0,631738
	5×5	1,309726e+01 (0,124379 %)	3,449737e+01 (0,279153 %)	0,802277	0,952520
	10×10	1,308405e+01 (0,023393 %)	3,457158e+01 (0,064636 %)	3,490474	4,657205
	20×20	1,308129e+01 (0,002293 %)	3,458978e+01 (0,012025 %)	22,578284	34,476113
	30×30	1,308102e+01 (0,000229 %)	3,459243e+01 (0,004365 %)	74,999666	123,992712
	40×40	1,308097e+01 (0,000153 %)	3,459322e+01 (0,002081 %)	179,453373	309,084507
	50×50	1,308097e+01 (0,000153 %)	3,459355e+01 (0,001127 %)	364,475425	619,446664
Constante	2×2	1,329434e+01 (1,714623 %)	3,352737e+01 (3,232737 %)	0,277232	0,281112
	3×3	1,322532e+01 (1,186575 %)	3,387246e+01 (2,236733 %)	0,393652	0,406750
	4×4	1,318290e+01 (0,862009 %)	3,408457e+01 (1,624535 %)	0,575823	0,598585
	5×5	1,315628e+01 (0,658363 %)	3,421766e+01 (1,240418 %)	0,804861	0,872522
	10×10	1,310707e+01 (0,281867 %)	3,446370e+01 (0,530271 %)	2,911153	4,056363
	20×20	1,308906e+01 (0,144047 %)	3,455377e+01 (0,270314 %)	13,909545	29,873299
	30×30	1,308491e+01 (0,112295 %)	3,457452e+01 (0,210424 %)	39,237627	108,500474
	40×40	1,308330e+01 (0,100026 %)	3,458254e+01 (0,187282 %)	86,148273	272,403335
	50×50	1,308252e+01 (0,011684 %)	3,458647e+01 (0,021598 %)	154,057371	563,796935

Fonte: O autor, 2025.

No último caso analisado para o problema-modelo 1, empregou-se uma ordem de quadratura  $S_{16}$ . Assim como nos exemplos anteriores, aqui o mesmo comportamento foi observado, com os métodos com aproximação quadrática chegando a obter 6 casas de precisão exatas usando uma malha de  $30 \times 30$  nodos. Nesse caso, também aparece um comportamento que ainda será reportado em outros problemas, uma oscilação dos resultados, onde uma malha mais grossa usada nos métodos com aproximação quadrática (ou linear) atinge resultados com desvio menor que malhas mais finas, o que se opõe ao senso comum neste tipo de metodologia.

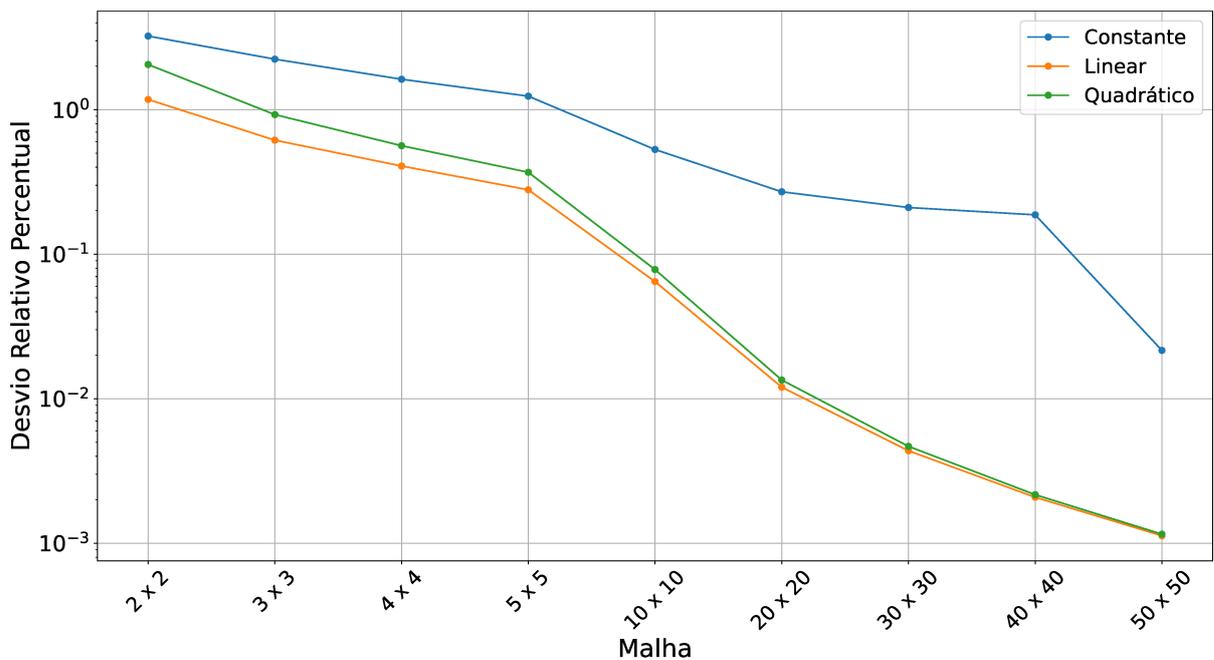
Visto que a quadratura de simetria de nível  $LQ_{16}$  estuda a migração de nêutrons em 144 direções discretas, as matrizes usadas no algoritmo tendem a ser sensivelmente maiores que nos casos  $S_4$  e  $S_8$ , implicando uma expressiva escalada nos tempos de execução nos métodos espectralnodais ao refinar a malha espacial. Neste ínterim, a possibilidade de atingir resultados com baixo desvio em relação à referência se torna ainda mais útil.

Figura 24 - Desvio relativo percentual dos fluxos escalares médios - Problema-modelo 1 -  $S_{16}$ .



Fonte: O autor, 2025.

Figura 25 - Desvio relativo percentual das correntes líquidas - Problema-modelo 1 -  $S_{16}$ .



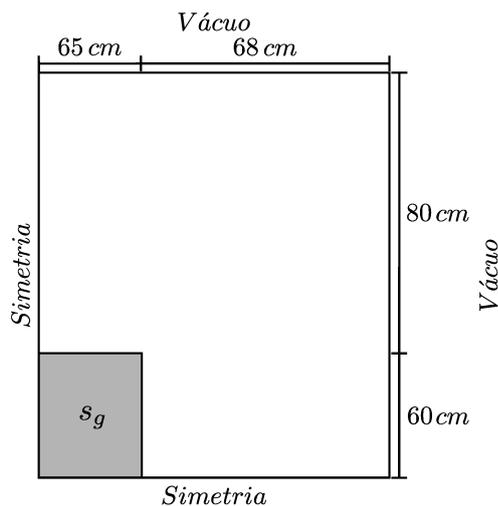
Fonte: O autor, 2025.

Ao se observar os resultados, nota-se que o menor desvio atingido pelos métodos com aproximação constante foi de 0,01 % no fluxo escalar e 0,02 % na corrente líquida com a malha  $50 \times 50$ . Resultados com desvios menores usando aproximações linear e quadrática foram obtidos com a malha  $20 \times 20$ , novamente em uma fração do tempo de computação dos métodos com aproximação constante.

## 5.2 Problema-modelo 2

O problema-modelo 2, adaptado de Otto (1983), é um estudo de um caso realístico de blindagem de nêutrons em um meio absorvedor com dois grupos de energia. A Figura 26 mostra uma representação da geometria desse problema-modelo.

Figura 26 - Geometria do problema-modelo 2.



Fonte: O autor, 2025.

A densidade de nêutrons da fonte-fixa  $s_g$ , e os parâmetros físico-materiais que compõem o domínio homogêneo desse problema são mostrados na Tabela 4. As condições de contorno desse problema são do tipo reflexiva nos contornos oeste e sul e vácuo nos contornos leste e norte.

O domínio espacial homogêneo é dividido em duas partes, sendo uma com uma fonte externa de nêutrons, e a outra, uma camada de blindagem. Portanto, como mostrado na Figura 19, no eixo  $x$ , o domínio espacial é dividido na região com fonte entre 0 e 65 cm e a blindagem entre 65 e 133 cm. Já no eixo  $y$ , a região com fonte está entre 0 e 60 cm e a blindagem entre 60 e 140 cm.

Nesse problema-modelo, foram estudadas as correntes líquidas no contorno em  $x$  leste do domínio espacial para cada grupo de energia ( $F_{x,g}^+$ ). Um valor de referência para

Tabela 4 - Fonte externa de nêutrons e parâmetros físico-materiais - problema-modelo 2

	$g = 1$	$g = 2$
$\sigma_{T_g} (cm^{-1})$	0,092104	0,100877
$s_g (cm^{-3}s^{-1})$	0,006546	0,017701
	$\sigma_{S_0}^{g' \rightarrow g} (cm^{-1})$	
$g' = 1$	0,006947	0,023434
$g' = 2$	0,000000	0,004850

Fonte: O autor, 2025.

as correntes líquidas em  $x$  no contorno leste do domínio foi calculado usando o método de malha fina *Diamond Difference* com as ordens de quadratura  $S_4$  e  $S_8$ . Na primeira ordem de quadratura estudada, foi usada uma malha discretizada no eixo  $x$  com 1050 nodos no intervalo  $0 \leq x \leq 65$ , e 1225 entre  $65 \leq x \leq 133$ , para o eixo  $y$ , foram usados 1050 nodos no intervalo  $0 \leq y \leq 60$ , e 1400 nodos em  $60 \leq y \leq 140$ . Para o caso  $S_8$ , foi usada uma malha com 720 nodos entre  $0 \leq x \leq 60$  e 840 no restante de  $x$ , e no eixo coordenado  $y$ , uma malha com 720 nodos em  $0 \leq x \leq 65$  e 960 entre  $65 \leq x \leq 133$ . Em ambos os casos foi possível obter um valor de referência com 4 casas decimais. Portanto, foram executados os métodos espectralnodais com aproximações constante, linear e quadrática com diversas malhas para as duas ordens de quadratura estudadas, e comparados os desvios relativos percentuais com a referência usando um critério de parada  $\xi = 10^{-5}$ . Assim como no problema-modelo anterior, os tempos médios entre 10 execuções de cada método também foram calculados. Estes resultados são apresentados para as ordens de quadratura  $S_4$  e  $S_8$  nas Tabelas 5 e 6 respectivamente, com representações gráficas nas Figuras 27-30.

Os resultados obtidos com ordem de quadratura  $S_4$  mostraram uma melhora nos desvios usando tanto a aproximação quadrática quanto a linear, quando comparadas com os resultados obtidos usando a aproximação constante. Os métodos com aproximação linear geraram resultados com desvio menor que 1% em todas as malhas estudadas. Ao comparar o menor desvio obtido com a aproximação constante, que é de cerca de 0,1% de desvio quando usada a malha  $65 \times 70$ , foram atingidos desvios ainda menores que os das demais aproximações já com malha  $26 \times 28$  nodos. Na solução desse problema, assim como na do anterior, o RM gerou resultados com tempo de execução menor que o do SDM. Ao comparar o tempo de execução dos métodos com aproximação constante, o melhor desvio obtido com o RM foi gerado com 48 segundos de execução. Considerando um resultado obtido com a aproximação quadrática menor que este desvio, nota-se que o tempo de execução foi reduzido em cerca de 93% em comparação ao do RM-CN. Ainda, com a aproximação linear, houve redução de mais de 95% para se obter uma solução numérica com desvio menor que os 0.1% obtidos com o RM-CN.

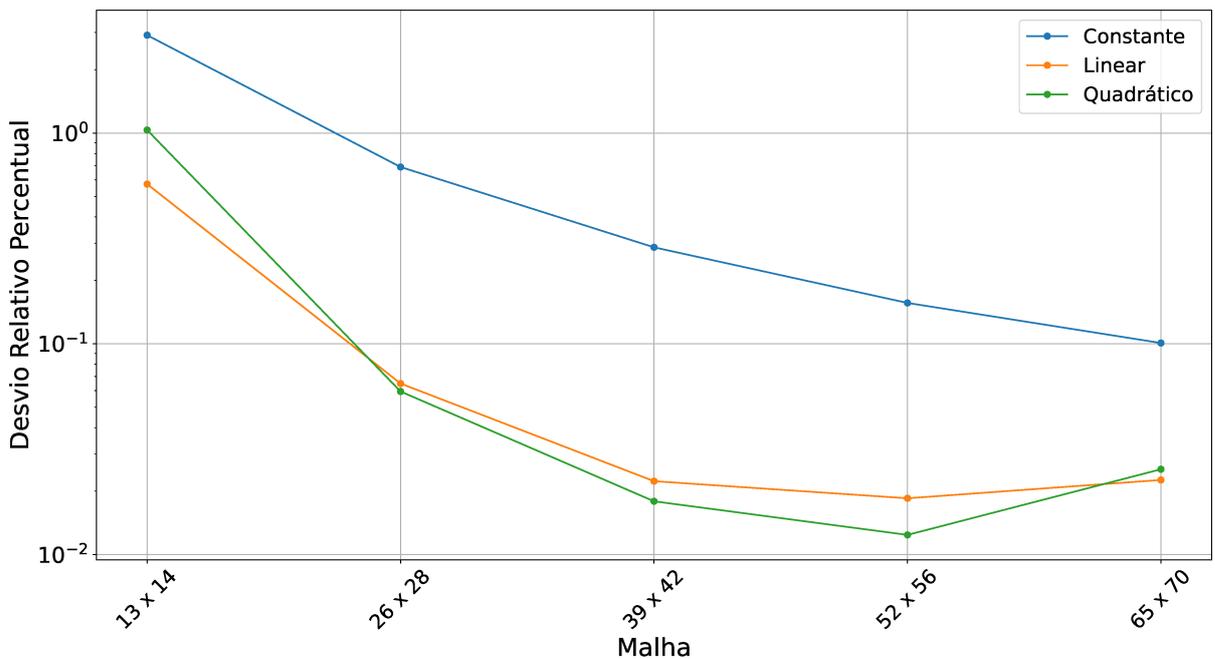
Para o caso executado com a ordem de quadratura  $S_8$ , ambas aproximações linear e

Tabela 5 - Resultados numéricos - Problema-modelo 2 -  $S_4$ 

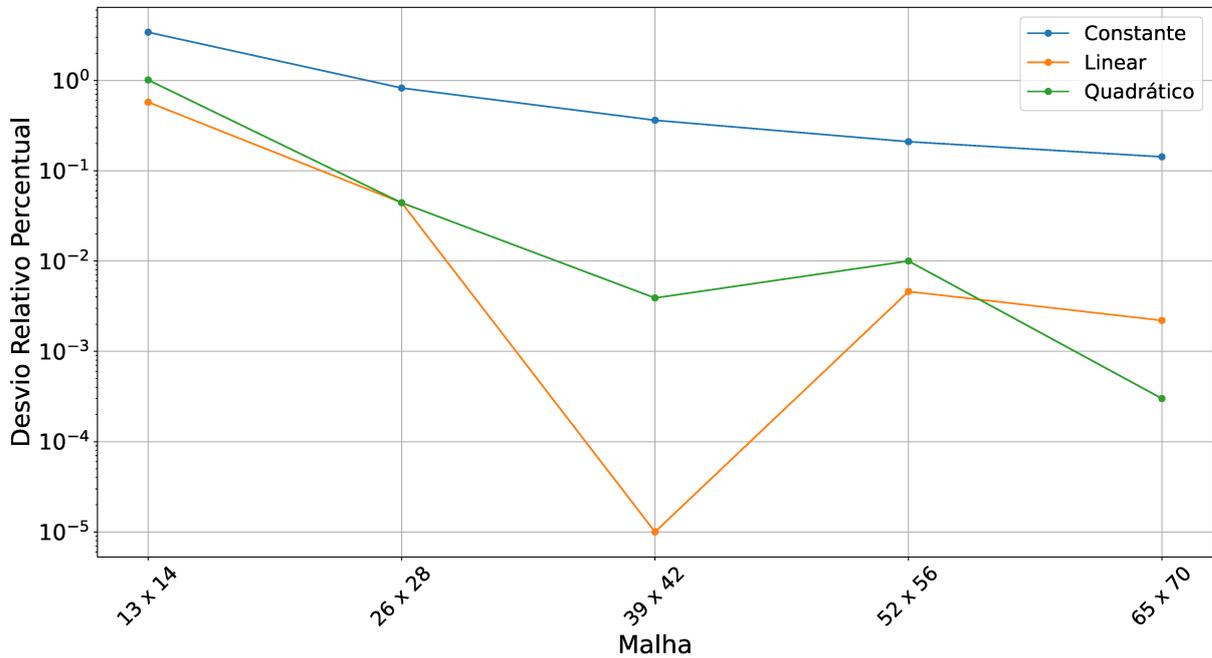
Método	Grade	$F_{x,1}^+ (cm^{-2}s^{-1})$	$F_{x,2}^+ (cm^{-2}s^{-1})$	Tempo de execução (s)	
DD	$2275 \times 2450$	4,1166e-04	6,5453e-04	RM	SDM
Quadrática	$13 \times 14$	4,1591e-04 (1,0339 %)	6,6116e-04 (1,0115 %)	0,251954	0,429734
	$26 \times 28$	4,1190e-04 (0,0594 %)	6,5482e-04 (0,0442 %)	3,366551	5,414543
	$39 \times 42$	4,1173e-04 (0,0179 %)	6,5451e-04 (0,0039 %)	15,752423	25,623228
	$52 \times 56$	4,1171e-04 (0,0124 %)	6,5447e-04 (0,0100 %)	47,295027	75,231498
	$65 \times 70$	4,1176e-04 (0,0254 %)	6,5454e-04 (0,0003 %)	116,328700	182,340345
Linear	$13 \times 14$	4,1401e-04 (0,5726 %)	6,5830e-04 (0,5748 %)	0,180682	0,294243
	$26 \times 28$	4,1192e-04 (0,0648 %)	6,5482e-04 (0,0443 %)	2,245703	3,943381
	$39 \times 42$	4,1175e-04 (0,0223 %)	6,5453e-04 (0,0000 %)	10,082851	17,534560
	$52 \times 56$	4,1173e-04 (0,0185 %)	6,5450e-04 (0,0046 %)	29,019134	50,652763
	$65 \times 70$	4,1175e-04 (0,0226 %)	6,5452e-04 (0,0022 %)	73,464926	127,153476
Constante	$13 \times 14$	3,9966e-04 (2,9135 %)	6,3216e-04 (3,4180 %)	0,149464	0,283892
	$26 \times 28$	4,0881e-04 (0,6902 %)	6,4914e-04 (0,8244 %)	1,552985	3,159106
	$39 \times 42$	4,1047e-04 (0,2870 %)	6,5216e-04 (0,3623 %)	6,601949	14,786524
	$52 \times 56$	4,1101e-04 (0,1563 %)	6,5316e-04 (0,2097 %)	20,204767	45,399477
	$65 \times 70$	4,1124e-04 (0,1009 %)	6,5360e-04 (0,1426 %)	48,343652	109,224891

Fonte: O autor, 2025.

Figura 27 - Desvio relativo percentual dos fluxos escalares médios - Problema-modelo 2 -  $S_4$ ,  $g = 1$ .



Fonte: O autor, 2025.

Figura 28 - Desvio relativo percentual dos correntes líquidas - Problema-modelo 2 -  $S_4$ ,  $g = 2$ .

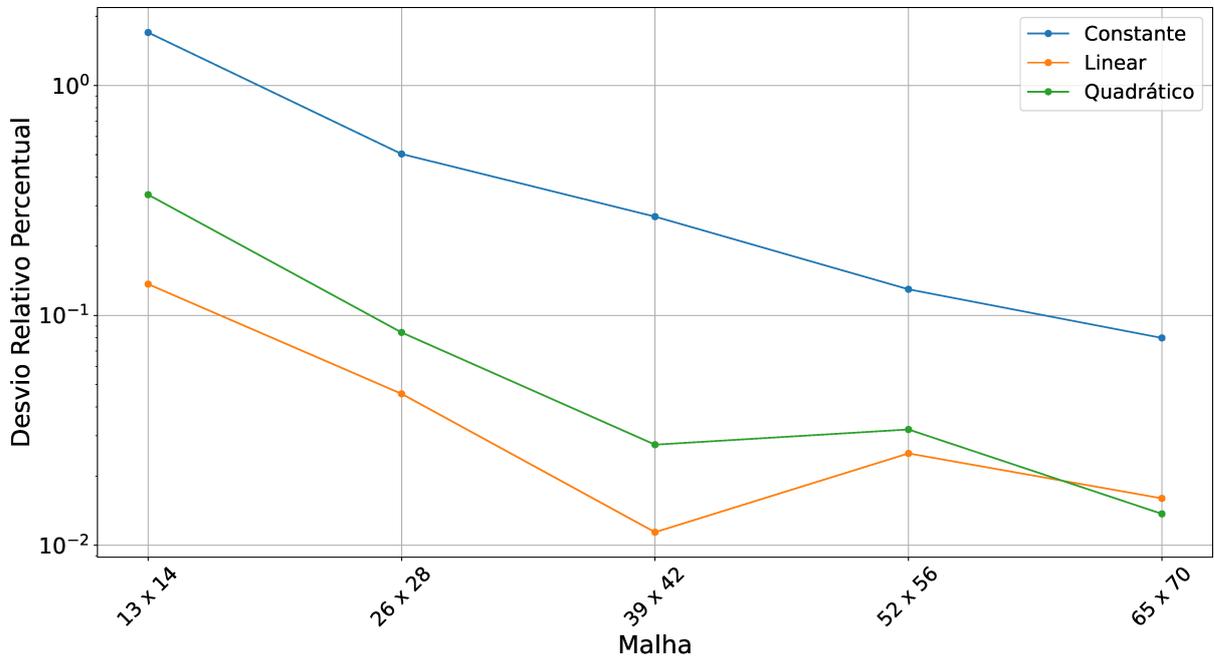
Fonte: O autor, 2025.

Tabela 6 - Resultados numéricos - Problema-modelo 2 -  $S_8$ 

Método	Grade	$F_{x,1}^+ (cm^{-2}s^{-1})$	$F_{x,2}^+ (cm^{-2}s^{-1})$	Tempo de execução (s)	
DD	1560 x 1680	4,3870e-04	7,0540e-04	RM	SDM
Quadrática	13 x 14	4,4017e-04 (0,3351 %)	7,0911e-04 (0,5259 %)	3,159918	4,471496
	26 x 28	4,3907e-04 (0,0843 %)	7,0618e-04 (0,1106 %)	45,576087	71,713479
	39 x 42	4,3858e-04 (0,0274 %)	7,0522e-04 (0,0255 %)	203,512523	331,816332
	52 x 56	4,3884e-04 (0,0319 %)	7,0566e-04 (0,0369 %)	593,294858	982,164213
	65 x 70	4,3876e-04 (0,0137 %)	7,0552e-04 (0,0170 %)	1350,384791	2195,170390
Linear	13 x 14	4,3930e-04 (0,1368 %)	7,0693e-04 (0,2169 %)	2,180572	3,389836
	26 x 28	4,3890e-04 (0,0456 %)	7,0580e-04 (0,0567 %)	25,605946	45,411872
	39 x 42	4,3865e-04 (0,0114 %)	7,0536e-04 (0,0057 %)	119,674283	218,774116
	52 x 56	4,3881e-04 (0,0251 %)	7,0561e-04 (0,0298 %)	355,324137	659,549871
	65 x 70	4,3877e-04 (0,0160 %)	7,0553e-04 (0,0184 %)	818,417081	1465,261293
Constante	13 x 14	4,3124e-04 (1,7005 %)	6,9093e-04 (2,0513 %)	1,451252	3,160527
	26 x 28	4,3649e-04 (0,5038 %)	7,0128e-04 (0,5841 %)	11,678677	37,909799
	39 x 42	4,3752e-04 (0,2690 %)	7,0331e-04 (0,2963 %)	52,940924	194,901841
	52 x 56	4,3813e-04 (0,1299 %)	7,0438e-04 (0,1446 %)	147,349752	577,393687
	65 x 70	4,3835e-04 (0,0798 %)	7,0477e-04 (0,0893 %)	324,183035	1268,437993

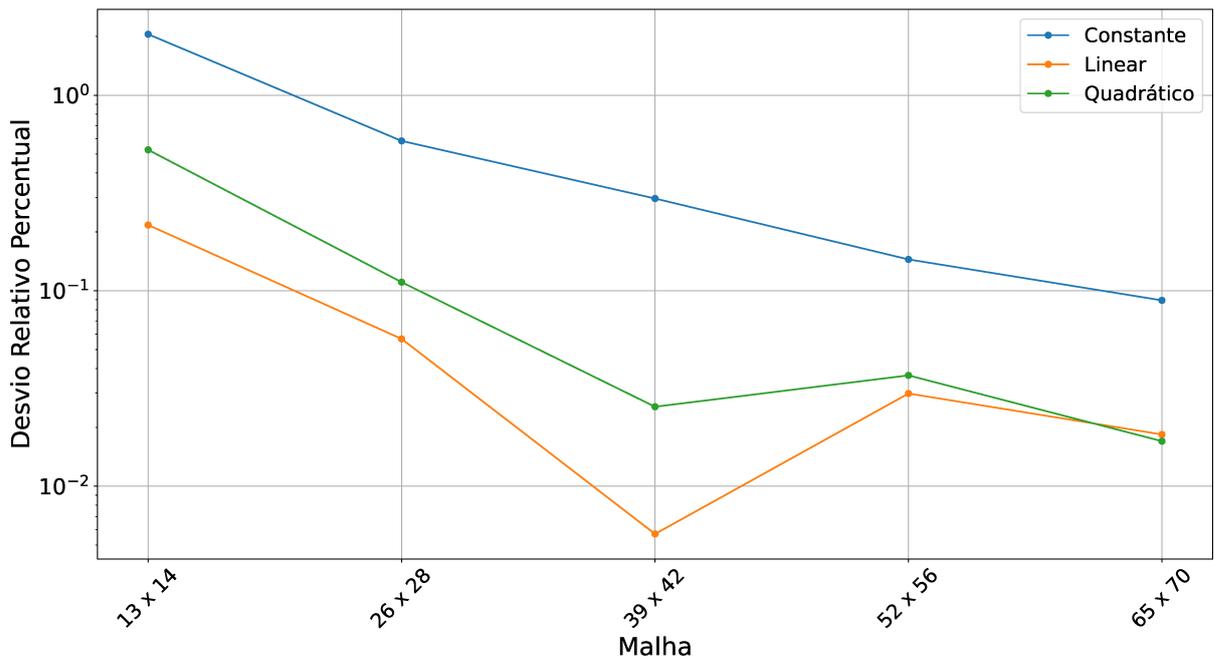
Fonte: O autor, 2025.

Figura 29 - Desvio relativo percentual dos fluxos escalares médios - Problema-modelo 2 -  $S_8$ ,  $g = 1$ .



Fonte: O autor, 2025.

Figura 30 - Desvio relativo percentual dos correntes líquidas - Problema-modelo 2 -  $S_8$ ,  $g = 2$ .



Fonte: O autor, 2025.

quadrática geraram resultados com desvios menores que 1% em todas as malhas estudadas, onde foram atingidas 2 casas decimais de precisão, enquanto a aproximação constante conseguiu gerar resultados com apenas 1 casa decimal nos dois grupos de energia, quando usada a malha mais fina. Quanto aos tempos de execução nesse caso, é possível notar uma expressiva escalada do tempo necessário para resolver o problema usando o método SDM, o qual se acentua quando usada a aproximação quadrática, devido ao fato de que nessa alguns passos algébricos a mais devem ser realizados, a fim de se calcular os coeficientes de grau 2 da expansão do termo de fuga transversal de nêutrons. Nesse caso, em função de se tratar os parâmetros físico-materiais a 2 grupos de energia, a dimensão das matrizes se torna ainda maior. Portanto, ao se analisar o caso  $S_8$ , apesar das dimensões das matrizes, os métodos com aproximações quadrática e linear geraram resultados com desvios relativos baixos em um tempo de execução razoável, principalmente com aproximação linear, que obteve 2 casas decimais em ambos os grupos de energia com a malha  $26 \times 28$ . Esse resultado, que foi executado com o RM-LIN em cerca de 25 segundos, atingiu uma precisão não atingida com a aproximação constante nem com a malha mais fina e levou 324 segundos para ser executada.

### 5.3 Problema-modelo 3

No terceiro problema-modelo, é estudado um caso que simula a perfilagem de um poço de petróleo, onde é calculado o fluxo escalar de nêutrons em um detector  $D$  considerando a presença de uma fonte externa unitária  $s$ , adaptado de Dominguez (2006). O domínio consiste em um retângulo de  $56 \times 64$  cm composto por 3 diferentes zonas materiais: água, rocha e aço, com parâmetros físico-materiais mostrados na Tabela 7.

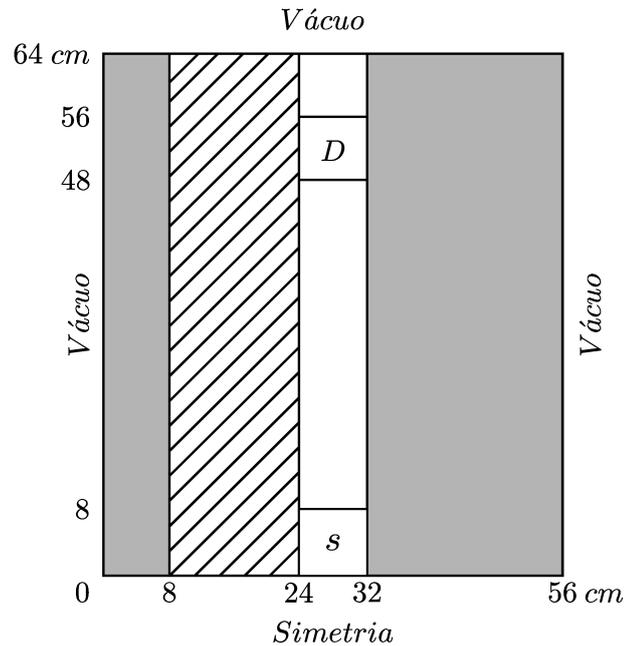
Tabela 7 - Parâmetros físico-materiais - Problema-modelo 3

Material	$\sigma_T$ ( $cm^{-1}$ )	$\sigma_{S0}$ ( $cm^{-1}$ )
Rocha	0,330263	0,314419
Água	0,694676	0,634883
Aço	0,499122	0,494460

Esse problema é modelado com condições de contorno do tipo vácuo nos contornos leste, oeste e norte, e do tipo reflexivo no contorno sul. Os posicionamentos das fontes e detector, bem como as dimensões de cada região que compõe o domínio espacial são mostrados na Figura 31, onde as partes em cinza representam a rocha, a parte hachurada representa a água e a parte branca o aço.

Para esse problema, foi gerado um valor de referência usando o método DD com

Figura 31 - Geometria do problema-modelo 3.



Fonte: O autor, 2025.

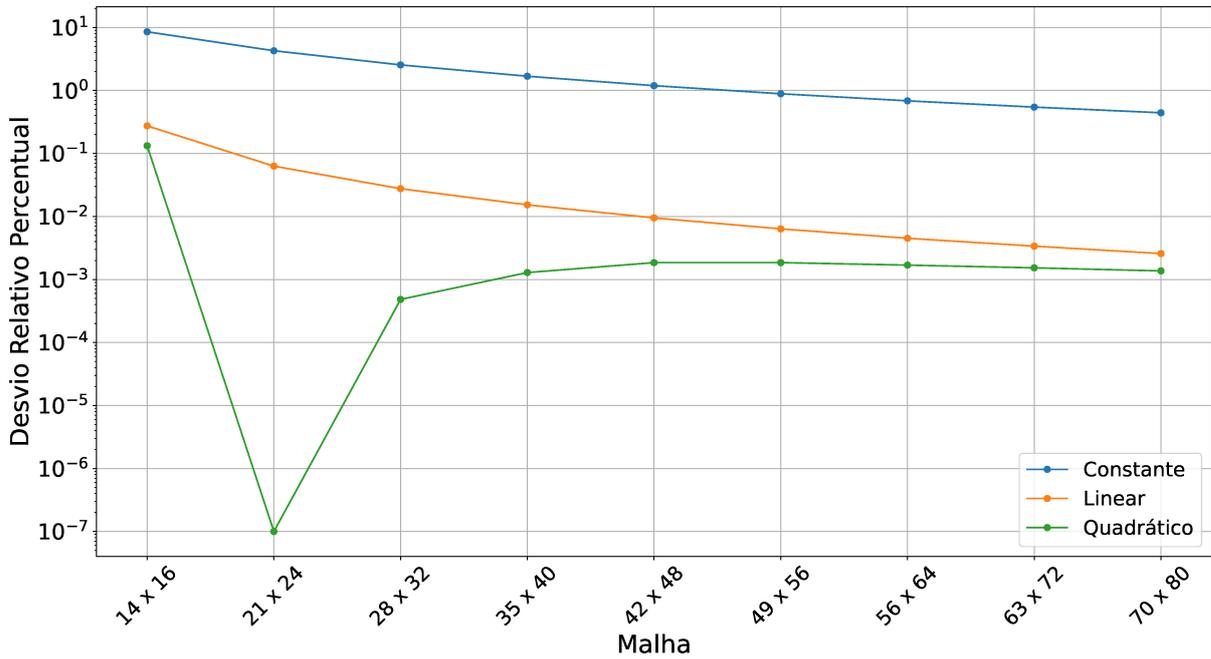
uma malha no domínio de  $2800 \times 3200$  nodos para o problema de  $S_4$ , com 6 casas decimais. Para o caso  $S_{16}$ , foi usada uma malha de  $1680 \times 1920$  nodos, gerando valores com 4 casas decimais de precisão. Uma análise do problema com ordem de quadratura  $S_6$  também foi feita, comparando os resultados obtidos por Dominguez (2006). Assim como nos problemas anteriores, foram utilizados os métodos espectralnodais com aproximações constante, linear e quadrática para os termos de fuga transversal. Eles foram executados empregando diversas malhas a fim de se calcular o fluxo escalar médios de nêutrons na região do detector  $D$ . Os resultados foram gerados com critério de parada  $\xi = 10^{-7}$  no caso  $S_4$  e  $\xi = 10^{-5}$  no caso  $S_{16}$ . Estes resultados são mostrados respectivamente nas Tabelas 8 e 9 e nas Figuras 32 e 33, juntamente com os tempos médios de 10 execuções de cada um dos algoritmos espectralnodais.

Na solução do problema-modelo 3, foi quando encontrou-se a maior diferença entre os desvios associados às diferentes formas de aproximação da fuga transversal de nêutrons. Para o problema resolvido com a ordem de quadratura  $S_4$ , tanto as aproximações quadrática quanto linear proporcionaram resultados com menos de 0,3 % de desvio da referência, não obtido com nenhuma das malhas testadas com a aproximação constante. Vale destacar o resultado usando a fuga quadrática com malha  $21 \times 24$ , que gerou um resultado para o fluxo escalar médio de nêutrons no detector com todas as casas decimais iguais à referência gerada na malha fina. Nesse caso, fica evidente uma oscilação do desvio em torno do resultado de referência ao se refinar a malha, o que foi constatado não só na solução desse problema modelo. Tal fato torna interessante um estudo mais aprofundado de uma

Tabela 8 - Resultados numéricos - Problema-modelo 3 -  $S_4$ 

Método	Nodos	Fluxo escalar médio ( $cm^{-2}s^{-1}$ )	Tempo de execução (s)	
DD	2800 × 3200	1,241859e-02	RM	SDM
Quadrática	14 × 16	1,243506e-02 (0,132624 %)	0,291409	0,405336
	21 × 24	1,241859e-02 (0,000000 %)	1,228079	2,369400
	28 × 32	1,241853e-02 (0,000483 %)	3,504705	5,845819
	35 × 40	1,241875e-02 (0,001288 %)	11,643803	16,135711
	42 × 48	1,241882e-02 (0,001852 %)	17,836698	24,020164
	49 × 56	1,241882e-02 (0,001852 %)	37,082007	49,436438
	56 × 64	1,241880e-02 (0,001691 %)	48,252825	63,276113
	63 × 72	1,241878e-02 (0,001530 %)	80,855430	104,719880
Linear	70 × 80	1,241876e-02 (0,001369 %)	99,925794	128,660813
	14 × 16	1,245266e-02 (0,274347 %)	0,204880	0,270455
	21 × 24	1,242641e-02 (0,062970 %)	0,872421	1,647633
	28 × 32	1,242202e-02 (0,027620 %)	2,305795	4,607309
	35 × 40	1,242049e-02 (0,015300 %)	6,845922	12,218964
	42 × 48	1,241977e-02 (0,009502 %)	11,263417	19,865694
	49 × 56	1,241938e-02 (0,006361 %)	22,036631	38,179894
	56 × 64	1,241915e-02 (0,004509 %)	30,626762	52,670005
Constante	63 × 72	1,241901e-02 (0,003382 %)	48,768983	83,579541
	70 × 80	1,241891e-02 (0,002577 %)	63,651119	108,387123
	14 × 16	1,135776e-02 (8,542274 %)	0,095109	0,252669
	21 × 24	1,188804e-02 (4,272224 %)	0,407625	1,285291
	28 × 32	1,210230e-02 (2,546907 %)	1,793678	3,865288
	35 × 40	1,220950e-02 (1,683686 %)	3,889257	7,777125
	42 × 48	1,227051e-02 (1,192406 %)	7,574372	15,218134
	49 × 56	1,230841e-02 (0,887218 %)	12,666986	24,115497
	56 × 64	1,233351e-02 (0,685102 %)	19,026663	36,917977
	63 × 72	1,235096e-02 (0,544587 %)	26,875279	53,240155
	70 × 80	1,236358e-02 (0,442965 %)	37,185619	73,308445

Fonte: O autor, 2025.

Figura 32 - Desvio relativo percentual dos fluxos escalares médios - Problema-modelo 3 -  $S_4$ 

Fonte: O autor, 2025.

possível malha ótima para execução dos métodos com aproximações quadrática e linear. Os testes de desempenho mostraram uma queda significativa no tempo de execução, ao se comparar as execuções com nodos quadrados de 4 cm de lado ( $14 \times 16$ ), o RM-QUAD obteve um desvio menor que 0,14 % em 0,29 segundos, enquanto o RM-CN apesar de ter uma execução mais rápida, obteve mais de 8,5 % de desvio da referência. Considerando os melhores desvios obtidos por cada forma de aproximação, há uma diminuição de cerca de 96,6 % do tempo de execução.

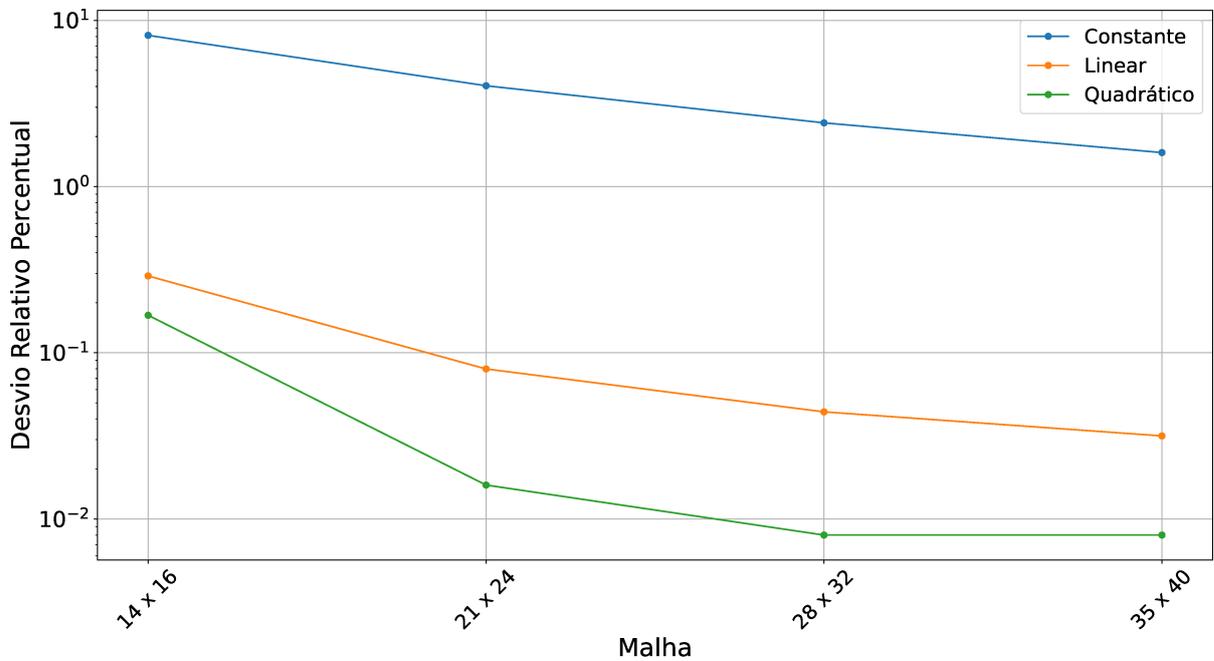
Na solução com a ordem de quadratura  $S_{16}$ , mais uma vez os métodos espectro-nodais geraram resultados com desvio menor que 0,3 % em todas as malhas estudadas. Dadas as dimensões das matrizes construídas nos métodos para solução desse problema com ordem de quadratura  $S_{16}$ , ele se tornou computacionalmente caro do ponto de vista do armazenamento dos dados durante o processo iterativo. Sendo assim, um refinamento de malha mais expressivo pode se tornar inviável, acarretando na necessidade do uso de computadores com maior capacidade de memória. Portanto, é válido destacar a contribuição proporcionada por esse método de aproximação de fuga transversal de nêutrons, uma vez que foi possível gerar resultados com 3 casas decimais com a malha  $21 \times 24$  usando a aproximação quadrática, enquanto a aproximação constante proporcionou resultados com uma só casa decimal mesmo na malha mais fina.

Considerando os tempos de execução do RM, nota-se um ganho de desempenho quando comparados os resultados para o fluxo escalar de nêutrons com a aproximação

Tabela 9 - Resultados numéricos - Problema-modelo 3 -  $S_{16}$ 

Método	Grade	Fluxos escalar médio ( $cm^{-2}s^{-1}$ )	Tempo de execução (s)	
DD	1680 × 1920	1,2491e-02	RM	SDM
Quadrática	14 × 16	1,2512e-02 (0,1681 %)	16,842631	24,501343
	21 × 24	1,2493e-02 (0,0160 %)	51,299661	75,386401
	28 × 32	1,2492e-02 (0,0080 %)	98,367201	146,366479
	35 × 40	1,2492e-02 (0,0080 %)	184,198713	277,363037
Linear	14 × 16	1,2527e-02 (0,2898 %)	12,123780	18,018573
	21 × 24	1,2500e-02 (0,0799 %)	33,874493	53,661467
	28 × 32	1,2496e-02 (0,0441 %)	69,363400	111,105570
	35 × 40	1,2494e-02 (0,0316 %)	125,972309	209,911151
Constante	14 × 16	1,1476e-02 (8,1259 %)	6,908126	15,186128
	21 × 24	1,1986e-02 (4,0429 %)	15,938022	41,144318
	28 × 32	1,2189e-02 (2,4177 %)	33,059989	89,913931
	35 × 40	1,2291e-02 (1,6012 %)	55,523428	164,496193

Fonte: O autor, 2025.

Figura 33 - Desvio relativo percentual dos fluxos escalares médios - Problema-modelo 3 -  $S_8$ 

Fonte: O autor, 2025.

quadrática, já com a primeira malha ( $14 \times 16$  nodos) e com a malha mais fina com a aproximação constante,  $35 \times 40$  nodos. Nesse caso, obtendo com a aproximação quadrática um desvio cerca de 10 vezes menor que com a aproximação constante, houve uma redução de 55,52 segundos para 16,84 segundos, resultando em uma diminuição de cerca de 70 % do tempo de execução.

É importante ressaltar que uma malha mais grossa ainda foi testada, de  $7 \times 8$  nodos, resultando em nodos quadrados com 8 *cm* de lado. Porém, os métodos espectralnodais com todos os tipos de aproximações testadas aqui geraram resultados numéricos para o fluxo escalar médio de nêutrons negativos em algumas regiões. Dessa forma, apesar de ter sido obtida uma precisão razoável nos detectores, com aproximações linear e quadrática, eles foram descartados.

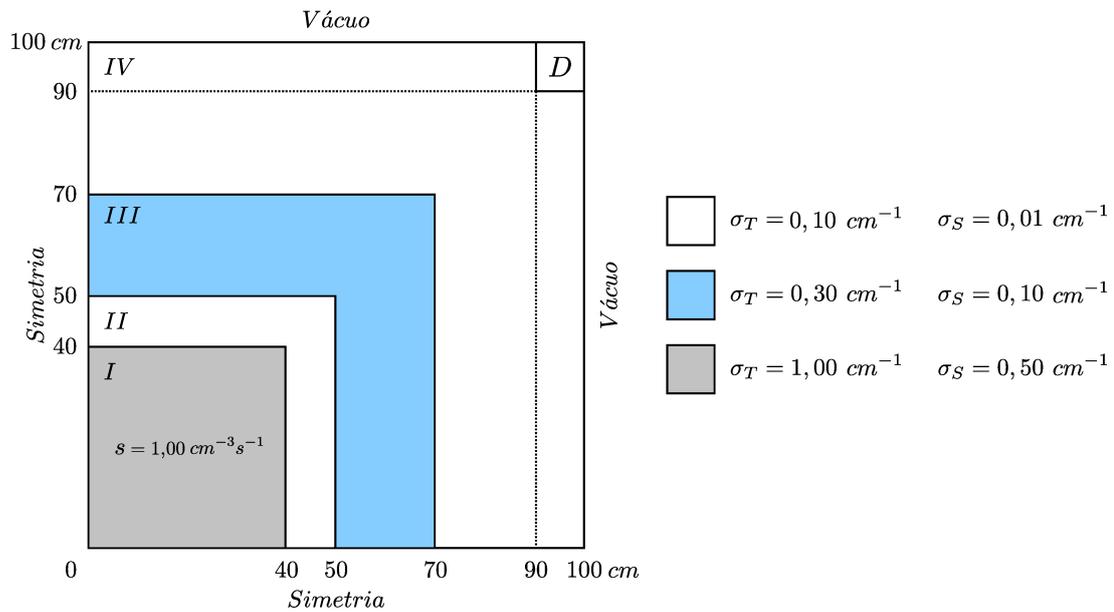
#### 5.4 Problema-modelo 4

No quarto problema-modelo estudado, é analisado um caso heterogêneo, de uma fonte blindada por camadas de diferentes materiais. Como mostrado na Figura 34, o domínio quadrado de 100 *cm* de lado apresenta uma condição de contorno reflexiva nas faces oeste e sul e vácuo nas faces leste e norte, e possui uma fonte  $s = 1,00 \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$  na região *I*, pintada de cinza. As regiões *II*, *III* e *IV* são compostas de 2 tipos distintos de materiais, pintadas de branco e azul, arranjados de forma intercalada no domínio espacial. Então, foi calculado o fluxo escalar médio em um detector *D* de  $10 \times 10 \text{ cm}$ , presente na borda da região *IV*.

O problema foi resolvido para um critério de parada  $\xi = 10^{-4}$ , usando ordens de quadratura  $S_4$  e  $S_8$ , e os métodos RM e SDM, com aproximações na fuga de forma quadrática, linear e constante. E foram comparadas a precisão atingida usando diferentes malhas e para valores de referência gerados pelo método DD, com malhas de  $3500 \times 3500$  nodos para o caso com ordem de quadratura  $S_4$  e  $2500 \times 2500$  para o caso  $S_8$ . Além disso, foi calculada uma média do tempo de 10 execuções em cada caso. Os resultados obtidos são mostrados nas Tabelas 10 e 11, e nas Figuras 35 e 36, respectivamente para as ordens de quadratura  $S_4$  e  $S_8$ .

Na solução do quarto e último problema-modelo, assim como nos demais, os métodos com aproximações quadrática e linear foram capazes de atingir resultados numéricos com desvios menores que os dos métodos com aproximação constante, em relação aos resultados de referência. Para o caso  $S_4$ , o menor desvio obtido com a aproximação constante foi com a malha  $200 \times 200$ , gerando um resultado com 0,313% de desvio da referência, em cerca de 2373 segundos. O método quadrático fornece um resultado com um menor desvio já com uma malha de  $50 \times 50$  nodos, com 0,224% de desvio da referência, em um tempo de 30,5 segundos, reduzindo em cerca de 98,8% o tempo de execução do algoritmo

Figura 34 - Geometria e Parâmetros físico-materiais do problema-modelo 4.



Fonte: O autor, 2025.

e usando uma menor quantidade de nodos espaciais. Quanto à aproximação linear, ela resulta em um desvio menor que 0,3% quando usada uma malha de  $80 \times 80$  nodos, com um tempo de execução de 106,3 segundos, economizando assim, cerca de 95,5% do tempo de execução do algoritmo RM.

Pôde-se notar que ambos os métodos com aproximações quadrática e linear atingiram as 3 casas de precisão quando usada a malha de  $200 \times 200$  nodos, e obtiveram resultados com menor desvio que os métodos com aproximação constante quando empregadas as mesmas malhas espaciais. Notou-se também uma oscilação do desvio ao se refinar a malha espacial. Quando refina-se a malha de  $50 \times 50$  para  $60 \times 60$  nodos, há um acréscimo no desvio em relação à referência, o qual torna a diminuir gradativamente à medida que a malha é refinada. Apenas os métodos com aproximação quadrática apresentaram esse comportamento, tendo os resultados numéricos com a aproximação linear respondido ao refinamento da malha apenas decrescendo o desvio relativo.

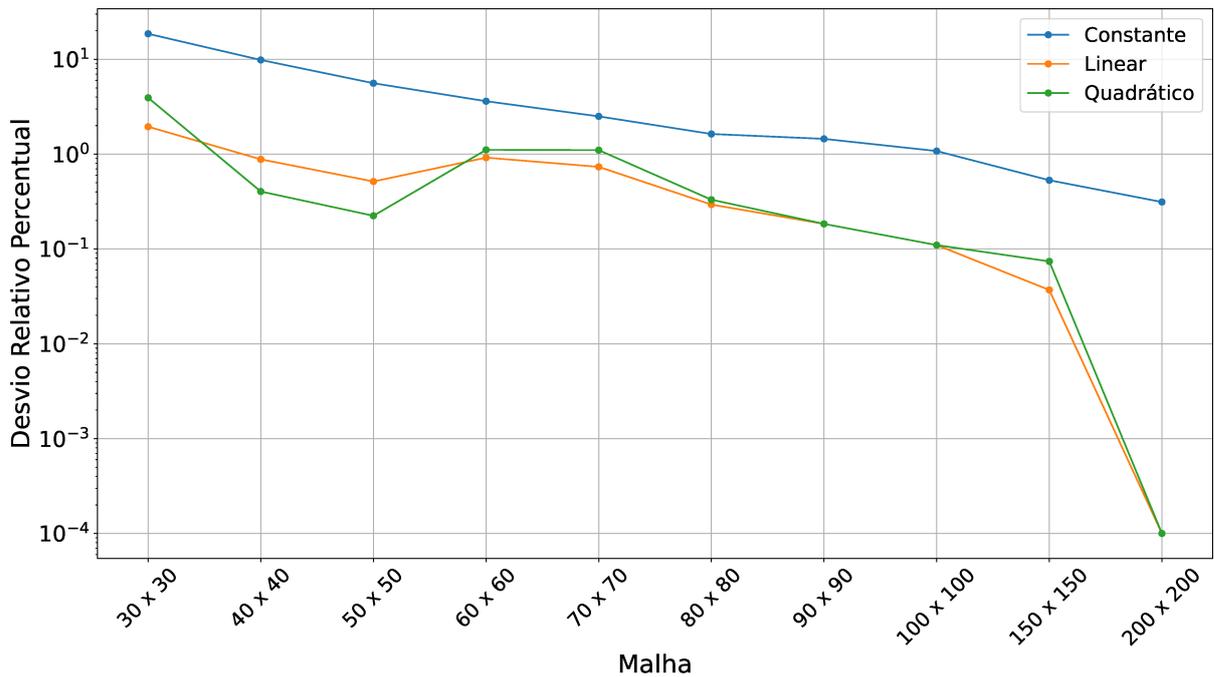
Devido ai maior custo computacional de execução dos métodos com aproximação quadrática em relação à linear, pode-se constatar que ao se usar a mesma malha de  $200 \times 200$  nodos, a qual gerou o mesmo resultado dentro da precisão estudada, o linear foi executado em menos da metade do tempo do quadrático.

Em se tratando da ordem de quadratura  $S_8$ , acontece a única ocorrência de um desvio relativo menor para os métodos com aproximação constante em comparação ao linear ou quadrático, quando são utilizadas as mesmas malhas. Nos resultados obtidos com as malhas  $30 \times 30$  e  $40 \times 40$ , os métodos com aproximação constante apresentaram desvios relativos à referência menores do que os gerados com aproximações linear e quadrática.

Tabela 10 - Resultados numéricos - Problema-modelo 4 -  $S_4$ 

Método	Nodos	Fluxo escalar médio ( $cm^{-2}s^{-1}$ )	Tempo de execução (s)	
DD	3500×3500	2,721e-08	RM	SDM
Quadrática	30×30	2,828e-08 (3,932 %)	3,618192	5,945190
	40×40	2,732e-08 (0,404 %)	13,769365	19,188850
	50×50	2,727e-08 (0,224 %)	30,568269	41,381817
	60×60	2,690e-08 (1,110 %)	75,830849	101,413537
	70×70	2,691e-08 (1,103 %)	115,310384	152,171142
	80×80	2,712e-08 (0,331 %)	222,373642	290,229621
	90×90	2,716e-08 (0,184 %)	301,013727	394,259356
	100×100	2,718e-08 (0,110 %)	467,034523	620,087615
	150×150	2,719e-08 (0,074 %)	2626,150004	3458,320664
	200×200	2,721e-08 (0,000 %)	7106,126258	9477,658779
Linear	30×30	2,774e-08 (1,948 %)	1,769704	3,610777
	40×40	2,697e-08 (0,882 %)	6,489507	11,341371
	50×50	2,707e-08 (0,515 %)	17,179836	29,970984
	60×60	2,696e-08 (0,919 %)	33,593391	59,272014
	70×70	2,701e-08 (0,735 %)	62,388306	107,625306
	80×80	2,713e-08 (0,294 %)	106,298251	185,809858
	90×90	2,716e-08 (0,184 %)	166,900514	295,268719
	100×100	2,718e-08 (0,110 %)	255,588988	446,104150
	150×150	2,720e-08 (0,037 %)	1258,348180	2268,873910
	200×200	2,721e-08 (0,000 %)	3537,857586	6371,486417
Constante	30×30	3,227e-08 (18,596 %)	1,623074	3,262205
	40×40	2,989e-08 (9,849 %)	5,006369	8,311132
	50×50	2,872e-08 (5,600 %)	11,412805	21,962793
	60×60	2,819e-08 (3,618 %)	23,918481	45,923873
	70×70	2,788e-08 (2,504 %)	44,960227	84,024983
	80×80	2,764e-08 (1,632 %)	74,488780	139,353195
	90×90	2,760e-08 (1,450 %)	118,866434	215,164963
	100×100	2,749e-08 (1,079 %)	178,291134	322,995634
	150×150	2,735e-08 (0,531 %)	914,246085	1604,945724
	200×200	2,729e-08 (0,313 %)	2373,828691	5005,635960

Fonte: O autor, 2025.

Figura 35 - Desvio relativo percentual dos fluxos escalares médios - Problema-modelo 4 -  $S_4$ 

Fonte: O autor, 2025.

Porém, a partir da malha de  $50 \times 50$  nodos, tanto os métodos com aproximação linear quanto quadrática já mostram uma queda nos desvios relativos à referência do resultado numérico.

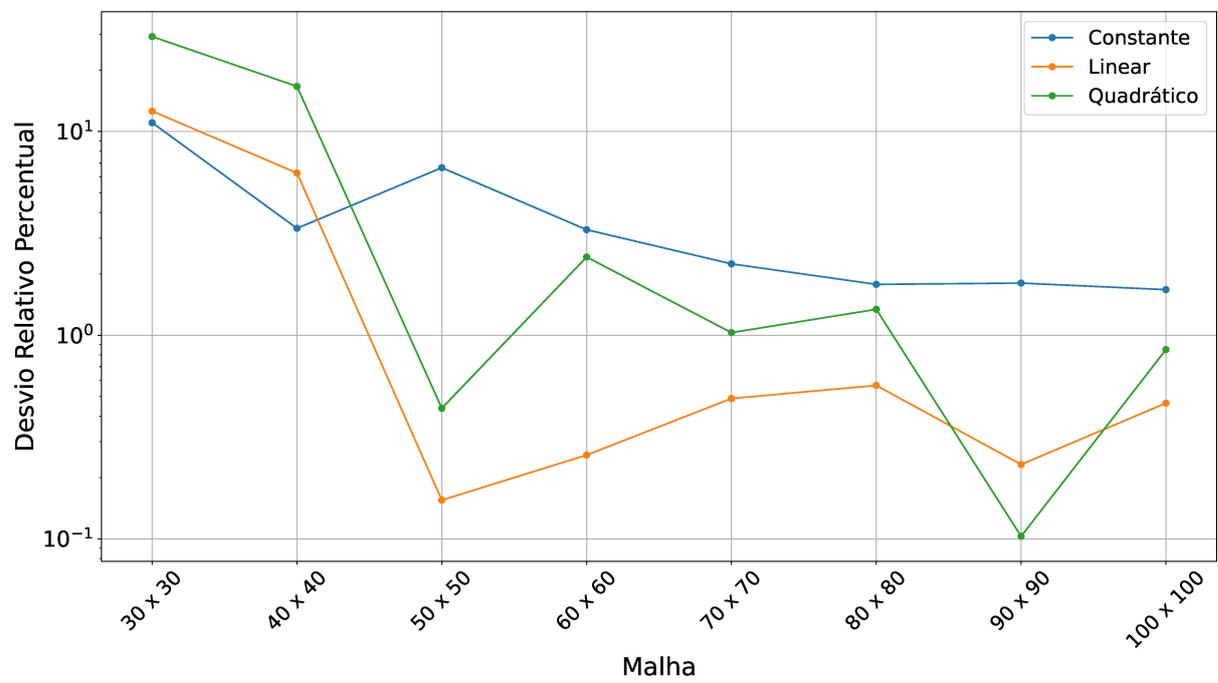
O menor desvio relativo obtido com um método com aproximação constante foi para uma malha de  $100 \times 100$  nodos, produzindo um resultado com 1,674% de desvio e uma execução média de cerca de 763 segundos. Um resultado com metade deste desvio é atingido com a aproximação quadrática e uma malha  $50 \times 50$ , em 183 segundos, diminuindo assim em cerca de 76% do tempo de execução. Já os métodos com aproximação linear, atingiram um desvio relativo ainda menor que este para a malha de  $50 \times 50$  nodos, com 0,051% de desvio em relação à referência, em um tempo de 131 segundos, dessa forma economizando em cerca de 87% o tempo de computação.

Nota-se novamente uma oscilação nos valores dos desvios, agora presente em todos os tipos de aproximações usadas nos métodos espectralnodais. Observando-se as soluções com as aproximações linear e quadrática, há um acréscimo no valor do desvio relativo em duas ocasiões, no refinamento de  $50 \times 50$  para  $60 \times 60$  nodos e de  $90 \times 90$  para  $100 \times 100$  nodos.

Tabela 11 - Resultados numéricos - Problema-modelo 4 -  $S_8$ 

Método	Nodos	Fluxo escalar médio ( $cm^{-2}s^{-1}$ )	Tempo de execução (s)	
DD	2500 × 2500	3,882e-08	RM	SDM
Quadrática	30×30	2,746e-08 (29,263 %)	22,226805	35,528870
	40×40	4,529e-08 (16,667 %)	73,013983	117,917075
	50×50	3,865e-08 (0,438 %)	183,663415	297,569782
	60×60	3,976e-08 (2,421 %)	371,094448	608,369550
	70×70	3,842e-08 (1,030 %)	736,036296	1189,446602
	80×80	3,934e-08 (1,340 %)	1173,171210	1881,840264
	90×90	3,886e-08 (0,103 %)	1983,083592	3241,738028
	100×100	3,915e-08 (0,850 %)	2840,513621	4594,604695
Linear	30×30	3,393e-08 (12,597 %)	15,279990	29,259738
	40×40	4,125e-08 (6,260 %)	46,909260	91,001180
	50×50	3,888e-08 (0,155 %)	131,628964	253,300234
	60×60	3,892e-08 (0,258 %)	287,844231	515,196725
	70×70	3,863e-08 (0,489 %)	471,376429	939,273022
	80×80	3,904e-08 (0,567 %)	743,575400	1469,542028
	90×90	3,891e-08 (0,232 %)	1157,166121	2254,062725
	100×100	3,900e-08 (0,464 %)	1573,778594	3067,167599
Constante	30×30	3,453e-08 (11,051 %)	8,243191	24,295969
	40×40	4,012e-08 (3,349 %)	24,865080	66,357906
	50×50	4,140e-08 (6,646 %)	57,348976	183,907403
	60×60	4,010e-08 (3,297 %)	96,415633	328,947171
	70×70	3,969e-08 (2,241 %)	199,341823	654,108782
	80×80	3,951e-08 (1,777 %)	336,050183	1105,954542
	90×90	3,952e-08 (1,803 %)	508,938235	1634,628725
	100×100	3,947e-08 (1,674 %)	763,575721	2430,071931

Fonte: O autor, 2025.

Figura 36 - Desvio relativo percentual dos fluxos escalares médios - Problema-modelo 4 -  $S_8$ 

Fonte: O autor, 2025.

## CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Nesta tese, foi apresentada uma aproximação polinomial quadrática para os termos de fuga transversal de nêutrons aplicada à solução de problemas de fonte-fixa usando a equação de transporte de nêutrons. Esta formulação consiste na expansão dos termos de fuga transversal em um polinômio quadrático, cujos coeficientes são atualizados durante o processo iterativo de acordo com os fluxos angulares de nêutrons incidentes, com as fontes de nêutrons e as condições de contorno nos nodos. O polinômio construído nesta expansão pode ser truncado a fim de se obter além da aproximação quadrática, uma expansão linear ou constante, a qual recupera a forma de aproximação comumente usada neste termo na solução de problemas de fonte-fixa usando métodos espectralnodais.

Os métodos numéricos Matriz Resposta (RM, do inglês *Response Matrix*) e *Spectral Deterministic Method* (SDM) com todas aproximações nos termos de fuga transversal de nêutrons citadas anteriormente foram aplicados a 4 problemas-modelo encontrados na literatura a fim de comparar a precisão dos resultados obtidos com um método de malha fina de referência (*Diamond Difference*). Além disso, foram também comparados os tempos médios de execução entre os métodos espectralnodais com os diferentes tipos de aproximação. Três desses problemas consistem em problemas de blindagem de nêutrons, onde são analisadas a corrente líquida em  $x$  nos contornos do domínio espacial e o fluxo escalar de nêutrons, além de um problema-modelo onde é estudado um caso de perfilagem de poço de petróleo, onde é calculado o fluxo angular de nêutrons em um detector na presença de uma fonte externa de nêutrons.

Em uma análise geral, pôde-se constatar que tanto os resultados obtidos usando aproximação linear quanto quadrática tiveram menor desvio que os que usaram aproximação constante nos termos de fuga transversal, com exceção de 2 testes no quarto problema-modelo. Dada a maior quantidade de operações matemáticas para realização da aproximação linear, e ainda mais na quadrática, estas normalmente têm maiores tempos de execução. Porém, ao comparar com a solução de referência de malha fina, os menores desvios atingidos usando aproximação constante, puderam ser alcançados com as aproximações linear e quadrática em menor tempo usando uma menor quantidade de nodos espaciais.

Sobre a aplicação de cada um dos métodos espectralnodais utilizados nesta tese, nota-se que embora a solução usando os métodos SDM e RM para quaisquer das aproximações no termo de fuga transversal quando comparadas a solução dos problemas usando os mesmos parâmetros, a execução do RM foi mais rápida que o SDM. Isso se deve ao fato do método RM não necessitar dos valores das constantes  $\alpha$  e  $\beta$ , presentes na solução intranodal da equação de transporte de nêutrons integrada transversalmente, durante o processo iterativo, diminuindo a quantidade de operações elementares durante esse pro-

cesso, e acarretando um algoritmo computacionalmente menos custoso.

A possibilidade de truncamento da expansão polinomial quadrática do termo de fuga transversal de nêutrons proposta nesta tese, torna a aproximação linear também uma proposta viável na solução de problemas de blindagem. Esta, que em alguns casos testados aqui, até mesmo alcançou resultados numéricos com desvios menores que os métodos com aproximação quadrática, por ser computacionalmente menos custosa, tem execução com tempo médio menor que os métodos com aproximação quadrática. Dessa forma, para algumas aplicações, métodos com aproximação linear podem ser mais adequados que os que usam aproximação quadrática, aliando resultados numéricos mais acurados com menor tempo de execução.

A necessidade de tratamento especial nos nodos do contorno do domínio espacial se mostrou computacionalmente custosa. Portanto, estudos sobre formas mais eficientes de tratar essa parte da malha espacial devem ser realizados. Testes com aproximação constante ou linear apenas nesta parte da malha, mantendo os termos de fuga transversal de nêutrons com aproximação quadrática nos demais nodos da malha espacial, devem ser realizados, trazendo uma possibilidade de alcançar resultados com boa acurácia com um menor custo computacional.

Analisados os resultados obtidos nesta tese, pôde-se constatar que os métodos espectralnodais *Response Matrix* e *Spectral Deterministic Method*, com aproximação linear e quadrática nos termos de fuga transversal, foram capazes de gerar resultados acurados dentro dos testes de precisão com referências numéricas geradas com o método de malha fina. Estes resultados se mostraram para todos os casos estudados melhores que os gerados com métodos usando aproximação constante no termo de fuga transversal. Além disso, apesar de serem computacionalmente mais custosos que os métodos com aproximação constante, estes reduziram os tempos médios de execução dos algoritmos em até 98%, trazendo assim melhorias do ponto de vista de precisão e de desempenho.

## REFERÊNCIAS

- ALVIM, A. C. M.; SILVA, F.; MARTINEZ, A. S. Improved neutron leakage treatment on nodal expansion method for pwr reactors. *International Journal of Physical and Mathematical Sciences*, v. 6, n. 3, 2012.
- ASSAIFE, R. F. *Perfilagem durante a perfuração de poços de petróleo: estudo bibliográfico*. Disponível em: <https://www.nucleodoconhecimento.com.br/engenharia-mecanica/perfuracao-de-pocos>. Acesso em: 1 nov. 2023.
- BARICHELLO, L.; PAZINATTO, C.; RUI, K. An analytical discrete ordinates nodal solution to the two-dimensional adjoint transport problem. *Annals of Nuclear Energy*, Elsevier, v. 135, p. 106959, 2020.
- BARICHELLO, L. B.; CABRERA, L. d. C.; FILHO, J. F. P. An analytical approach for a nodal scheme of two-dimensional neutron transport problems. *Annals of Nuclear Energy*, Elsevier, v. 38, n. 6, p. 1310–1317, 2011.
- BARROS, R. C. A spectral-nodal method for the solution of discrete ordinates problems in one and two-dimensional cartesian geometry. University of Michigan, 1990.
- BARROS, R. C.; LARSEN, E. W. A spectral nodal method for one-group x, y-geometry discrete ordinates problems. *Nuclear Science and Engineering*, Taylor & Francis, v. 111, n. 1, p. 34–45, 1992.
- BOCHKANOV, S. *ALGLIB*. Disponível em: [www.alglib.net](http://www.alglib.net). Acesso em: 07 mar. 2025.
- CROMIANSKI, S.; RUI, K.; BARICHELLO, L. A study on boundary fluxes approximation in explicit nodal formulations for the solution of the two-dimensional neutron transport equation. *Progress of Nuclear Energy*, Elsevier, v. 110, p. 354–363, 2019.
- DOMINGUEZ, D. S. Método espectro-nodal linear para problemas de transporte de nêutrons na formulação de ordenadas discretas em geometria bidimensional cartesiana. Tese de Doutorado, IPRJ/UERJ, Nova Friburgo, 2006.
- DUDERSTADT, J. J.; HAMILTON, L. J. et al. *Nuclear reactor analysis*. New York, USA: Wiley New York, 1976. v. 84.
- ELETRONUCLEAR. *Energia Nuclear*. Disponível em: <https://www.eletronuclear.gov.br/Sociedade-e-Meio-Ambiente/Espaco-do-Conhecimento/Paginas/Energia-Nuclear.aspx>. Acesso em: 1 nov. 2023.
- LEWIS, E. E.; MILLER, W. F. *Computational methods of neutron transport*. 1. ed. New York, USA: Wiley, 1993. 400 p.
- LIBOTTE, R. B. Método de malha grossa para solução numérica de problemas de blindagem de nêutrons em geometria unidimensional na formulação de ordenadas discretas com perspectivas a cálculos multidimensionais em geometria retangular. Dissertação de Mestrado, IPRJ/UERJ, Nova Friburgo, 2021.

- LIBOTTE, R. B.; Alves Filho, H.; BARROS, R. C. de. A novel coarse-mesh method applied to neutron shielding problems using the multigroup transport theory in discrete ordinates formulations. *Brazilian Journal of Radiation Sciences*, v. 8, n. 3A, 2020.
- LIBOTTE, R. B.; Alves Filho, H.; BARROS, R. C. de. Recent advances in a methodology for x-y cartesian geometry neutron transport problems in non-multiplying media using the multigroup discrete ordinates formulation. *Encontro Nacional de Modelagem Computacional*, 2020.
- MELLO, J. A. M. de; BARROS, R. C. An exponential spectral nodal method for one-speed x, y-geometry deep penetration discrete ordinates problems. *Annals of Nuclear Energy*, Elsevier, v. 29, n. 15, p. 1855–1869, 2002.
- MENDES, J. et al. An algorithm for solving the equations of the nodal expansion method in parallel using gpu. *Nuclear Engineering and Design*, v. 416, 2024.
- MENEZES, W. A. d. et al. Métodos espectralnodais para cálculos de transporte de partículas neutras com fonte fixa na formulação de ordenadas discretas e multigrupo de energia. Tese de Doutorado, IPRJ/UERJ, Nova Friburgo, 2012.
- MIT. *The OpenMC Monte Carlo Code*. Disponível em: <https://docs.openmc.org/en/stable/index.html>. Acesso em: 11 mar. 2024.
- NAKAMURA, S. Computational methods in engineering and science, with applications to fluid dynamics and nuclear systems. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1977.
- OLIVA, A. M. Método espectral determinístico para a solução de problemas de transporte de nêutrons usando a formulação das ordenadas discretas. Tese de Doutorado, IPRJ/UERJ, Nova Friburgo, 2018.
- OLIVA, A. M. et al. The spectral nodal method applied to multigroup sn neutron transport problems in one-dimensional geometry with fixed-source. *Progress in Nuclear Energy*, Elsevier, v. 105, p. 106–113, 2018.
- ORTIZ, I. B. R. Desenvolvimento de um método numérico de matriz resposta linear para cálculos bidimensionais em geometria cartesiana de transporte de nêutrons na formulação de ordenadas discretas. Tese de Doutorado, IPRJ/UERJ, Nova Friburgo, 2022.
- OTTO, A. C. Estudo e aplicação dos códigos anisn e dot 3.5 a problemas de blindagem de radiações nucleares. Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, 1983.
- PAIXÃO, S. B.; SILVA, F. New basis functions for reactor core calculations using the nodal expansion method. *Annals of Nuclear Energy*, v. 166, 2022.
- PICOLOTO, C. B. et al. An analytical approach for solving a nodal formulation of twodimensional fixed-source neutron transport problems with linearly anisotropic scattering. *Progress in Nuclear Energy*, Elsevier, v. 98, p. 193–201, 2017.
- SILVA, J. J. G. Detecção de microdefeitos por neutrongrafia térmica. Tese de Mestrado, IME, Rio de Janeiro., 1995.
- SILVA, O. P. da. Um método de matriz resposta para cálculos de transporte multigrupos de energia na formulação de ordenadas discretas em meios não-multiplicativos. Tese de Doutorado, IPRJ/UERJ, Nova Friburgo, 2018.

SILVA, O. P. da. Um método de matriz resposta para cálculos de transporte multigrupos de energia na formulação de ordenadas discretas em meios não-multiplicativos. Tese de Doutorado, IPRJ/UERJ, Nova Friburgo, 2018.

SILVA, O. P. da et al. A response matrix spectral nodal method for energy multigroup x, y-geometry discrete ordinates problems in non-multiplying media. *Progress in Nuclear Energy*, Elsevier, v. 125, p. 1–9, 2020.

SPANIER, J.; GELBARD, E. M. *Monte Carlo principles and neutron transport problems*. [S.l.]: Courier Corporation, 2008.

Technical Research Centre of Finland, V. *Serpent - a continuous-energy Monte Carlo neutron and photon transport code*. Disponível em: <https://serpent.vtt.fi/serpent/>. Acesso em: 11 mar. 2024.

UNICAMP. *O boro contra o câncer (BNCT)*. Disponível em: <https://sites.ifi.unicamp.br/cronologia/pesquisa/bnct/>. Acesso em: 29 dez. 2020.

## APÊNDICE A – Dados da quadratura de simetria de nível

### A.1 Primeira seção

Neste apêndice, são mostrados os cossenos diretores ( $\mu_m$  e  $\eta_m$ ) e pesos ( $\omega_m$ ) usados na discretização da variável angular, usando a quadratura de simetria de nível de ordem  $N$  ( $LQ_N$ ). Estes dados são apresentados para a ordem de quadratura  $LQ_4$  na Tabela 12,  $LQ_8$  na Tabela 13 e  $LQ_{16}$  nas Tabelas 14-17.

Tabela 12 - Dados da quadratura  $LQ_4$

$m$	$\mu_m$	$\eta_m$	$\omega_m$
1	0,8688903	0,3500212	0,3333333
2	0,3500212	0,3500212	0,3333333
3	0,3500212	0,8688903	0,3333333
4	-0,8688903	0,3500212	0,3333333
5	-0,3500212	0,3500212	0,3333333
6	-0,3500212	0,8688903	0,3333333
7	-0,8688903	-0,3500212	0,3333333
8	-0,3500212	-0,3500212	0,3333333
9	-0,3500212	-0,8688903	0,3333333
10	0,8688903	-0,3500212	0,3333333
11	0,3500212	-0,3500212	0,3333333
12	0,3500212	-0,8688903	0,3333333

Tabela 13 - Dados da quadratura  $LQ_8$ 

$m$	$\mu_m$	$\eta_m$	$\omega_m$
1	0,9511897	0,2182179	0,1209877
2	0,7867958	0,2182179	0,0907407
3	0,5773503	0,2182179	0,0907407
4	0,2182179	0,2182179	0,1209877
5	0,7867958	0,5773503	0,0907407
6	0,5773503	0,5773503	0,0925926
7	0,2182179	0,5773503	0,0907407
8	0,5773503	0,7867958	0,0907407
9	0,2182179	0,7867958	0,0907407
10	0,2182179	0,9511897	0,1209877
11	-0,9511897	0,2182179	0,1209877
12	-0,7867958	0,2182179	0,0907407
13	-0,5773503	0,2182179	0,0907407
14	-0,2182179	0,2182179	0,1209877
15	-0,7867958	0,5773503	0,0907407
16	-0,5773503	0,5773503	0,0925926
17	-0,2182179	0,5773503	0,0907407
18	-0,5773503	0,7867958	0,0907407
19	-0,2182179	0,7867958	0,0907407
20	-0,2182179	0,9511897	0,1209877
21	-0,9511897	-0,2182179	0,1209877
22	-0,7867958	-0,2182179	0,0907407
23	-0,5773503	-0,2182179	0,0907407
24	-0,2182179	-0,2182179	0,1209877
25	-0,7867958	-0,5773503	0,0907407
26	-0,5773503	-0,5773503	0,0925926
27	-0,2182179	-0,5773503	0,0907407
28	-0,5773503	-0,7867958	0,0907407
29	-0,2182179	-0,7867958	0,0907407
30	-0,2182179	-0,9511897	0,1209877
31	0,9511897	-0,2182179	0,1209877
32	0,7867958	-0,2182179	0,0907407
33	0,5773503	-0,2182179	0,0907407
34	0,2182179	-0,2182179	0,1209877
35	0,7867958	-0,5773503	0,0907407
36	0,5773503	-0,5773503	0,0925926
37	0,2182179	-0,5773503	0,0907407
38	0,5773503	-0,7867958	0,0907407
39	0,2182179	-0,7867958	0,0907407
40	0,2182179	-0,9511897	0,1209877

Tabela 14 - Dados da quadratura  $LQ_{16}$  - Parte 1

$m$	$\mu_m$	$\eta_m$	$\omega_m$
1	0,9805009	0,1389568	0,0489872
2	0,9092855	0,1389568	0,0413296
3	0,8319966	0,1389568	0,0212326
4	0,7467506	0,1389568	0,0256207
5	0,6504264	0,1389568	0,0256207
6	0,5370966	0,1389568	0,0212326
7	0,3922893	0,1389568	0,0413296
8	0,1389568	0,1389568	0,0489872
9	0,9092855	0,3922893	0,0413296
10	0,8319966	0,3922893	0,0360486
11	0,7467506	0,3922893	0,0144589
12	0,6504264	0,3922893	0,0344958
13	0,5370966	0,3922893	0,0144589
14	0,3922893	0,3922893	0,0360486
15	0,1389568	0,3922893	0,0413296
16	0,8319966	0,5370966	0,0212326
17	0,7467506	0,5370966	0,0144589
18	0,6504264	0,5370966	0,0085179
19	0,5370966	0,5370966	0,0085179
20	0,3922893	0,5370966	0,0144589
21	0,1389568	0,5370966	0,0212326
22	0,7467506	0,6504264	0,0256207
23	0,6504264	0,6504264	0,0344958
24	0,5370966	0,6504264	0,0085179
25	0,3922893	0,6504264	0,0344958
26	0,1389568	0,6504264	0,0256207
27	0,6504264	0,7467506	0,0256207
28	0,5370966	0,7467506	0,0144589
29	0,3922893	0,7467506	0,0144589
30	0,1389568	0,7467506	0,0256207
31	0,5370966	0,8319966	0,0212326
32	0,3922893	0,8319966	0,0360486
33	0,1389568	0,8319966	0,0212326
34	0,3922893	0,9092855	0,0413296
35	0,1389568	0,9092855	0,0413296
36	0,1389568	0,9805009	0,0489872
37	-0,9805009	0,1389568	0,0489872
38	-0,9092855	0,1389568	0,0413296
39	-0,8319966	0,1389568	0,0212326
40	-0,7467506	0,1389568	0,0256207

Tabela 15 - Dados da quadratura  $LQ_{16}$  - Parte 2

$m$	$\mu_m$	$\eta_m$	$\omega_m$
41	-0,6504264	0,1389568	0,0256207
42	-0,5370966	0,1389568	0,0212326
43	-0,3922893	0,1389568	0,0413296
44	-0,1389568	0,1389568	0,0489872
45	-0,9092855	0,3922893	0,0413296
46	-0,8319966	0,3922893	0,0360486
47	-0,7467506	0,3922893	0,0144589
48	-0,6504264	0,3922893	0,0344958
49	-0,5370966	0,3922893	0,0144589
50	-0,3922893	0,3922893	0,0360486
51	-0,1389568	0,3922893	0,0413296
52	-0,8319966	0,5370966	0,0212326
53	-0,7467506	0,5370966	0,0144589
54	-0,6504264	0,5370966	0,0085179
55	-0,5370966	0,5370966	0,0085179
56	-0,3922893	0,5370966	0,0144589
57	-0,1389568	0,5370966	0,0212326
58	-0,7467506	0,6504264	0,0256207
59	-0,6504264	0,6504264	0,0344958
60	-0,5370966	0,6504264	0,0085179
61	-0,3922893	0,6504264	0,0344958
62	-0,1389568	0,6504264	0,0256207
63	-0,6504264	0,7467506	0,0256207
64	-0,5370966	0,7467506	0,0144589
65	-0,3922893	0,7467506	0,0144589
66	-0,1389568	0,7467506	0,0256207
67	-0,5370966	0,8319966	0,0212326
68	-0,3922893	0,8319966	0,0360486
69	-0,1389568	0,8319966	0,0212326
70	-0,3922893	0,9092855	0,0413296
71	-0,1389568	0,9092855	0,0413296
72	-0,1389568	0,9805009	0,0489872
73	-0,9805009	-0,1389568	0,0489872
74	-0,9092855	-0,1389568	0,0413296
75	-0,8319966	-0,1389568	0,0212326
76	-0,7467506	-0,1389568	0,0256207
77	-0,6504264	-0,1389568	0,0256207
78	-0,5370966	-0,1389568	0,0212326
79	-0,3922893	-0,1389568	0,0413296
80	-0,1389568	-0,1389568	0,0489872

Tabela 16 - Dados da quadratura  $LQ_{16}$  - Parte 3

$m$	$\mu_m$	$\eta_m$	$\omega_m$
81	-0,9092855	-0,3922893	0,0413296
82	-0,8319966	-0,3922893	0,0360486
83	-0,7467506	-0,3922893	0,0144589
84	-0,6504264	-0,3922893	0,0344958
85	-0,5370966	-0,3922893	0,0144589
86	-0,3922893	-0,3922893	0,0360486
87	-0,1389568	-0,3922893	0,0413296
88	-0,8319966	-0,5370966	0,0212326
89	-0,7467506	-0,5370966	0,0144589
90	-0,6504264	-0,5370966	0,0085179
91	-0,5370966	-0,5370966	0,0085179
92	-0,3922893	-0,5370966	0,0144589
93	-0,1389568	-0,5370966	0,0212326
94	-0,7467506	-0,6504264	0,0256207
95	-0,6504264	-0,6504264	0,0344958
96	-0,5370966	-0,6504264	0,0085179
97	-0,3922893	-0,6504264	0,0344958
98	-0,1389568	-0,6504264	0,0256207
99	-0,6504264	-0,7467506	0,0256207
100	-0,5370966	-0,7467506	0,0144589
101	-0,3922893	-0,7467506	0,0144589
102	-0,1389568	-0,7467506	0,0256207
103	-0,5370966	-0,8319966	0,0212326
104	-0,3922893	-0,8319966	0,0360486
105	-0,1389568	-0,8319966	0,0212326
106	-0,3922893	-0,9092855	0,0413296
107	-0,1389568	-0,9092855	0,0413296
108	-0,1389568	-0,9805009	0,0489872
109	0,9805009	-0,1389568	0,0489872
110	0,9092855	-0,1389568	0,0413296
111	0,8319966	-0,1389568	0,0212326
112	0,7467506	-0,1389568	0,0256207
113	0,6504264	-0,1389568	0,0256207
114	0,5370966	-0,1389568	0,0212326
115	0,3922893	-0,1389568	0,0413296
116	0,1389568	-0,1389568	0,0489872
117	0,9092855	-0,3922893	0,0413296
118	0,8319966	-0,3922893	0,0360486
119	0,7467506	-0,3922893	0,0144589
120	0,6504264	-0,3922893	0,0344958

Tabela 17 - Dados da quadratura  $LQ_{16}$  - Parte 4

$m$	$\mu_m$	$\eta_m$	$\omega_m$
121	0,5370966	-0,3922893	0,0144589
122	0,3922893	-0,3922893	0,0360486
123	0,1389568	-0,3922893	0,0413296
124	0,8319966	-0,5370966	0,0212326
125	0,7467506	-0,5370966	0,0144589
126	0,6504264	-0,5370966	0,0085179
127	0,5370966	-0,5370966	0,0085179
128	0,3922893	-0,5370966	0,0144589
129	0,1389568	-0,5370966	0,0212326
130	0,7467506	-0,6504264	0,0256207
131	0,6504264	-0,6504264	0,0344958
132	0,5370966	-0,6504264	0,0085179
133	0,3922893	-0,6504264	0,0344958
134	0,1389568	-0,6504264	0,0256207
135	0,6504264	-0,7467506	0,0256207
136	0,5370966	-0,7467506	0,0144589
137	0,3922893	-0,7467506	0,0144589
138	0,1389568	-0,7467506	0,0256207
139	0,5370966	-0,8319966	0,0212326
140	0,3922893	-0,8319966	0,0360486
141	0,1389568	-0,8319966	0,0212326
142	0,3922893	-0,9092855	0,0413296
143	0,1389568	-0,9092855	0,0413296
144	0,1389568	-0,9805009	0,0489872