



Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Física Armando Dias Tavares

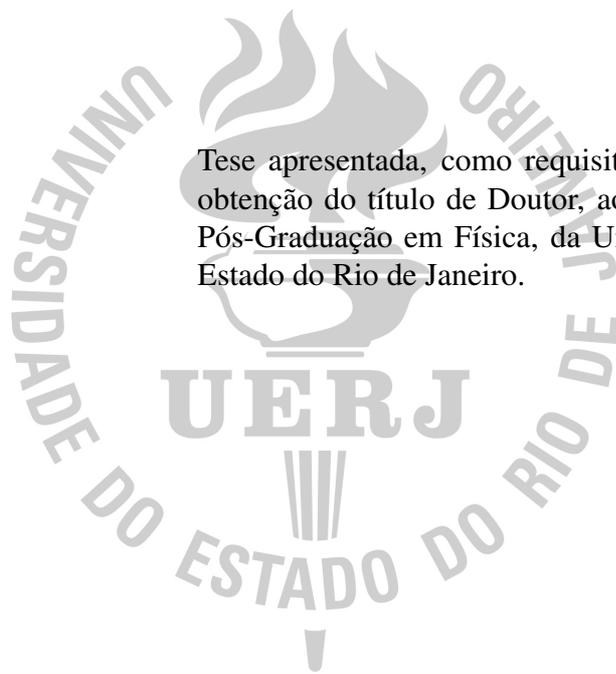
Fernando Lopes Cardoso

**Um estudo dos efeitos das compactações dimensionais nas teorias de
campos**

Rio de janeiro
2020

Fernando Lopes Cardoso

Um estudo dos efeitos das compactações dimensionais nas teorias de campos



Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Cesar Augusto Linhares da Fonseca Junior

Rio de Janeiro

2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/ REDE SIRIUS/ BIBLIOTECA CTC/D

C268e Cardoso, Fernando Lopes.
Um estudo dos efeitos das compactações dimensionais nas teorias de campos / Fernando Lopes Cardoso. – 2020.
100 f. : il.

Orientador: Cesar Augusto Linhares da Fonseca Junior.
Tese (doutorado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Teoria de Campos (Física) – Teses. 2. Feynman, Diagramas de – Teses. 3. Função zeta – Teses. 4. Bessel, Funções de – Teses. 5. Séries convergentes – Teses. 6. Grupo de renormalização – Teses. I. Fonseca Junior, Cesar Augusto Linhares da (Orient.). II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Física Armando Dias Tavares. III. Título.

CDU 530.145

Bibliotecária: Teresa da Silva CRB7/5209

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Fernando Lopes Cardoso

Um estudo dos efeitos das compactações dimensionais nas teorias de campos

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 15 de Janeiro de 2020.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Cesar Augusto Linhares da Fonseca Junior (Orientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof. Dr. Jordan Martins
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Prof. Dr. Adolfo Pedro Carvalho Malbouisson
Centro Brasileiro de Pesquisa Físicas

Prof. Dr. José Roberto Pinheiro Mahon
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof. Dr. Vitor Emanuel Rodino Lemes
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof. Dr. Erich Cavalcante
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro

2020

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho à minha querida Esposa Paula Clemente que muito me deu força para
terminar este trabalho.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Agradeço aos meus professores, familiares e amigos por me transformarem na pessoa que sou hoje.

I'm the Doctor.
Doctor Who

RESUMO

CARDOSO, F. L. *Um estudo dos efeitos das compactações dimensionais nas teorias de campos*. 2020. 100 f. Tese (Doutorado em Física) - Instituto Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

A motivação deste trabalho é refinar o entendimento sobre as teorias de campos definidas em espaços euclidianos compactados através de condições de contorno impostas a algumas de suas dimensões. Esta construção pode ser interpretada como uma generalização da teoria de campos a temperatura finita, proposta principalmente por Matsubara, de modo a incluir limitações espaciais. Assim, a partir de regras de Feynman modificadas, funções de Green no espaço de Fourier assumem uma representação mista de séries e integrais. Nesta tese, foi feito um estudo da convergência destas séries e sua relação com funções bem conhecidas como a zeta de Riemann (e suas generalizações) e as funções de Bessel modificadas de segunda espécie. Também é feita uma análise da criticidade desta teoria (a um loop) e como uma teoria com dimensões compactas difere de sua contrapartida não-compacta com relação ao grau superficial de convergência, analisado via teorema de Weinberg. Por fim, é apresentada uma prescrição para a contribuição de um diagrama de Feynman genérico com dimensões compactadas para teorias bosônicas e fermiônicas. .

Palavras-chave: Topologia Toroidal. Dimensões Compactadas. Expoentes Críticos.
Teoria de campos.

ABSTRACT

CARDOSO, F. L. *A study of the effects of dimensional compactions on field theories.* 2020. 100f. Tese (Doutorado em Física) - Instituto Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

The motivation of this work is to refine the understanding about the field theories defined in compactified Euclidean spaces through boundary conditions imposed to some of its dimensions. This construction can be interpreted as a generalization of the finite temperature field theory, proposed mainly by Matsubara, to include spatial limitations. Therefore, from modified Feynman rules, Green functions in Fourier space assume a mixed representation of series and integrals. In this thesis, a study was made of the convergence of these series and their relationship to well known functions such as Riemann's zeta (and its generalizations) and the modified Bessel functions of the second kind. A criticality analysis of this theory (at one loop) is also made and how a theory with compact dimensions differs from its non-compact counterpart with respect to the superficial degree of convergence, analyzed via Weinberg's theorem. At last, a prescription is presented for the contribution of a generic Feynman diagram with compactified dimensions for bosonic and fermionic theories. .

Keywords: Toroidal Topology. Compactified Dimensions. Critical Exponents. Field Theory.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Bessel $K_n(x)$	31
Figura 2 – Possibilidades de função β	43
Figura 3 – Diagrama 1 <i>Loop</i>	82

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	10
1	AS TEORIAS DE CAMPO EM ESPAÇOS COMPACTADOS	12
1.1	A teoria de Matsubara e a teoria de campos a temperatura finita	12
1.2	A teoria de campos em espaços compactados	18
1.3	A zeta de Riemann e as funções de Bessel	22
1.4	Uma breve análise sobre a convergência da série	30
2	UM ESTUDO DA RENORMALIZAÇÃO NOS ESPAÇOS TOROIDAIS	34
2.1	O cálculo da função β	38
2.2	Cálculo da dimensão anomala	44
2.3	Inserindo as dimensões compactadas no cálculo da função β e da dimensão anômala γ_{ϕ^2}	47
3	COMPACTAÇÃO DE UM DIAGRAMA GENÉRICO COM O USO DA REPRESENTAÇÃO PARAMÉTRICA DOS DIAGRAMAS	57
3.1	Compactação de um diagrama fermiônico genérico com o uso da representação paramétrica dos diagramas	66
3.2	Compactação de teorias de calibre fermiônicas com o uso da representação paramétrica dos digramas de Feynman	73
3.3	Relação entre as amplitudes e a função zeta de Riemman	78
3.4	Exemplo	82
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	89
	REFERÊNCIAS	90
	APÊNDICE A – Identidade da função teta de Jacobi	92
	APÊNDICE B – Relações matemáticas importantes	95

INTRODUÇÃO

No decorrer dos estudos das teorias de campos em espaços compactados, algumas questões restaram para ser analisadas com mais cuidado. Uma questão relevante a ser levantada é, se no cálculo de um diagrama de Feynman para um número de loops superior a um, ainda seria possível representar os somatórios sobre a parte compactada dos propagadores de Feynman em termos de funções bem conhecidas. Outra questão a ser observada consiste em saber se a inserção das dimensões compactadas nos propagadores poderia ser feita antes ou depois da introdução de parâmetros auxiliares (como os parâmetros de Feynman e Schwinger) no cálculo das integrais ou se teria que ser feita imediatamente na definição do diagrama. Também deve-se discutir se a inserção das dimensões compactadas afetariam a convergência da amplitude ou ainda os expoentes críticos da teoria.

O objetivo geral deste trabalho é justamente investigar e responder a essas perguntas. Para isto, devemos iniciar a análise entendendo a ideia por trás deste formalismo (KHANNA; MALBOUISSON; SANTANA, 2014; CARDOSO *et al.*, 2016; KHANNA *et al.*, 2011; MALBOUISSON; MALBOUISSON; SANTANA, 2002; KHANNA, 2009; LINHARES *et al.*, 2012; ABREU *et al.*, 2013) e entendendo como esta ampliação da teoria de campos a temperatura finita, proposta por Matsubara (MATSUBARA, 1955; EZAWA; TOMOZAWA; UMEZAWA, 1957), irá afetar as conservações de momento em cada vértice dos diagramas, de como modificar os propagadores e como isto irá afetar as regras de Feynman. Partiremos, então, da teoria de campos a temperatura finita para generalizar os propagadores e generalizar as conservações de momento em cada vértice, além de separar estas conservações de momento em deltas do tipo Dirac (para componentes de momento sem restrição) e em deltas de Kronecker (para as componentes do momento com dimensões compactadas). Feita esta generalização nos propagadores e nas funções delta, o próximo passo é justamente tentar representar a parte compactada da teoria em termos de uma função conhecida na literatura, pois isso facilita tanto os cálculos analíticos, quanto eventualmente cálculos numéricos, ou a construção de gráficos. A função conhecida no caso é a função zeta de Riemann, na realidade uma generalização da função zeta, e será explorada a relação entre esta generalização e as funções de Bessel modificadas de segunda espécie (OLVER, 2010; BOWMAN, 1958; WATSON, 2011) através de continuação analítica. Tais propriedades serão muito úteis para avaliar a convergência das séries.

Um bom ponto de partida para fazer a análise dos efeitos da inserção das dimensões compactadas em uma teoria de campos é avaliar os expoentes críticos da teoria. Seguindo a prescrição de (PESKIN; SCHROEDER, 1995), se torna evidente a importância da função β de Callan-Symanzik, através da qual pode-se analisar, juntamente com o cálculo da dimensão anômala, os expoentes críticos da teoria. Portanto, é importante analisar se uma teoria (neste trabalho será investigada a teoria ϕ^4) com dimensões compactadas difere da mesma teoria sem as dimensões compactadas em seus expoentes críticos. O início deste estudo será justamente

calcular a função β e a dimensão anômala de uma teoria ϕ^4 com d dimensões compactadas, e verificar se existe uma mudança da criticalidade da teoria ou em seus pontos fixos. As ferramentas que serão descritas no capítulo 1 serão essenciais para prosseguir nestes cálculos, que envolverão os propagadores de Feynman da teoria ϕ^4 com a existência de dimensões compactadas, e para a análise de algumas condições assintóticas.

Por outro lado, temos o interesse em saber o ponto exato onde devemos inserir as dimensões compactadas em uma teoria. A princípio, a resposta é imediata: logo no início da definição do propagador de Feynman da teoria. Entretanto, é justo perguntar se este é o único ponto onde esta modificação pode ser feita, uma vez que os cálculos perturbativos de teorias de campos são amplamente encontrados em qualquer livro texto de teoria quântica de campos e se estes cálculos podem ser reaproveitados apenas fazendo algumas pequenas mudanças, o que seria bem útil. Então, devemos escolher o ponto que será analisado, se existe esta possibilidade, e escolher a representação paramétrica dos diagramas de Feynman (ITZYKSON; ZUBER, 2006). O intuito é estabelecer uma regra de compactação de qualquer diagrama de Feynman da teoria ϕ^4 e generalizar este cálculos nas representações paramétricas de outros tipos de teorias (férmions, por exemplo) com um estudo baseado no trabalho de (LINHARES; MALBOUISSON; RODITI, 2008). Como objetivo secundário, avaliar a convergência das amplitudes dos diagramas e, se em diagramas de ordens superiores, a função zeta generalizada continua se manifestando na parte compactada do diagrama.

A partir de agora será apresentando um pequeno resumo do que será abordado em cada capítulo.

Capítulo 1: Uma pequena revisão bibliográfica sobre a teoria de campos a temperatura finita, da forma que foi proposta por Matsubara, juntamente com uma análise das séries que definem as funções zeta que serão utilizadas neste trabalho, e um pouco sobre a convergência destas séries. Por fim, uma generalização da teoria de Matsubara adicionando outras dimensões finitas, que genericamente será chamada de dimensão compactada.

Capítulo 2: Uma revisão bibliográfica sobre renormalização e o método envolvido no cálculo da função β e da dimensão anômala. Também iremos expor como isso afeta os expoentes críticos da teoria ϕ^4 . Em seguida o cálculo da função β e da dimensão anômala será generalizado para uma teoria ϕ^4 com dimensões compactadas.

Capítulo 3: Será feito o estudo de como uma teoria de campos com espaços compactados se comporta através da representação paramétrica dos diagramas, assim como o fato de uma teoria com dimensões compactas ter grau superficial de divergência diferente da sua contraparte não compacta. Por fim, uma prescrição para inserir as dimensões compactadas no cálculo dos diagramas e como estes resultados se relacionam com as funções zeta.

1 AS TEORIAS DE CAMPO EM ESPAÇOS COMPACTADOS

O ponto de partida do estudo das dimensões compactadas é o formalismo de temperatura finita introduzida por Matsubara (MATSUBARA, 1955; DAS, 1997). A ideia do formalismo de temperatura finita consiste em, num espaço euclidiano de 4 dimensões, promover a coordenada temporal a uma coordenada de extensão finita ligada justamente à temperatura. Esta coordenada de temperatura (a seguir veremos que na realidade é o inverso da temperatura) respeita uma condição de contorno dita periódica (ou antiperiódica em alguns casos). Esta condição de contorno periódica obriga esta coordenada a ter a topologia de um círculo S^1 . Deste modo um espaço de D dimensões euclidianas \mathbb{R}^D , quando uma de suas D dimensões se torna periódica se transforma na topologia a seguir:

$$\Gamma_D^1 = S^1 \times \mathbb{R}^{D-1}. \quad (1)$$

1.1 A teoria de Matsubara e a teoria de campos a temperatura finita

A prescrição de Matsubara transforma o espaço quadridimensional de forma que uma das dimensões fica limitada ao intervalo de zero a β . Se tomarmos as constantes da natureza $\hbar = c = k_b = 1$ usando o sistema de unidades naturais, temos:

$$\beta = \frac{1}{T}, \quad (2)$$

com T sendo a temperatura. Este espaço de topologia, $\Gamma_4^1 = S^1 \times \mathbb{R}^3$, tem 3 dimensões espaciais irrestritas (*Bulk*) e o círculo S^1 tem comprimento equivalente ao inverso da temperatura. Esta dimensão de temperatura pode ser interpretada como uma teoria de tempo imaginário, uma vez que o espaço 4-dimensional segue a métrica de Minkowski. Com isso uma métrica de 4 dimensões Euclidianas pode ser interpretada como uma métrica com um tempo imaginário. Partindo de

$$ds^2 = dx_0^2 - d\vec{x}^2. \quad (3)$$

E fazendo

$$x_0 = -i\tau, \quad (4)$$

tem-se exatamente

$$ds^2 = -d\tau^2 - d\vec{x}^2, \quad (5)$$

o que representaria uma métrica Euclidiana de 4 dimensões. Esta ideia de tempo imaginário é amplamente usada na teoria de campos com a conhecida rotação de Wick . A necessidade de o formalismo de Matsubara usar o tempo imaginário decorre diretamente da definição da função de 2 pontos. Da definição da função de correlação de 2 pontos (SALINAS, 2005; CALZA, 2015) temos:

$$\langle \phi(x,t)\phi(y,0) \rangle = Z^{-1} \text{Tr} \left(e^{-\beta H} \phi(x,t)\phi(y,0) \right). \quad (6)$$

Podemos usar o operador de evolução temporal no campo $\phi(y,0)$ sem modificar a igualdade do seguinte modo:

$$\phi(y,t_0) = e^{it_0 H} \phi(y,0) e^{-it_0 H}. \quad (7)$$

Deste modo, isolando o termo $\phi(y,0)$, obtemos:

$$\phi(y,0) = e^{-it_0 H} \phi(y,t_0) e^{it_0 H}. \quad (8)$$

Aplicando isto na definição da função de 2 pontos dada pela equação (6), temos:

$$\langle \phi(x,t)\phi(y,0) \rangle = Z^{-1} \text{Tr} \left(e^{-\beta H} \phi(x,t) e^{-it_0 H} \phi(y,t_0) e^{it_0 H} \right), \quad (9)$$

e usando a propriedade cíclica do traço, conclui-se que:

$$\langle \phi(x,t)\phi(y,0) \rangle = Z^{-1} \text{Tr} \left(e^{-it_0 H} \phi(y,t_0) e^{it_0 H} e^{-\beta H} \phi(x,t) \right). \quad (10)$$

Não é tão evidente que, para que recuperemos no lado direito a definição da função de 2 pontos,

temos que fazer algumas considerações. A primeira e mais imediata é que, fazendo $it_0 = \beta$ e como consequência $t_0 = -i\beta$ ficamos com:

$$\langle \phi(x,t)\phi(y,0) \rangle = Z^{-1} \text{Tr} \left(e^{-\beta H} \phi(y, -i\beta) \phi(x,t) \right). \quad (11)$$

Assim é estabelecida a conhecida relação Kubo-Martin-Schwinger (KMS) (BELLAC, 1996), dada por:

$$\langle \phi(x,t)\phi(y,0) \rangle = \langle \phi(y, -i\beta)\phi(x,t) \rangle. \quad (12)$$

Agora para podermos recuperar a igualdade, temos que considerar a forma como os campos comutam, uma vez que é preciso fazer esta comutação ou anticomutação. Temos que:

$$\phi(y, -i\beta) = \pm \phi(y,0). \quad (13)$$

Se tomarmos que o tempo é imaginário, da forma $it = \tau$, e repetirmos a ideia anterior, obtemos:

$$\langle \phi(x,\tau)\phi(y,0) \rangle = \langle \phi(y,\beta)\phi(x,\tau) \rangle, \quad (14)$$

o que é equivalente a dizer que

$$\phi(y,\beta) = \pm \phi(y,0). \quad (15)$$

Este formalismo recebe o nome de "formalismo de tempo imaginário", que foi desenvolvido por diversos autores (MATSUBARA, 1955; EZAWA; TOMOZAWA; UMEZAWA, 1957) mas acabou sendo creditado a Matsubara devido ao seu trabalho sobre os cálculos destes propagadores. Este formalismo insere as seguintes relações:

$$\begin{cases} \phi(y,\beta) = +\phi(y,0) & \text{para campos comutativos;} \\ \phi(y,\beta) = -\phi(y,0) & \text{para campos anticomutativos.} \end{cases} \quad (16)$$

Deixa evidente o significado dos sinais, a comutação ou anticomutação dos campos. Com isso fica explícito que a condição de contorno escolhida deve ser uma condição de contorno igualmente periódica ou antiperiódica dependendo do tipo de campo em questão (KAPUSTA; GALE, 2013). O importante é ressaltar que este comprimento β representa o período que, de certo modo se relaciona com uma frequência. Para respeitar a condição de contorno, os campos passam a ter uma condição de contorno periódica. Representado o campo $\phi(x, \tau)$ como uma expansão em modos de Fourier, do tipo:

$$\phi(\vec{x}, \tau) = \frac{1}{\beta} \sum \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \phi(k, \omega_n) e^{i\omega_n \tau + i \vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad (17)$$

se fizermos uma translação temporal $\tau \rightarrow \tau + \beta$, a condição $\phi(y, \beta) = \pm \phi(y, 0)$ implica que:

$$e^{i\omega_n \beta} = \pm 1, \quad (18)$$

e com isso temos as chamadas frequências de Matsubara, da forma:

$$\begin{cases} \omega_n = \frac{2n\pi}{\beta} & \text{para campos comutativos;} \\ \omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta} & \text{para campos anticomutativos.} \end{cases} \quad (19)$$

De maneira análoga à expansão do campo, podemos considerar a transformada de Fourier do propagador,

$$D(\vec{x} - \vec{x}_0) = \frac{1}{\beta} \sum \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} D(\vec{k}) e^{i\omega_n(\tau - \tau_0) + i \vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)}. \quad (20)$$

Deste modo, aplicando o operador de de Klein-Gordon, usando o tempo imaginário, teremos:

$$\partial^2 = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \nabla^2. \quad (21)$$

Aplicando este operador na função de Green $D(\vec{x} - \vec{x}_0)$, geramos a seguinte relação:

$$(-\partial^2 + m^2) D(\vec{x} - \vec{x}_0) = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0) \delta(\tau - \tau_0). \quad (22)$$

Substituindo (22) em (20), tem-se:

$$D(\vec{x} - \vec{x}_0) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} D(k, \omega_n) (\omega_n^2 + k^2 + m^2) e^{i\omega_n(\tau - \tau_0) + i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)} \quad (23)$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\omega_n(\tau - \tau_0) + i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)}. \quad (24)$$

Isso imediatamente retorna que o propagador de Matsubara deve ser escrito como:

$$D(k, \omega_n) = \frac{1}{k^2 + \bar{M}^2(n)}, \quad (25)$$

onde $\bar{M}^2(n) = \bar{m}^2 + \omega_n^2$. Basta apenas entender como as mudanças, por exemplo na delta de Dirac, afetam os cálculos perturbativos. Assim, olhando para uma esperada mudança na função delta,

$$\delta(\omega_{n_1} - \omega_{n_2}) = \int \frac{dp}{2\pi} e^{i(\omega_{n_1} - \omega_{n_2})p} \quad (26)$$

pode, e deve ser representada como uma delta de Kronecker já que os possíveis valores de ω devem ser múltiplos de um número inteiro, respeitando a relação a seguir:

$$\int \frac{dp}{2\pi} e^{i(\omega_{n_1} - \omega_{n_2})p} = \int \frac{dp}{2\pi} e^{i\frac{2\pi}{\beta}(n_1 - n_2)p}. \quad (27)$$

Fazendo a mudança de variável,

$$\frac{p}{\beta} \rightarrow p \quad (28)$$

temos exatamente a definição da delta de Kronecker, ou seja,

$$\int \frac{dp}{2\pi} e^{i(\omega_{n_1} - \omega_{n_2})p} = \frac{\beta}{2\pi} \int dp e^{i2\pi(n_1 - n_2)p} \quad (29)$$

uma vez que,

$$\int dp e^{i2\pi(n_1-n_2)p} = \delta_{n_1,n_2}, \quad (30)$$

logo, esquematicamente, temos que:

$$\delta(\omega_{n_1} - \omega_{n_2}) \rightarrow \frac{\beta}{2\pi} \delta_{n_1,n_2}, \quad (31)$$

ou melhor ainda

$$2\pi\delta(\omega_{n_1} - \omega_{n_2}) \rightarrow \beta\delta_{n_1,n_2}. \quad (32)$$

E com isso os cálculos perturbativos podem ser feitos de forma similar a teoria de temperatura zero, com as mudanças listadas a seguir:

$$\frac{1}{k^2 + m^2} \rightarrow \frac{1}{k^2 + \bar{M}^2(n)}; \quad (33)$$

$$\int \frac{dk_0}{2\pi} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum; \quad (34)$$

$$2\pi\delta(\omega_{n_1} - \omega_{n_2}) \rightarrow \beta\delta_{n_1,n_2}. \quad (35)$$

Com essas modificações, os cálculos perturbativos podem ser realizados, seguindo exatamente as mesmas regras já estabelecidas para as teorias *bulk*. Seguindo ainda a ideia proposta por Matsubara (MATSUBARA, 1955), podemos incluir na teoria de campos a temperatura finita também a presença de um potencial químico μ , fazendo o seguinte deslocamento nas frequências de Matsubara:

$$\omega_n \rightarrow \frac{2\pi n}{\beta} - i\mu, \quad (36)$$

para campos comutativos e a transformação é analoga para campos anticomutativos. Isto alteraria o propagador modificando apenas o termo que contém os n , como mostrado abaixo:

$$\frac{1}{k^2 + \bar{M}^2(n)} = \frac{1}{k^2 + m^2 + \left(\frac{2\pi n}{\beta} - i\mu\right)^2}. \quad (37)$$

e de forma similar é necessário proceder com os cálculos perturbativos.

1.2 A teoria de campos em espaços compactados

O que chamamos de teorias de campos em espaços compactados, consiste em uma generalização da já conhecida teoria de temperatura finita apresentada na seção anterior. Uma vez que o objetivo é compactar, de maneira análoga ao feito para temperatura finita, d dimensões de um espaço de D dimensões e este adquire a seguinte topologia:

$$\Gamma_D^d = (S^1)^d \times \mathbb{R}^{D-d}. \quad (38)$$

Com isso teremos d dimensões que devem ter condições de contorno periódicas, de forma similar ao feito para temperatura finita. Deste modo devemos fazer as modificações nos propagadores, nas integrais dos momentos e nas conservações de momentos. Para isso teremos que inserir as dimensões compactadas através da inserção de vetores de número de onda similares ao feito para a frequência de Matsubara para a componente temporal. Facilmente podemos ver que similar ao feito na equação (25), os momentos devem ficar da forma:

$$\tilde{k} = k + l, \quad (39)$$

onde \tilde{k} representa o vetor euclidiano de momento em D dimensões e k representa um vetor nas $(D - d)$ dimensões não compactadas, enquanto l constitui um vetor nas d dimensões compactadas. Por construção, os vetores k e l são ortogonais, se temos por exemplo d primeiras dimensões compactadas, ficamos com o seguinte arranjo:

$$\tilde{k} = (l_1, \dots, l_d, k_{d+1}, \dots, k_D), \quad (40)$$

onde fica fácil ver que:

$$k = (0, \dots, 0, k_{d+1}, \dots, k_D) \quad (41)$$

e

$$l = (l_1, \dots, l_d, 0, \dots, 0). \quad (42)$$

Deste modo, simplesmente podemos separar em dois vetores distintos as partes compactadas e as não-compactadas. E, por consequência da ortogonalidade, temos ainda:

$$\tilde{k}^2 = k^2 + l^2 \quad (43)$$

onde

$$l^2 = \sum_{i=1}^{d-1} l_i^2, \quad (44)$$

o que sempre irá valer para vetores na métrica euclidiana. Sendo l , uma representação de números de onda, suas componentes são do tipo:

$$l_i = \frac{2\pi}{L_i} n_i; \quad n_i \in \mathbb{Z} \quad (45)$$

de modo similar ao caso de temperatura finita. Com isso, se estamos trabalhando com a teoria de campos a temperatura finita, temos que compactar apenas a dimensão dada por:

$$l_1 = \omega_n \quad (46)$$

e deste modo

$$L_1 = \beta. \quad (47)$$

Tendo isso em mãos, o processo natural é repetir os passos feitos para temperatura finita com tempo imaginário (espaço euclidiano). Assim, teremos um teoria do tipo Matsubara generalizada com diversas frequências tipo de Matsubara. Deste modo devemos trocar uma integral por um soma para cada dimensão compactada, da seguinte maneira:

$$\int \frac{d\tilde{k}_i}{2\pi} \rightarrow \frac{1}{L_i} \sum_{n_i=-\infty}^{\infty}. \quad (48)$$

Assim sendo, teremos a função de Green no espaço de Fourier, na forma:

$$D(\vec{x} - \vec{x}_0) = \prod_{i=0}^{d-1} \left(\frac{1}{L_i} \sum_{n_i=-\infty}^{\infty} \right) \int \frac{d^{D-d}k}{(2\pi)^{D-d}} D(k) e^{i\vec{k} \cdot (x-x_0)}. \quad (49)$$

Podemos introduzir uma notação compacta, definindo

$$\text{Vol} = \prod_{i=0}^{d-1} L_i \quad (50)$$

e também definindo

$$\sum_{\{n_i\}=-\infty}^{\infty} = \prod_{i=0}^{d-1} \left(\sum_{n_i=-\infty}^{\infty} \right), \quad (51)$$

com a interpretação de que Vol representa o volume do espaço compactado e que $\{n_i\}$ representa o conjunto de todos os possíveis n_i presentes na teoria, uma vez que:

$$l_i = \frac{2\pi}{L_i} n_i. \quad (52)$$

Aplicando assim o operador de Klein-Gordon na função de Green, tem-se:

$$(-\partial^2 + m^2) D(\vec{x} - \vec{x}_0) = \delta^D(x - x_0) \quad (53)$$

$$(-\partial^2 + m^2) D(\vec{x} - \vec{x}_0) = \frac{1}{\text{Vol}} \sum_{\{n_i\}=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{D-d}k}{(2\pi)^{D-d}} D(k) (\tilde{k}^2 + m^2) e^{i\vec{k} \cdot (x-x_0)}, \quad (54)$$

de modo que

$$D(k) = \frac{1}{\tilde{k}^2 + m^2}. \quad (55)$$

Em analogia ao que já vimos na equação (43), temos que o propagador agora se escreve como:

$$D(k, \{n_i\}) = \frac{1}{k^2 + \bar{M}^2(\{n_i\})}, \quad (56)$$

onde,

$$\bar{M}^2(\{n_i\}) = l^2 + m^2. \quad (57)$$

O ultimo passo é a transformação das deltas de Dirac, que irá seguir a mesma transformação apresentada na equação (35), com a diferença que poderemos ter d deltas. Deste modo:

$$2\pi\delta(l_i^{(j)} - l_i^{(r)}) \rightarrow L_i\delta_{n_i^{(j)}, n_i^{(r)}}, \quad (58)$$

onde i representa a i ésima componente do vetor l enquanto j e r representam dois possíveis vetores referentes a momentos de propagadores diferentes. Desta maneira, podemos partir para os cálculos perturbativos apenas fazendo as seguintes modificações nas integrais:

$$\int \frac{d^D \tilde{k}^{(j)}}{(2\pi)^D} \rightarrow \frac{1}{\text{Vol}} \sum_{\{n_i\}=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^N k_i^{(j)}}{(2\pi)^N}, \quad (59)$$

onde $N = D - d$ representa o número de dimensões não-compactadas e, recaptulando da equação (43) que $\tilde{k}^2 = k^2 + l^2$, podemos mudar o propagador

$$D(k^{(j)}, \{n_i\}) = \frac{1}{(k^{(j)})^2 + \bar{M}^2(\{n_i^{(j)}\})}. \quad (60)$$

E as delta de Dirac tornam

$$(2\pi)^D \delta^D(\tilde{k}^{(j)} - \tilde{k}^{(r)}) \rightarrow \text{Vol} (2\pi)^N \delta^N(k^{(j)} - k^{(r)}) \prod_{i=1}^d \delta_{n_i^{(j)}, n_i^{(r)}}. \quad (61)$$

O produtório $\prod_{i=1}^d$ representa que existe uma delta de Kronecker para cada uma das d dimensões compactadas.

1.3 A zeta de Riemann e as funções de Bessel

Um dos obstáculos de teorias com algum grau de discretização é justamente como calcular os somatórios. Muitos somatórios são representações de funções conhecidas, que é o caso das funções zeta e de Bessel. Devido as continuações analíticas podemos ter que relacionar essas funções, usando representações que nos permitam relacionar duas funções distintas, que é o caso da função zeta e a função de Bessel. Primeiramente, deve-se entender como a zeta de Riemann (na realidade as suas generalizações) é introduzida no cálculos da teoria de campos com espaços compactados. As integrais presentes na teoria de campos em geral podem ser reduzidas a uma integral do tipo:

$$I(\Delta) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 + \Delta)^s} \quad (62)$$

onde Δ não é função de k , podendo ser função da massa e de parametros que eventualmente precisam ser integrados, como os parametros de Feynman e Schwinger (PESKIN; SCHROEDER, 1995; ITZYKSON; ZUBER, 2006). Deste modo, podemos fazer uma mudança de variável, e com isso:

$$I(\Delta) = \frac{1}{\Delta^{s-\frac{N}{2}}} \int \frac{d^N k}{(2\pi)^N} \frac{1}{(k^2 + 1)^s}, \quad (63)$$

ou ainda

$$I(\Delta) = \frac{1}{\Delta^{s-\frac{N}{2}}} I(1). \quad (64)$$

Uma vez que tenhamos compactado uma ou mais dimensões, este Δ pode, e de fato irá, conter termos referentes às dimensões compactadas, enquanto o $I(1)$ não tem nenhuma informação sobre as dimensões compactadas. Podemos esperar que este Δ contenha termos de no máximo ordem l^2 , uma vez que este propagador deve ser uma função similar à do propagador descrito na equação (60) e o resultado de alguma aplicação de conservação de momento. Com isso podemos ter dois tipos distintos de problemas, quando existe ou não uma mistura entre diferentes $l^{(j)}$. Vamos abordar o caso mais simples a priori, quando não existe nenhum tipo de mistura dos $l^{(j)}$ e consequentemente nenhuma mistura dos $n_i^{(j)}$. Deste modo temos que:

$$l_i^2 + f(l_i) = (l_i - b'_i)^2 + c_i^2 \quad (65)$$

onde b_i e c_i são constantes. Logo, podemos ver que o Δ fica da forma:

$$\Delta = \sum_{i=1}^d [(l_i - b_i)^2 + c_i^2] \quad (66)$$

uma vez que l^2 tem d termos de l_i e o vetor l é da forma apresentada na equação (44). De maneira simplificada podemos afirmar que:

$$c^2 = \sum_{i=1}^d c_i^2. \quad (67)$$

Como de alguma forma teremos que executar a soma sobre todos os n presentes na expansão de Δ , temos exatamente a representação da função zeta inhomogênea de Epstein-Hurwitz

$$E_d^{c^2}(\nu, \{a_i\}, \{b_i\}) = \sum_{\{n_i\}=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Delta^\nu} = \sum_{\{n_i\}=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^d \left(\frac{2\pi}{L_i} \right)^2 (n_i - b_i)^2 + c^2 \right]^{-\nu}, \quad (68)$$

onde comparando com a definição da zeta inhomogênea de Epstein-Hurwitz:

$$E_d^{c^2}(\nu, \{a_i\}, \{b_i\}) = \sum_{\{n_i\}=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^d a_i (n_i - b_i)^2 + c^2 \right]^{-\nu} \quad (69)$$

e o expoente ν como

$$\nu = s - \frac{N}{2}. \quad (70)$$

Sendo $\{a_i\}$ e $\{b_i\}$ a notação que significa o conjunto de todos os d possíveis valores para a_i e b_i . Podemos representar a função zeta como uma espécie de transformada de Laplace, do tipo:

$$\frac{1}{s^\nu} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int dt t^{\nu-1} e^{-st}. \quad (71)$$

Deste modo, temos uma representação integral para a função zeta da forma descrita a seguir:

$$E_d^{c^2}(v, \{a_i\}, \{b_i\}) = \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{\{n_i\}=-\infty}^{\infty} \int dt t^{v-1} e^{-t[\sum_{i=1}^d a_i(n_i-b_i)^2 + c^2]}, \quad (72)$$

podemos ver ainda que a zeta tem uma relação com a função teta de Jacobi (OLVER, 2010), da seguinte maneira:

$$E_d^{c^2}(v, \{a_i\}, \{b_i\}) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int t^{v-1} e^{-tc^2} \Theta(\{a_i\}, \{b_i\}, t), \quad (73)$$

sendo Θ a função teta de Jacobi (OLVER, 2010), dada por:

$$\Theta(\{a_i\}, \{b_i\}, t) = \sum_{\{n_i\}=-\infty}^{\infty} e^{-t[\sum_{i=1}^d a_i(n_i-b_i)^2]}. \quad (74)$$

Ao ser cuidadosamente observado, podemos ver que este conjunto de somatórios em conjunto com a propriedade da exponencial, fica da seguinte forma:

$$\Theta(\{a_i\}, \{b_i\}, t) = \prod_{i=1}^d \sum_{n_i=-\infty}^{\infty} e^{-ta_i(n_i-b_i)^2}. \quad (75)$$

Isto deixa aberto o caminho para entendermos como os somatórios se comportam. Apenas com o intuito de simplificar o presente texto, os detalhes desta conta podem ser encontrados na referência (ELIZALDE, 1995). Sobre a função Θ , se olharmos com cuidado, podemos dizer que:

$$\Theta(\{a_i\}, \{b_i\}, t) = \prod_{i=1}^d \Theta_i(t, a_i, b_i), \quad (76)$$

onde, a função Θ_i é de fato a função teta de Jacobi, ou seja:

$$\Theta_i(t, a_i, b_i) = \sum_{n_i=-\infty}^{\infty} e^{-ta_i(n_i-b_i)^2}, \quad (77)$$

que possui uma conhecida identidade (KIRSTEN, 1994) (ver Apêndice 4),

$$\sum_{n_i=-\infty}^{\infty} e^{-yn^2 + 2in\pi z} = \sqrt{\frac{\pi}{y}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{y}(n-z)^2}. \quad (78)$$

Isto praticamente se adequa ao que temos, precisando apenas notar que, com as devidas comparações termo a termo, obtemos:

$$\frac{\pi^2}{y} = ta_i, \quad (79)$$

$$y = \frac{\pi^2}{ta_i}, \quad (80)$$

$$z = b_i, \quad (81)$$

que nos leva à

$$\sum_{n_i=-\infty}^{\infty} e^{-ta_i(n_i-b_i)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{ta_i}} \sum_{n_i=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{ta_i}n_i^2+2in_i\pi b_i}. \quad (82)$$

Ou, ainda de forma mais clara:

$$\Theta_i(t, a_i, b_i) = \sqrt{\frac{\pi}{ta_i}} \sum_{n_i=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{ta_i}n_i^2+2in_i\pi b_i}. \quad (83)$$

Assim, levando o resultado obtido em (83) na equação (76):

$$\Theta(\{a_i\}, \{b_i\}, t) = \prod_{i=1}^d \sqrt{\frac{\pi}{ta_i}} \sum_{n_i=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{ta_i}n_i^2+2in_i\pi b_i}, \quad (84)$$

e, executando o produtório, concluímos que:

$$\Theta(\{a_i\}, \{b_i\}, t) = \left(\frac{\pi}{ta_i}\right)^{d/2} \sum_{n_i=-\infty}^{\infty} e^{\sum_{i=1}^d \left(-\frac{\pi^2}{ta_i}n_i^2+2in_i\pi b_i\right)}. \quad (85)$$

A função Θ descrita na equação (85) tem uma simetria parcial com relação a troca $n \rightarrow -n$, e isso fica evidente na descrição que será formulada a seguir. Para facilitar os cálculos, vamos voltar a escrever o somatório presente nas exponenciais como um produtório. Assim sendo:

$$\sum_{n_i=-\infty}^{\infty} e^{\sum_{i=1}^d \left(-\frac{\pi^2}{ta_i}n_i^2+2in_i\pi b_i\right)} = \prod_{i=1}^d \sum_{n_i=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{ta_i}n_i^2+2in_i\pi b_i}. \quad (86)$$

Com isso podemos separar as somas em n negativos, zero e positivos, ou seja:

$$\sum_{n_i=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{a_i} n_i^2 + 2in_i \pi b_i} = \sum_{n_i=-\infty}^{-1} e^{-\frac{\pi^2}{a_i} n_i^2 + 2in_i \pi b_i} + e^{-\frac{\pi^2}{a_i} n_i^2 + 2in_i \pi b_i} \Big|_{n_i=0} + \sum_{n_i=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{a_i} n_i^2 + 2in_i \pi b_i} \quad (87)$$

e, fazendo a troca $n \rightarrow -n$ no primeiro somatório, ficamos com:

$$\sum_{n_i=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{a_i} n_i^2 + 2in_i \pi b_i} = \sum_{n_i=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{a_i} n_i^2 - 2in_i \pi b_i} + 1 + \sum_{n_i=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{a_i} n_i^2 + 2in_i \pi b_i}. \quad (88)$$

O termo $e^{-\frac{\pi^2}{a_i} n_i^2}$ é comum nos dois somatórios que contêm os mesmos índices de soma, com isso colocando este termo em evidência:

$$\sum_{n_i=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{a_i} n_i^2 + 2in_i \pi b_i} = 1 + \sum_{n_i=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{a_i} n_i^2} (e^{2in_i \pi b_i} + e^{-2in_i \pi b_i}), \quad (89)$$

o termo entre parênteses pode ser relacionado ao $\cos(x)$ que respeita a seguinte relação:

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos(x), \quad (90)$$

assim

$$\sum_{n_i=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{a_i} n_i^2 + 2in_i \pi b_i} = 1 + 2 \sum_{n_i=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{a_i} n_i^2} \cos(2n_i \pi b_i). \quad (91)$$

Voltando com esse resultado na equação (86) ficamos com:

$$\sum_{n_i=-\infty}^{\infty} e^{\sum_{i=1}^d \left(-\frac{\pi^2}{a_i} n_i^2 + 2in_i \pi b_i \right)} = \prod_{i=1}^d \left(1 + 2 \sum_{n_i=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{a_i} n_i^2} \cos(2n_i \pi b_i) \right). \quad (92)$$

Usando o resultado anterior na equação (85), obtemos:

$$\Theta(\{a_i\}, \{b_i\}, t) = \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^d a_i}} \left(\frac{\pi}{t} \right)^{d/2} \prod_{i=1}^d \left(1 + 2 \sum_{n_i=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{a_i} n_i^2} \cos(2n_i \pi b_i) \right) \quad (93)$$

e assim podemos finalmente usar o resultado da função Θ na função zeta descrita pela equação (73)

$$E_d^{c^2}(\nu, \{a_i\}, \{b_i\}) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \frac{\pi^{d/2}}{\sqrt{\prod_{i=1}^d a_i}} \int dt t^{\nu-1} e^{-tc^2} \left(\frac{1}{t}\right)^{d/2} \prod_{i=1}^d \left(1 + 2 \sum_{n_i=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{a_i} n_i^2} \cos(2n_i \pi b_i)\right). \quad (94)$$

Como temos um produtório de somas, teremos os termos que contém todas as possibilidades, ou seja, de nenhuma soma até o produto das d somas. Com isso, teremos dois tipos de integrais distintas quando nos referimos à integral I_0 descrita a seguir:

$$I_0 = \int_0^{\infty} t^{\nu-1} e^{-tc^2} \left(\frac{1}{t}\right)^{d/2} \prod_{i=1}^d \left(1 + 2 \sum_{n_i=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{a_i} n_i^2} \cos(2n_i \pi b_i)\right), \quad (95)$$

a primeira que não contém nenhuma soma,

$$I_1 = \int_0^{\infty} dt t^{\nu-d/2-1} e^{-tc^2}, \quad (96)$$

e a integral que irá conter um numero k qualquer de somas,

$$I_2 = \left(\prod_{i=1}^k \sum_{n_i=1}^{\infty}\right) \int_0^{\infty} dt t^{\nu-d/2-1} e^{-tc^2} e^{-\sum_{i=1}^k \frac{\pi^2}{a_i} n_i^2}. \quad (97)$$

A integral descrita por I_2 não atua sobre os cossenos, uma vez que estes não dependem da variável de integração t . Ainda sobre a integral I_2 esta ainda tem um fator $\prod_{i=1}^k (2 \cos(2n_i \pi b_i))$ que deve ser considerado remontar o conjunto de integrais que descreve I_0 . Fazendo uma pequena mudança de variável na integral I_1 vemos que ela é exatamente a definição da função gama de Euler

$$I_1 = (c^2)^{d/2-\nu} \int u^{\nu-d/2-1} e^{-u}, \quad (98)$$

logo

$$I_1 = (c^2)^{d/2-\nu} \Gamma(\nu - d/2). \quad (99)$$

Vê-se que a integral I_2 é a definição integral de uma das funções de Bessel. Sabendo que a representação integral da função de Bessel modificada de segunda espécie, $K_a(t)$ possui a representação:

$$K_a(2\sqrt{yz}) = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{z}\right)^{-\frac{a}{2}} \int_0^\infty dx \cdot x^{a-1} e^{-\frac{y}{x} - z \cdot x} \quad (100)$$

podemos reescrever a inequal como:

$$\int_0^\infty dt t^{a-1} e^{-\frac{y}{t} - z \cdot t} = 2 \left(\frac{z}{y}\right)^{-\frac{a}{2}} K_a(2\sqrt{yz}). \quad (101)$$

Assim, deve-se fazer as devidas interpretações:

$$a = \nu - d/2; \quad (102)$$

$$z = c^2; \quad (103)$$

$$y = \frac{\pi^2 n_i^2}{a_i}, \quad (104)$$

de modo que a integral descrita por I_2 fica conforme a seguir:

$$I_2 = 2 \left(\prod_{i=1}^k \sum_{n_i=1}^\infty \right) \left(\sum_{i=1}^k \frac{\pi^2 n_i^2}{a_i c^2} \right)^{\frac{\nu-d/2}{2}} K_a \left(2\pi c \sqrt{\sum_{i=1}^k \frac{n_i^2}{a_i}} \right). \quad (105)$$

Assim sendo, a função zeta pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} E_d^{c^2}(\nu, \{a_i\}, \{b_i\}) &= \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\nu) \sqrt{\prod_{i=1}^d a_i}} \left\{ (c^2)^{d/2-\nu} \Gamma(\nu - d/2) + 2^2 \sum_{i=1}^d \sum_{n_i=1}^\infty \left(\frac{n_i^2 \pi^2}{a_i c^2} \right)^{\frac{\nu-d/2}{2}} \times \right. \\ &\quad \cos(2\pi n_i b_i) K_{\nu-d/2} \left(2c\pi \sqrt{\frac{n_i^2}{a_i}} \right) + 2^3 \sum_{j>i=1}^d \sum_{n_i, n_j=1}^\infty \left(\frac{n_i^2 \pi^2}{a_i c^2} + \frac{n_j^2 \pi^2}{a_j c^2} \right)^{\frac{\nu-d/2}{2}} \times \\ &\quad \cos(2\pi n_i b_i) \cos(2\pi n_j b_j) K_{\nu-d/2} \left(2c\pi \sqrt{\frac{n_i^2}{a_i} + \frac{n_j^2}{a_j}} \right) + \dots + \\ &\quad \left. 2^{d+1} \sum_{n_i=1}^\infty \left(\sum_{i=1}^d \frac{n_i^2 \pi^2}{a_i c^2} \right)^{\frac{\nu-d/2}{2}} \left[\prod_{i=1}^d \cos(2\pi n_i b_i) \right] \times K_{\nu-d/2} \left(2c\pi \sqrt{\sum_{i=1}^d \frac{n_i^2}{a_i}} \right) \right\}. \quad (106) \end{aligned}$$

Nestas expressões, apenas por conveniência escolhemos que as dimensões compactadas iniciam em $i = 1$ até $i = d$, mas de um modo geral poderia ser feita para qualquer escolha de posição das dimensões compactadas, nas quais esquematicamente é preciso somar sobre todas as possibilidades de combinações dos n_i . Fisicamente falando, podemos interpretar os b_i com um momento externo coservado no vértice, uma vez que:

$$\frac{1}{(\tilde{k} + \tilde{p})^2 + m^2} \rightarrow \frac{1}{(k + p)^2 + (l + \rho)^2 + m^2}, \quad (107)$$

onde ρ é a parte do momento externo \tilde{p} referente as dimensões compactadas. Com isso temos alguns casos particulares, como os de $b_i = 0$, o que poderia acontecer caso os momentos externos fossem nulos. Ou ainda o caso de $c^2 = 0$ que poderia ocorrer em uma teoria sem massa. Basta ver que o Δ na equação (107) é

$$\Delta = (l + \rho)^2 + m^2, \quad (108)$$

de modo que fica fácil a identificação $c^2 = m^2$. O caso dos $b_i = 0$ é mais trivial pois teríamos diversos termos de $\cos(0) = 1$, o que nos daria:

$$\begin{aligned} E_d^{c^2}(\nu, \{a_i\}) &= \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\nu) \sqrt{\prod_i^d a_i}} \left\{ (c^2)^{d/2-\nu} \Gamma(\nu - d/2) \right. \\ &+ 2^2 \sum_{i=1}^d \sum_{n_i=1}^{\infty} \left(\frac{n_i^2 \pi^2}{a_i c^2} \right)^{\frac{\nu-d/2}{2}} K_{\nu-d/2} \left(2c\pi \sqrt{\frac{n_i^2}{a_i}} \right) \\ &+ 2^3 \sum_{j>i=1}^d \sum_{n_i, n_j=1}^{\infty} \left(\frac{n_i^2 \pi^2}{a_i c^2} + \frac{n_j^2 \pi^2}{a_j c^2} \right)^{\frac{\nu-d/2}{2}} K_{\nu-d/2} \left(2c\pi \sqrt{\frac{n_i^2}{a_i} + \frac{n_j^2}{a_j}} \right) \\ &+ \dots + 2^{d+1} \sum_{n_i=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^d \frac{n_i^2 \pi^2}{a_i c^2} \right)^{\frac{\nu-d/2}{2}} K_{\nu-d/2} \left(2c\pi \sqrt{\sum_{i=1}^d \frac{n_i^2}{a_i}} \right) \left. \right\}. \quad (109) \end{aligned}$$

Um outro caso limite ocorre, para uma eventual dimensão de temperatura, quando há a presença do potencial químico que irá transformar o coeficiente dos cossenos em argumentos complexos, que podem ser descritos como cossenos hiperbólicos. Tomando como exemplo o descrito na equação (36), temos:

$$l_0^2 = \left(\frac{2\pi n_0}{L_0} - i\mu_0 \right)^2 \quad (110)$$

este termo pode ser reescrito como:

$$l_0^2 = \left(\frac{2\pi n_0}{L_0} \right)^2 \left(n_0 - i \frac{L_0 \mu_0}{2\pi} \right)^2 \quad (111)$$

e, comparado com o mostrado na equação (69) no início desta seção, podemos identificar:

$$a_0 = \left(\frac{2\pi n_0}{L_0} \right)^2; \quad (112)$$

$$b_0 = i \frac{L_0 \mu_0}{2\pi}. \quad (113)$$

Isto implica que o b_0 seja complexo. Em si, não mudam muito os resultados descritos, apenas temos que nos atentar que:

$$\cos(iL_0\mu_0n_0) = \cosh(L_0\mu_0n_0). \quad (114)$$

Não é conhecida nenhuma aplicação física que insira um “potencial químico espacial” mas apenas para ter a completeza do formalismo, fazemos:

$$l_i^2 = \left(\frac{2\pi n_i}{L_i} - i\mu_i \right)^2. \quad (115)$$

Eventualmente, devido a futuras conservações de momento externos não triviais, podemos ter ainda um b_i com parte real e parte imaginária. Isto continua não afetando o resultado, uma vez que estas possibilidades só irão modificar os b_i . Pode-se usar a conhecida identidade:

$$\cos(a + ib) = \cos(a) \cosh(b) - i \sin(a) \sinh(b). \quad (116)$$

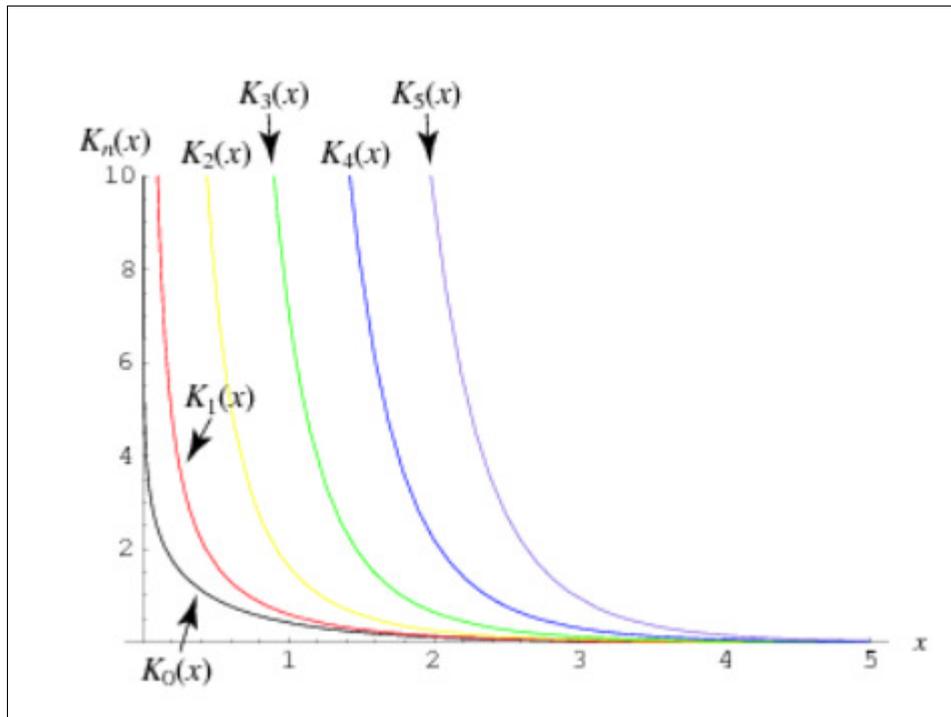
Deste modo varremos todas as possibilidades para este caso.

1.4 Uma breve análise sobre a convergência da série

Um ponto relevante que deve ser discutido é justamente a questão da convergência, não só dos termos da série que são as funções de Bessel, como da própria série decrita na equação

(106), como um todo. As funções de Bessel do tipo $K_n(x)$ têm convergência bem conhecida na literatura. Como pode ser ilustrado com a figura (1), as funções de Bessel modificadas do segundo tipo, $K_n(x)$, tem um comportamento assintótico tendendo à zero para o argumento tendendo ao infinito.

Figura 1 – Bessel $K_n(x)$.



Legenda: O gráfico representa as diversas funções de Bessel e seu comportamento assintótico.

Fonte: O autor, 2020.

Deste modo, a série infinita destes termos possivelmente será convergente. Podemos aplicar o conhecido teste da razão para avaliar o comportamento da convergência das séries, assim, se o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right| < 1 \quad (117)$$

acontece, a série é dita convergente. Avaliando a série de soma única para o caso de $b_i = 0$, temos:

$$A_n = \left(\frac{n_i^2 \pi^2}{a_i c^2} \right)^{\frac{\nu-d/2}{2}} K_{\nu-d/2} \left(2c\pi \sqrt{\frac{n_i^2}{a_i}} \right), \quad (118)$$

então,

$$A_{n+1} = \left(\frac{(n_i + 1)^2 \pi^2}{a_i c^2} \right)^{\frac{v-d/2}{2}} K_{v-d/2} \left(2c\pi \sqrt{\frac{(n_i + 1)^2}{a_i}} \right) \quad (119)$$

e portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(\frac{(n_i+1)^2 \pi^2}{a_i c^2} \right)^{\frac{v-d/2}{2}} K_{v-d/2} \left(2c\pi \sqrt{\frac{(n_i+1)^2}{a_i}} \right)}{\left(\frac{n_i^2 \pi^2}{a_i c^2} \right)^{\frac{v-d/2}{2}} K_{v-d/2} \left(2c\pi \sqrt{\frac{n_i^2}{a_i}} \right)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{n_i + 1}{n_i} \right)^{v-d/2} \right|, \quad (120)$$

$$\times \frac{K_{v-d/2} \left(2c\pi \sqrt{\frac{(n_i+1)^2}{a_i}} \right)}{K_{v-d/2} \left(2c\pi \sqrt{\frac{n_i^2}{a_i}} \right)} \quad (121)$$

o que pode ser resolvido, sabendo que a função de Bessel assitoticamente se comporta como:

$$K_n(x) = P(1/\sqrt{x})e^{-x}, \quad (122)$$

de modo que

$$\lim_{n_i \rightarrow \infty} \left| \frac{P(1/(n+1))e^{-2c\pi(n_i+1)}}{P(1/n)e^{-2c\pi n_i}} \right| = e^{-2c\pi}, \quad (123)$$

uma vez que $P(1/x)$ é um polinômio. Como por hipótese $c^2 \neq 0$, temos que a série é absolutamente convergente, já que o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{n_i + 1}{n_i} \right)^{v-d/2} \right| = 1, \quad (124)$$

de forma extremamente trivial. Isso não é uma prova formal da convergência da série, mas ilustra o comportamento já conhecido na literatura (ELIZALDE, 1995)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{K_{v-d/2}(x+a)}{K_{v-d/2}(x)} \right| = e^{-a}. \quad (125)$$

É evidente que para as somas duplas, triplas e etc a convergência pode ser bastante complexa

de ser avaliada. Entretanto, como em geral podemos dizer que a soma presente em I_0 descrita na equação (95), considerando os $b_i = 0$, pode ter sua soma avaliada com o critério conhecido como teste da integral

$$\sum_{n_i=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{ta_i} n_i^2} \leq \int_1^{\infty} dx_i e^{-\frac{\pi^2}{ta_i} x_i^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{ta_i}{\pi}} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{ta_i}{\pi}} \right) \right), \quad (126)$$

onde $\operatorname{erf}(x)$ é a função erro. O valor mínimo da função erro no intervalo $t \in [0, \infty[$ ocorre em $t = 0$. Como $\operatorname{erf}(0) = 0$, temos que a soma sobre os n_i deve ser limitada conforme descrito a seguir:

$$\sum_{n_i=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{ta_i} n_i^2} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{ta_i}{\pi}}. \quad (127)$$

A integral I_0 definida em (95), deve por sua vez ser respeitar a seguinte desigualdade:

$$I_0 \leq \int t^{\nu-d/2-1} e^{-tc^2} \prod_{i=1}^d \left(1 + \sqrt{\frac{ta_i}{\pi}} \right). \quad (128)$$

Claramente a relação citada previamente, terá como resultado $d + 1$ funções gama. Com isso, é de se esperar que qualquer eventual problema de convergência seja um problema dimensional nos polos das funções gama. Novamente, isto não é uma prova rigorosa e sim uma argumentação do que já é conhecido na literatura (ELIZALDE *et al.*, 1994). Então, devemos nos atentar na equação (106), aos polos da função $\Gamma(\nu - d/2)$, que terá polos em caso de $\nu = 0$ e $\nu = 0$ com $d = 2$. Os cossenos que foram omitidos nesta análise são funções limitadas e por isso não modificariam a convergência da série.

2 UM ESTUDO DA RENORMALIZAÇÃO NOS ESPAÇOS TOROIDAIS

Antes de efetivamente estudar a renormalização nos espaços toroidais, é preciso entender como basicamente a renormalização ocorre nos espaços sem dimensões compactadas. Para definir a teoria ϕ^4 corretamente, em quatro dimensões, temos que impor algumas condições. Estas condições recebem o nome de condições de renormalização, que definem os valores das funções de Green de 2 e 4 pontos. Vamos adotar a seguinte condição de renormalização (PESKIN; SCHROEDER, 1995):

$$\overleftarrow{p} \text{---} \textcircled{1PI} \text{---} = 0 \text{ em } p^2 = -M^2 \quad (129)$$

$$\frac{d}{dp^2} \left(\overleftarrow{p} \text{---} \textcircled{1PI} \text{---} \right) = 0 \text{ em } p^2 = -M^2 \quad (130)$$

$$\begin{array}{c} p_3 \swarrow \quad \nearrow p_4 \\ \textcircled{} \\ p_1 \swarrow \quad \nearrow p_2 \end{array} = -i\lambda \text{ em } (p_1 + p_2)^2 = (p_1 + p_3)^2 = (p_1 + p_4)^2 = -M^2 \quad (131)$$

O símbolo $1PI^1$ representa a soma das contribuições de todos os diagramas de Feynman, amputados (sem a contribuição de momentos externos), irreduzíveis a uma partícula (para mais detalhes ver (PESKIN; SCHROEDER, 1995)). Enquanto o parâmetro M representa a escala da teoria. Com isso, temos as definições de valores das funções de Green de 2 e 4 pontos. Esta escala pode ser usada para tornar adimensionais os parâmetros de interesse da teoria, como, por exemplo:

$$m'^2 = m^2 M^{-2}, \quad (132)$$

$$\lambda' = \lambda M^{D-4}, \quad (133)$$

$$k' = k M^{-1}, \quad (134)$$

$$x' = x M^{-1}, \quad (135)$$

onde λ é a constante de acoplamento da teoria. Como a teoria possui uma escala M , podemos avaliar o comportamento da função de Green quando a escala varia. Como sabemos (para mais

¹ $1PI$: $\overleftarrow{p} \text{---} \textcircled{1PI} \text{---}$

detalhes ver (PESKIN; SCHROEDER, 1995)), a função de Green depende dos parâmetros λ , M e do próprio campo ϕ . Seja a função de Green, de n campos, dada por:

$$G^{(n)}(\{x\}) = \langle \Omega | T \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) | \Omega \rangle, \quad (136)$$

onde o operador T é o operador de ordenamento temporal e $|\Omega\rangle$ é o vácuo físico. Ao fazer um deslocamento na escala, é preciso fazer um deslocamento nos campos e na constante de acoplamento. Fazendo isto:

$$M' = M + \delta M, \quad (137)$$

$$\lambda' = \lambda + \delta \lambda, \quad (138)$$

$$\phi' = (1 + \delta \eta) \phi. \quad (139)$$

Em termo desses novos parâmetros, a função de Green é escrita como:

$$G'^{(n)}(\{x\}) = \langle \Omega | T \phi'(x_1) \phi'(x_2) \cdots \phi'(x_n) | \Omega \rangle \quad (140)$$

ou ainda,

$$G'^{(n)}(\{x\}) = (1 + \delta \eta)^n \langle \Omega | T \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) | \Omega \rangle \quad (141)$$

e finalmente tem-se a variação da função de Green

$$G'^{(n)}(\{x\}) = (1 + \delta \eta)^n G^{(n)}(\{x\}). \quad (142)$$

Como $\delta \eta$ é pequeno, uma aproximação de primeira ordem pode ser feita da forma:

$$(1 + \delta \eta)^n \approx 1 + n \delta \eta. \quad (143)$$

Finalmente podemos, então, ver que a transformação da função de Green é definida por:

$$G'^{(n)}(\{x\}) = (1 + n \delta \eta) G^{(n)}(\{x\}). \quad (144)$$

Como o intuito é analisar a variação $\delta G^{(n)}$, podemos considerar esta variação de duas maneiras distintas, uma vez que,

$$\delta G^{(n)}(\{x\}) = G'^{(n)}(\{x\}) - G^{(n)}(\{x\}). \quad (145)$$

A primeira maneira é intuitiva, basta aplicar a definição de $\delta G^{(n)}$ na equação (144), desta forma tem-se:

$$\delta G^{(n)} = n\delta\eta G^{(n)}. \quad (146)$$

A segunda maneira vem do fato de sabermos que como $G^{(n)}$ depende do parâmetros de escala e constante de acoplamento, basta tomar uma variação total de $G^{(n)}$ similar a derivada total. Fazendo esta variação obtém-se:

$$\delta G^{(n)} = \left(\delta M \frac{\partial}{\partial M} + \delta \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) G^{(n)}. \quad (147)$$

Assim, basta igualar os resultados pelos dois caminhos distintos,

$$n\delta\eta G^{(n)} = \left(\delta M \frac{\partial}{\partial M} + \delta \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) G^{(n)}, \quad (148)$$

que implica:

$$\left(\delta M \frac{\partial}{\partial M} + \delta \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} - n\delta\eta \right) G^{(n)} = 0. \quad (149)$$

Dividindo a equação por $\delta M/M$, tem-se a conhecida equação de Callan-Symanzik:

$$\left(M \frac{\partial}{\partial M} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} + n\gamma \right) G^{(n)} = 0, \quad (150)$$

onde defini-se os seguintes parâmetros:

$$\beta = M \frac{\delta \lambda}{\delta M} \quad (151)$$

e

$$\gamma = -M \frac{\delta\eta}{\delta M}. \quad (152)$$

Para poder calcular β e γ , é necessário entender como as divisões por δM irão se transformar em derivadas. Das equações (137) e (138) temos:

$$\frac{\delta\lambda}{\delta M} = \frac{\lambda' - \lambda}{\delta M}, \quad (153)$$

como $\lambda' = \lambda(M + \delta M)$,

$$\frac{\delta\lambda}{\delta M} = \frac{\lambda(M + \delta M) - \lambda(M)}{\delta M}, \quad (154)$$

expandindo δM em primeira ordem, temos:

$$\frac{\delta\lambda}{\delta M} = \frac{\partial\lambda}{\partial M}. \quad (155)$$

De forma similar, o campo renormalizado ϕ e o campo nu ϕ_0 (campo não renormalizado) se relacionam através de um reescalonamento definido como:

$$\phi = Z(M)^{-1/2} \phi_0. \quad (156)$$

Ao fazer o deslocamento da escala, segue que:

$$\phi' = Z(M + \delta M)^{-1/2} \phi_0, \quad (157)$$

de modo que, comparando as equações (156) e (157)

$$\phi' = \frac{Z(M + \delta M)^{-1/2}}{Z(M)^{-1/2}} \phi. \quad (158)$$

Por outro lado, comparando com a equação (139), pode-se dizer que:

$$(1 + \delta\eta) = \frac{Z(M + \delta M)^{-1/2}}{Z(M)^{-1/2}}. \quad (159)$$

Uma vez que o interesse é na razão $\delta\eta/\delta M$, isolando o termo de $\delta\eta$, temos:

$$\delta\eta = \frac{Z(M + \delta M)^{-1/2} - Z(M)^{-1/2}}{Z(M)^{-1/2}}. \quad (160)$$

Dividindo por δM e, novamente, expandindo em primeira ordem, obtém-se:

$$\frac{\delta\eta}{\delta M} = Z^{1/2}(M) \frac{Z(M + \delta M)^{-1/2} - Z(M)^{-1/2}}{\delta M} = Z^{1/2} \frac{\partial Z^{-1/2}}{\partial M}, \quad (161)$$

ou seja,

$$\frac{\delta\eta}{\delta M} = -\frac{1}{2} \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial M}. \quad (162)$$

Portanto os parâmetros β e γ podem ser representados por funções da constante de escala, representada como:

$$\beta = M \frac{\partial \lambda}{\partial M} \quad (163)$$

e

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{M}{Z} \frac{\partial Z}{\partial M}. \quad (164)$$

2.1 O cálculo da função β

As funções β e γ vêm a ser muito importantes na teoria dos expoentes críticos, pois estão diretamente relacionadas com a transição de fases (mais detalhes podem ser encontrados

no capítulo 10 do (PESKIN; SCHROEDER, 1995)). Nesta seção, o intuito é calcular a função β sem introduzir os efeitos das dimensões compactadas, já que a obtenção deste parâmetro no *bulk* ajuda no cálculo, considerando as dimensões compactadas. Na seção anterior foi mostrada uma maneira de calcular as funções β e γ , porém existe um método mais conveniente para se determinar a função β . Como foi visto na equação (138) podemos dizer que:

$$\lambda' = \lambda(M) + \delta\lambda(M). \quad (165)$$

Com isso, podemos aplicar uma regra da cadeia

$$\beta = M \frac{\partial \lambda'}{\partial M} \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda'}. \quad (166)$$

Como a dependência de λ' em relação a M é dada na equação (133), ao aplicar a regra da cadeia, temos a seguinte relação (AMIT, 1984):

$$M \frac{\partial \lambda'}{\partial M} = (D - 4) \lambda'. \quad (167)$$

Definindo

$$\epsilon = 4 - D, \quad (168)$$

e levando o resultado obtido na equação (167) em (166), temos um método alternativo para o cálculo da função β . Portanto,

$$\beta = -\epsilon \lambda' \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda'}. \quad (169)$$

Como foi visto anteriormente, temos que:

$$\lambda' = \lambda + \delta\lambda. \quad (170)$$

Facilmente pode ser encontrado na literatura (PESKIN; SCHROEDER, 1995) que $\delta\lambda$, em primeira ordem, pode ser obtido de:

$$i\mathcal{M} = -i\lambda + \frac{(i\lambda)^2}{2} [-iV(s) - iV(t) - iV(u)] - i\delta\lambda, \quad (171)$$

onde \mathcal{M} é a amplitude de espalhamento, s , t e u são as variáveis de Mandelstam² (PESKIN; SCHROEDER, 1995) e $V(p)$ representa a integral que descreve o diagrama de Feynman a 1 loop, ou seja,

$$V(p) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m^2} \frac{1}{(q+p)^2 + m^2}. \quad (172)$$

Usando a condição de renormalização descrita na equação (131), temos:

$$-i\lambda = -i\lambda + (-i\lambda)^2 [iV(-M^2) + iV(-M^2) + iV(-M^2)] - i\delta\lambda, \quad (173)$$

isolando o termo de $\delta\lambda$,

$$\delta\lambda = \frac{3\lambda^2}{2} V(-M^2). \quad (174)$$

Para calcular a função β , então, basta ver que:

$$\lambda' = \lambda + \frac{3\lambda^2}{2} V(-M^2), \quad (175)$$

onde temos λ' em função de λ . Para executar a regra da cadeia, deveríamos ter $\lambda(\lambda')$. Para inverter a relação (175), basta reescrever de forma iterativa até ordem λ'^2 , da seguinte forma:

$$\lambda = \lambda' - \frac{3\lambda^2}{2} V(-M^2), \quad (176)$$

fazendo a primeira iteração, temos:

$$\lambda = \lambda' - \frac{3}{2} \left(\lambda' - \frac{3\lambda^2}{2} V(-M^2) \right)^2 V(-M^2). \quad (177)$$

² As variáveis de Mandelstam estão relacionadas a uma simetria dos digramas a 1 loop. $s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$, $t = (p_1 - p_3)^2 = (p_4 - p_2)^2$ e $u = (p_1 - p_4)^2 = (p_3 - p_2)^2$

Portanto, desprezando ordens de λ superior a dois, escrevemos:

$$\lambda = \lambda' - \frac{3\lambda'^2}{2}V(-M^2) + O(\lambda'^3). \quad (178)$$

A equação (178) junto com a equação (169), leva à:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \lambda'} = 1 - 3\lambda'V(-M^2) \quad (179)$$

e com isso a função β pode ser representada pela seguinte expressão:

$$\beta = -\epsilon\lambda' + 3\lambda'^2\epsilon V(-M^2). \quad (180)$$

Reescrevendo agora λ' em termo de λ , temos β escrito da seguinte forma:

$$\beta = -\epsilon\lambda + \frac{3\lambda^2}{2}\epsilon V(-M^2) + O(\lambda^3). \quad (181)$$

Admitindo uma teoria sem massa, $m = 0$, a integral $V(p)$ fica conforme descrito a seguir:

$$V(p) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2} \frac{1}{(q+p)^2}. \quad (182)$$

A integral descrita em (182) pode ser representada em D dimensões como a integral $A(D)$ (Ver Apêndice B) definida por:

$$A(D) = \int \frac{d^Dq}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q^2 + \Delta)^s}, \quad (183)$$

onde podemos dizer que, para este caso, $s = 2$ e que $\Delta = p^2 = M^2$. Através da técnica de regularização dimensional temos:

$$A(D) = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(s - D/2)}{\Gamma(s)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{s-D/2}, \quad (184)$$

tomando o limite $s = 2$ e escrevendo D da seguinte forma: $D = 4 - \epsilon$. Fazendo esta substituição na equação (184), tem-se:

$$A(\epsilon) = \frac{\Delta^{-\epsilon/2} \Gamma(\epsilon/2)}{(4\pi)^{4-\epsilon} \Gamma(2)}. \quad (185)$$

Apenas explicitando os termos dependentes de ϵ , obtemos:

$$A(\epsilon) = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{4\pi}{\Delta} \right)^{\epsilon/2} \Gamma(\epsilon/2). \quad (186)$$

Podemos ver que a equação (186) possui uma singularidade quando $\epsilon \rightarrow 0$, então, vamos deixar ϵ em aberto. Podemos levar o resultado encontrado na equação (186) na expressão encontrada para a função β , definida por (181):

$$\beta = -\epsilon\lambda + \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \left(\frac{4\pi}{\Delta} \right)^{\epsilon/2} \frac{\epsilon}{2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right), \quad (187)$$

e isto nos leva a uma expressão sem singularidade, quando $\epsilon \rightarrow 0$. Desta forma, a função β passa a não ter nenhuma singularidade dimensional, ou seja,

$$\beta = -\epsilon\lambda + \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \left(\frac{4\pi}{\Delta} \right)^{\epsilon/2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} + 1\right). \quad (188)$$

Podemos escrever a função β dependente de ϵ , em termos da mesma função β de $D = 4$. Para isso definimos $\beta^{(4)} = \beta(\epsilon \rightarrow 0)$ e conseqüentemente, temos:

$$\beta^{(4)} = \frac{3}{16\pi^2} \lambda^2, \quad (189)$$

de modo que:

$$\beta^{bulk} = -\epsilon\lambda + \beta^{(4)} \left(\frac{4\pi}{M^2} \right)^{\epsilon/2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} + 1\right). \quad (190)$$

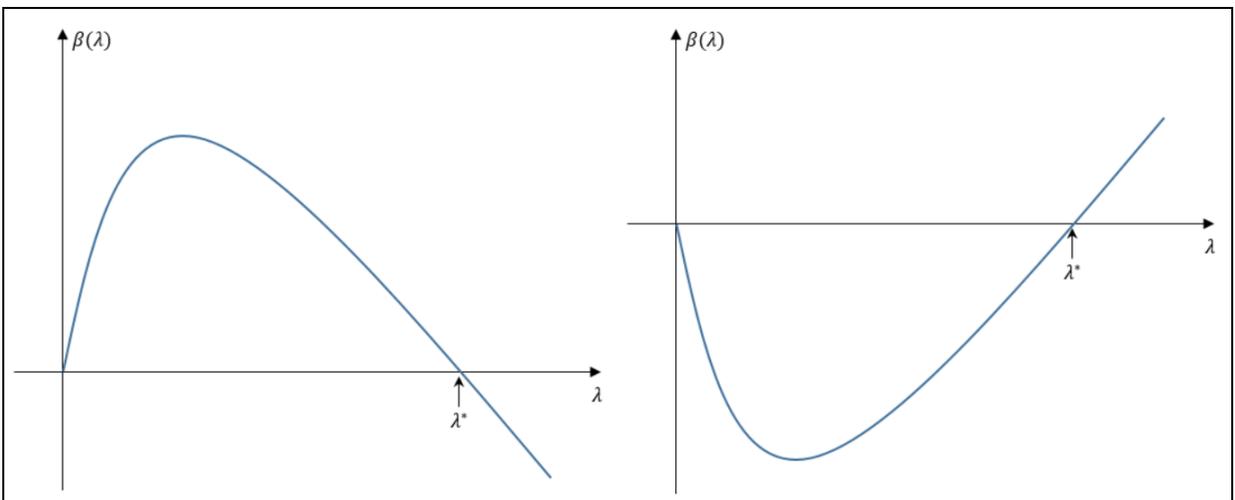
Um parâmetro extremamente importante é justamente o zero da função β , ou seja, existe um λ^* tal que $\beta(\lambda^*) = 0$. Claramente, há uma solução trivial, não interessante, que é $\lambda^* = 0$. Descartando essa solução, temos:

$$\lambda^* \left(-\epsilon + \frac{3}{16\pi^2} \lambda^* \left(\frac{4\pi}{M^2} \right)^{\epsilon/2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} + 1\right) \right) = 0, \quad (191)$$

$$\lambda^* = \epsilon \frac{16\pi^2}{3} \left(\frac{4\pi}{M^2} \right)^{-\epsilon/2} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} + 1\right)}, \quad (192)$$

Este parâmetro é muito importante na teoria, já que está relacionado com a mudança de sinal da função β e futuramente será útil para calcular os expoentes críticos da teoria. O zero da função β é importante, pois representa o ponto de mudança de sinal do β . A função pode ter um dos dois comportamentos ilustrados na figura (2).

Figura 2 – Possibilidades de função β .



Legenda: A figura ilustra as duas possibilidades para a função β .

Fonte: O autor, 2020.

O que causa a diferença entre as possibilidades de gráfico é exatamente o sinal do do termo de λ^2 , isso está diretamente ligado a escala de momento.

2.2 Cálculo da dimensão anomala

A seguir obteremos o parâmetro γ_{ϕ^2} que é conhecido como dimensão anomala. Vimos na seção 2.1 como as grandezas da teoria se transformam e como isto no final gera a equação de Callan-Symanzik. Podemos ver que em 4 dimensões a função β é de ordem λ^2 e com isso, teríamos que a função γ deveria ser, por sua vez, de ordem λ^2 (PESKIN; SCHROEDER, 1995). Porém, é possível existir contribuições de ordem ϵ , já que se não fizemos diretamente $D = 4$ a função β teria ordem λ e com isso, seria possível γ ser de ordem λ . O parâmetro γ_{ϕ^2} é conhecido como dimensão anômala e pode ser calculado de forma similar ao antes feito para γ (vide equações (149,150 e 152)). Para fazer isso temos que entender a renormalização de um operador local $\mathcal{O}_o(k)$ qualquer. Partindo da função de Green, temos:

$$G^{(n)}(\{x\}) = \langle \Omega | T \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) \mathcal{O}_o(k) | \Omega \rangle. \quad (193)$$

Aqui temos a mesma estrutura anteriormente discutida (vide equação (140)) que gera condições de renormalização igualmente similares, sendo:

$$\mathcal{O}'_o(k) = (1 + \delta_{\mathcal{O}}) \mathcal{O}_o(k), \quad (194)$$

$$G'^{(n)}(\{x\}) = (1 + n\delta\eta) (1 + \delta_{\mathcal{O}}) G^{(n)}(\{x\}). \quad (195)$$

Como facilmente podemos ver que a transformação da função de Green é da forma:

$$G'^{(n)}(\{x\}) = (1 + n\delta\eta + \delta_{\mathcal{O}}) G^{(n)}(\{x\}). \quad (196)$$

De maneira similar, a equação de Callan-Symanzik para esta função de Green é obtida apenas fazendo a substituição $n\delta\eta \rightarrow n\delta\eta + \delta_{\mathcal{O}}$. E isso insere o parâmetro $\gamma_{\mathcal{O}}$ na equação:

$$\left(M \frac{\partial}{\partial M} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} + n\gamma + \gamma_{\mathcal{O}} \right) G^{(n)} = 0. \quad (197)$$

Portanto, de forma totalmente similar ao já anteriormente feito, definimos:

$$\gamma_O = -M \frac{\delta_O}{\delta M}, \quad (198)$$

e podemos dizer, também de forma similar, que

$$\delta_O = \frac{Z_O^{-1}(M + \delta M) - Z_O^{-1}(M)}{Z_O^{-1}(M)}. \quad (199)$$

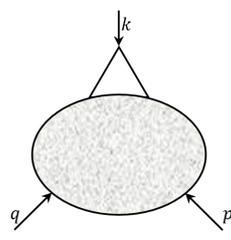
Logo, γ_O evidentemente tem a forma:

$$\gamma_O = M \frac{\partial}{\partial M} \ln(Z_O). \quad (200)$$

Como em primeira ordem δ_z não depende de M , pode-se dizer que:

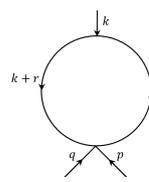
$$\gamma_O = -M \frac{\partial \delta_O}{\partial M}. \quad (201)$$

Para calcular a inserção do termo de massa do campo temos o diagrama escolhendo a condição descrita a seguir:



$$= \langle \phi(p)\phi(q)\phi^2(k) \rangle = \frac{-2}{p^2 q^2} \text{ em } p^2 = q^2 = k^2 = -M^2 \quad (202)$$

A correção a um *loop* do diagrama (202) é dada por:



$$= \frac{-\lambda}{p^2 q^2} \int \frac{d^D r}{(2\pi)^D} \frac{1}{r^2} \frac{1}{(k+r)^2}. \quad (203)$$

A integral apresentada na equação (203) é essencialmente a mesma da equação (182), cuja solução foi apresentada em (184):

$$A(D) = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(s - D/2)}{\Gamma(s)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{s-D/2}, \quad (204)$$

onde, Δ é função do momento externo, $\Delta = -P^2$. Em $P^2 = -M^2$, conforme apresentado em (202), esta contribuição deve ser cancelada pelo contra termo:



$$p = \frac{-2\delta_{\phi^2}}{p^2 q^2}. \quad (205)$$

Então, basta comparar o resultado obtido, em primeira ordem, da equação (203) com o que era esperado pelo contratermo descrito na equação (205), para chegar a seguinte expressão de δ_{ϕ^2} :

$$\delta_{\phi^2} = \frac{\lambda}{2(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2 - D/2)}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-D/2}. \quad (206)$$

Usando o fato que,

$$\Delta = M^2 \quad (207)$$

e que

$$\frac{\epsilon}{2} = 2 - D/2, \quad (208)$$

temos:

$$\delta_{\phi^2} = \frac{\lambda M^{-\epsilon}}{2(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(2)}. \quad (209)$$

Para calcular γ_{ϕ^2} basta usar a relação anteriormente encontrada na equação (201). Com isso,

$$\gamma_{\phi^2} = \frac{\lambda}{16\pi^2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} + 1\right) \left(\frac{2\pi}{M^2}\right)^{\epsilon/2}. \quad (210)$$

O próximo passo é usar o zero da função β , λ^* , na expressão calculada para γ_{ϕ^2} . O λ^* foi calculado na equação (192). Fazendo estes passos, obtém-se:

$$\gamma_{\phi^2}(\lambda^*) = \frac{\epsilon}{3}. \quad (211)$$

A dimensão anômala tem uma importante relação com o cálculo dos expoentes críticos, para mais detalhes, ver (PESKIN; SCHROEDER, 1995), e é usada para calcular o expoente crítico

$$\nu = \frac{1}{2 - \gamma_{\phi^2}(\lambda^*)}. \quad (212)$$

Isto ilustra a finalidade e a importância de se calcular a dimensão anômala, uma vez que usando as relações de escala é possível calcular todos os expoentes críticos a partir de ν .

2.3 Inserindo as dimensões compactadas no cálculo da função β e da dimensão anômala

γ_{ϕ^2}

Nas duas seções anteriores, foram calculados a função β e a dimensão anômala γ_{ϕ^2} . A motivação natural deste trabalho é investigar se ao considerar dimensões compactadas nas integrais dos propagadores de Feynman, a função β será modificada, e se esta possível modificação irá alterar a expressão para γ_{ϕ^2} . Caso isto ocorra, irá ter modificações nos expoentes críticos da teoria. Apenas para recapitular o que fora dito anteriormente, é preciso modificar as integrais e os momentos (internos e externos) das regras de Feynman, como prescrito no capítulo 1. Este processo se dará primeiramente pelo cálculo da função β .

A equação (176) é geral e depende apenas do valor da integral $A(\epsilon)$, definida na equação (183). Tomando como ponto de partida a integral $A(\epsilon)$ e considerando a existência de d dimensões compactadas, alguns parâmetros devem ser redefinidos. Para considerar as d dimensões compactadas, devemos trocar d integrais por d somas, como feito a seguir:

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \rightarrow \frac{1}{L_{D-d+1} \cdot L_{D-d+2} \cdots L_D} \sum_{\{n_i\}=-\infty}^{\infty}. \quad (213)$$

A condição de contorno periódica sobre essas d dimensões compactadas, faz com que as componentes dos momentos relacionadas as dimensões compactadas sejam da forma:

$$q_i \rightarrow l_i = \frac{2\pi}{L_i} n_i, \quad (214)$$

onde os n_i são números inteiros. Como visto na seção 1.2 , simplifica-se a notação ao definir:

$$\text{Vol} = L_{D-d+1} \cdot L_{D-d+2} \cdots L_D. \quad (215)$$

Feitas estas considerações, a integral do diagrama de Feynman descrito na equação (183), se torna:

$$A(D,d) = \frac{1}{\text{Vol}} \sum_{\{n_i\}=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{D-d}k}{(2\pi)^{D-d}} \frac{1}{(q'^2 + M^2)^2}. \quad (216)$$

Definindo as variáveis:

$$N = D - d, \quad (217)$$

$$q'^2 = k^2 + l^2, \quad (218)$$

$$l^2 = \sum l_i^2, \quad (219)$$

podemos reescrever a integral nas N dimensões como:

$$A_{n_i}(N) = \int \frac{d^N k}{(2\pi)^N} \frac{1}{(k^2 + \bar{m}^2(n_i))^2}, \quad (220)$$

com o intuito de deixar a integral com a mesma estrutura já conhecida, define-se \bar{m} da forma:

$$\bar{m}^2 = l^2 + M^2. \quad (221)$$

Fazendo a mudança de escala na integral e, com isso, nos momentos e na massa do campo, tem-se:

$$\bar{m} = M^2(1 + l'^2), \quad (222)$$

com

$$l'_i = \frac{l_i}{M}, \quad (223)$$

$$L'_i = ML_i, \quad (224)$$

$$\text{Vol}' = M^d \text{Vol}. \quad (225)$$

$$k' = \frac{k}{M}. \quad (226)$$

Uma vez feita estas mudanças de escala, a integral (220) fica escrita como:

$$A_{n_i}(N) = M^{N-4} \int \frac{d^N k}{(2\pi)^N} \frac{1}{(k'^2 + \bar{m}'^2)^2}. \quad (227)$$

É conveniente resolver primeiramente a integral $A_{n_i}(N)$ e depois, realizar os somatórios da equação (216).

$$A(D,d) = \frac{M^{-\epsilon}}{\text{Vol}'} \sum_{\{n_i\}=-\infty}^{\infty} A_{n_i}(N). \quad (228)$$

Como a integral $A_{n_i}(N)$ possui exatamente a mesma estrutura estudada na equação (183), apenas trocando o valor de Δ e o valor da dimensão $D \rightarrow N$:

$$A_{n_i}(N) = \frac{M^{-\epsilon}}{(4\pi)^{N/2}} \frac{\Gamma(2 - N/2)}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\bar{m}^{l^2}} \right)^{2-N/2}. \quad (229)$$

com isso temos:

$$A(D,d) = \frac{M^{-\epsilon}}{(4\pi)^{N/2}} \frac{\Gamma(2 - N/2)}{\Gamma(s)} \frac{1}{\text{Vol}'} \sum_{\{n_i\}=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{1 + l^2} \right)^{2-N/2}. \quad (230)$$

Simplificando e fazendo $D = 4 - \epsilon$ e $\nu = (d+\epsilon)/2$:

$$A(D,d) = \frac{M^{-\epsilon}}{16\pi^2} (2\pi)^{2\nu} \frac{\Gamma(\nu)}{\text{Vol}'} \sum_{\{n_i\}=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{l^2 + 1} \right)^\nu. \quad (231)$$

Fazendo $l_i^2 = (2\pi)^2 a_i n_i^2$ e $1 = c^2$ tem-se:

$$A(D,d) = \frac{M^{-\epsilon}}{16\pi^2} \frac{\Gamma(\nu)}{\text{Vol}'} (2\pi)^{-2\nu} \sum_{\{n_i\}=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sum a_i n_i^2 + c^2} \right)^\nu, \quad (232)$$

onde pode-se identificar que:

$$\sum_{\{n_i\}=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sum a_i n_i^2 + c^2} \right)^\nu = E_d^{c^2}(\{a_i\}, \nu). \quad (233)$$

Sendo $E_d^{c^2}(\{a_i\}, \nu)$ a função zeta de Epstein-Hurwitz. Como já foi demonstrado na seção 1.3, a função zeta possui uma relação com as funções de Bessel modificadas de segunda espécie $K_n(z)$. Essa relação é dada por:

$$E_d^{c^2}(\{a_i\}, \nu) = \frac{2\pi^\nu (2\pi)^{\nu-d/2}}{\sqrt{\prod a_i} \Gamma(\nu)} \left(2^{\nu-d/2-1} \Gamma(\nu - d/2) + C(d) \right), \quad (234)$$

onde $C(d)$ contém a correção devido as dimensões compactadas. Podemos identificar

$$a_i n_i^2 = l_i^2, \quad (235)$$

logo tem-se que

$$a_i = \left(\frac{2\pi}{L_i} \right)^2 \quad (236)$$

e desta forma

$$C(d) = 2 \sum_{i=1}^d \sum_{n_i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n_i L_i} \right)^{\epsilon/2} K_{\epsilon/2}(n_i L_i) \\ + \dots 2^d \sum_{n_i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^d (n_i L_i)^2}} \right)^{\epsilon/2} K_{\epsilon/2} \left(\sqrt{\sum_{i=1}^d (n_i L_i)^2} \right). \quad (237)$$

A equação (234) pode ser simplificada usando as relações de escala e a definição de a_i , obtendo:

$$E_d^c(\{a_i\}, \nu) = Vol' \frac{2\pi^\nu (2\pi)^{\epsilon/2}}{\Gamma(\nu)} \left(2^{\epsilon/2-1} \Gamma(\epsilon/2) + C(d) \right). \quad (238)$$

Levando o resultado acima na equação (232), obtemos:

$$A(D, d) = M^{-\epsilon} \frac{1}{16\pi^2} \pi^\nu (4\pi)^{\epsilon/2} \left(\Gamma(\epsilon/2) + 2^{1-\epsilon/2} C(d) \right). \quad (239)$$

A expressão (239) pode ser usada na expressão (188). Com isso, obtem-se o resultado:

$$\beta(\lambda) = -\epsilon\lambda + \frac{3}{2} \lambda^2 \epsilon \left[\frac{M^{-\epsilon}}{16\pi^2} \pi^\nu (4\pi)^{\epsilon/2} \left(\Gamma(\epsilon/2) + 2^{1-\epsilon/2} C(d) \right) \right]. \quad (240)$$

Se os termos forem reorganizados, teremos um resultado similar ao já encontrado na equação (188), dado por:

$$\beta(\lambda) = -\epsilon\lambda + \lambda^2 \frac{3}{16\pi^2} \left[\pi^\nu \left(\frac{4\pi}{M^2} \right)^{\epsilon/2} \left(\Gamma(\epsilon/2 + 1) + 2^{-\epsilon/2} \epsilon C(d) \right) \right]. \quad (241)$$

Finalmente, com o uso da equação (237), tem-se a função β considerando a existência de dimensões compactadas, ou seja,

$$\beta(\lambda) = -\epsilon\lambda + \lambda^2 \frac{3}{16\pi^2} \pi^\nu \left(\frac{4\pi}{M^2} \right)^{\epsilon/2} \left[\Gamma(\epsilon/2 + 1) + 2^{-\epsilon/2} \epsilon 2 \sum_{i=1}^d \sum_{n_i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n_i L_i} \right)^{\epsilon/2} K_{\epsilon/2}(n_i L_i) \right. \\ \left. 2^d \sum_{n_i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^d (n_i L_i)^2}} \right)^{\epsilon/2} K_{\epsilon/2} \left(\sqrt{\sum_{i=1}^d (n_i L_i)^2} \right) \right]. \quad (242)$$

Podemos encontrar uma relação entre a função β , da teoria, com as dimensões compactadas e β^{bulk} . Segue que,

$$\beta^{bulk} = -\epsilon\lambda + \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \left(\frac{4\pi}{\Delta} \right)^{\epsilon/2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} + 1\right). \quad (243)$$

que é a função β encontrada na equação (188) sem o uso das dimensões compactadas. Tomando a equação (241) e, colocando os termos em evidência para criar uma relação de escala, temos:

$$\beta(\lambda) = \frac{\Gamma(\epsilon/2 + 1)}{\pi^\nu (\Gamma(\epsilon/2 + 1) + 2^{-\epsilon/2} \epsilon C(d))} \left\{ -\lambda \epsilon \frac{\pi^\nu (\Gamma(\epsilon/2 + 1) + 2^{-\epsilon/2} \epsilon C(d))}{\Gamma(\epsilon/2 + 1)} \right. \\ \left. + \lambda^2 \frac{3}{16\pi^2} \left(\frac{4\pi}{M^2} \right)^{\epsilon/2} \Gamma(\epsilon/2 + 1) \times \right. \\ \left. \left[\left(\frac{\pi^\nu (\Gamma(\epsilon/2 + 1) + 2^{-\epsilon/2} \epsilon C(d))}{\Gamma(\epsilon/2 + 1)} \right)^2 \right] \right\}. \quad (244)$$

Definindo que

$$\bar{\lambda} = \frac{\pi^\nu (\Gamma(\epsilon/2 + 1) + 2^{-\epsilon/2} \epsilon C(d))}{\Gamma(\epsilon/2 + 1)} \lambda, \quad (245)$$

cria-se uma relação de escala da constante de acoplamento λ . De modo que a função $\beta(\lambda)$ se relaciona com a função $\beta^{bulk}(\bar{\lambda})$ segundo a equação a seguir:

$$\beta(\lambda) = \frac{\Gamma(\epsilon/2 + 1)}{\pi^\nu (\Gamma(\epsilon/2 + 1) + 2^{-\epsilon/2} \epsilon C(d))} \times \left\{ -\epsilon \bar{\lambda} + \bar{\lambda}^2 \left[\frac{3}{16\pi^2} \left(\frac{4\pi}{M^2} \right)^{\epsilon/2} \Gamma(\epsilon/2 + 1) \right] \right\}, \quad (246)$$

onde o termo entre chaves representa exatamente a função que chamamos de β^{bulk} . Esta relação de escala, permite criar uma relação entre o zero das duas funções, ou seja,

$$\beta(\lambda) = \frac{\Gamma(\epsilon/2 + 1)}{\pi^\nu (\Gamma(\epsilon/2 + 1) + 2^{-\epsilon/2} \epsilon C(d))} \beta^{bulk}(\bar{\lambda}). \quad (247)$$

Com isso, o zero de $\beta(\lambda)$ ocorre no zero de $\beta^{bulk}(\bar{\lambda})$. Logo,

$$\beta(\lambda^*) = \beta^{bulk}(\bar{\lambda}^*), \quad (248)$$

$$\lambda^* = \frac{\Gamma(\epsilon/2 + 1)}{\pi^\nu (\Gamma(\epsilon/2 + 1) + 2^{-\epsilon/2} \epsilon C(d))} \bar{\lambda}^*. \quad (249)$$

O próximo passo lógico é calcular a dimensão anômala γ_{ϕ^2} usando o formalismo dos espaços compactados, uma vez que já se sabe o zero da função beta. Sabendo que $\bar{\lambda}^*$ (vide equação (192)) tem a seguinte expressão:

$$\bar{\lambda}^* = \epsilon \frac{16\pi^2}{3} \left(\frac{4\pi}{M^2} \right)^{-\epsilon/2} \frac{1}{\Gamma(\epsilon/2 + 1)}, \quad (250)$$

pode-se substituir o resultado apresentado na equação (250) na equação (249), fazendo este procedimento obtém-se:

$$\lambda^* = \epsilon \frac{16\pi^2}{3} \left(\frac{4\pi}{M^2} \right)^{-\epsilon/2} \frac{1}{\pi^\nu (\Gamma(\epsilon/2 + 1) + 2^{-\epsilon/2} \epsilon C(d))} \quad (251)$$

Pode-se tomar como ponto de partida para o cálculo do γ_{ϕ^2} a equação (203).

$$\begin{array}{c} \downarrow k \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \uparrow k+r \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \uparrow q \quad \downarrow p \end{array} = \frac{-\lambda}{p^2 q^2} \int \frac{d^D r}{(2\pi)^D} \frac{1}{r^2} \frac{1}{(k+r)^2} \quad (252)$$

Como o contratermo, δ_{ϕ^2} está relacionado com a integral $A(D)$, representada em (183), temos:

$$\delta_{\phi^2} = \frac{\lambda}{2} A(D), \quad (253)$$

de modo que pode-se calcular γ_{ϕ^2} do modo descrito a seguir:

$$\gamma_{\phi^2} = -\frac{\lambda}{2} M \frac{\partial A(D, M)}{\partial M}. \quad (254)$$

Com isso, basta compactar $A(D)$ e substituir na equação (254). Porém, a a integral $A(D)$ já foi compactada na equação (239), e tem o resultado abaixo:

$$A(D, d) = M^{-\epsilon} \frac{1}{16\pi^2} \pi^\nu (4\pi)^{\epsilon/2} \left(\Gamma(\epsilon/2) + 2^{1-\epsilon/2} C(d) \right), \quad (255)$$

com $C(d)$, descrito em (237). onde, recapitulando o resultado

$$\begin{aligned} C(d) &= 2 \sum_{i=1}^d \sum_{n_i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n_i L_i} \right)^{\epsilon/2} K_{\epsilon/2}(n_i L_i) \\ &+ \dots 2^d \sum_{n_i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^d (n_i L_i)^2}} \right)^{\epsilon/2} K_{\epsilon/2} \left(\sqrt{\sum_{i=1}^d (n_i L_i)^2} \right) \end{aligned} \quad (256)$$

Para finalizar o cálculo do γ_{ϕ^2} , basta aplicar a definição (254) na equação (255), e com isso, tem-se:

$$\gamma_{\phi^2} = \lambda M^{-\epsilon} \frac{1}{16\pi^2} \pi^\nu (4\pi)^{\epsilon/2} \frac{\epsilon}{2} \left(\Gamma(\epsilon/2) + 2^{1-\epsilon/2} C(d) \right), \quad (257)$$

isto é,

$$\gamma_{\phi^2} = \lambda M^{-\epsilon} \frac{1}{16\pi^2} \pi^\nu (4\pi)^{\epsilon/2} \left(\Gamma(\epsilon/2 + 1) + 2^{-\epsilon/2} \epsilon C(d) \right). \quad (258)$$

Para calcular a dimensão anômala, γ_{ϕ^2} , basta aplicar o λ^* na expressão (258). Apenas para recapitular, λ^* com as dimensões compactadas foi calculado na equação (251) e tem o valor:

$$\lambda^* = \epsilon \frac{16\pi^2}{3} \frac{1}{\pi^\nu (\Gamma(\epsilon/2 + 1) + 2^{-\epsilon/2} \epsilon C(d))} \left(\frac{4\pi}{M^2} \right)^{\epsilon/2}. \quad (259)$$

Com isso, a dimensão anômala crítica, levando em conta as dimensões compactadas, é :

$$\gamma_{\phi^2}(\lambda^*) = \frac{\epsilon}{3}. \quad (260)$$

Este resultado, de certa forma, era esperado. Pois a dimensão anômala $\gamma_{\phi^2}(\lambda^*)$, em ordem λ^2 , é resultado de um cancelamento algébrico das integrais usadas para calcular a função β e a própria dimensão anômala γ_{ϕ^2} . Isto ocorre uma vez que o resultado da integral

$$A = \int \frac{d^N k}{(2\pi)^N} \frac{1}{(k'^2 + 1)^2} \quad (261)$$

aparece no numerador de $\gamma_{\phi^2}(\lambda^*)$ e no denominador do zero da função β . Como este cancelamento é algébrico, não é intuitivo pensar que este comportamento irá se repetir em ordens superiores de λ . Pois existe uma mudança no valor da constante de acoplamento λ^* , ponto onde a função β se anula de forma não trivial, ao se inserir as dimensões compactadas. Deste modo, mesmo que a priori não tenhamos nenhuma correção dos expoentes críticos pela presença das dimensões compactadas, temos um deslocamento do zero não trivial da função β , onde este zero está relacionado com o ponto onde ocorre a transição, e este parâmetro acaba por depender das dimensões compactadas como a própria equação (259). Isto gera um questionamento importante: Existe outro ponto além do $\epsilon = 0$ que pode colapsar os dois λ^* em um único ponto. Para isto acontecer, de algum modo $C(d)$ deve divergir em algum limite, seja para uma escolha de dimensionalidade ou para um valor de L_i . Devido à forma assintótica das funções de Bessel,

$$\begin{cases} K_{\epsilon/2}(n_i L_i) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n_i L_i}} e^{-n_i L_i} & \text{para } L_i \rightarrow \infty, \\ K_{\epsilon/2}(n_i L_i) \sim \frac{\Gamma(\epsilon/2)}{2} \left(\frac{2}{n_i L_i} \right)^{\epsilon/2} & \text{para } L_i \rightarrow 0, \end{cases} \quad (262)$$

caso o argumento L_i seja grande, a função e a soma irão convergir. Logo, este tipo de argumento não irá nos gerar a trivialidade questionada. Para facilitar a análise, vamos tomar $d = 1$, onde temos:

$$C(1) = 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n_1 L_1} \right)^{\epsilon/2} K_{\epsilon/2}(l_1), \quad (263)$$

tomando um $L_i \rightarrow 0$, temos a aproximação

$$C(1) \sim 2^{\epsilon/2} \Gamma(\epsilon/2) \sum_{n_1=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n_1 L_1} \right)^{\epsilon}. \quad (264)$$

Com isso temos:

$$C(1) \sim 2^{\epsilon/2} \Gamma(\epsilon/2) (L_1)^{-\epsilon} \sum_{n_1=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n_1} \right)^{\epsilon}, \quad (265)$$

ainda podemos ver que o somatório é a definição da função zeta de Riemann, ou seja,

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n_1} \right)^{\epsilon} = \zeta(\epsilon), \quad (266)$$

e então

$$C(1) \sim 2^{\epsilon/2} \Gamma(\epsilon/2) (L_1)^{-\epsilon} \zeta(\epsilon). \quad (267)$$

Podemos ver que quando $C(1) \sim L_1^{-\epsilon}$ para um $L_1 \rightarrow 0$ e, por hipótese, $\epsilon \neq 0$ o termo tende a divergir neste limite assintótico. Isto implica diretamente no valor de λ^* de modo que se:

$$L_1 \rightarrow 0, \quad (268)$$

tem-se que

$$\lambda^* \rightarrow 0. \quad (269)$$

O que parece estranho, uma vez que isto não afeta o valor do expoente crítico, é um forte indício que este cancelamento algébrico, que ocorre em primeira ordem, não deve se repetir em ordens superiores. Ou ainda, que o cálculo dos expoentes críticos envolvendo as dimensões compactadas devem partir de um ponto anterior da teoria, diretamente de onde se define os expoentes críticos.

3 COMPACTAÇÃO DE UM DIAGRAMA GENÉRICO COM O USO DA REPRESENTAÇÃO PARAMÉTRICA DOS DIAGRAMAS

Sendo o intuito entender como a inserção de d dimensões compactadas afetam o comportamento dos diagramas de Feynman, em D dimensões, um bom ponto de partida seria investigar o comportamento dessa inserção na representação paramétrica das amplitudes correspondentes. A representação paramétrica, no espaço euclidiano, para o campo escalar da teoria ϕ^4 é da forma (ITZYKSON; ZUBER, 2006):

$$\tilde{I}_G(P) = F(G) \int \prod_{i=1}^I \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{(k^{(i)})^2 + M_i^2} \right) \prod_{\nu}^V (2\pi)^4 \delta^4 \left(P_{\nu} - \sum_{i=1}^I \epsilon_{\nu i} k^{(i)} \right), \quad (270)$$

onde o índice i representa a i -ésima linha do diagrama com I linhas, enquanto ν representa o ν -ésimo vértice de um diagrama com V vértices, P_{ν} é o momento externo, k_i o momento interno, o número de loops L do diagrama respeita a seguinte relação: $L = I + 1 - V$. O fator $F(G)$ pode ser definido como:

$$\frac{C(G)}{S(G)} = F(G), \quad (271)$$

onde $F(G)$ carrega as informações dos vértices e a simetria dos diagramas. $C(G)$ é o fator que cada vértice carrega e $S(G)$ é o fator de simetria. A matriz $\epsilon_{\nu i}$ de componentes $V \times I$ descreve a topologia do diagrama, definindo como as linhas entram ou saem de um dado diagrama. Esta matriz pode ser definida de acordo com o comportamento da linha i no vértice ν :

$$\epsilon_{\nu i} = \begin{cases} -1 & \text{se } \nu \text{ entra no vértice,} \\ 1 & \text{se } \nu \text{ sai do vértice,} \\ 0 & \text{outros casos.} \end{cases} \quad (272)$$

Espera-se que a equação (270) tenha uma conservação de momento externo, do tipo:

$$\tilde{I}_G^N(P) = I_G^N(P) (2\pi)^N \delta^N \left(\sum_{\nu=1}^V P^{(\nu)} \right), \quad (273)$$

É necessário que esta conservação seja explicitada. Para um número de dimensões geral, a equação (270) deve ser expressa em D dimensões. Com isso, a equação que descreve a representação paramétrica na forma euclidiana em D dimensões é descrita como:

$$\tilde{I}_G^D(P) = F(G) \int \prod_{i=1}^I \frac{d^D \tilde{k}^{(i)}}{(2\pi)^D} \left(\frac{1}{(\tilde{k}^{(i)})^2 + M_i^2} \right) \prod_v^V (2\pi)^D \delta^D \left(\tilde{P}^{(v)} - \sum_{i=1}^I \epsilon_{vi} \tilde{k}^{(i)} \right). \quad (274)$$

Sendo o intuito estudar os efeitos das dimensões compactadas em um diagrama geral, será considerada a parte discreta $l^{(i)}$ do momentos $k^{(i)}$ com d dimensões compactadas da seguinte forma:

$$(\tilde{k}^{(i)})^2 = (k^{(i)})^2 + (l^{(i)})^2 \text{ onde: } (l^{(i)})^2 = \sum_{j=D-d+1}^D l_j^{(i)} \text{ e } l_j^{(i)} = \frac{2\pi}{L_j} n_j^{(i)} \quad (275)$$

Claramente a parte discreta dos momentos deve modificar a quantidade de integrações. Compactando d dimensões, temos:

$$d^D \tilde{k}^{(i)} = d^{(D-d)} k^{(i)} \cdot d^d l^{(i)} \text{ e } \frac{d l_j^{(i)}}{2\pi} \rightarrow \frac{1}{L_j} \sum_{n_j^{(i)}=-\infty}^{\infty} \quad (276)$$

onde o vetor $k^{(i)}$ terá $(D-d)$ dimensões não compactadas e d dimensões compactadas, logo:

$$\tilde{k}^{(i)} = (k^{1,(i)}, \dots, k^{(D-d),(i)}, l^{(D-d+1),(i)}, \dots, l^{(D),(i)}) \quad (277)$$

e, da mesma forma os momentos externos $P^{(\mu)}$ também devem ter d dimensões compactadas, ou seja,

$$\tilde{P}^{(\mu)} = \left(P^{1,(\mu)}, \dots, P^{(D-d),(\mu)}, \frac{2\pi}{L_{d+1}} m_{D-d+1}^{(\mu)}, \dots, \frac{2\pi}{L_D} m_D^{(\mu)} \right). \quad (278)$$

Deste modo a delta de Dirac original deve ser reescrita como parte delta de Dirac e parte delta de Kronecker, conforme visto na seção 1.1 . Então,

$$\delta^D \left(\tilde{P}^{(\mu)} - \sum_{s=1}^I \epsilon_{\mu s} \tilde{k}^{(s)} \right) = \delta^{(D-d)} \left(P^{(\mu)} - \sum_{s=1}^I \epsilon_{\mu s} k^{(s)} \right) \times \prod_{\rho=D-d+1}^D \delta \left(\frac{2\pi}{L_\rho} m_\rho^{(\mu)} - \sum_{s=1}^I \epsilon_{\mu s} l_\rho^{(s)} \right). \quad (279)$$

Como já visto, podemos dizer que

$$(2\pi) \delta \left(\frac{2\pi}{L_\rho} m_\rho^{(\mu)} - \sum_{s=1}^I \epsilon_{\mu s} l_j^{(s)} \right) = L_\rho \delta_{m_\rho^{(\mu)}, \sum_{s=1}^I \epsilon_{\mu s} n_\rho^{(s)}}, \quad (280)$$

com isso

$$\prod_{\rho=D-d+1}^D (2\pi) \delta \left(\frac{2\pi}{L_\rho} m_\rho^{(\mu)} - \sum_{s=1}^I \epsilon_{\mu s} l_\rho^{(s)} \right) = \prod_{\rho=D-d+1}^D L_\rho \delta_{m_\rho^{(\mu)}, \sum_{s=1}^I \epsilon_{\mu s} n_\rho^{(s)}}, \quad (281)$$

definindo que

$$\prod_{\rho=D-d+1}^D L_\rho = \text{Vol}. \quad (282)$$

Teremos,

$$\prod_{\rho=D-d+1}^D (2\pi) \delta \left(\frac{2\pi}{L_\rho} m_\rho^{(\mu)} - \sum_{s=1}^I \epsilon_{\mu s} l_\rho^{(s)} \right) = \text{Vol} \prod_{\rho=D-d+1}^D \delta_{m_\rho^{(\mu)}, \sum_{s=1}^I \epsilon_{\mu s} n_\rho^{(s)}}. \quad (283)$$

A amplitude, então, é escrita como:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_G^D = & \left\{ \prod_{i=1}^I \sum_{\{n_j^{(i)}\}=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\text{Vol} l^{(i)}} \right\} F(G) \prod_{i=1}^I \int \frac{d^N k^{(i)}}{(2\pi)^N} \left(\frac{1}{(k^{(i)})^2 + \overline{M}_i^2} \right) \times \\ & \left[\prod_{\nu=1}^V (2\pi)^N \delta^N \left(P^{(\nu)} - \sum_{i=1}^I \epsilon_{\nu i} k^{(i)} \right) \right] \prod_{\nu=1}^V \text{Vol} \prod_{\rho=d}^{D-d} \delta_{m_\rho^{(\nu)}, \sum_{s=1}^I \epsilon_{\nu s} n_\rho^{(s)}}, \end{aligned} \quad (284)$$

onde,

$$\overline{M}_i^2 = M_i^2 + (l^{(i)})^2, \quad N = D - d \text{ e } \text{Vol} = \prod_{\rho=D-d+1}^D L_\rho. \quad (285)$$

A parte não-compactada da amplitude é, pois,

$$\tilde{I}_G^N(P) = F(G) \prod_{i=1}^I \int \frac{d^N k^{(i)}}{(2\pi)^N} \left(\frac{1}{(k^{(i)})^2 + \overline{M}_i^2} \right) \left[\prod_{\nu=1}^V (2\pi)^N \delta^N \left(P^{(\nu)} - \sum_{i=1}^I \epsilon_{\nu i} k^{(i)} \right) \right], \quad (286)$$

de modo que:

$$\tilde{I}_G^D(P) = \left\{ \frac{1}{(\text{Vol})^I} \prod_{i=1}^I \sum_{\{n_j^{(i)}\}_{j=-\infty}^{\infty}} \right\} \tilde{I}_G^N(P) \prod_{v=1}^V \text{Vol} \prod_{\rho=d}^{D-d} \delta_{m_\rho^{(v)}, \sum_{s=1}^I \epsilon_{vs} n_\rho^{(s)}}. \quad (287)$$

Segue a resolução da integral de representação paramétrica em N dimensões, adaptando o cálculo realizado em 4 dimensões de (ITZYKSON; ZUBER, 2006):

$$\tilde{I}_G^N(P) = F(G) \prod_{i=1}^I \int \frac{d^N k^{(i)}}{(2\pi)^N} \left(\frac{1}{(k^{(i)})^2 + \overline{M}_i^2} \right) \left[\prod_v^V (2\pi)^N \delta^N \left(P^{(v)} - \sum_{i=1}^I \epsilon_{vi} k^{(i)} \right) \right]. \quad (288)$$

Introduzindo os parâmetros de Schwinger, α , os propagadores são escritos como:

$$\frac{1}{(k^{(i)})^2 + \overline{M}_i^2} = \int_0^\infty d\alpha^{(i)} e^{-\alpha^{(i)} \left((k^{(i)})^2 + \overline{M}_i^2 \right)} \quad (289)$$

e, pela representação integral da delta de Dirac, temos:

$$(2\pi)^N \delta^N \left(P^{(v)} - \sum_{i=1}^I \epsilon_{vi} k^{(i)} \right) = \int d^N y^{(v)} e^{-iy^{(v)} \cdot (P^{(v)} - \sum_{i=1}^I \epsilon_{vi} k^{(i)})}. \quad (290)$$

Levando estas expressões na equação (288), é visto que:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_G^N(P) = & F(G) \prod_{i=1}^I \int d\alpha^{(i)} \times \\ & \left\{ \prod_v^V \int d^N y^{(v)} \left[\int \frac{d^N k^{(i)}}{(2\pi)^N} e^{-\alpha^{(i)} \left((k^{(i)})^2 + \overline{M}_i^2 \right)} e^{-iy^{(v)} \cdot (P^{(v)} - \sum_{i=1}^I \epsilon_{vi} k^{(i)})} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (291)$$

e arrumando toda dependência de $k^{(i)}$ no mesmo termo:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_G^N = & F(G) \prod_{i=1}^I \int d\alpha^{(i)} \times \\ & \left\{ \prod_v^V \int d^N y^{(v)} \left[\int \frac{d^N k^{(i)}}{(2\pi)^N} e^{-\left[\alpha^{(i)} (k^{(i)})^2 - i \sum_{i=1}^I \epsilon_{vi} y^{(v)} \cdot k^{(i)} \right]} e^{-iy^{(v)} \cdot P^{(v)} - \alpha^{(i)} \overline{M}_i^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (292)$$

Completando o quadrado da soma, obtemos:

$$\alpha^{(i)} (k^{(i)})^2 - i \sum_{\nu=1}^I \epsilon_{\nu i} y^{(\nu)} \cdot k^{(i)} = \alpha^{(i)} \left[k^{(i)} - \frac{i}{2\alpha^{(i)}} \sum_{\nu=1}^I \epsilon_{\nu i} y^{(\nu)} \right]^2 + \frac{1}{4\alpha^{(i)}} \left(\sum_{\nu=1}^I \epsilon_{\nu i} y^{(\nu)} \right)^2 \quad (293)$$

e fazendo o deslocamento sem jacobiano da integral $k^{(i)} - \frac{i}{2\alpha^{(i)}} \sum_{\nu=1}^I \epsilon_{\nu i} y^{(\nu)} \rightarrow k^{(i)}$, temos:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_G^N &= F(G) \prod_{i=1}^I \int d\alpha^{(i)} \times \\ &\left\{ \prod_{\nu}^V \int d^N y^{(\nu)} \left[\int \frac{d^N k^{(i)}}{(2\pi)^N} e^{-\alpha^{(i)} (k^{(i)})^2} e^{-i y^{(\nu)} \cdot P^{(\nu)} - \alpha^{(i)} \bar{M}_i^2 - \frac{1}{4\alpha^{(i)}} (\sum_{i=1}^I \epsilon_{\nu i} y^{(\nu)})^2} \right] \right\}; \end{aligned} \quad (294)$$

reescrevendo os produtórios em termos de somatórios, ficamos com:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_G^N(P) &= F(G) \left(\prod_{i=1}^I \int d\alpha^{(i)} \underbrace{\left[\int \frac{d^N k^{(i)}}{(2\pi)^N} e^{-\alpha^{(i)} (k^{(i)})^2} \right]}_{A^{(i)}} \right) \times \\ &\left\{ \left(\prod_{\nu}^V \int d^N y^{(\nu)} \right) e^{\sum_{i=1}^I \left(-i \sum_{\nu=1}^V y^{(\nu)} \cdot P^{(\nu)} - \alpha^{(i)} \bar{M}_i^2 - \frac{1}{4\alpha^{(i)}} (\sum_{\nu=1}^V \epsilon_{\nu i} y^{(\nu)})^2 \right)} \right\}. \end{aligned} \quad (295)$$

O termo A pode ser integrado com facilidade, da seguinte forma:

$$A^{(i)} = \int \frac{d^N k^{(i)}}{(2\pi)^N} e^{-\alpha^{(i)} (k^{(i)})^2} \quad (296)$$

$$= \left(\frac{1}{(2\pi)} \left(\frac{\pi}{\alpha^{(i)}} \right)^{1/2} \right)^N \quad (297)$$

$$= \frac{1}{(\alpha^{(i)})^{N/2} (4\pi)^{N/2}}. \quad (298)$$

Trabalhando o outro termo através das mudanças de variáveis, obtemos:

$$y^{(\nu)} \rightarrow z^{(\nu)} + z^{(V)}, \quad \nu = 1, \dots, V-1, \quad (299)$$

$$y^{(V)} \rightarrow z^{(V)}, \quad (300)$$

o que também insere um jacobiano trivial, e então,

$$\sum_{v=1}^V \epsilon_{vi} y^{(v)} = \sum_{v=1}^{V-1} \epsilon_{vi} y^{(v)} + \epsilon_{Vi} y^{(V)} \quad (301)$$

$$= \sum_{v=1}^{V-1} \epsilon_{vi} (z^{(v)} + z^{(V)}) + \epsilon_{Vi} z^{(V)}, \quad (302)$$

ou seja,

$$\sum_{v=1}^V \epsilon_{vi} y^{(v)} = \sum_{v=1}^{V-1} \epsilon_{vi} z^{(v)} + z^{(V)} \underbrace{\sum_{v=1}^V \epsilon_{vi}}_{=0} \quad (303)$$

$$= \sum_{v=1}^{V-1} \epsilon_{vi} z^{(v)}. \quad (304)$$

Para o outro termo, segue que:

$$\sum_{v=1}^V y^{(v)} \cdot P^{(v)} = \sum_{v=1}^{V-1} y^{(v)} \cdot P^{(v)} + y^{(V)} \cdot P^{(V)} \quad (305)$$

$$= \sum_{v=1}^{V-1} (z^{(v)} + z^{(V)}) \cdot P^{(v)} + z^{(V)} \cdot P^{(V)} \quad (306)$$

$$= \sum_{v=1}^{V-1} z^{(v)} \cdot P^{(v)} + z^{(V)} \cdot \sum_{v=1}^V P^{(v)} \quad (307)$$

A mudança de variáveis corresponde à:

$$\prod_{v=1}^V \int d^N y^{(v)} = \left(\prod_{v=1}^{V-1} \int d^N z^{(v)} \right) \int d^N z^{(V)}. \quad (308)$$

A expressão da amplitude fica, pois,

$$\begin{aligned} \widetilde{I}_G^N = & F(G) \left(\prod_{i=1}^I \int d\alpha^{(i)} A^{(i)} \right) \left\{ \left(\prod_{\nu=1}^{V-1} \int d^N z^{(\nu)} \right) e^{-\sum_{i=1}^I \alpha^{(i)} \overline{M}_i^2} \times \right. \\ & \left. e^{-i \sum_{\nu=1}^{V-1} z^{(\nu)} \cdot P^{(\nu)} + \sum_{i=1}^I \left(-\frac{1}{4\alpha^{(i)}} \left(\sum_{\nu=1}^{V-1} \epsilon_{\nu i} z^{(\nu)} \right)^2 \right)} \left(\underbrace{\int d^N z^{(V)} e^{-i z^{(V)} \cdot \sum_{\nu=1}^V P^{(\nu)}}}_{(2\pi)^N \delta^N \left(\sum_{\nu=1}^V P^{(\nu)} \right)} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (309)$$

As integrais nas variáveis $z^{(\nu)}$, são:

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{\nu=1}^{V-1} \int d^N z^{(\nu)} \right) \times \\ & e^{-i \sum_{\nu=1}^{V-1} z^{(\nu)} \cdot P^{(\nu)} + \sum_{i=1}^I \left(-\frac{1}{4\alpha^{(i)}} \left(\sum_{\nu=1}^{V-1} \epsilon_{\nu i} z^{(\nu)} \right)^2 \right)} = \prod_{\nu=1}^{V-1} \int d^N z^{(\nu)} e^{-i z^{(\nu)} \cdot P^{(\nu)} - \frac{z^{(\nu)T} d_G^{-1}(\alpha) z^{(\nu)}}{4}} \end{aligned} \quad (310)$$

onde definimos:

$$d_G(\alpha) = \sum_{i=1}^I \epsilon_{\nu i} \frac{1}{\alpha^{(i)}} \epsilon_{\nu i}. \quad (311)$$

Fazendo essa substituição e reagrupando os termos, temos:

$$\begin{aligned} \prod_{\nu=1}^{V-1} \int d^N z^{(\nu)} e^{-i z^{(\nu)} \cdot P^{(\nu)} - \frac{1}{4} z^{(\nu)T} d_G(\alpha) z^{(\nu)}} &= \left[(4\pi)^{N/2} \right]^{(V-1)} (\det(d_G(\alpha)))^{-N/2} \times \\ & e^{-\sum_{\nu_1, \nu_2=1}^{V-1} P^{(\nu_1)} [d_G^{-1}(\alpha)] P^{(\nu_2)}}. \end{aligned} \quad (312)$$

Logo podemos escrever:

$$\begin{aligned} \widetilde{I}_G^N(P) = & F(G) \left(\prod_{i=1}^I \int d\alpha^{(i)} A^{(i)} e^{-\alpha^{(i)} \overline{M}_i^2} \right) \left\{ (\det(d_G(\alpha)))^{-N/2} \times \right. \\ & \left. \left[(4\pi)^{N/2} \right]^{(V-1)} e^{-\sum_{\nu_1, \nu_2=1}^{V-1} P^{(\nu_1)} [d_G^{-1}(\alpha)] P^{(\nu_2)}} (2\pi)^N \delta^N \left(\sum_{\nu=1}^V P^{(\nu)} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (313)$$

ou,

$$\begin{aligned} \tilde{I}_G^N(P) = F(G) & \left(\prod_{i=1}^I \int d\alpha^{(i)} A^{(i)} e^{-\alpha^{(i)} \overline{M}_i^2} \right) \times \\ & \left\{ (\det(d_G(\alpha)))^{-N/2} (4\pi)^{N(V-1)/2} e^{-\sum_{\nu_1, \nu_2=1}^{V-1} P^{(\nu_1)} [d_G^{-1}(\alpha)] P^{(\nu_2)}} (2\pi)^N \delta^N \left(\sum_{\nu=1}^V P^{(\nu)} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (314)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \tilde{I}_G^N(P) = F(G) & \left(\prod_{i=1}^I \int d\alpha^{(i)} \frac{1}{(\alpha^{(i)})^{N/2} (4\pi)^{N/2}} e^{-\alpha^{(i)} \overline{M}_i^2} \right) \times \\ & \left\{ (\det(d_G(\alpha)))^{-N/2} (4\pi)^{N(V-1)/2} e^{-\sum_{\nu_1, \nu_2=1}^{V-1} P^{(\nu_1)} [d_G^{-1}(\alpha)] P^{(\nu_2)}} (2\pi)^N \delta^N \left(\sum_{\nu=1}^V P^{(\nu)} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (315)$$

Usando o fato que $L = I + 1 - V$ para simplificar os termos com $(4\pi)^N$

$$\frac{(4\pi)^{N(V-1)/2}}{(4\pi)^{NI/2}} = \frac{1}{(4\pi)^{N(L=I+1-V)/2}} \quad (316)$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^{NL/2}} \quad (317)$$

finalmente obtém-se:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_G^N(P) = F(G) & \left(\prod_{i=1}^I \int d\alpha^{(i)} e^{-\alpha^{(i)} \overline{M}_i^2} \right) \frac{1}{((4\pi)^2)^{NL/2}} \left(\frac{1}{\left(\prod_{i=1}^I \alpha^{(i)} \det(d_G(\alpha)) \right)} \right)^{N/2} \times \\ & \left\{ e^{-\sum_{\nu_1, \nu_2=1}^{V-1} P^{(\nu_1)} [d_G^{-1}(\alpha)] P^{(\nu_2)}} (2\pi)^N \delta^N \left(\sum_{\nu=1}^V P^{(\nu)} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (318)$$

De forma mais compacta, pode-se definir os polinômios de Symanzik $U(\alpha)$ e $V(\alpha)$ como:

$$U(\alpha) = \left(\prod_{i=1}^I \alpha^{(i)} \right) \det(d_G(\alpha)) \quad (319)$$

$$V(\alpha) = U(\alpha) \sum_{\nu_1, \nu_2=1}^{V-1} P^{(\nu_1)} [d_G^{-1}(\alpha)] P^{(\nu_2)} \quad (320)$$

e ainda usando o fato de que $\tilde{I}_G^N(P) = I_G^N(P) (2\pi)^N \delta^N(\sum_{\nu=1}^V P^{(\nu)})$, temos:

$$I_G^N(P) = F(G) \left(\prod_{i=1}^I \int d\alpha^{(i)} e^{-\alpha^{(i)} \overline{M}_i^2} \right) \times \left\{ \frac{e^{-\frac{V(\alpha)}{U(\alpha)}}}{((4\pi)^2)^{NL/4} U(\alpha)^{N/2}} \right\}. \quad (321)$$

As dimensões compactadas modificam a dimensionalidade da equação (321) se compararmos com a equação (274). Isto certamente modifica a convergência da integral de Feynman. A convergência da integral (321) pode ser analisada usando o teorema de Weinberg. O teorema de Weinberg assegura a convergência do propagador se o grau superficial de divergência respeitar uma condição. Usando o teorema de Weinberg fica evidente que a dimensão reduzida $N = D - d$ melhora a convergência das integrais que representam os diagramas.

Teorema de Weinberg: Se $\omega(g) < 0$, onde g é um subdiagrama de G , para todo $g \in G$, então a integral de Feynman correspondente a G é absolutamente convergente. Avaliando o comportamento da integral $\tilde{I}_G^N(P)$ com o teorema de Weinberg, dividindo nos setores de Hepp, redefinimos as variáveis α de Schwinger da seguinte maneira (WEINBERG, 1960):

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_1^2 \beta_2^2 \cdots \beta_I^2 \\ \alpha_2 &= \beta_2^2 \cdots \beta_I^2 \\ &\vdots \\ \alpha_{I-1} &= \beta_{I-1}^2 \beta_I^2 \\ \alpha_{I-1} &= \beta_I^2. \end{aligned} \quad (322)$$

Esta mudança de variáveis introduz um jacobiano da forma:

$$\frac{D(\{\alpha\})}{D(\{\beta\})} = 2^I \beta_1 \beta_2^3 \cdots \beta_I^{I-1} \quad (323)$$

e os novos limites de integração são dados por:

$$0 \leq \beta_l < \infty \text{ e } 0 \leq \beta_l \leq 1 \text{ para } 1 \leq l \leq I - 1. \quad (324)$$

Pode ser provado (vide (ITZYKSON; ZUBER, 2006)) que esta mudança introduz um fator comum no polinômio $U(\alpha)$, que posto em evidência fica representado como mostrado a seguir.

$$U(\alpha) = \beta_1^{2L_1} \beta_2^{2L_2} \cdots \beta_I^{2L_I} (1 + O(\beta)), \quad (325)$$

onde os L_i representam o número de *loops* independentes. Como o termo $(1 + O(\beta))$ não possui polos, a possível divergência vem da razão do restante da função $U(\alpha)$ (325) e o jacobiano (323). Logo,

$$\frac{\beta_1 \beta_2^3 \cdots \beta_I^{I-1}}{(\beta_1^{2L_1} \beta_2^{2L_2} \cdots \beta_I^{2L_I})^{N/2}} = \prod_{l=1}^I \beta^{-NL_l + I - 1} = \prod_{l=1}^I \beta^{-\omega(g) - 1}, \quad (326)$$

onde o grau superficial de divergência $\omega(g)$ é definido como:

$$\omega(g) = NL_l - I. \quad (327)$$

Com isto, fica fácil ver que basta $-\omega(g) - 1 > -1$ para não se ter mais polos na origem da integração. Assim, chega-se à condição requerida para que o teorema assegure a convergência da integral, dada por:

$$\omega(g) < 0. \quad (328)$$

Neste ponto, pode-se claramente ver que sendo L_l e I valores positivos, da equação (327), pode-se chegar à conclusão de que, quanto menor o valor de N , melhor a convergência do sub-diagrama. Com o uso das dimensões compactadas, $N < D$, aumenta-se o grau de convergência das integrais dos diagramas.

3.1 Compactação de um diagrama fermiônico genérico com o uso da representação paramétrica dos diagramas

Na seção anterior foi feita a compactação do diagrama genérico usando a representação paramétrica para o campo escalar da teoria ϕ^4 . Para prosseguir com o propósito de investigar como as dimensões compactadas inseridas em diagramas afetam a convergência, das diferentes teorias, podemos avaliar inicialmente como uma teoria com acoplamento do fermion-escalar se comporta. Para propagadores fermiônicos tipo Yukawa, a representação paramétrica é similar à

(274) (pode-se encontrar mais detalhes na referência (LINHARES; MALBOUISSON; RODITI, 2008)) e, de forma genérica, podemos dizer que esta representação é dada da forma a seguir:

$$\tilde{I}_G^D(P) = F(G) \int \prod_{i=1}^I \frac{d^D k_i}{(2\pi)^D} \left(\frac{\mathcal{P}(\tilde{k})}{(\tilde{k}^{(i)})^2 + M_i^2} \right) \prod_{\nu}^V (2\pi)^D \delta^D \left(P_{\nu} - \sum_{i=1}^I \epsilon_{\nu i} k_i \right), \quad (329)$$

onde o índice i representa a i -ésima linha do diagrama e não existe distinção para uma linha escalar ou fermiônica. Esta distinção fica apenas na massa M_i que pode ser massa de campo escalar ou fermiônico. Com isso, os índices I , ν , V e L , o fator $F(G)$ e a matriz $\epsilon_{\nu i}$ são idênticos aos já citados na seção anterior.

O fator $\mathcal{P}(\tilde{k})$ presente no numerador é um polinômio que contém os momentos k_i e as massas fermiônicas. Este fator pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\mathcal{P}(\tilde{k}) = \prod_i (\tilde{k}^{(i)} - M_f), \quad (330)$$

onde a massa M_f é a massa do férmion. De modo similar ao caso de campo escalar (273), podemos escrever:

$$\tilde{I}_G^D(P) = I_G^D(P) (2\pi)^D \delta^D \left(\sum_{\nu=1}^V P^{(\nu)} \right). \quad (331)$$

Deste modo, a equação a seguir deve ter o mesmo tipo de estrutura de compactação que sua contrapartida de campo escalar puro, definida como:

$$\tilde{I}_G^D(P) = F(G) \int \prod_{i=1}^I \frac{d^D k^{(i)}}{(2\pi)^D} \left(\frac{\mathcal{P}(\tilde{k})}{(\tilde{k}^{(i)})^2 + M^2} \right) \prod_{\nu}^V (2\pi)^D \delta^D \left(P^{(\nu)} - \sum_{i=1}^I \epsilon_{\nu i} \tilde{k}^{(i)} \right). \quad (332)$$

A mesma prescrição do caso anterior (275) pode ser adotada. Com isso:

$$(\tilde{k}^{(i)})^2 = (k^{(i)})^2 + (l^{(i)})^2 \quad \text{onde:} \quad (l^{(i)})^2 = \sum_{j=0}^{d-1} (l_j^{(i)})^2 \quad \text{e} \quad l_j^{(i)} = \frac{2\pi}{L_j} n_j^{(i)}. \quad (333)$$

Esta prescrição leva ao mesmo ponto,

$$d^D \tilde{k}^{(i)} = d^{(D-d)} k^{(i)} \cdot d^d l^{(i)} \quad \text{e} \quad dq_j^{(i)} \rightarrow \frac{1}{L_j} \sum_{n_j^{(i)}=-\infty}^{\infty}. \quad (334)$$

Como neste tipo de teoria temos k_i no numerador da amplitude, teremos que ter um cuidado adicional. Sendo:

$$\tilde{k}^{(i)} = \left(k^{0,(i)}, k^{1,(i)}, \dots, k^{(d-1),(i)}, l^{(d),(i)}, \dots, l^{(D),(i)} \right), \quad (335)$$

fica conveniente escrever:

$$\tilde{k}^{(i)} = \underbrace{\left(k^{0,(i)}, k^{1,(i)}, \dots, k^{(d-1),(i)}, 0, \dots, 0 \right)}_{k^{(1)}} + \underbrace{\left(0, 0, \dots, 0, l^{(d),(i)}, \dots, l^{(D),(i)} \right)}_{l^{(i)}}, \quad (336)$$

e assim fica simples dizer que:

$$\tilde{k}^{(i)} = k^{(i)} + l^{(i)}, \quad (337)$$

e, similarmente ao antes feito, os momentos externos são da forma:

$$P^{(\mu)} = \left(P^{0,(\mu)}, P^{1,(i)}, \dots, P^{(d-1),(\mu)}, \frac{2\pi}{L_d} m_d^{(\mu)}, \dots, \frac{2\pi}{L_D} m_D^{(\mu)} \right). \quad (338)$$

Como os momentos externos não se alteram a decomposição da delta de Dirac é idêntica à:

$$\delta^D \left(P^{(\mu)} - \sum_{s=1}^I \epsilon_{\mu s} k^{(s)} \right) = \delta^{(D-d)} \left(P^{(\mu)} - \sum_{s=1}^I \epsilon_{\mu s} k^{(s)} \right) \times \prod_{\rho=d}^{D-d} \delta \left(\frac{2\pi}{L_\rho} m_\rho^{(\mu)} - \sum_{s=1}^I \epsilon_{\mu s} l_\rho^{(s)} \right). \quad (339)$$

Inserindo as dimensões compactadas e fazendo as mesmas considerações que foram feitas em (284), obtemos:

$$\tilde{I}_G^D(P) = \left\{ \frac{1}{(\text{Vol})^I} \prod_{i=1}^I \sum_{\{n_j^{(i)}\}_{j=1}^\infty} \right\} \tilde{I}_G^N(P) \prod_v^V \prod_{\rho=d}^{D-d} (2\pi) \delta \left(\frac{2\pi}{L_\rho} m_\rho^{(\mu)} - \sum_{i=1}^I \epsilon_{\mu i} l_\rho^{(i)} \right), \quad (340)$$

onde analogamente ao feito na equação (284), podemos dizer que $\tilde{I}_G^N(P)$ é dado por:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_G^N(P) &= F(G) \prod_{i=1}^I \int \frac{d^N k^{(i)}}{(2\pi)^N} \left(\frac{\mathcal{P}(k+l)}{(k^{(i)})^2 + M_i^2 + (l^{(i)})^2} \right) \times \\ &\quad \left[\prod_{\nu}^V (2\pi)^N \delta^N \left(P^{(\nu)} - \sum_{i=1}^I \epsilon_{\nu i} k^{(i)} \right) \right], \end{aligned} \quad (341)$$

em que $\mathcal{P}(k+l) = \prod_i \left((k^{(i)} l^{(i)}) - M_f \right)$. Fazendo uma adaptação da prescrição anterior, que só continha termos no numerador, temos:

$$\frac{\mathcal{P}(k)}{(k^{(i)})^2 + \overline{M}_i^2} = \int_0^\infty d\alpha^{(i)} \mathcal{P} \left(\frac{-1}{\alpha^{(i)}} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) e^{-\alpha^{(i)} \left((k^{(i)})^2 + M_i^2 + (l^{(i)})^2 + \xi_i \cdot (k^{(i)} + l^{(i)}) \right)} \Bigg|_{\xi_i=0}, \quad (342)$$

onde podemos ver que:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(k+l) &= \mathcal{P} \left(\frac{-1}{\alpha^{(i)}} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) e^{-\alpha^{(i)} (\xi_i \cdot (k^{(i)} + l^{(i)}))} \Bigg|_{\xi_i=0} \\ &= \mathcal{P}(k^{(i)} + l^{(i)}) e^{-\alpha^{(i)} (\xi_i \cdot (k^{(i)} + l^{(i)}))} \Bigg|_{\xi_i=0} \end{aligned} \quad (343)$$

$$= \mathcal{P}(k^{(i)} + l^{(i)}). \quad (344)$$

O termo que contém os momentos k e os momentos externos P também possui exatamente a mesma forma do caso anterior (290), ou seja,

$$(2\pi)^N \delta^N \left(P^{(\nu)} - \sum_{i=1}^I \epsilon_{\nu i} k^{(i)} \right) = \int d^n y^{(\nu)} e^{-iy^{(\nu)} \cdot (P^{(\nu)} - \sum_{i=1}^I \epsilon_{\nu i} k^{(i)})}. \quad (345)$$

Similarmente ao caso de campos escalar queremos integrar todos os momentos k e, portanto, é conveniente agrupar todos os termos de momento k , da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_G^N(P) &= F(G) \prod_{i=1}^I \int d\alpha^{(i)} \mathcal{P} \left(\frac{-1}{\alpha^{(i)}} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) \times \left\{ \prod_{\nu=1}^V \int d^N y^{(\nu)} \right. \\ &\quad \left. \left[\int \frac{d^N k^{(i)}}{(2\pi)^N} e^{-\alpha^{(i)} \left((k^{(i)})^2 + M_i^2 + (l^{(i)})^2 + \xi_i \cdot (k^{(i)} + l^{(i)}) \right)} e^{-iy^{(\nu)} \cdot (P^{(\nu)} - \sum_{i=1}^I \epsilon_{\nu i} k^{(i)})} \right] \right\} \Bigg|_{\xi_i=0}. \end{aligned} \quad (346)$$

arrumando os termos que dependem de $k^{(i)}$ em um único termo, obtemos:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_G^N &= F(G) \prod_{i=1}^I \int d\alpha^{(i)} \mathcal{P} \left(\frac{-1}{\alpha^{(i)}} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) \times \left\{ \prod_{\nu=1}^V \int d^N y^{(\nu)} \left[\int \frac{d^N k^{(i)}}{(2\pi)^N} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. e^{-\left[\alpha^{(i)} (k^{(i)})^2 - i \sum_{i=1}^I \epsilon_{\nu i} y^{(\nu)} \cdot k^{(i)} + \alpha^{(i)} \xi_i \cdot k^{(i)} \right]} e^{-iy^{(\nu)} \cdot P^{(\nu)} - \alpha^{(i)} \left(M_i^2 + (l^{(i)})^2 + \xi_i \cdot l^{(i)} \right)} \right] \right\} \Bigg|_{\xi_i=0}. \end{aligned} \quad (347)$$

A soma que contém os termos em k , pode ser escrita como:

$$\alpha^{(i)} (k^{(i)})^2 - i \sum_{i=1}^I \epsilon_{vi} y^{(v)} \cdot k^{(i)} + \alpha^{(i)} \xi_i \cdot k^{(i)} = \alpha^{(i)} \left[k^{(i)} + \frac{\xi_i \cdot k^{(i)}}{2} \right]^2 - \alpha^{(i)} \frac{\xi_i^2}{4} - i \sum_{i=1}^I \epsilon_{vi} y^{(v)} \cdot k^{(i)}. \quad (348)$$

Deslocando $k^{(i)} + \frac{\xi_i \cdot k^{(i)}}{2} \rightarrow k^{(i)}$, temos:

$$\alpha^{(i)} (k^{(i)})^2 - i \sum_{i=1}^I \epsilon_{vi} y^{(v)} \cdot k^{(i)} + \alpha^{(i)} \xi_i \cdot k^{(i)} = \alpha^{(i)} [k^{(i)}]^2 - i \sum_{i=1}^I \epsilon_{vi} y^{(v)} \cdot (k^{(i)} - \xi_i), \quad (349)$$

que agora fica de forma similar ao que já foi feito em (293). Seguindo os mesmos passos:

$$\alpha^{(i)} (k^{(i)})^2 - i \sum_{i=1}^I \epsilon_{vi} y^{(v)} \cdot k^{(i)} + \alpha^{(i)} \xi_i \cdot k^{(i)} = \alpha^{(i)} \left[k^{(i)} - \frac{i}{2\alpha^{(i)}} \sum_{i=1}^I \epsilon_{vi} y^{(v)} \right]^2 + \frac{1}{4\alpha^{(i)}} \left(\sum_{i=1}^I \epsilon_{vi} y^{(v)} \right)^2 + \quad (350)$$

$$i \sum_{i=1}^I \epsilon_{vi} y^{(v)} \cdot \xi_i - \alpha^{(i)} \frac{\xi_i^2}{4}. \quad (351)$$

Fazendo um novo deslocamento $k^{(i)} - \frac{i}{2\alpha^{(i)}} \sum_{i=1}^I \epsilon_{vi} y^{(v)} \rightarrow k^{(i)}$, com jacobiano trivial, temos a equação abaixo:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_G^N = & F(G) \prod_{i=1}^I \int d\alpha^{(i)} \mathcal{P} \left(\frac{-1}{\alpha^{(i)}} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) \times \left\{ \prod_{v=1}^V \int d^N y^{(v)} \left[\int \frac{d^N k^{(i)}}{(2\pi)^N} e^{-\alpha^{(i)} (k^{(i)})^2} \right. \right. \\ & \left. \left. e^{-iy^{(v)} \cdot P^{(v)} - \alpha^{(i)} (M_i^2 + (l^{(i)})^2 + \xi_i \cdot l^{(i)}) + \frac{1}{4\alpha^{(i)}} (\sum_{i=1}^I \epsilon_{vi} y^{(v)})^2 - i \sum_{i=1}^I \epsilon_{vi} y^{(v)} \cdot \xi_i + \alpha^{(i)} \frac{\xi_i^2}{4}} \right] \right\} \Bigg|_{\xi_i=0}. \quad (352) \end{aligned}$$

Podemos ainda definir alguns termos de modo que:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_G^N = & F(G) \prod_{i=1}^I \int d\alpha^{(i)} \mathcal{P} \left(\frac{-1}{\alpha^{(i)}} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) \times \\ & \left\{ \prod_{v=1}^V \int d^N y^{(v)} \left[\int \frac{d^N k^{(i)}}{(2\pi)^N} e^{-\alpha^{(i)} (k^{(i)})^2} e^{-iy^{(v)} \cdot \bar{P}^{(v)} - \alpha^{(i)} \bar{M}_i + \frac{1}{4\alpha^{(i)}} (\sum_{i=1}^I \epsilon_{vi} y^{(v)})^2} \right] \right\} \Bigg|_{\xi_i=0}, \quad (353) \end{aligned}$$

onde,

$$\bar{M}_i = M_i^2 + (l^{(i)})^2 + \xi_i \cdot l^{(i)} - \frac{\xi_i^2}{4}, \quad (354)$$

$$\bar{P}^{(\nu)} = P^{(\nu)} + \sum_{i=1}^I \epsilon_{\nu i} \cdot \xi_i. \quad (355)$$

O termo dado por:

$$A^{(i)} = \int \frac{d^N k^{(i)}}{(2\pi)^N} e^{-\alpha(k^{(i)})^2}, \quad (356)$$

já foi resolvido na equação (297). Com isso, temos como resultado:

$$A^{(i)} = \frac{1}{(\alpha^{(i)})^{N/2} (4\pi)^{N/2}} \quad (357)$$

Como a equação (353) é exatamente a mesma equação descrita em (295), exceto pela mudança na definição de massa e de momento e a presença de $\mathcal{P}\left(\frac{-1}{\alpha^{(i)}} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\right)$ que atua apenas nos ξ_i , podemos dizer que sua solução é a mesma encontrada na equação (295). Deste modo,

$$\begin{aligned} \tilde{I}_G^N = & F(G) \prod_{i=1}^I \int d\alpha^{(i)} A^{(i)} \mathcal{P}\left(\frac{-1}{\alpha^{(i)}} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\right) \times \\ & \left\{ \prod_{\nu=1}^V \int d^N y^{(\nu)} \left[e^{-iy^{(\nu)} \cdot \bar{P}^{(\nu)} - \alpha^{(i)} \bar{M}_i + \frac{1}{4\alpha^{(i)}} (\sum_{i=1}^I \epsilon_{\nu i} y^{(\nu)})^2} \right] \right\} \Bigg|_{\xi_i=0}. \end{aligned} \quad (358)$$

Ao aplicar o mesmo procedimento feito na equação (299), temos:

$$\sum_{\nu=1}^V \epsilon_{\nu i} y^{(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{V-1} \epsilon_{\nu i} z^{(\nu)}, \quad (359)$$

e

$$\sum_{\nu=1}^V y^{(\nu)} \cdot \bar{P}^{(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{V-1} z^{(\nu)} \cdot \bar{P}^{(\nu)} + z^{(V)} \cdot \sum_{\nu=1}^V \bar{P}^{(\nu)}. \quad (360)$$

O termo que se refere ao somatório dos \bar{P} , tem a forma:

$$\sum_{\nu=1}^V \bar{P}^{(\nu)} = \sum_{\nu=1}^V P^{(\nu)} + \sum_{i=1}^I \xi_i \cdot \underbrace{\sum_{\nu=1}^V \epsilon_{\nu i}}_0. \quad (361)$$

Deste modo, como esperado, recuperarmos a conservação de momento externo, ou seja,

$$\sum_{\nu=1}^V \bar{P}^{(\nu)} = \sum_{\nu=1}^V P^{(\nu)}. \quad (362)$$

Então, a integral pode ser simplificada de forma similar ao feito na equação (315)

$$\begin{aligned} \tilde{I}_G^N(P) &= F(G) \left(\prod_{i=1}^I \int d\alpha^{(i)} \frac{1}{(\alpha^{(i)})^{N/2} (4\pi)^{N/2}} \cdot \mathcal{P} \left(\frac{-1}{\alpha^{(i)}} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) e^{-\alpha^{(i)} \bar{M}_i^2} \right) \times \\ &\quad \left\{ (4\pi)^{N(V-1)/2} e^{-\sum_{\nu_1, \nu_2=1}^{V-1} \bar{P}^{(\nu_1)} [d_G^{-1}(\alpha)] \bar{P}^{(\nu_2)}} \times \right. \\ &\quad \left. (2\pi)^N \delta^N \left(\sum_{\nu=1}^V P^{(\nu)} \right) \right\} \Big|_{\xi_i=0}. \end{aligned} \quad (363)$$

Similarmente ao feito na equação (321), podemos reescrever de forma mais compacta utilizando os polinômios $U(\alpha)$ e $V(\alpha)$. Como o polinômio $V(\alpha)$ depende do momento externo \bar{P} , que por sua vez, depende do parâmetro ξ , é conveniente deixar isto evidente.

$$\begin{aligned} \tilde{I}_G^N(\bar{P}) &= F(G) \left(\prod_{i=1}^I \int d\alpha^{(i)} \mathcal{P} \left(\frac{-1}{\alpha^{(i)}} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) e^{-\alpha^{(i)} \bar{M}_i^2} \right) \times \left\{ \frac{e^{-\frac{V(\alpha, \xi)}{U(\alpha)}}}{((4\pi)^2)^{NL/4} U(\alpha)^{N/2}} \right\} \times \\ &\quad (2\pi)^N \delta^N \left(\sum_{\nu=1}^V P^{(\nu)} \right) \Big|_{\xi_i=0}. \end{aligned} \quad (364)$$

Podemos escrever então o I_G^N , como:

$$\tilde{I}_G^N(\bar{P}) = F(G) \left(\prod_{i=1}^I \int d\alpha^{(i)} \mathcal{P} \left(\frac{-1}{\alpha^{(i)}} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) e^{-\alpha^{(i)} \bar{M}_i^2} \right) \times \left\{ \frac{e^{-\frac{V(\alpha, \xi)}{U(\alpha)}}}{((4\pi)^2)^{NL/4} U(\alpha)^{N/2}} \right\}. \quad (365)$$

A equação é compatível com o resultado encontrado em (LINHARES; MALBOUIS-SON; RODITI, 2008), apenas mudando os valores de P e de \bar{M} .

3.2 Compactação de teorias de calibre fermiônicas com o uso da representação paramétrica dos digramas de Feynman

Partindo da ideia de investigar o efeito da inserção das dimensões compactadas nos diagramas de Feynman para analisar a influência das dimensões discretas na convergência das integrais, a representação paramétrica dos diagramas tem-se mostrado uma importante aliada. Os propagadores dos campos de férmions escalares guardam uma certa semelhança com a teoria de *gauge* (calibre). Podemos escrever o propagador do campo mediador de interação, da forma:

$$\frac{1}{k^2 + \mu^2} \left(\delta_{\rho\theta} - ((1 - \eta) \frac{k_\rho k_\theta}{k^2 + \mu^2}) \right) = \frac{Q_{\rho\theta}(k, \mu, \eta)}{(k^2 + \mu^2)^2}, \quad (366)$$

com $Q_{\rho\theta}(k, \mu, \eta) = (k^2 + \mu^2) \delta_{\rho\nu} - (1 - \eta) k_\rho k_\nu$, podemos escrever o diagrama geral, já aplicando a conservação de momento em cada vértice, como:

$$I_G(\eta) = F(G) \int \left(\prod_{i=1}^I \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4} \right) \prod_{i=1}^{N^F} \frac{\mathcal{P}(q^{(i)})}{(q^{(i)})^2 + M_i^2} \prod_{j=1}^{N^T} \frac{Q_{\rho\theta}(p^{(j)}, \mu, \eta)}{((p^{(j)})^2 + \mu_i^2)^2}, \quad (367)$$

onde o polinômio $\mathcal{P}(q^{(i)})$ é idêntico ao caso fermiônico. Já o polinômio do numerador pode ser tratado de forma similar ao feito no caso do polinômio \mathcal{P} , para os férmions escalares. Com isso temos que tratar do propagador de forma similar ao feito anteriormente. Podemos reescrever o propagador da forma:

$$\mathcal{G}_{\rho\theta}(k, n, \varepsilon, \mu, \eta) = \frac{Q_{\rho\theta}(k, \mu, \eta)}{(k^2 + \mu^2 - \varepsilon)^n}, \quad (368)$$

onde claramente temos que:

$$\mathcal{G}_{\rho\theta}(k, 2, 0, \mu, \eta) = \frac{Q_{\rho\theta}(k, \mu, \eta)}{(k^2 + \mu^2)^2} \quad (369)$$

retorna ao propagador original. Com isso é possível gerar uma recorrência do propagador com relação à potência do denominador

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mathcal{G}_{\rho\theta}(k, n, \varepsilon, \mu, \eta) = n \frac{Q_{\rho\theta}(k, \mu, \eta)}{(k^2 + \mu^2 - \varepsilon)^{n+1}}. \quad (370)$$

Com isso fica fácil notar que:

$$\mathcal{G}_{\rho\theta}(k, n+1, \varepsilon, \mu, \eta) = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mathcal{G}_{\rho\theta}(k, n, \varepsilon, \mu, \eta), \quad (371)$$

ou de modo mais geral,

$$\mathcal{G}_{\rho\theta}(k, n+s, \varepsilon, \mu, \eta) = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+s)} \frac{\partial^s}{\partial \varepsilon^s} \mathcal{G}_{\rho\theta}(k, n, \varepsilon, \mu, \eta). \quad (372)$$

Se levarmos em conta que queremos $\mathcal{G}_{\rho\theta}(k, 2, 0, \mu, \eta)$, basta fazer $n = 1$ na equação (372), obtendo:

$$\mathcal{G}_{\rho\theta}(k, 2, \varepsilon, \mu, \eta) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mathcal{G}_{\rho\theta}(k, 1, \varepsilon, \mu, \eta). \quad (373)$$

Desta maneira, podemos usar a mesma prescrição antes utilizada na equação (342), o que nos leva à:

$$\mathcal{G}_{\rho\theta}(k^{(i)}, 1, \varepsilon, \mu, \eta) = \mathcal{Q}_{\rho\theta}(k^{(i)}, \mu, \eta) \int_0^\infty d\alpha^{(i)} e^{-\alpha^{(i)}((k^{(i)})^2 + \mu^2 + \xi_i k^{(i)} - \varepsilon)} \Big|_{\xi_i=0}. \quad (374)$$

Portanto, verifica-se que basta fazer o mesmo tipo de mudança feito para o caso dos férmions (vide equação (343)), que obtemos:

$$\mathcal{G}_{\rho\theta}(k^{(i)}, 1, \varepsilon, \mu, \eta) = \int_0^\infty d\alpha^{(i)} \mathcal{Q}_{\rho\theta} \left(\frac{-1}{\alpha^{(i)}} \frac{\partial}{\partial \xi_i^\sigma}, \mu, \eta \right) e^{-\alpha^{(i)}((k^{(i)})^2 + \mu^2 + \xi_i k^{(i)} - \varepsilon)} \Big|_{\xi_i=0}, \quad (375)$$

onde,

$$k^2 \rightarrow \left(\frac{-1}{\alpha^{(i)}} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2} \quad (376)$$

$$k_\sigma \rightarrow \frac{-1}{\alpha^{(i)}} \frac{\partial}{\partial \xi_i^\sigma}. \quad (377)$$

Logo, o propagador pode ser escrito em termos dos polinômios e das derivadas das funções auxiliares, ou seja,

$$\mathcal{G}_{\rho\theta}(k^{(i)}, 2, \varepsilon, \mu, \eta) = \int_0^\infty d\alpha^{(i)} Q_{\rho\theta} \left(\frac{-1}{\alpha^{(i)}} \frac{\partial}{\partial \xi_i^\sigma}, \mu, \eta \right) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} e^{-\alpha^{(i)}((k^{(i)})^2 + \mu^2 + \xi_i \cdot k^{(i)} - \varepsilon)} \Big|_{\xi_i=0}. \quad (378)$$

Definindo, assim, o operador $\chi_{\rho\theta}$ como:

$$\chi_{\rho\theta}(\alpha, \xi_i, \varepsilon, \mu, \eta) = Q_{\rho\theta} \left(\frac{-1}{\alpha^{(i)}} \frac{\partial}{\partial \xi_i^\sigma}, \mu, \eta \right) \frac{\partial}{\partial \varepsilon}, \quad (379)$$

possuímos, enfim, o propagador do campo de *gauge* escrito da seguinte forma:

$$\mathcal{G}_{\rho\theta}(k^{(i)}, 2, 0, \mu, \eta) = \int_0^\infty d\alpha^{(i)} \chi_{\rho\theta} e^{-\alpha^{(i)}((k^{(i)})^2 + \mu^2 + \xi_i \cdot k^{(i)} - \varepsilon)} \Big|_{\xi_i, \varepsilon=0}. \quad (380)$$

Temos, neste caso, 2 tipos de propagadores: os fermiônicos e os de *gauge*. Conseqüentemente, devemos considerar que o conjunto dos N^F propagadores fermiônicos possa ser escrito como:

$$\{\mathcal{G}^F\} = \prod_{i=1}^{N^F} \frac{\mathcal{P}(\tilde{q}^{(i)})}{(\tilde{q}^{(i)})^2 + M_i^2} \quad (381)$$

e, o conjunto de todos os propagadores de *gauge* possa ser representado da forma:

$$\{\mathcal{G}^\Gamma\} = \prod_{j=1}^{N^\Gamma} \frac{Q_{\rho\theta}(\tilde{p}^{(j)}, \mu, \eta)}{((\tilde{p}^{(j)})^2 + \mu_j^2)^2}, \quad (382)$$

onde os momentos \tilde{q} e \tilde{p} são obrigatoriamente funções lineares dos momentos internos $\tilde{k}^{(i)}$ e dos momentos externos P . Deste modo, podemos definir a compactação dimensional nos momentos k de forma similar ao que já foi feito (vide equação (275)). Como os momentos \tilde{q} e \tilde{p} são funções lineares dos momentos compactados \tilde{k} e P , temos:

$$\tilde{k}^{(i)} = \underbrace{(k^{0,(i)}, k^{1,(i)}, \dots, k^{(d-1),(i)}, 0, \dots, 0)}_{k^{(1)}} + \underbrace{(0, 0, \dots, 0, l^{(d),(i)}, \dots, l^{(D),(i)})}_{l^{(i)}} \quad (383)$$

e

$$P^{(\mu)} = \left(P^{0,(\mu)}, P^{1,(i)}, \dots, P^{(d-1),(\mu)}, \frac{2\pi}{L_d} m_d^{(\mu)}, \dots, \frac{2\pi}{L_D} m_D^{(\mu)} \right). \quad (384)$$

Logo, as seguintes relações são válidas:

$$\left(\tilde{q}^{(i)}\right)^2 = \left(q^{(i)}\right)^2 + \left(\bar{q}^{(i)}\right)^2 \quad (385)$$

e

$$\left(\tilde{p}^{(i)}\right)^2 = \left(p^{(i)}\right)^2 + \left(\bar{p}^{(i)}\right)^2, \quad (386)$$

onde os $\tilde{q}^{(i)}$ e os $\tilde{p}^{(i)}$ têm as mesmas regras de conservação de momento no vértice, que suas contrapartes $\bar{q}^{(i)}$ e $\bar{p}^{(i)}$. Com isso, fica definida as renomeações das massas como:

$$\bar{M}_i^2 = M_i^2 + \left(\bar{q}^{(i)}\right)^2 \quad (387)$$

e ainda

$$\bar{\mu}_i^2 = \mu_i^2 + \left(\bar{p}^{(i)}\right)^2 - \sigma. \quad (388)$$

Inserindo d compactações, obtemos:

$$\int \left(\prod_{i=1}^I \frac{d^d k_i}{(2\pi)^d} \right) \rightarrow \frac{1}{(\text{Vol})^I} \prod_{i=1}^I \sum_{\{n_j^{(i)}\}=-\infty}^{\infty} \quad (389)$$

Segue-se, de forma similar ao caso fermiônico, que:

$$\{\mathcal{G}^F\} = \prod_{i=1}^{N^F} \int_0^\infty d\alpha_F^{(i)} \mathcal{P} \left(\frac{-1}{\alpha^{(i)}} \frac{\partial}{\partial \beta_i} \right) e^{-\alpha^{(i)} \left((q^{(i)})^2 + \bar{M}_i^2 + \beta_i q^{(i)} \right)} \Big|_{\beta_i=0} \quad (390)$$

e para o propagador do campo de *gauge*, temos:

$$\{\mathcal{G}^\Gamma\} = \prod_{j=1}^{N^\Gamma} \int_0^\infty d\alpha_\Gamma^{(j)} \chi_{\rho\theta} e^{-\alpha^{(j)} \left((p^{(j)})^2 + \bar{\mu}_j^2 + \xi_j p^{(j)} - \varepsilon \right)} \Big|_{\xi_i, \varepsilon=0}. \quad (391)$$

De um modo geral, podemos escrever de forma similar ao caso escalar um diagrama genérico de N propagadores, onde: N^F representam propagadores fermiônicas e N^Γ representam propagadores de campo de *gauge*. Portanto,

$$N = N^F + N^\Gamma. \quad (392)$$

Como a conservação de momento externo já foi incluída nos propagadores, podemos escrever diretamente a amplitude I_G da seguinte maneira:

$$I_G(\eta) = F(G) \int \left(\prod_{i=1}^I \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4} \right) \{ \mathcal{G}^F \} \{ \mathcal{G}^\Gamma \}. \quad (393)$$

Agora, com o objetivo de simplificar a notação, efetuamos:

$$I_G^D(\eta) = I_G^D(\eta, \{\beta_i, \xi_j\}, \varepsilon) \Big|_{\{\beta_i, \xi_j\}, \varepsilon=0}. \quad (394)$$

Logo,

$$I_G^D(\eta, \{\beta_i, \xi_i\}, \varepsilon) = \left\{ (\text{Vol})^I \prod_{i=1}^I \sum_{\{n_j^{(i)}\}=-\infty}^{\infty} \right\} \quad (395)$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} I_G^D(\eta, \{\beta_i, \xi_i\}, \varepsilon) = & F(G) \left((\text{Vol})^I \prod_{i=1}^I \sum_{\{n_j^{(i)}\}=-\infty}^{\infty} \right) \int \left(\prod_{i=1}^I \frac{d^N k_i}{(2\pi)^N} \right) \times \\ & \left(\prod_{i=1}^{N^F} \int_0^\infty d\alpha_F^{(i)} \mathcal{P} \left(\frac{-1}{\alpha^{(i)}} \frac{\partial}{\partial \beta_i} \right) e^{-\alpha^{(i)} \left((q^{(i)})^2 + \bar{M}_i^2 + \beta_i q^{(i)} \right)} \right) \times \\ & \left(\prod_{j=1}^{N^\Gamma} \int_0^\infty d\alpha_\Gamma^{(j)} \chi_{\rho\theta} e^{-\alpha^{(j)} \left((p^{(j)})^2 + \bar{\mu}_j^2 + \xi_j p^{(j)} - \varepsilon \right)} \right). \end{aligned} \quad (396)$$

Analogamente, obtemos:

$$I_G^D(\eta, \{\beta_i, \xi_i\}, \varepsilon) = \left(\frac{1}{(\text{Vol})^I} \prod_{i=1}^I \sum_{\{n_j^{(i)}\}=-\infty}^{\infty} \right) I_G^N(\eta, \{\beta_i, \xi_i\}, \varepsilon). \quad (397)$$

Com isto, fica evidente que novamente devemos reescrever e separar o diagrama como um diagrama de dimensão menor. Para atingir esta finalidade, trocam-se as massas dos propagadores por uma função definida pela soma do termo que carrega todas as dependências das dimensões compactadas com a massa dos propagadores. Assim sendo, define-se:

$$\begin{aligned} I_G^N(\eta, \{\beta_i, \xi_i\}, \varepsilon) &= F(G) \int \left(\prod_{i=1}^I \frac{d^N k_i}{(2\pi)^N} \right) \times \\ &\times \left(\prod_{i=1}^{N^F} \int_0^\infty d\alpha_F^{(i)} \mathcal{P} \left(\frac{-1}{\alpha^{(i)}} \frac{\partial}{\partial \beta_i} \right) e^{-\alpha^{(i)} \left((q^{(i)})^2 + \bar{M}_i^2 + \beta_i q^{(i)} \right)} \right) \\ &\left(\prod_{j=1}^{N^T} \int_0^\infty d\alpha_\Gamma^{(j)} \chi_{\rho\theta} e^{-\alpha^{(j)} \left((p^{(j)})^2 + \bar{\mu}_j^2 + \xi_j p^{(j)} - \varepsilon \right)} \right). \end{aligned} \quad (398)$$

Finalmente, basta resolver o diagrama $I_G^N(\eta, \{\beta_i, \xi_i\}, \varepsilon)$ e, posteriormente efetuar as somas $\sum_{\{n_j^{(i)}\}=-\infty}^{\infty}$ para calcular a amplitude $I_G^D(\eta, \{\beta_i, \xi_i\}, \varepsilon)$.

3.3 Relação entre as amplitudes e a função zeta de Riemman

Nos capítulos anteriores a função zeta já foi usada para calcular os somatórios provenientes da inserção das dimensões compactadas, onde sempre se tinha uma soma do tipo:

$$I_G \sim \frac{1}{(c^2 + \sum a_i n_i^2)^V}. \quad (399)$$

Aparentemente este comportamento não se repete para um diagrama, eventualmente mais complicado, como representado na equação (321). Porém existe uma mudança de variável que pode ser feita de modo a explicitar a forma apresentada na equação (399). Consiste em inserir a identidade abaixo:

$$1 = \int_0^\infty d\lambda \delta \left(\lambda - \sum_i^I \alpha_i \right), \quad (400)$$

na equação (321)

$$I_G^N(P) = F(G) \left(\prod_{i=1}^I \int d\alpha^{(i)} e^{-\alpha^{(i)} \overline{M}_i} \int_0^\infty d\lambda \delta \left(\lambda - \sum_i \alpha_i \right) \right) \times \left\{ \frac{e^{-\frac{V(\alpha)}{U(\alpha)}}}{((4\pi)^2)^{NL/4} U(\alpha)^{N/2}} \right\}, \quad (401)$$

alterando a ordem das integrais de maneira que:

$$I_G^N(P) = F(G) \int_0^\infty d\lambda \left(\prod_{i=1}^I \int d\alpha^{(i)} e^{-\alpha^{(i)} \overline{M}_i} \delta \left(\lambda - \sum_i \alpha_i \right) \right) \times \left\{ \frac{e^{-\frac{V(\alpha)}{U(\alpha)}}}{((4\pi)^2)^{NL/4} U(\alpha)^{N/2}} \right\}. \quad (402)$$

Fazendo o reescalonamento $\alpha_i \rightarrow \lambda \alpha_i$, devemos recapitular que existe uma homogeneidade nas funções $U(\alpha)$ e $V(\alpha)$ e, cada uma das i integrais sobre os $d\alpha_i$ contribui com um λ . Sendo assim,

$$\prod_{i=1}^I \int d\alpha^{(i)} \rightarrow \prod_{i=1}^I \int d\alpha^{(i)} \lambda^I \quad (403)$$

$$U(\lambda\alpha) = \lambda^L U(\alpha), \quad (404)$$

$$\frac{V(\lambda\alpha)}{U(\lambda\alpha)} = \lambda \frac{V(\alpha)}{U(\alpha)}, \quad (405)$$

$$\delta \left(\lambda - \sum_i \alpha_i \right) \rightarrow \delta \left(\lambda \left(1 - \sum_i \alpha_i \right) \right). \quad (406)$$

Para a função delta, utilizaremos a seguinte propriedade:

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}, \quad (407)$$

que gera o seguinte resultado:

$$\delta\left(\lambda\left(1 - \sum_i^I \alpha_i\right)\right) = \frac{1}{\lambda} \delta\left(1 - \sum_i^I \alpha_i\right). \quad (408)$$

Substituindo as equações (403,404,405 e 408) na equação (402) obtém-se:

$$I_G^N(P) = F(G) \int_0^\infty d\lambda \left(\prod_{i=1}^I \int d\alpha^{(i)} \lambda^I e^{-\lambda \alpha^{(i)} \bar{M}_i^2} \frac{1}{\lambda} \delta\left(1 - \sum_i^I \alpha_i\right) \right) \times \left\{ \frac{e^{-\lambda \frac{V(\alpha)}{U(\alpha)}}}{((4\pi)^2)^{NL/4} \lambda^{LN/2} U(\alpha)^{N/2}} \right\} \quad (409)$$

Reorganizando a equação agrupando os termos de λ , segue que:

$$I_G^N(P) = F(G) \left(\prod_{i=1}^I \int d\alpha^{(i)} \delta\left(1 - \sum_i^I \alpha_i\right) \right) \left\{ \frac{1}{((4\pi)^2)^{NL/4} U(\alpha)^{N/2}} \right\} \times \quad (410)$$

$$\int_0^\infty d\lambda \lambda^{I-1-LN/2} e^{-\lambda \left(\sum \alpha^{(i)} \bar{M}_i^2 + \frac{V(\alpha)}{U(\alpha)} \right)}. \quad (411)$$

A integral sobre a variável λ possui uma relação com a função gama de Euler. Esta relação fica evidente se fizermos uma mudança de variável, do tipo:

$$\lambda \left(\sum \alpha^{(i)} \bar{M}_i^2 + \frac{V(\alpha)}{U(\alpha)} \right) = x, \quad (412)$$

onde a integral é reescrita como:

$$\int_0^\infty d\lambda \lambda^{I-1-LN/2} e^{-\lambda \left(\sum \alpha^{(i)} \bar{M}_i^2 + \frac{V(\alpha)}{U(\alpha)} \right)} = \frac{1}{\left(\frac{V(\alpha)}{U(\alpha)} + \sum \alpha^{(i)} \bar{M}_i^2 \right)^{I-LN/2}} \int_0^\infty dx x^{I-1-LN/2} e^{-x}. \quad (413)$$

A definição da função gama de Euler, dada por:

$$\Gamma(I - LN/2) = \int_0^\infty dx x^{I-1-LN/2} e^{-x}, \quad (414)$$

pode ser usada para calcular a integral em λ , descrita em (413), da forma:

$$\int_0^\infty d\lambda \lambda^{I-1-LN/2} e^{-\lambda \left(\sum \alpha^{(i)} \overline{M}_i^2 + \frac{V(\alpha)}{U(\alpha)} \right)} = \frac{\Gamma(I-LN/2)}{\left(\frac{V(\alpha)}{U(\alpha)} + \sum \alpha^{(i)} \overline{M}_i^2 \right)^{I-LN/2}}. \quad (415)$$

Este resultado deve ser substituído na equação (410), onde obtemos:

$$I_G^N(P) = F(G) \frac{\Gamma(I-LN/2)}{((4\pi))^{NL/2}} \prod_{i=1}^I \int d\alpha^{(i)} \delta \left(1 - \sum_i \alpha_i \right) \left\{ \frac{1}{U(\alpha)^{N/2}} \right\} \frac{1}{\left(\frac{V(\alpha)}{U(\alpha)} + \sum \alpha^{(i)} \overline{M}_i^2 \right)^{I-LN/2}}, \quad (416)$$

que irá depender apenas dos parâmetros de Schwinger α_i . Devemos lembrar ainda que a presença da função delta impõe que a integral sobre os α_i seja feita sobre o domínio $[0,1]$.

Este resultado torna evidente a proposição feita em (399), de que a as dimensões compactadas irão gerar a função zeta. A definição de \overline{M}_i^2 ,

$$\overline{M}_i^2 = M^2 + \left(\frac{2\pi}{L_j} \right)^2 n_j^{2(i)}, \quad (417)$$

é o único termo que contém a dependência das dimensões compactadas.

Para tornar mais evidente que existe uma função zeta implícita na equação (416), definimos:

$$a_i = \left(\frac{2\pi}{L_j} \right)^2 \alpha^{(i)}; \quad (418)$$

$$c^2 = \frac{V(\alpha)}{U(\alpha)} + \sum \alpha^{(i)} M_i^2 \quad (419)$$

e

$$\nu = I - LN/2. \quad (420)$$

Estas definições claramente levam à

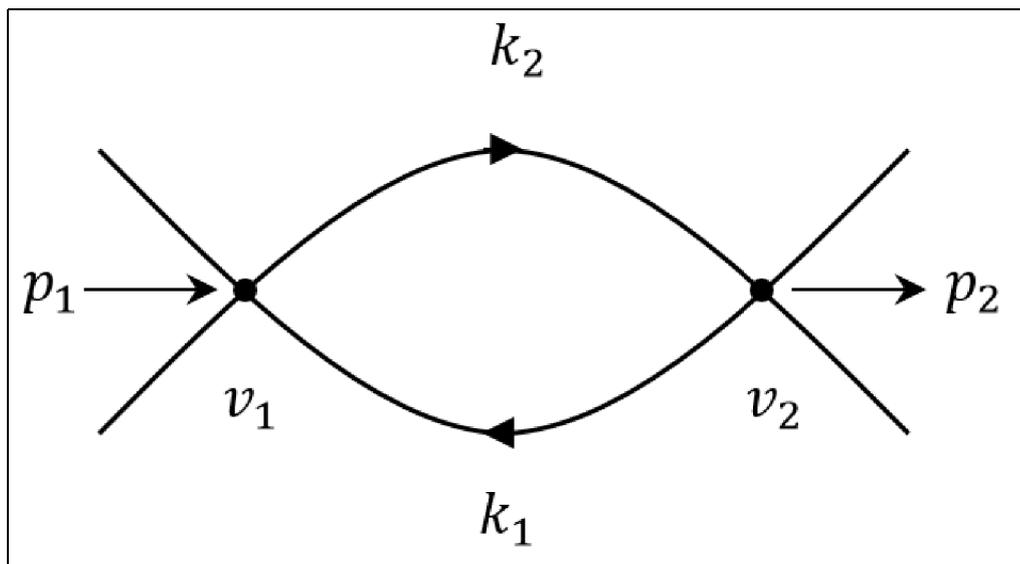
$$\frac{1}{\left(\frac{V(\alpha)}{U(\alpha)} + \sum \alpha^{(i)} \overline{M}_i^2 \right)^{I-LN/2}} = \frac{1}{\left(c^2 + \sum a_i n_i^2 \right)^\nu}. \quad (421)$$

Como já foi discutido em capítulos anteriores a expressão (399) é uma generalização da função zeta de Riemann (dependendo do caso trabalhado) que guarda a sua relação com as funções de Bessel modificadas de segunda espécie. Como todos os resultados apresentados neste capítulo tem uma forma geral similar a equação (321), a conclusão aqui discutida tendo como resultado a expressão (421) pode ser estendida para todos os casos anteriores.

3.4 Exemplo

Alguns passos do caso geral podem ser complicados de se entender a primeira vista, pois infelizmente a notação é bastante carregada. Apenas para explicitar o funcionamento do método e mostrar todas as etapas com mais clareza, será calculado um diagrama à 1 *loop*, definido como na figura (3) disposta abaixo.

Figura 3 – Diagrama 1 *Loop*.



Legenda: O Gráfico representa um diagrama de campo escalar a 1 loop.
Fonte: O autor, 2020.

Usando a conservação de mometo em cada vértice, obtem-se as seguintes relações:

$$k_2 = k_1 + P_1 \quad (422)$$

e

$$k_1 - P_2 = k_2, \quad (423)$$

que compõe um sistema de equações onde se torna bastante trivial isolar a dependencia dos momentos externos P_i . Com isso, obtemos:

$$P_1 = -P_2 \quad (424)$$

e consequentemente a conservação de momento externo será

$$\sum P = 0. \quad (425)$$

Usando as regras descritas em (272) para construir a matriz que descreve a topologia do diagrama, tem-se:

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = -1 \\ \epsilon_{12} = +1 \\ \epsilon_{21} = +1 \\ \epsilon_{22} = -1 \end{cases} . \quad (426)$$

Partindo da representação paramétrica, descrita na equação (270), juntamente com os termos da matriz encontrados na equação (426) e as conservações de momento em cada vértice, temos a seguinte representação para a amplitude $\tilde{I}_G^D(P)$:

$$\tilde{I}_G^D(P) = F(G) \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{1}{k_1^2 + M_1^2} \frac{1}{k_2^2 + M_2^2} \times \\ (2\pi)^D \delta^D(P_1 + k_1 - k_2) (2\pi)^D \delta^D(P_2 - k_1 + k_2). \quad (427)$$

Escolhendo integrar sobre k_2 usando a delta, obtem-se:

$$\tilde{I}_G^D(P) = F(G) \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{1}{k_1^2 + M_1^2} \frac{1}{(k_1 - P_2)^2 + M_2^2} (2\pi)^D \delta^D(P_1 + P_2). \quad (428)$$

Explicitando a conservação de momento externo do diagrama

$$\tilde{I}_G^D(P) = I_G^D(P) (2\pi)^D \delta^D(P_1 + P_2), \quad (429)$$

temos:

$$I_G^D(P) = F(G) \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{1}{k_1^2 + M_1^2} \frac{1}{(k_1 - P_2)^2 + M_2^2}. \quad (430)$$

Fazendo $P = P_1 = -P_2$ na integral descrita na equação (430), chegamos a seguinte expressão:

$$I_G^D(P) = F(G) \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{1}{k_1^2 + M_1^2} \frac{1}{(k_1 + P)^2 + M_2^2}. \quad (431)$$

Agora basta usar os parâmetros de Schwinger na equação (431), para integrar sobre o momento k_1 . Como o objetivo desta seção é justamente exemplificar que o ponto onde as dimensões compactadas são consideradas no cálculo dos diagramas não é relevante, irá se considerar a existência das dimensões em dois pontos distintos. Primeiramente, direto na definição da representação paramétrica (vide equação (270)). Posteriormente, diretamente na equação (431). Usando o mesmo diagrama descrito na figura (3) e tomando os momentos k_i com d dimensões compactadas, temos:

$$k^{(i)} = (q^{0,(i)}, q^{1,(i)}, \dots, q^{(d-1),(i)}, l^{(d),(i)}, \dots, l^{(D),(i)}), \quad (432)$$

de modo que a ortogonalidade das partes compactadas e não compactadas implica diretamente em:

$$k_i^2 = q_i^2 + l_i^2. \quad (433)$$

Os momentos externos devem igualmente ter d dimensões compactadas, com isso, devem possuir a forma descrita a seguir:

$$P^{(\mu)} = \left(p^{0,(\mu)}, p^{1,(\mu)}, \dots, p^{(d-1),(\mu)}, \frac{2\pi}{L_d} m_d^{(\mu)}, \dots, \frac{2\pi}{L_D} m_D^{(\mu)} \right). \quad (434)$$

Lembrando que para cada uma das d dimensões compactadas, tem-se:

$$\int \frac{d^d k_j^{(i)}}{(2\pi)^2} \rightarrow \frac{1}{\text{Vol}} \sum_{\{n_j^i\}=-\infty}^{\infty}. \quad (435)$$

Basta fazer o procedimento amplamente realizado neste capítulo para obter ,

$$\tilde{I}_G^D(P) = \frac{F(G)}{\text{Vol}^2} \sum_{\{n_j^{(i)}\}=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{D-d}q_1}{(2\pi)^{D-d}} \frac{d^{D-d}q_2}{(2\pi)^{D-d}} \frac{1}{q_1^2 + l_1^2 + M_1^2} \frac{1}{q_2^2 + l_2^2 + M_2^2} \times \quad (436)$$

$$(2\pi)^D \delta^D(P_1 + k_1 - k_2) (2\pi)^D \delta^D(P_2 - k_1 + k_2). \quad (437)$$

Usando uma propriedade da função delta para separar a parte compactada da não compactada, escrevemos:

$$(2\pi)^D \delta^D(P_1 + k_1 - k_2) = (2\pi)^{D-d} \delta^{D-d}(p_1 + q_1 - q_2) (2\pi)^d \delta^d(\rho_1 + l - l_2), \quad (438)$$

$$(2\pi)^D \delta^D(P_2 - k_1 + k_2) = (2\pi)^{D-d} \delta^{D-d}(p_2 - q_1 + q_2) (2\pi)^d \delta^d(\rho_2 - l_1 + l_2). \quad (439)$$

As funções delta de Dirac que contém as dimensões compactadas, podem ser vistas como um delta de Kronecker, uma vez que as deltas Kronecker devem atuar sobre as somas. Portanto, tem-se:

$$(2\pi)^D \delta^D(P_1 + k_1 - k_2) = (2\pi)^{D-d} \delta^{D-d}(p_1 + q_1 - q_2) \text{Vol} \delta_{\rho_1+l_1-l_2,0}, \quad (440)$$

$$(2\pi)^D \delta^D(P_2 - k_1 + k_2) = (2\pi)^{D-d} \delta^{D-d}(p_2 - q_1 + q_2) \text{Vol} \delta_{\rho_2-l_1+l_2,0}. \quad (441)$$

Feita as considerações sobre as funções delta, pode-se proceder nos cálculos da equação (436). Segue que:

$$\tilde{I}_G^D(P) = \frac{F(G)}{\text{Vol}^2} \sum_{\{n_j^{(i)}\}=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{D-d}q_1}{(2\pi)^{D-d}} \frac{d^{D-d}q_2}{(2\pi)^{D-d}} \frac{1}{q_1^2 + l_1^2 + M_1^2} \frac{1}{q_2^2 + l_2^2 + M_2^2} (2\pi)^{D-d} \times \quad (442)$$

$$\text{Vol}^2 \delta^{D-d}(p_1 + q_1 - q_2) (2\pi)^{D-d} \delta^{D-d}(p_2 - q_1 + q_2) \delta_{\rho_1+l_1-l_2,0} \delta_{\rho_2-l_1+l_2,0}.$$

Integrando sobre o momento q_2 , com o uso do delta $\delta^{D-d}(p_1 + q_1 - q_2)$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_G^D(P) = & \frac{F(G)}{\text{Vol}} \sum_{\{n_j^{(i)}\}_{j=1}^{\infty}} \int \frac{d^{D-d}q_1}{(2\pi)^{D-d}} \frac{1}{q_1^2 + l_1^2 + M_1^2} \frac{1}{(p_1 + q_1)^2 + l_2^2 + M_2^2} (2\pi)^{D-d} \times \\ & \text{Vol} \delta^{D-d}(p_2 - q_1 + p_1 + q_1) \delta_{\rho_1+l_1-l_2,0} \delta_{\rho_2-l_1+l_2,0}. \end{aligned} \quad (443)$$

O mesmo processo pode ser feito para a soma em l_2 (lembrando que l_2 fundamentalmente está relacionado com n_2). Ao somar sobre os n_2 com o uso da delta $\delta_{\rho_1+l_1-l_2,0}$, que implica que $l_2 = \rho_1 + l_1$, tem-se a relação a seguir:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_G^D(P) = & \frac{F(G)}{\text{Vol}} \sum_{\{n_j^{(i)}\}_{j=1}^{\infty}} \int \frac{d^{D-d}q_1}{(2\pi)^{D-d}} \frac{1}{q_1^2 + l_1^2 + M_1^2} \frac{1}{(p_1 + q_1)^2 + (\rho_1 + l_1)^2 + M_2^2} \times \\ & (2\pi)^{D-d} \delta^{D-d}(p_2 + p_1) \text{Vol} \delta_{\rho_2-l_1+\rho_1+l_1,0}. \end{aligned} \quad (444)$$

O termo $\delta^{D-d}(p_2 + p_1) \text{Vol} \delta_{\rho_2+\rho_1,0}$ representa a conservação de momento externo, uma vez que delta de Dirac trata das partes não compactadas e a de Kronecker trata das partes compactadas. A necessidade de termos que insiram o Vol com o delta Kronecker na conservação dos momentos externos é simples de ver, basta reescrever a delta de Kronecker como uma delta de Dirac (além do óbvio fato de manter a dimensionalidade do espaço). Logo,

$$\text{Vol} \delta_{\rho_2-l_1+\rho_1+l_1,0} \rightarrow (2\pi)^d \delta^d(\rho_2 + \rho_1). \quad (445)$$

Assim basta usar a relação obtida na equação (445), na equação a seguir:

$$\tilde{I}_G^D(P) = I_G^D(P) (2\pi)^{D-d} \delta^{D-d}(p_1 + p_2) \text{Vol} \delta_{\rho_2-l_1+\rho_1+l_1,0} \quad (446)$$

e, usar a propriedade da função delta de Dirac para remontar a delta de conservação de momento externo. Então,

$$\delta^{D-d}(p_1 + p_2) \delta^d(\rho_2 + \rho_1) = \delta^D(P_1 + P_2). \quad (447)$$

Aplicando este resultado para obter o $I_G^D(P)$, temos:

$$I_G^D(P) = \frac{F(G)}{\text{Vol}} \sum_{\{n_j^{(1)}\}=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{D-d}q_1}{(2\pi)^{D-d}} \frac{1}{q_1^2 + l_1^2 + M_1^2} \frac{1}{(p_1 + q_1)^2 + (\rho_1 + l_1)^2 + M_2^2}. \quad (448)$$

Redefinindo, como de costume, as contribuições dos momentos provenientes das dimensões compactadas, fazemos:

$$(\rho_1 + l_1)^2 + M_2^2 = \overline{M}_2^2, \quad (449)$$

$$l_1^2 + M_1^2 = \overline{M}_1^2, \quad (450)$$

e ainda renomeia-se

$$D - d = N. \quad (451)$$

A amplitude $I_G^D(P)$ fica representada da seguinte forma:

$$I_G^D(P) = \frac{F(G)}{\text{Vol}} \sum_{\{n_j^{(1)}\}=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^N q_1}{(2\pi)^N} \frac{1}{q_1^2 + \overline{M}_1^2} \frac{1}{(p_1 + q_1)^2 + \overline{M}_2^2}. \quad (452)$$

Claramente podemos proceder, usualmente, com os cálculos nas dimensões não compactadas, uma vez que toda a contribuição das dimensões compactadas foram redefinidas nas massas da teoria. Com isso, escrevendo a amplitude $I_G^D(P)$ como uma soma $I_G^N(P)$, temos:

$$I_G^D(P) = \frac{1}{\text{Vol}^2} \sum_{\{n_j^{(1)}\}=-\infty}^{\infty} I_G^N(P), \quad (453)$$

com

$$I_G^N(P) = F(G) \int \frac{d^N q_1}{(2\pi)^N} \frac{1}{q_1^2 + \overline{M}_1^2} \frac{1}{(p_1 + q_1)^2 + \overline{M}_2^2}. \quad (454)$$

Esquemáticamente pode-se ver que, uma vez que o objetivo é o cálculo de um diagrama com d dimensões compactadas, basta calcular o mesmo diagrama que seria calculado em D -dimensões e redefinir as massas com os momentos compactados. Devemos seguir, contudo, a mesma regra de conservação dos momentos aplicada as dimensões não compactadas e posteriormente aplicar as somas. Isso pode ser reforçado uma vez que a equação (454) é exatamente a equação descrita em (431). Fazendo as devidas interpretações, pode-se estabelecer que:

$$D \rightarrow N = D - d, \quad (455)$$

$$M_1^2 \rightarrow \overline{M}_1^2 = l_1^2 + M_1^2, \quad (456)$$

$$M_2^2 \rightarrow \overline{M}_2^2 = (\rho_1 + l_1)^2 + M_2^2. \quad (457)$$

Uma vez feito este processo, há de se resolver o problema como se este não tivesse dimensões compactadas e, por último, dividí-lo pelo fator Vol , que representa o produto dos tamanhos L_i do espaço compactado, para cada propagador. Um fato que deve ser explicitado é que a tentativa de aplicar a prescrição descrita em (276)

$$\frac{dl_j^{(i)}}{2\pi} \rightarrow \frac{1}{L_j} \sum_{\{n_j^{(i)}\}=-\infty}^{\infty}, \quad (458)$$

diretamente na equação (431), por exemplo, pode nos levar a um resultado diferente do encontrado na equação (454), se contudo, não tivessemos tomado todos os cuidados com os termos presentes nas conservações de momento. Deste modo, podemos notar que uma vez efetuado com bastante cautela a escolha do ponto onde há a inserção das dimensões compactadas, antes ou depois das integrações triviais de momento, o resultado final não se alterará. Não que este resultado não fosse de fato esperado, sim ele era, mas agora fica explícito que de fato isto irá ocorrer.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, tínhamos como objetivo geral investigar os efeitos da compactação dimensional nas teorias de campo. Para isso, foram escolhidos três pontos de análise distintos, a convergência e a criticalidade da teoria. Com relação a criticalidade da teoria, a um loop, não existe nenhum indício de alteração nos expoentes críticos. Apesar disso, o ideal seria investigar a teoria em ordens superiores na teoria de perturbação, uma vez que em primeira ordem existe um cancelamento algébrico do termo que poderia gerar alguma diferença na criticalidade da teoria, ou ainda investigar a definição dos expoentes críticos para ter certeza que não existe nenhuma modificação na forma como se calcula os expoentes críticos. O outro aspecto da teoria aqui investigado é justamente a questão da convergência, não só das funções zeta, mas também das integrais sobre as dimensões não compactadas. Sobre as séries que definem a função zeta, temos somas convergentes, exceto em eventuais polos de funções gama relacionados a dimensão do espaço. Com relação à convergência das integrais, se confrontado com o teorema de Weinberg, apresentam uma redução no grau superficial de divergência, ou seja, a compactação dimensional auxilia na convergência dos diagramas de Feynman. E por fim, estudamos como a inserção das dimensões compactadas afeta os propagadores e as integrais de teorias bosônicas e fermiônicas em qualquer ordem da teoria de perturbação. Isso terminou gerando uma prescrição de como transformar uma teoria sem compactação em uma teoria com compactação dimensional. A grande utilidade disto é justamente poder utilizar os resultados das teorias sem compactação já presentes nas literaturas sabendo exatamente onde e o que modificar.

REFERÊNCIAS

- ABREU, L. M. *et al.* Magnetic effects on spontaneous symmetry breaking/restoration in a toroidal topology. *Physical Review D*, [S.l.], v. 88, n. 10, 2013.
- AMIT, D. J. *Field theory, the renormalization group, and critical phenomena 2^a ed.* [S.l.]: World Scientific, 1984.
- BELLAC, M. L. *Thermal field theory.* [S.l.]: Cambridge University Press, 1996.
- BOWMAN, F. *Introduction to Bessel Functions.* [S.l.]: Dover Publ. Inc., 1958.
- CALZA, T. C. A. *Modelo de Ginzburg-Landau a partir da teoria de campos a temperatura finita.* 56 f. 2015. Dissertação (Mestrado em Física) — Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.
- CARDOSO, F. L. *et al.* Compatibility between the ginzburg–landau model and finite-temperature quantum field theory. *Modern Physics Letters A*, [S.l.], v. 31, n. 40, p. 1650227, Nov 2016.
- DAS, A. *Finite temperature field theory.* [S.l.]: World Scientific, 1997.
- ELIZALDE, A. *et al.* *Zeta Regularization Techniques with Applications.* [S.l.]: World Scientific Publishing, 1994. 319 p.
- ELIZALDE, E. *Ten physical applications of spectral zeta functions.* [S.l.]: Springer, 1995.
- EZAWA, H.; TOMOZAWA, Y.; UMEZAWA, H. Quantum statistics of fields and multiple production of mesons. *Il Nuovo Cimento*, [S.l.], v. 5, n. 4, p. 810–841, 1957.
- ITZYKSON, C.; ZUBER, J. B. *Quantum field theory.* [S.l.]: Dover Publications, 2006. 705 p.
- KAPUSTA, J. I.; GALE, C. *Finite-temperature field theory: principles and applications.* [S.l.]: Cambridge University Press, 2013.
- KHANNA, F. C. *Thermal quantum field theory: algebraic aspects and applications.* [S.l.]: World Scientific, 2009.
- KHANNA, F. C. *et al.* Quantum fields in toroidal topology. *Annals of Physics*, [S.l.], v. 326, n. 10, p. 2634–2657, 2011.
- KHANNA, F. C.; MALBOUISSON, A. P. C.; SANTANA, A. E. Quantum field theory on toroidal topology: Algebraic structure and applications. *Physics Reports*, [S.l.], v. 539, n. 3, p. 135–224, 2014.
- KIRSTEN, K. Spectral functions in mathematics and physics. *Journ.Math.Phys*, [S.l.], v. 35, p. 459, 1994.
- LINHARES, A. C. *et al.* Spontaneous symmetry restoration in a field theory at finite chemical potential in a toroidal topology. *Physical Review D*, [S.l.], v. 86, n. 10, 2012.

- LINHARES, C. A.; MALBOUISSON, A. P. C.; RODITI, I. Asymptotic expansions of feynman amplitudes in a generic covariant gauge. *International Journal of Modern Physics A*, [S.l.], v. 23, n. 07, p. 1089–1103, 2008.
- MALBOUISSON, A. P. C.; MALBOUISSON, J. M. C.; SANTANA, A. E. Spontaneous symmetry breaking in compactified $\lambda\phi^4$ theory. *Nuclear Physics B*, [S.l.], v. 631, n. 1-2, p. 83–94, 2002.
- MATSUBARA, T. A new approach to quantum-statistical mechanics. *Progress of Theoretical Physics*, [S.l.], v. 14, n. 4, p. 351–378, 1955.
- OLVER, F. W. J. *NIST handbook of mathematical functions*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010.
- PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. *An introduction to quantum field theory*. [S.l.]: Westview Press Inc, 1995.
- SALINAS, S. R. A. *Introdução à Física Estatística*. São Paulo: EDUSP, 2005.
- WATSON, G. N. *A treatise on the theory of Bessel functions*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011.
- WEINBERG, S. High-energy behavior in quantum field theory. *Physical Review*, [S.l.], v. 118, n. 3, p. 838–849, Jan 1960.

APÊNDICE A – Identidade da função teta de Jacobi

Na seção 1.3 foi apresentada uma identidade sem sua demonstração. A opção de fazer a demonstração neste apêndice vem do fato de que mesmo a identidade sendo bem conhecida na literatura, existem poucos lugares onde essa identidade é demonstrada. Para iniciar a demonstração tomaremos a fórmula de soma de Poisson, que relaciona a soma de uma função periódica com a soma de sua transformada de Fourier.

$$\sum_n F(n) = \sum_n \hat{F}(n), \quad (459)$$

onde $\hat{F}(\omega)$ é a transformada de Fourier definida por:

$$\hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i\omega x} F(x). \quad (460)$$

Como queremos usar a formula de Poisson na função teta, podemos usar:

$$F(x) = e^{-yx^2}, \quad (461)$$

com y sendo constante, desta forma a transformada de Fourier é dada por:

$$\hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i\omega x} e^{-yx^2}. \quad (462)$$

Para calcular a integral, basta completar o quadrado e tem-se uma integral gaussiana, da forma:

$$\hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{y\left[\left(x - \frac{i\omega}{2y}\right)^2 - \left(\frac{i\omega}{2y}\right)^2\right]}, \quad (463)$$

que facilmente resulta em:

$$\hat{F}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4y}} \sqrt{\frac{\pi}{y}}. \quad (464)$$

Como sabemos,

$$\omega = 2\pi\nu, \quad (465)$$

e com isso

$$\hat{F}(\nu) = e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{y}} \sqrt{\frac{\pi}{y}}. \quad (466)$$

substituindo na fórmula de soma de Poisson (459), obtemos:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-yn^2} = \sqrt{\frac{\pi}{y}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{y}}. \quad (467)$$

Isto é similar a identidade usada na seção 1.3, onde a generalização segue exatamente os mesmos passos. Tomando a função

$$F(x) = e^{-yx^2 + i2\pi zx}, \quad (468)$$

que tem sua transformada de fourier descrita como:

$$\hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i\omega x} e^{-yx^2 + i2\pi zx}. \quad (469)$$

Que pode ser vista como:

$$\hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(\omega + 2\pi z)x} e^{-yx^2}, \quad (470)$$

ou seja, apenas um deslocamento em ω . Deste modo:

$$\hat{F}(\omega - 2\pi z) = e^{-\frac{\omega^2}{4y}} \sqrt{\frac{\pi}{y}}, \quad (471)$$

ou ainda,

$$\hat{F}(\omega) = e^{-\frac{(\omega+2\pi z)^2}{4y}} \sqrt{\frac{\pi}{y}} \quad (472)$$

e por fim, substituindo $\omega = 2\pi\nu$ na relação, obtemos:

$$\hat{F}(\nu) = e^{-\frac{\pi^2(\nu+z)^2}{y}} \sqrt{\frac{\pi}{y}}. \quad (473)$$

Novamente usando a fórmula de soma de Poisson, temos:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\gamma n^2 + i2\pi z n} = \sqrt{\frac{\pi}{y}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2(n+z)^2}{y}}. \quad (474)$$

APÊNDICE B – Relações matemáticas importantes

Muitas relações matemáticas foram usadas neste texto, algumas com ampla explicação e outras serão exploradas neste apêndice.

Parâmetros de Schwinger

Os parâmetros de Schwinger têm grande uso ao longo do texto. Por isso, será detalhado o funcionamento destes parâmetros. Pode-se tomar como exemplo a transformada de Laplace $\mathcal{L}\{1\}$, da forma:

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} = \int_0^{\infty} dt e^{-st}. \quad (475)$$

Deste modo, qualquer denominador pode ser escrito como uma integral de um parâmetro α , conforme descrito abaixo:

$$\frac{1}{D} = \int_0^{\infty} d\alpha e^{-D\alpha}. \quad (476)$$

Isso se torna muito útil quando a fração é na realidade um propagador que deve ser integrado, pois caso esta fração seja um propagador, D será uma função quadrada do momento a ser integrado e a integral sobre os momentos será uma série de integrais gaussianas. Por exemplo:

$$I(m^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + m^2)^2}. \quad (477)$$

Podemos então dizer que o primeiro propagador pode ser escrito como uma integral de um parâmetro α_1 , da forma:

$$\frac{1}{k^2 + m^2} = \int_0^{\infty} d\alpha_1 e^{-(k^2+m^2)\alpha_1} \quad (478)$$

e o segundo propagador em termos de uma integral em um parâmetro α_2 , do tipo:

$$\frac{1}{k^2 + m^2} = \int_0^{\infty} d\alpha_2 e^{-(k^2+m^2)\alpha_2}, \quad (479)$$

com isso a aptitude $I(m^2)$ fica da seguinte forma:

$$I(m^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 e^{-(k^2+m^2)\alpha_1} e^{-(k^2+m^2)\alpha_2}. \quad (480)$$

Trocando a ordem das integrais e agrupando o expoente das exponenciais, temos:

$$I(m^2) = \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-(k^2+m^2)(\alpha_1+\alpha_2)}. \quad (481)$$

Deste modo, podemos ver que a integral sobre os momentos fica uma integral do tipo gaussiana.

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-k^2(\alpha_1+\alpha_2)} = \prod_{i=0}^3 \int \frac{dk_i}{(2\pi)} e^{-k_i^2(\alpha_1+\alpha_2)} \quad (482)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \prod_{i=0}^3 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_1 + \alpha_2}} \quad (483)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)^2. \quad (484)$$

Assim, troca-se uma integral nos momentos k por integrais nos parâmetros α (que são os parâmetros de Schwinger).

$$I(m^2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \left(\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)^2 e^{-m^2(\alpha_1+\alpha_2)}. \quad (485)$$

Equivalência entre os parâmetros de Schwinger e Feynman

Os parâmetros de Feynman são outros tipos de parâmetro bastante usados na literatura de teoria quântica de campos. Embora os parâmetros de Feynman não sejam propriamente usados neste trabalho, em geral, depois de calcular as integrais sobre os momentos é bastante útil trocar a integral sobre os parâmetros Schwinger por uma integral que se encontraria caso a escolha fosse os parâmetros de Feynman. Para isso, basta inserir uma relação de completeza como a descrita a seguir:

$$1 = \int_0^\infty d\lambda \delta\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i - \lambda\right), \quad (486)$$

onde n é o número de parâmetros de Schwinger. Uma vez esta relação de completude inserida na integral, basta fazer:

$$\alpha_i \rightarrow \lambda \alpha_i \quad (487)$$

e integrar sobre um dos parâmetros usando a delta de Dirac. Podemos tomar como exemplo a equação (485).

$$I(m^2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \left(\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)^2 e^{-m^2(\alpha_1 + \alpha_2)} \underbrace{\int_0^\infty d\lambda \delta\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i - \lambda \right)}_1, \quad (488)$$

deste modo, trocando a ordem das integrais. temos:

$$I(m^2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \left(\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)^2 e^{-m^2(\alpha_1 + \alpha_2)} \delta\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i - \lambda \right) \quad (489)$$

e agora fazendo

$$\alpha_1 \rightarrow \lambda \alpha_1 \quad (490)$$

e

$$\alpha_2 \rightarrow \lambda \alpha_2, \quad (491)$$

obtemos:

$$I(m^2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \left(\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)^2 e^{-m^2\lambda(\alpha_1 + \alpha_2)} \delta\left(\lambda \left(\sum_{i=1}^2 \alpha_i - 1 \right) \right). \quad (492)$$

A delta faz com que a soma de todos os parâmetros de Schwinger sejam iguais a 1. Desta forma, integrando sobre α_2 , tem-se:

$$I(m^2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty d\lambda \int_0^1 d\alpha_1 \lambda^{-1} e^{-m^2 \lambda}. \quad (493)$$

A integral sobre o parâmetro α_1 tem seu limite de integração mudado, pois a integral de qualquer valor de α_1 para valores maiores que 1 será zero devido a delta. Desta forma a integral $I(m^2)$ pode ser facilmente resolvida como:

$$I(m^2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty d\lambda \lambda^{-1} e^{-m^2 \lambda} = \frac{\Gamma(0)}{4\pi^2}. \quad (494)$$

Que é o resultado esperado se o cálculo fosse feito via regularização dimensional. Se repetirmos o processo com as dimensões em aberto, temos:

$$I(m^2) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^4} \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 e^{-(k^2+m^2)\alpha_1} e^{-(k^2+m^2)\alpha_2}. \quad (495)$$

Repetindo o que foi feito na equação (482), tem-se:

$$I(m^2) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \left(\frac{\pi}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)^{\frac{D}{2}} e^{-m^2(\alpha_1 + \alpha_2)}. \quad (496)$$

Repetindo os passos feitos para chegar em (492), obtém-se:

$$I(m^2) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \int_0^\infty d\lambda \lambda^{1-\frac{D}{2}} \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \left(\frac{\pi}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)^{\frac{D}{2}} e^{-m^2 \lambda (\alpha_1 + \alpha_2)} \delta \left(\sum_{i=1}^2 \alpha_i - 1 \right), \quad (497)$$

que claramente irá resultar em:

$$I(m^2) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \int_0^\infty d\lambda \lambda^{1-\frac{D}{2}} e^{-m^2 \lambda} = \frac{(m^2)^{2-\frac{D}{2}}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma \left(2 - \frac{D}{2} \right). \quad (498)$$

Este é o resultado esperado caso a regularização dimensional fosse usada logo no princípio. Um outro exemplo, é justamente uma integral bem recorrente neste trabalho, da forma:

$$I(p) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2} \frac{1}{(k+p)^2}. \quad (499)$$

Fazendo:

$$\frac{1}{k^2} = \int_0^\infty d\alpha_1 e^{-k^2 \alpha_1} \quad (500)$$

e

$$\frac{1}{(k+p)^2} = \int_0^\infty d\alpha_2 e^{-\alpha_2 (k+p)^2} \quad (501)$$

teremos a integral a seguir:

$$I(p) = \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-k^2 \alpha_1 - \alpha_2 (k+p)^2}. \quad (502)$$

Rearrmando o exponte da exponencial, completando quadrado, temos:

$$I(p) = \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-(\alpha_1 + \alpha_2) \left[\left(k + \frac{p\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)^2 - \left(\frac{p\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)^2 + \frac{\alpha_2 p^2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right]}. \quad (503)$$

Com um simples deslocamento $k + \frac{p\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \rightarrow k$, teremos uma integral gaussiana, do tipo:

$$I(p) = \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 e^{\left(\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1 + \alpha_2} - \alpha_2 \right) p^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-(\alpha_1 + \alpha_2) k^2} \quad (504)$$

e com isso, obtém-se:

$$I(p) = \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 e^{-\left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right) p^2} \frac{1}{(2\pi)^D} \left(\frac{\pi}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)^{D/2}. \quad (505)$$

Inserindo a completeza, reescalando os α , temos:

$$I(p) = \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \int_0^\infty d\lambda \lambda^{1-D/2} e^{-\lambda \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right) p^2} \frac{\delta(\alpha_1 + \alpha_2 - 1)}{(4\pi)^{D/2} (\alpha_1 + \alpha_2)^{D/2}}. \quad (506)$$

Integrando em α_2 , obtemos:

$$I(p) = \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^\infty d\lambda \lambda^{1-D/2} e^{-\lambda(\alpha_1(1-\alpha_1))p^2} \frac{1}{(4\pi)^{D/2}}. \quad (507)$$

Integrando agora em λ , teremos como resultado uma função gama do tipo:

$$I(p) = \frac{\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right)}{(4\pi)^{D/2}} (p^2)^{2-\frac{D}{2}} \int_0^1 d\alpha_1 (\alpha_1(1-\alpha_1))^{2-\frac{D}{2}}. \quad (508)$$

A integral resultante no parâmetro α_1 é a conhecida função beta de Euler:

$$B(x,y) = \int_0^1 d\alpha_1 (\alpha_1^{x-1} (1-\alpha_1)^{y-1}) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (509)$$

Porém, como estamos em $D = 4$ e mantendo a dimensão em aberto apenas para mapear as divergências, a beta de Euler em questão é:

$$\int_0^1 d\alpha_1 (\alpha_1(1-\alpha_1))^{2-\frac{D}{2}} \Big|_{D \rightarrow 4} = 1. \quad (510)$$

Com isso, temos o mesmo resultado apresentando na equação (498) apenas trocando m^2 por p^2 .