

**TRÊS EXCURSÕES
PELA
HISTÓRIA DA MATEMÁTICA**

Carvalho, João Bosco Pitombeira.

Três excursões pela História da Matemática. Rio de Janeiro: Intermat, 2008.

106p.:il; 23 × 16 cm

1. Matemática - História

CDD 510.9

**TRÊS EXCURSÕES
PELA
HISTÓRIA DA MATEMÁTICA**

João Bosco Pitombeira de Carvalho

Primeira Edição

Rio de Janeiro

INTERMAT
2008

Para a Nina e o Nico,
com a esperança de que algum dia
possam ler com prazer este trabalho

Prefácio

Este livro reúne três mini-cursos preparados originalmente para as Bienais da Sociedade Brasileira de Matemática, em Salvador e Goiânia, respectivamente em 2004 e 2006. Foi feita uma revisão completa dos textos, com a correção dos erros de impressão, e eliminadas repetições entre os capítulos, provenientes do fato de estarmos lidando com textos inicialmente independentes e auto-suficientes. Além disso, foram feitas modificações provenientes de sugestões dos alunos dos mini-cursos.

O primeiro capítulo trata da *equivalência e aplicação de áreas* na Matemática grega, e tenta resgatar esses tópicos da Geometria grega antiga. A interpretação de que eles são a tradução, em linguagem geométrica, dos métodos dos babilônios para resolver equações do 2º grau, é anacrônica, e esquece a centralidade dessas técnicas na Geometria grega. Apolônio, em seu *As cônicas*, as utiliza de maneira essencial, para a própria definição das seções cônicas. Como dissemos, este capítulo foi planejado, inicialmente, para um mini-curso para professores do Ensino Médio, com o aplicativo de geometria dinâmica "Tabulae". Aqui, deixamos este aspecto de lado. Os leitores interessados podem se dirigir ao autor, a fim de discutir como criar, com um aplicativo de geometria dinâmica, essas construções. A construção mais elaborada, que exige paciência, é a da quadratriz.

O segundo capítulo trata de um tópico que tem encantado gerações de matemáticos profissionais ou amadores. Estamos falando dos problemas da *duplicação do cubo*, *quadratura do círculo* e *trisseção do ângulo*. Estes problemas moldaram muito das atividades de pesquisa matemática dos gregos, e deram origem, inclusive, ao estudo das cônicas. É vastíssima a produção matemática dedicada a eles, provenientes de erros, por vezes sutis, sobre as exigências feitas para a solução dos problemas. Somente no século XIX é que foi demonstrado que eles não podem ser resolvidos somente com régua (não graduada) e compasso, o que não impede o aparecimento, até hoje, de "provas" de que é possível efetuar as três construções. Essas tentativas não devem ser olhadas com desprezo, mas sim como testemunho de interesse pela Matemática em vários setores na sociedade.

O terceiro capítulo descreve, com muitas omissões, a história da resolução da equação do 2º grau. Trata-se de uma história que mostra como a Matemática se desenvolveu em várias culturas, desde milhares de anos, e também como, mesmo bem mais recentemente, matemáticos importantes não se furtaram a apresentar novos métodos de solução para a equação do 2º grau. É interessante observar a permanência de certos problemas "aplicados", cuja única justificativa real é disfarçar a apresentação de equações do 2º grau. Em verdade, qual a "contextualização" real de problemas envolvendo macacos que

podem ou não ser vistos? Temos aí uma situação análoga à de certas "contextualizações" ou aplicações encontradas hoje em dia em livros didáticos para o Ensino Básico.

Por que o professor deveria se interessar pelos tópicos expostos neste livro? Em primeiro lugar, a Matemática não é um simples conjunto de técnicas e fórmulas. Ela tem uma longa história, faz parte da cultura das sociedades. Assim, o professor, mediador entre os alunos e toda a tradição científica e cultural da humanidade, deveria ter noções desses assuntos, que foram fonte de trabalhos originais, criativos e importantes durante milênios. Em segundo lugar, o material dos dois primeiros capítulos se presta sobretudo à integração da Matemática com o desenho geométrico, e permite que a Geometria ensinada nas escolas fuja à apresentação comum hoje, de ser somente um conjunto de fórmulas para cálculo de áreas e volumes. A história da equação do 2º grau, por sua vez, liberta esse tópico da camisa de força da "fórmula de Báskara". Todos os capítulos podem dar origem a projetos para feiras de ciências, atividades em grupo e projetos.

Outra utilidade deste livro pode ser em cursos de História da Matemática ministrados nos bacharelados ou licenciaturas. Frequentemente, os professores dos departamentos ou institutos escolhidos para ministrar esta disciplina não têm familiaridade com a bibliografia do assunto nem tempo para pesquisá-la, a fim de organizar seu próprio curso. Encontrarão neste livro três tópicos interessantes, que envolvem bastante Matemática, em língua portuguesa e que poderão ser lidos pelos alunos, os quais em geral não lêem outras línguas. Este livro pode ser usado juntamente com o excelente livro de Aaboe, *Episódios da História antiga da Matemática*, publicado, em português, pela Sociedade Brasileira de Matemática. Ambos permitem que o aluno tenha contacto direto com Matemática feita em outras épocas e civilizações, evidentemente com adaptações para tornar a leitura acessível a quem não tem o hábito ou condições de ler os originais ou as edições eruditas comentadas. Evidentemente, não temos a pretensão de ter feito uma obra capaz de concorrer, em qualidade e na escolha dos tópicos, com o livro de Aaboe.

Cabe um pedido de desculpas e, ao mesmo tempo, uma explicação: os leitores notarão por certo a predominância de referências bibliográficas em línguas estrangeiras. Isso se deve ao pouco número de fontes em português sobre o assunto. Embora progressos estejam sendo feitos no sentido de tornar disponíveis, em nossa língua, textos importantes sobre os tópicos cobertos neste livro, até hoje a maior parte dos trabalhos sobre o assunto estão escritos em outras línguas. Em verdade, a motivação para a redação deste material foi tornar disponível, exposições introdutórias sobre os tópicos aqui tratados. Recomendamos a leitura dos textos dos excelentes mini-cursos ministrados nos Seminários Nacionais de História da Matemática, promovidos pela Sociedade Brasileira de História da Matemática.

Em nossa exposição, o livro *Science Awakening*, de van der Waerden, é simplesmente citado como van der Waerden. A edição padrão, facilmente disponível, dos *Elementos* de Euclides é a de Heath (1956). Para os leitores que não têm acesso a esta edição, recomendamos a tradução da edição de Simson (1773) para o português, perfeitamente suficiente para nossas finalidades.¹

Usaremos, por exemplo, II.6, para designar a proposição 6, do Livro II, dos *Ele-*

¹Ela se encontra disponível gratuitamente em www.dominiopublico.gov.br.

mentos de Euclides. Teoremas, figuras, equações ou igualdades são numeradas sequencialmente, em cada capítulo. Assim, por exemplo, Figura 3.9 é a figura de número 9, no capítulo 3. O símbolo \square indica o fim de uma demonstração ou construção.

Com exceção das Figuras 2.8, 2.11 e 2.15, todas as ilustrações deste livro foram feitas com o aplicativo de Geometria dinâmica TABULAE.

Embora o autor tenha procurado corrigir todos os erros tipográficos ou matemáticos do texto, certamente alguns lhe escaparam. Como disse Monteiro Lobato, os erros tipográficos são como sacis. Quando os procuramos, eles se escondem. Uma vez publicado o texto, eles saltam alegres chamando a atenção dos leitores. O autor fica muito grato por indicações de erros remanescentes (matemáticos ou tipográficos), que podem ser encaminhadas para pitfercar@yahoo.com.br.

Desejo expressar meus agradecimentos a Bruno Alves Dassie pelo encorajamento para publicar este livro e pelas revisões e sugestões que fez durante a preparação do manuscrito para publicação.

João Bosco Pitombeira de Carvalho

Sumário

1	EQUIVALÊNCIA E APLICAÇÃO DE ÁREAS	5
1.1	Introdução	5
1.2	Grandezas incomensuráveis	6
1.3	Equivalência de áreas nos <i>Elementos</i>	11
1.3.1	Equivalência de áreas	11
1.3.2	Aplicação de áreas	15
1.3.3	Aplicação de áreas com falta e com excesso	21
1.3.4	O Livro VI dos Elementos e o caso geral de aplicação de áreas	24
2	OS TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS	31
2.1	A duplicação do cubo	35
2.1.1	A máquina de Platão	36
2.1.2	A máquina de Eratóstenes	37
2.1.3	A solução de Nicomedes	40
2.1.4	A Construção de Árquitas	43
2.1.5	A solução achada por Menécmo	45
2.1.6	O método de Diocles	46
2.1.7	O método de Hierão	47
2.2	A quadratura do círculo	49
2.2.1	A quadratriz	49
2.3	A trissecção do ângulo	50
2.3.1	A trissecção do ângulo por Arquimedes	51
2.3.2	A trissecção do ângulo por Nicomedes	51
2.3.3	A trissecção do ângulo usando a quadratriz	53
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	55

Lista de Figuras

1.1	Os segmentos CD e EF são comensuráveis	8
1.2	<i>Elementos</i> I.47 – Demonstração por semelhança de triângulos	9
1.3	<i>Elementos</i> I.47 – O teorema de Pitágoras	10
1.4	<i>Elementos</i> I.35 – primeiro caso	12
1.5	<i>Elementos</i> I.35 – segundo caso	12
1.6	<i>Elementos</i> I.35 – terceiro caso	13
1.7	<i>Elementos</i> I.36	13
1.8	<i>Elementos</i> I.43	14
1.9	Demonstração alternativa de I.43	15
1.10	Aplicação de áreas	15
1.11	<i>Elementos</i> I.42	16
1.12	<i>Elementos</i> I.44	17
1.13	<i>Elementos</i> I.45	18
1.14	<i>Elementos</i> II.5	19
1.15	<i>Elementos</i> II.6	20
1.16	<i>Elementos</i> II.14	20
1.17	Aplicação de áreas elíptica ou com falta	21
1.18	Aplicação de áreas hiperbólica ou com excesso	22
1.19	O problema de aplicação de áreas elíptica ou com falta	23
1.20	Resolução do problema de aplicação de áreas elíptica	23
1.21	O problema de aplicação de áreas hiperbólica	23
1.22	Resolução do problema de aplicação de áreas hiperbólica	24
1.23	<i>Elementos</i> VI.25	25
1.24	<i>Elementos</i> VI.27	26
1.25	<i>Elementos</i> VI.28	27
1.26	<i>Elementos</i> VI.29	28
2.1	Duplicação do quadrado	33
2.2	A máquina de Platão	37
2.3	Meia proporcional entre $ON = a$ e $OM = b$	37
2.4	A máquina de Eratóstenes	38
2.5	Meias proporcionais entre $AE = a$ e $DT = b$	38
2.6	Meias proporcionais entre $a = BC$ e $b = AB$	40

2.7	Duplicação do cubo por Árqitas	44
2.8	Duplicação do cubo por Menécmo	45
2.9	Duplicação do cubo usando a cissóide	46
2.10	Método de Hierão para achar meias proporcionais	48
2.11	Duplicação do cubo com a quadratriz	49
2.12	Trissecção do ângulo por Arquimedes	51
2.13	Trissecção do ângulo por Nicomedes	52
2.14	Conchóide de Nicomedes	52
2.15	Trissecção do ângulo com a quadratriz	53

Capítulo 1

EQUIVALÊNCIA E APLICAÇÃO DE ÁREAS NA MATEMÁTICA GREGA

Estas coisas, diz Eudemo, são antigas e foram descobertas pelos pitagóricos, ou seja, a aplicação de áreas, seu excesso ou sua falta. Foi dos pitagóricos que geômetras posteriores adotaram estes nomes que eles empregaram nas cônicas, chamando uma delas de parábola (aplicação) outra de hipérbole (com excesso) e outra de elipse (com falta), enquanto os pitagóricos usavam estas idéias na construção, no plano, de áreas sobre um segmento de reta. (Proclus, *Comentário sobre o Livro I de Euclides*, tradução de Heath (1956, vol I, p. 343)

1.1 Introdução

O que faria você para "medir" uma figura plana, sem dispor dos números reais, que nos permitem, por exemplo, afirmar que a área de um retângulo é sempre igual ao produto do comprimento da base pelo comprimento de sua altura?

Para os matemáticos gregos, a falta dos números reais, mais precisamente dos números irracionais, impunha sérias limitações. Fixada uma unidade de comprimento, sempre haveria segmentos que não poderiam ser "medidos" exatamente com aquela unidade.

Se nos limitarmos ao que está exposto nos *Elementos* de Euclides, há uma complicação adicional: todas as construções devem ser efetuadas somente com régua e compasso (ideais, não exemplos concretos desses instrumentos). As razões para essa exigência são muito discutidas, e parecem estar relacionadas com a descoberta de que existem grandezas incomensuráveis.

Neste trabalho, veremos, inicialmente, como Euclides, nos *Elementos*, consegue resolver completamente o problema de fazer a quadratura, "quadrar", qualquer figura poligonal, usando somente transformações de áreas. Isto é, dado um polígono qualquer, construir somente com a régua e o compasso, um quadrado com a mesma área.

Em seguida, estudaremos o problema de aplicação de áreas, uma técnica característica da matemática grega, e que posteriormente, de maneira anacrônica, serviu de apoio à tese de que parte da Geometria grega é uma tradução, em termos geométricos, da solução "algébrica" de equações do 2º grau, já feita pelos babilônios, ponto de vista defendido por Tannery, Zeuthen e van der Waerden, e fortemente contestado, recentemente, por Unguru (1981, 1982), entre outros.

1.2 A Matemática grega, grandezas incomensuráveis e a equivalência de áreas

A Geometria, desde seus primórdios, se preocupou com medições; segundo Heródoto,¹ a Geometria teria nascido no Egito, porque, após cada enchente do Nilo, era necessário demarcar novamente as terras. Demarcá-las para quê? Certamente para evitar disputas de propriedades entre vizinhos, e, mais importante, também para calcular impostos devidos. E para isso é necessário calcular áreas de terrenos. De fato, no papiro Rhind, o mais antigo documento escrito matemático que conhecemos, datado aproximadamente de 1700 a.C., mas copiado de um original mais antigo, escrito entre 2000 e 1800 a.C., encontram-se problemas de cálculo de áreas, e mesmo de volumes. Algumas das fórmulas usadas são corretas, outras dão resultados aproximados. Por exemplo, a área de um quadrilátero era calculada multiplicando a média dos comprimentos de dois lados opostos pela média dos comprimentos dos outros dois lados, adjacentes, o que funciona bem se o paralelogramo for "quase" um retângulo.²

Encontram-se também, entre os habitantes da Mesopotâmia, problemas práticos de Geometria, envolvendo o cálculo de áreas.

Na Grécia, certamente se usava geometria prática, para calcular áreas e volumes, em arquitetura e agrimensura, entre outros. No entanto, por várias razões que não serão aprofundadas aqui, ao lado dessa geometria de caráter essencialmente utilitário, desenvolveu-se, a partir de aproximadamente 600 a.C., o pensamento geométrico especulativo, sem preocupação com aplicações imediatas. Diz-se que Tales (aprox. 640 - 547 a.C.), usou semelhança de triângulos para calcular a distância de um navio à terra. Afirma-se também que ele calculou a altura da grande pirâmide do Egito, quando visitou aquela região, usando mais uma vez semelhança de triângulos. Aos poucos, a geometria passou a ser vista mais e mais como um corpo de conhecimentos logicamente encadeados, cultivados por seu encanto e pela força dos resultados obtidos.

Platão (427-347 a.C.) ressaltou a importância da Matemática para a formação do espírito, a fim de despreendê-lo das coisas sensíveis, mutáveis, sobre as quais o conhecimento é impossível. Somente as idéias, imutáveis e eternas, podiam realmente ser conhecidas. Em seus diálogos, abundam exemplos e analogias utilizando conceitos e resultados matemáticos, especialmente geométricos. Embora não tenha sido um matemático, no círculo de discípulos de Platão, em sua academia, havia vários matemáticos de primeira grandeza, como Teeteto (~ 417 a.C. - ~ 369 a.C.) e Eudoxo (408 a.C. -

¹Historiador grego (viveu em torno de 484 - 420 a.C.)

²van der Waerden, p 32.

355 a.C.), entre outros. Platão provavelmente deveu muito da matemática que sabia a Árqitas de Tarento (viveu de aproximadamente 428 a aproximadamente 350 a.C.), seguidor ardoroso das idéias pitagóricas, que viam na Matemática a chave para a compreensão do mundo. Pitágoras (~ 580 - ~500 a.C.) ensinava que tudo é número. Sua Matemática estava impregnada de misticismo numérico, provavelmente haurido em suas viagens pelo "oriente" (Mesopotâmia).

Em torno de 300 a.C, encontra-se uma Matemática bem sofisticada, exposta nos *Elementos* de Euclides de Alexandria (viveu aproximadamente de 325 a 265 a.C.). Um pouco depois, Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) deu contribuições extremamente importantes à Geometria, entre outros campos. Um pouco mais jovem, Apolônio de Perga (262-190 a.C.) escreveu um tratado sofisticado sobre as cônicas.

Por que, entre os gregos, a geometria prática, usada no dia a dia, no comércio, na arquitetura, pelos administradores, comerciantes, fazendeiros, deu origem à geometria como a definimos hoje, o estudo das formas planas e espaciais? Não se sabe. Alguns autores estabelecem um paralelo entre o surgimento da Filosofia e o da Matemática, a partir da prática de argumentação empregada nos debates políticos nas cidades gregas. O certo é que, rapidamente, a Matemática grega se desenvolveu. Já Eudemo de Rodas, que viveu aproximadamente de 350 a 290 a.C., escreveu uma história da Matemática, dividida em uma *História da Aritmética*, uma *História da Geometria* e uma *História da Astronomia*, o que mostra o desenvolvimento atingido por esses campos na Grécia. Outros estudiosos afirmam que a Matemática grega adotou seu estilo abstrato, dedutivo, devido à crise da descoberta, pelos pitagóricos, dos números irracionais. A descoberta de que a diagonal do quadrado é incomensurável com seu lado mostrou que os números, e as razões entre eles, são incapazes de explicar certos fatos bem simples. Já que os números não conseguiam tudo explicar, era necessário refugiar-se em conhecimentos mais confiáveis. Aristóteles (384 - 322 a.C.) percebia que, na prática, baseando-se em diagramas e desenhos é impossível decidir se dois segmentos são ou não comensuráveis. Essa percepção teria obrigado os matemáticos gregos a basear seus raciocínios em argumentos puramente dedutivos, utilizando figuras ideais, perfeitas, e não representações gráficas imperfeitas.

Qualquer que tenha sido a razão disso, a Matemática grega se desenvolveu consideravelmente. Todo um corpo de conhecimentos, tanto geométricos quanto aritméticos, está presente nos *Elementos* de Euclides, escritos em torno de 300 a.C, a obra matemática grega mais antiga que nos chegou completa. Além disso, há muitos resultados matemáticos dos gregos que nos chegaram por outras vias, ou de que temos simplesmente referências. Posteriormente a Euclides, conhecemos mais obras, como, entre outras, as *Cônicas* de Apolônio, de que sobreviveram até nós sete dos oito livros originais, quatro em grego e três em árabe, a *Coleção matemática*, de Pappus de Alexandria (290-350 d.C.) e vários trabalhos de Arquimedes.

Muito da matemática grega se deveu às tentativas de resolver os *três problemas clássicos* da Geometria, a *duplicação do cubo*, a *quadratura do círculo* e a *trisseção do ângulo*. Além disso, é inegável, como reconhecido hoje, a influência da música teórica grega no conteúdo dos *Elementos*.

Outro tema que percorre a Matemática grega clássica são os problemas que decorrem

da existência de grandezas incomensuráveis.

Dizemos que dois segmentos CD e EF são *comensuráveis* quando existe um segmento AB tal que CD e EF são ambos múltiplos de AB . Por exemplo, os segmentos CD e EF da Figura 1.1 são comensuráveis, pois AB está contida exatamente 3 vezes em CD e 4 vezes em EF . Neste caso, dizemos que AB é *medida comum* de CD e EF , ou que AB os *mede* simultaneamente. No caso da Figura 1.1, os segmentos CD e EF estão entre si como 3 está para 4: $CD : EF :: 3 : 4$.

Figura 1.1: Os segmentos CD e EF são comensuráveis

Por outro lado, dizemos que dois segmentos são *incomensuráveis* se não existe nenhuma segmento que seja medida comum deles.

Mais geralmente, duas grandezas A e B de mesma espécie (por exemplo, ambas comprimentos, áreas, volumes, tempos) são *comensuráveis* se existe uma grandeza C , da mesma espécie que A e B , tal que C "mede" A e B (isto é, A e B são múltiplas de C). Analogamente ao que aconteceu com comprimentos, C "mede" AB e CD simultaneamente.

As duas grandezas A e B são *incomensuráveis* se não existe nenhuma grandeza C que as meça exatamente.

A descoberta de que existem pares de segmentos incomensuráveis moldou muito do desenvolvimento da Matemática grega. Esse fato acarreta, por exemplo, que, qualquer que seja a unidade de medida escolhida, a diagonal do quadrado cujo lado fosse tomado como unidade de medida seria incomensurável com o lado do quadrado! Como os matemáticos gregos enfrentaram esta situação? O que você faria para medir grandezas se não houvesse os números reais? Seria realmente um problema.

Uma solução para este problema é, em vez de medir grandezas, por exemplo, no caso que nos interessa, áreas, poder transformar qualquer figura em uma outra, bem simples, que escolheríamos como padrão, e com a qual compararíamos a figura original. Para os gregos, a figura padrão com que seria comparada qualquer outra era o quadrado. Ou seja, dada uma figura qualquer, como achar um quadrado que fosse igual a ela, isto é, que tivesse a mesma área.

Veremos como os matemáticos gregos resolveram completamente este problema para polígonos. Como mostrado nos *Elementos* de Euclides, dado qualquer polígono, é possível construir, usando somente régua e compasso, um quadrado cuja área é igual à área do polígono dado.

Até que tivesse sido formulada a teoria das proporções de Eudoxo (viveu aproximadamente de 408 a.C a 345 a.C.), a Geometria grega se deparava com o problema de não poder utilizar proporcionalidade, como fazemos atualmente, em muitas demonstrações.

Hoje, por exemplo, para demonstrar o teorema de Pitágoras, podemos proceder como segue:

Proposição I.47: Demonstração usando semelhança Em um triângulo retângulo, o quadrado construído sobre o lado oposto ao ângulo reto é igual à soma dos quadrados construídos sobre os lados que compreendem o ângulo reto.

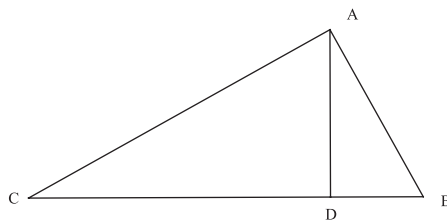


Figura 1.2: *Elementos* I.47 – Demonstração por semelhança de triângulos

Demonstração: Seja o triângulo ABC , retângulo em A (Figura 1.2). Do vértice A , baixe a altura AD sobre a hipotenusa BC . É fácil ver que os triângulos ABC , CBA e CAB são semelhantes entre si.

Da semelhança de CDA com CAB , temos que

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{AB} = \frac{CD}{AC}.$$

Da semelhança de ADB com CAB , temos que

$$\frac{AB}{CB} = \frac{BD}{AB} = \frac{AD}{AC}.$$

Assim

$$\frac{AC}{CB} = \frac{CD}{AC} \implies CB \times CD = AC^2.$$

$$\frac{AB}{CB} = \frac{BD}{AB} \implies CB \times DB = AB^2.$$

Vemos portanto que $CB \times (CD + DB) = CB^2 = AC^2 + AB^2$, como desejávamos. \square

Comparemos isso com a demonstração dada por Euclides nos *Elementos*, que utiliza somente equivalência de áreas.³ (1773)

Proposição I.47: Em um triângulo retângulo, o quadrado sobre o lado oposto ao ângulo reto é igual à soma dos quadrados sobre os lados que formam o mesmo ângulo reto.

³Tradução da versão apresentada por Heath (1956).

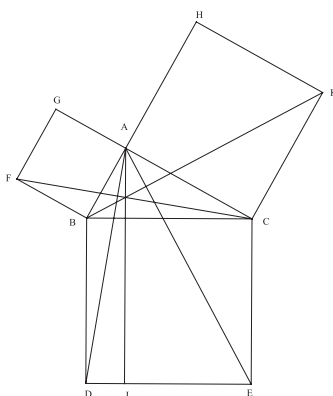


Figura 1.3: *Elementos* I.47 – O teorema de Pitágoras

Demonstração: Seja o triângulo retângulo ABC [Figura 1.3], cujo ângulo reto é BAC . Digo que o quadrado sobre o lado BC é igual aos quadrados sobre os lados BA , AC , que formam o ângulo reto BAC .

Com efeito, construa sobre BC o quadrado $BDEC$, e sobre BA , AC , os quadrados de lados AB e AC respectivamente. Pelo ponto A trace AL , paralela a BD ou CE e trace também as retas AD , FC .

Então, como os ângulos BAC , BAG são retos, segue-se que as duas retas AC , AG , que não estão no mesmo lado da reta AB , formam com AB , em A , ângulos adjacentes iguais a dois ângulos retos; portanto CA está em linha reta com AG .

Pela mesma razão BA está em linha reta com AH .

Os ângulos DBC , FBA , por serem retos, são iguais. Adicione a cada um o mesmo ângulo ABC ; logo, o total DBA será igual ao total FBC .

E como DB é igual a BC , e FB a BA , os dois lados AB , BD são iguais aos dois lados FB , BC respectivamente, e o ângulo DBA é igual ao ângulo FBC ; portanto a base AD é igual à base FC , e o triângulo ABD é igual ao triângulo FBC .

Ora, o paralelogramo de lados BD e DL é o dobro do triângulo ABD , porque têm a mesma base BD , e estão entre as mesmas paralelas BD , AL .

E o quadrado de lado BA é o dobro do triângulo FBC , porque têm a base comum FB , e estão entre as mesmas paralelas FB , GC .

Mas os dobros de quantidades iguais são iguais.

Logo, o paralelogramo de lados BD e DL é também igual ao quadrado de lado AB . Do mesmo modo, traçadas as retas AE , BK se demonstra que o paralelogramo de lados EC e EL é igual ao quadrado de lado AC ; logo, o quadrado inteiro $BDEC$, de lado BC oposto ao ângulo reto BAC , é igual aos dois quadrados de lados AB e AC , de lados BA , AC , que fazem o mesmo ângulo reto BAC . \square

Observe que nesta demonstração não se usa proporcionalidade. Todos os passos são dados utilizando equivalência de áreas.

Como até Eudoxo não havia uma teoria geral das proporções, que permitisse lidar

com proporcionalidade de grandezas, comensuráveis ou não, Euclides, nos *Elementos*, até o Livro V faz suas demonstrações utilizando equivalência de áreas, como, por exemplo, em sua famosa demonstração para o teorema de Pitágoras, que acabamos de ver (Teorema 1.2).

1.3 Equivalência e aplicação de áreas nos Elementos de Euclides

1.3.1 Equivalência de áreas

Nosso objetivo é mostrar como construir, usando somente régua e compasso, um quadrado cuja área seja igual à de uma superfície poligonal dada. Euclides faz isso nos Livros I e II, antes de ter à sua disposição a teoria das proporções de Eudoxo, exposta somente no Livro V. Assim, em todas as construções que faremos a seguir, não são utilizados argumentos baseados em proporções.

Em primeiro lugar, uma advertência quanto à terminologia que empregaremos. Como faremos freqüentemente citações dos *Elementos*, é importante lembrar duas coisas:

1. Euclides emprega os termos *linha reta* ou *reta* às vezes para designar o que denominamos hoje *segmento de reta*, outras vezes para designar *linha reta*. Usa também o termo *reta finita* para designar segmento de reta.
2. Para Euclides, afirmar que duas figuras são *iguais* por vezes significa dizer que elas são *congruentes*, outras vezes que elas têm a mesma área.

O que exporemos a seguir encontra-se nos *Elementos* de Euclides, Livros I e II. Tomaremos como base a edição de Commandino, na importante edição inglesa feita em 1756 por Robert Simson (matemático escocês que viveu de 1687 a 1768). Esta edição foi traduzida para o português, em 1773, por ordem do Marquês de Pombal. Ela foi publicada no Brasil, mas está esgotada há muito tempo. Encontra-se atualmente disponível, gratuitamente, no site www.dominiopublico.gov.br.

O ponto de partida de Euclides são os critérios de congruência de triângulos (I.4, I.8, I.26), que omitiremos, para não prolongarmos demasiadamente esta exposição. Em seguida, Euclides demonstra o resultado importante para nós, que também não demonstraremos:

Proposição I.34: *Em um paralelogramo, os lados e os ângulos opostos são iguais e o paralelogramo é dividido pela diagonal em duas partes iguais.*

Após isso, na linha de nosso trabalho, Euclides demonstra que

Proposição I.35: *Paralelogramos que estão postos sobre a mesma base e entre as mesmas paralelas, são iguais.*

Demonstração: Há três casos a considerar, mostrados nas Figuras 1.4, 1.5 e 1.6, a seguir. Como sempre, Euclides demonstra somente um caso, deixando os outros a

cargo do leitor. Aqui, apresentaremos os três casos, baseando-nos na tradução para o português da edição de Simson.

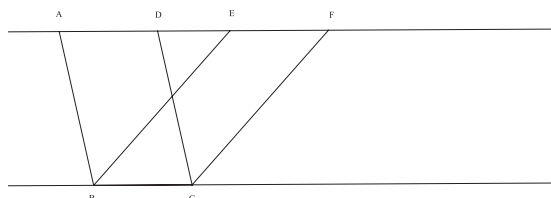


Figura 1.4: *Elementos* I.35 – primeiro caso

1. Sejam os paralelogramos $ABCD$ e $EFCB$ sobre a mesma base BC , entre as mesmas paralelas AF , BC (Figura 1.4). Digo que o paralelogramo $ABCD$ é igual ao paralelogramo $EBCF$.

No paralelogramo $ABCD$ a reta AD é igual à reta BC , e no paralelogramo $EBCF$ a reta EF é igual à reta BC . Logo será AD igual a EF . Ajunte-se a ambas a mesma reta DE . Será então $AE = DF$, isto é, o todo igual ao todo. Mas a reta AB é igual à reta DC . Logo as duas retas EA , AB são iguais às duas retas FD , DC , cada uma a cada uma. Mas o ângulo externo FDC é igual ao interno EAB . Será então o triângulo EAB igual ao triângulo FDC . Do trapézio $ABCF$ tire-se o triângulo FDC ; e do mesmo trapézio tire-se o triângulo EAB . Logo os paralelogramos $ABCD$, $EBCF$, que são os restos, serão iguais entre si.

2. Suponhamos agora que o ponto E está entre os pontos A e D , como na Figura 1.5.

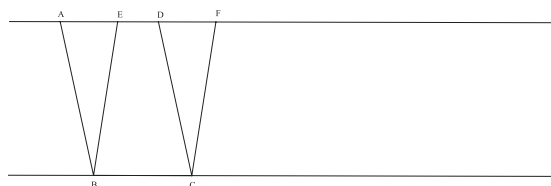


Figura 1.5: *Elementos* I.35 – segundo caso

No paralelogramo $ABCD$ as retas AD e BC são iguais, e no paralelogramo $EBCF$ são iguais as retas EF e BC . Logo serão iguais as retas AD e EF . Retire-se a mesma reta DE . Então, AE e DF serão iguais, isto é, o resto igual ao resto. Mas as retas AB e DC são iguais. Logo as duas retas EA , AB são iguais às duas retas FD , DC , cada uma a cada uma. Mas o ângulo externo FDC é igual ao ângulo interno EAB . Assim os triângulos EAB e FDC serão iguais. Do trapézio $ABCF$ tire-se o triângulo FDC ; e do mesmo trapézio tire-se o triângulo EAB . Logo os paralelogramos $ABCD$, $EBCF$, que são os restos, serão iguais entre si.

3. Falta considerar o caso em que $D = E$ (Figura 1.6).

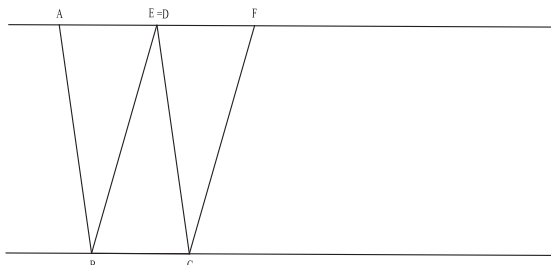


Figura 1.6: Elementos I.35 – terceiro caso

Se os lados AD , EF dos paralelogramos $ABCD$, $DBCF$ opostos à base comum BC tiverem um ponto comum, D , claro está que, sendo os paralelogramos $ABCD$, $DBCF$ cada um o dobro do mesmo triângulo BDC , serão iguais entre si (Figura 1.6). \square

De posse deste resultado, é fácil mostrar que

Proposição I.36: Paralelogramos que têm bases iguais, e situados entre paralelas são iguais.

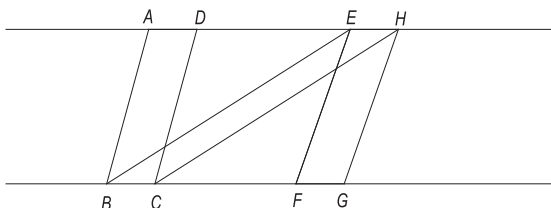


Figura 1.7: Elementos I.36

Sejam os paralelogramos $ABCD$ e $EFGH$. Trace as retas BE , CH ⁴ (Figura 1.7). Como as retas BC e FG são iguais, e o mesmo acontece também com as retas FG e EH , então BC e EH serão iguais. Mas BC e EH são paralelas, e entre suas extremidades B , E , C , H , respectivamente, estão traçadas as retas BE e CH . E retas ligando os extremos de duas outras iguais e paralelas, e do mesmo lado, são também iguais e paralelas. Logo, EB , CH são iguais e paralelas. Logo, $EBCH$ é um paralelogramo, igual ao paralelogramo $ABCD$, por terem a mesma base BC e por estarem entre as mesmas paralelas BC , AD . Pela mesma razão serão iguais os paralelogramos $EFGH$ e $EBCH$. Logo, os paralelogramos $ABCD$, $EFGH$ serão iguais entre si. \square

Nas proposições I.35 (Teorema 1.3.1) e I.36 (Teorema 1.3.1), Euclides utiliza pela primeira vez a noção de igualdade entre figuras significando igualdade de áreas, e não congruência, como usado em I.4, I.8, I.26, os *critérios de congruência de triângulos*.

Conseqüências imediatas dessas proposições são

⁴Estamos mais uma vez usando, com adaptações, a versão de Simson (1773).

Proposição I.37: *Triângulos situados sobre a mesma base e entre as mesmas paralelas são iguais entre si.*

Proposição I.38: *Triângulos que têm bases iguais e estão entre as mesmas paralelas são iguais entre si.*

As demonstrações desses dois teoremas decorrem imediatamente dos resultados precedentes.

Demonstraremos agora um resultado muito usado nos *Elementos*, o qual permite que Euclides possa dispensar, muitas vezes, o conceito de figuras semelhantes.

Considere um paralelogramo $ABCD$, com a diagonal AC (Figura 1.8). Seja K um ponto qualquer sobre essa diagonal. Por K trace paralelas a AB e a BC . Sejam os pontos E , F , G e H , como mostrados na figura. Então, os paralelogramos $EBGK$ e $KFDH$ têm áreas iguais. Na palavras de Simson, em português (Simson, 1773),

Proposição I.43: *Em qualquer paralelogramo, os complementos dos paralelogramos em torno da diagonal são iguais entre si.*

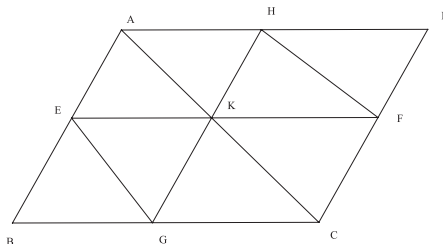


Figura 1.8: *Elementos* I.43

Neste enunciado, os paralelogramos em torno da diagonal AC são $AEKH$ e $KGCF$. Os complementos são $EBGK$ e $KFDH$ (Figura 1.8).

Demonstração: Seja o paralelogramo $ABCD$, cuja diagonal é AC ; sejam $AEKH$, $KGCF$, em torno da diagonal. Os complementos serão os dois paralelogramos $BGKE$, $KFDH$.

Digo, que o complemento $BGKE$ é igual ao complemento $KFDH$.

Como $ABCD$ é um paralelogramo, e AC é sua diagonal, o triângulo ABC é igual ao triângulo ADC . Como $AEKH$ é um paralelogramo, e AK é sua diagonal, o triângulo AEK é igual ao triângulo AHK . Pela mesma razão, o triângulo KGC é igual ao triângulo KFC . Portanto, como o triângulo AEK é igual ao triângulo AHK , e o triângulo KGC é igual ao triângulo KFC , o triângulo AEK juntamente com o triângulo KGC é igual ao triângulo AHK juntamente com o triângulo KFC . Mas já foi mostrado que o triângulo ABC é igual ao triângulo ADC . Portanto, o que resta, o complemento $BGKE$, é igual ao complemento $KFDH$. \square

Esta proposição admite outra demonstração, conseqüência direta de I.36⁵ (Veja a Figura 1.9):

⁵Veja Enriques, 1954, p. 90.

Demonstração: Como os triângulos AEK e AKH são congruentes (Você sabe explicar por quê?), eles têm alturas iguais baixadas sobre AK . Assim, as paralelas HN e EK são eqüidistantes de AG e assim as áreas de $KHNC$ e de $KEMC$ são iguais. Disso decorre que as áreas de $DHDF$ e de $EKGB$ são iguais em área. \square

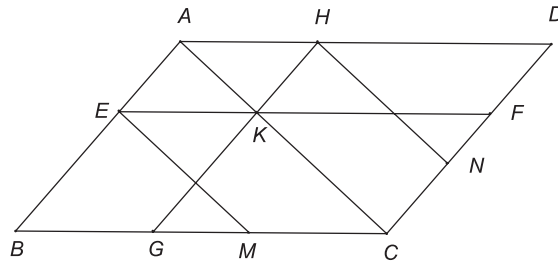


Figura 1.9: Demonstração alternativa de I.43

1.3.2 Aplicação de áreas

O que é, na terminologia matemática grega, *aplicar* uma figura (poligonal) a uma reta dada? Esse problema consiste em construir uma figura de tal maneira que o segmento de reta seja um de seus lados. Em geral, é exigido que a figura construída, preencha algumas exigências. Por exemplo, sejam $ABCDE$ um polígono e KL um segmento de reta (Figura 1.10). Aplicar ao segmento KL , por exemplo, um paralelogramo, com área igual a $ABCDE$, significa construir um paralelogramo $KLRS$ de que KL é um dos lados, e cuja área seja igual à área de $ABCDE$. Pode também ser pedido que o paralelogramo atenda a outras exigências, como, por exemplo, ter o ângulo SKL igual a um ângulo dado.

Na maioria das aplicações, o paralelogramo aplicado é um retângulo, ou seja, o ângulo SKL é reto.

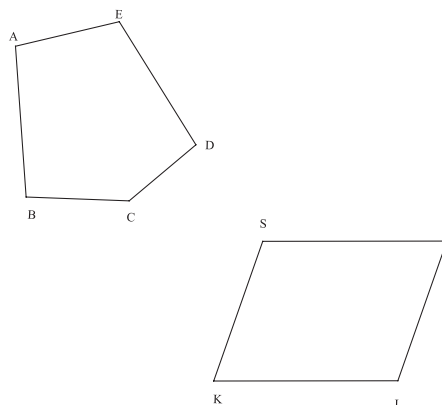


Figura 1.10: Aplicação de áreas

O primeiro passo nessa direção é dado por

Proposição I.42: *Construir um paralelogramo igual a um triângulo dado, e que tenha um ângulo igual a outro ângulo dado.*

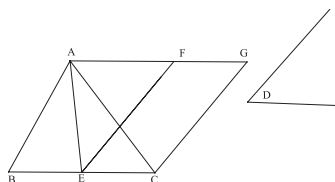


Figura 1.11: Elementos I.42

Construção: Seja dado o triângulo ABC , e o ângulo retilíneo D (Figura 1.11). Deve-se construir um paralelogramo igual ao triângulo ABC , e com um ângulo igual ao ângulo D .

Divida a base BC em duas partes iguais pelo ponto E e trace a reta AE , e com a reta EC no ponto E marque o ângulo CEF igual ao ângulo D . Pelo ponto A passe AG paralela a EC , e pelo ponto C a reta CG paralela a EF .

Assim, $FECG$ será um paralelogramo. E como as retas BE e EC são iguais, o triângulo ABE será igual ao triângulo AEC , por estarem ambos sobre as bases iguais, BE e EC , e entre as mesmas paralelas, BC e AG . Logo o triângulo ABC é o dobro do triângulo AEC . Mas também o paralelogramo $FECG$ é o dobro do mesmo triângulo AEC , que se acha sobre a mesma base, e entre as mesmas paralelas do paralelogramo $FECG$. Logo, o paralelogramo $FECG$ é igual ao triângulo ABC e o ângulo CEF é igual ao ângulo D , que é o ângulo dado.

Logo, foi construído o paralelogramo que se pedia. \square

Em seguida, impomos mais condições sobre a figura a ser construída: que ela seja aplicada a um segmento dado.

Proposição I.44: *Sobre uma linha reta dada, construir um paralelogramo, igual a um triângulo dado, e que tenha um ângulo igual a outro ângulo retilíneo dado.*

Construção: Sejam dados a reta AB , o triângulo C e o ângulo retilíneo D (Figura 1.12) Deve-se construir sobre a reta dada AB um paralelogramo igual ao triângulo C e que tenha um ângulo igual ao ângulo D .

Construa o paralelogramo $BEFG$ igual ao triângulo ABC e com um ângulo EBG igual ao ângulo D , colocado de tal maneira que BE seja o prolongamento da reta AB [I.42]. Por A , trace uma paralela ao segmento FE . Seja H a intersecção dessa paralela com o prolongamento de EG . Trace a reta que passa por H e por B .

Como as paralelas AH , EF são cortadas pela reta HF , os ângulos AHF HFE são iguais a dois retos. Portanto os ângulos BHG e GFE são menores do que dois retos. Mas retas que com uma terceira fazem os ângulos internos e da mesma parte menores que dois retos são concorrentes. Logo, as duas retas HB , FE devem concorrer. Seja K seu ponto de intersecção.

Por este ponto trace a reta KL paralela a EA e sejam prolongadas as retas HA

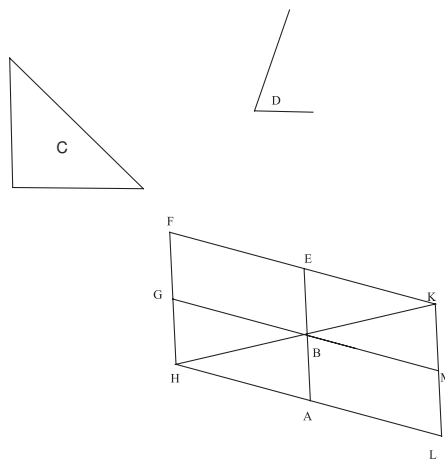


Figura 1.12: Elementos I.44

e GB até L e M respectivamente. Logo, $HLKF$ é um paralelogramo, cuja diagonal é KH , Considere os paralelogramos $ABGH$ e $MKEB$, cujos complementos são os paralelogramos $LMBA$ e $GBFE$. Portanto, $LMBA$ e $GBFE$ são iguais.

Mas o paralelogramo $BEFG$ é igual ao triângulo C . Portanto, o paralelogramo $LMBA$ é também igual a C . E como o ângulo GBE é igual ao ângulo ABM , e o ângulo GBE é igual ao ângulo D , então o ângulo ABM é também igual ao ângulo D .

Portanto, o paralelogramo $LMBA$ igual ao triângulo dado C foi aplicado à reta dada AB , com o ângulo ABM igual a D . \square

A diferença entre I.42 e I.44, é que no segundo caso é **especificado** um dos lados do paralelogramo, o segmento AB .

Em I.44, aprendemos a *aplicar* ao segmento AB um paralelogramo igual a um triângulo dado e que tem um dos ângulos igual a um ângulo dado. Agora é fácil "transformar" qualquer polígono em um paralelogramo. Decompomos o polígono em triângulos e aplicamos repetidamente I.42 e I.44:

Proposição I.45: *Construir um paralelogramo igual a uma figura retilínea qualquer dada, e com um ângulo igual a outro ângulo dado.*

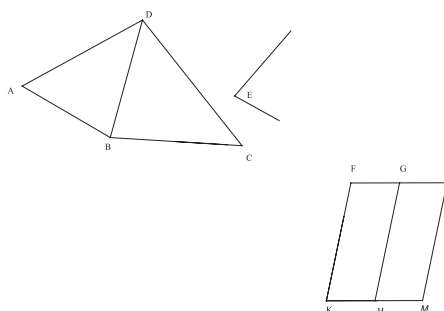
Construção: Sejam $ABCD$ o polígono e E o ângulo retilíneo dados: pede-se para construir um paralelogramo igual a $ABCD$ e que tenha um ângulo igual a E (Figura 1.13).

Una D a B , e construa o paralelogramo de lados FK e KH igual ao triângulo ADB e que tenha o ângulo FKH igual ao ângulo E .

Aplique ao segmento GH o paralelogramo de lados GH e HM igual ao triângulo DBC , e com o ângulo GHM igual ao ângulo E .

O polígono $FKML$ será o paralelogramo pedido.

Como o ângulo E é igual a cada um dos ângulo FKH , GHM , o ângulo FKH é igual ao ângulo GHM .

Figura 1.13: *Elementos* I.45

Adicione a estes dois ângulos iguais o ângulo KHG ; portanto, os ângulos FKH , KHG são iguais aos ângulos KHG , GHM .

Mas os ângulos FKH e KHG juntos são iguais a dois ângulos retos; portanto os ângulos KHG e GHM são juntos iguais a dois ângulos retos. E como no ponto H da reta GH as duas retas KH e HM , nos lados opostos de GH , formam ângulos adjacentes que juntos são iguais a dois ângulos retos, KH está sobre a reta HM .

E como a linha reta HG encontra as paralelas KM , FL , os ângulos alternos MHG , HGF são iguais. Adicione a cada um destes ângulos o ângulo HGL ; portanto, os ângulos MHG , HGL são iguais aos ângulos HGF , HGL .

Mas os ângulos HGF e HGL são juntos iguais a dois ângulos retos; portanto os ângulos HGF e HGL juntos são iguais a dois ângulos retos. Assim, FG está sobre a linha reta GL .

Como KF é paralela a HG , e HG é paralela a ML , KF é paralela a ML e KM , FL são paralelas. Portanto $KFLM$ é um paralelogramo.

E como o triângulo ABD é igual ao paralelogramo HF , e o triângulo DBC é igual ao paralelogramo GM , toda a figura retilínea $ABCD$ é igual a todo o paralelogramo $KFLM$.

Assim, o paralelogramo $KFLM$ foi construído igual à figura retilínea $ABCD$, e com o ângulo FKM igual ao ângulo dado E . \square

Os resultados anteriores nos permitem aplicar a um segmento dado um paralelogramo que tem um ângulo dado e é igual a um polígono dado: É suficiente decompor o polígono em triângulos, aplicar ao segmento dado um paralelogramo que tenha um dos ângulos igual ao ângulo dado e que seja igual ao primeiro triângulo da decomposição, e repetir este processo para os outros triângulos da decomposição.

Em particular, se o ângulo dado for reto, o que fizemos acima nos mostra como transformar qualquer polígono em um retângulo. Se conseguirmos transformar este retângulo em um quadrado, teremos resolvido o problema de fazer a quadratura de qualquer polígono. Para isso, necessitamos de duas proposições centrais nos *Elementos* de Euclides.

Proposição II.5: *Se uma linha reta for dividida em duas partes iguais, e em outras*

duas desiguais, o retângulo compreendido pelas partes desiguais, juntamente com o quadrado da parte entre as duas seções, será igual ao quadrado da metade da linha proposta.

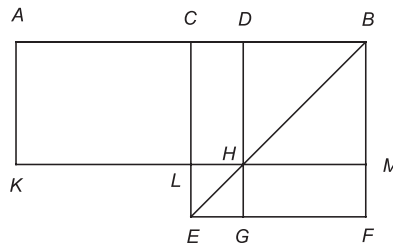


Figura 1.14: Elementos II.5

Demonstração: Suponha que o segmento AB está dividido em duas partes iguais pelo ponto C e em duas partes desiguais pelo ponto D (Figura 1.14). Então, o retângulo de lados AD e DB , juntamente com o quadrado sobre CD , será igual ao quadrado sobre CB .

Com efeito, sobre CB construa o quadrado $CEFB$. Una os pontos B e E . Por D trace o segmento de reta DHG paralelo a CE ou a BF . Por H trace KLM paralela a CB ou EF . Enfim, por A trace AK paralela a CL ou a BM .

Então, o complemento $CLHD$ é igual ao complemento $HGFM$. A cada um destes complementos adicione $DHMB$. Então $CLMB$ é igual a $DGFB$. Mas $CLMB$ é igual a $AKLC$, pois AC é igual a CB . Assim, $AKLC$ é igual a $DGFB$.

Adicione $CLHD$ a $AKLC$ e a $DGFB$. Então $AKHD$ é igual a $DGFB$ e $CLHD$.

Mas $AKHD$ é o retângulo de lados AD e DB , pois DH é igual a DB ; e $DGFB$ juntamente com $CLHD$ é $CLHGFB$. Assim, $CLHGFB$ é igual ao retângulo de lados AD e DB . Adicionando a ambos $LEGH$, que é igual ao quadrado sobre CD , $CLHGFB$ juntamente com $LEGH$ é igual ao retângulo de lados AD e DB , juntamente com o quadrado sobre CD . Mas $CLHGFB$ juntamente com $LEGD$ formam $CEFB$, que é o quadrado sobre CB . Então, o retângulo de lados AD e DB , juntamente com o quadrado sobre CD é igual ao quadrado sobre CB . \square

Proposição II.6: Se uma linha reta for dividida em duas partes iguais, e for prolongada, o retângulo compreendido pela reta toda mais seu prolongamento e pela mesma adjunta, juntamente com o quadrado da metade da reta, será igual ao quadrado sobre a reta que se compõe da mesma metade e do prolongamento.

Demonstração: Sejam C o ponto médio de AB e D , sobre o prolongamento de AB (Figura 1.15).

Com lado CD construa o quadrado $CEFD$. Una D a E . Por B trace GHB paralela a CE ou a DF . Pelo ponto H , trace KLM paralela a AD ou a EF e por A trace AK paralela a CL ou a DM .

Então, como AC é igual a CB , o retângulo $AKLC$ é igual ao retângulo $CLHB$.

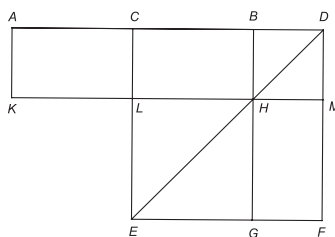


Figura 1.15: Elementos II.6

Mas $CLHB$ é igual a $HGFM$, e portanto também $AKLC$ é igual a $HGFM$. A cada um desses retângulos adicione $CLMD$. Assim, $AKMD$ será igual a $CLHGFD$. Mas $AKMD$ é o retângulo formado por AD e DB , pois DM é igual a DB .

Então o retângulo de lados AD e DB é igual a $CLHGFD$. A cada um, adicione $LEGH$, que é igual ao quadrado sobre CB . Portanto o retângulo de lados AD e DB , juntamente com o quadrado sobre CB é igual a $CLHGFD$ e a $LEGH$.

Mas $CLHGFD$ juntamente com $LEGH$ formam $CEFD$, que é o quadrado sobre CD .

Portanto, o retângulo de lados AD e DB , juntamente com o quadrado sobre CB é igual ao quadrado sobre CD . \square

De posse destes resultados, podemos dar o passo final para fazer a *quadratura* de qualquer polígono. Isso significa construir um quadrado de área igual à área do polígono dado.

Proposição II.14: *Construir um quadrado igual a um polígono dado.*

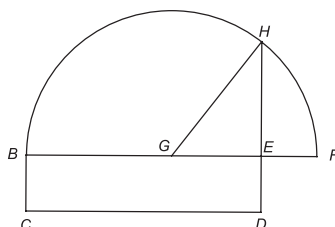


Figura 1.16: Elementos II.14

Construção: Seja A o polígono dado. Construa o retângulo $BCDE$ igual ao polígono dado. Se os lados BE e ED forem iguais, o problema está resolvido. Se eles forem desiguais, marque F , sobre o prolongamento de BE , e tal que ED e EF sejam iguais. Divida BF ao meio pelo ponto G . Trace a semi-circunferência BHF e prolongue ED até H (Figura 1.16).

Una G a H . Como o segmento BF está dividido ao meio por G e em duas partes desiguais por E , então o retângulo de lados BE e EF , juntamente com o quadrado sobre GE é igual ao quadrado sobre GF .

Mas GF é igual a GH . Assim, o retângulo de lados BE e EF juntamente com o

quadrado sobre GE é igual ao quadrado sobre GH .

Mas o quadrado sobre GH é igual aos quadrados sobre GE e EH . Assim, o retângulo de lados BE e EF , juntamente com o quadrado sobre GE é igual aos quadrados sobre GE e sobre EH .

Retire o quadrado sobre GE , que é comum a ambos; portanto o retângulo de lados BE e EF é igual ao quadrado sobre EH .

Mas o retângulo de lados BE e EF é o paralelogramo BD , pois EF é igual a ED .

Mas $BCDE$ é igual ao polígono dado.

Portanto o quadrado sobre EH é igual ao polígono dado. \square

Uma maneira alternativa de construir um quadrado igual a um polígono qualquer envolve a utilização repetida do "teorema de Pitágoras".

Em primeiro lugar, após decompor o polígono em triângulos, o que já sabemos fazer, transformamos cada um dos triângulos em um retângulo com a mesma área. Em seguida, utilizando II.14, transformamos cada um dos retângulos em um quadrado. Dados dois destes quadrados, utilizando o teorema de Pitágoras, podemos achar um quadrado que tenha área igual à soma das áreas dos dois quadrados. De posse deste quadrado, podemos continuar o processo, utilizando várias vezes o teorema de Pitágoras, até obter um único quadrado cuja área será igual à área do polígono de que partimos.

1.3.3 Aplicação de áreas com falta e com excesso

Já vimos, por I.44, como aplicar a um segmento dado um paralelogramo igual a um polígono (figura retilínea) dado e que tem um ângulo especificado. Trata-se do que os gregos chamavam uma *aplicação parabólica*.

Dois outros problemas, chamados de *aplicação elíptica* e de *aplicação hiperbólica*, respectivamente, são os seguintes, em seu caso mais geral:

1. *Aplicação elíptica* ou *com falta* – Aplicar a um segmento de reta AB , um paralelogramo, com um ângulo dado, igual a um polígono dado, e de tal maneira que o que falta para completar a figura a todo o segmento AB seja um paralelogramo semelhante a um paralelogramo dado (Figura 1.17).

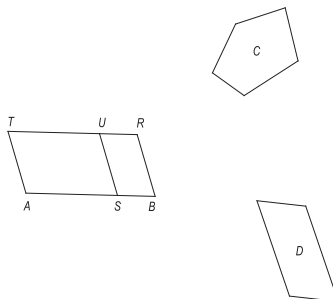


Figura 1.17: Aplicação de áreas elíptica ou com falta

Dado o polígono C , pede-se que seja construído o paralelogramo $ASUT$, com área igual à de C , e tal que $SBRU$ seja semelhante ao paralelogramo D , dado. O paralelogramo $SBRU$ é o "que falta" para que $ASUT$ tenha AB como lado, isto é, esteja aplicado a AB .

2. *Aplicação hiperbólica* ou *com excesso* Aplicar a um segmento de reta AB , um paralelogramo, com um ângulo dado, igual a um polígono dado, e de tal maneira que ele excede o segmento AB por um paralelogramo semelhante a um paralelogramo dado (Figura 1.18).

Dado o polígono C , pede-se que seja construído o paralelogramo $APOR$ com área igual à de C , e tal que $BPOQ$ seja semelhante ao paralelogramo D . O paralelogramo $BPOQ$ é o "excesso" para que $ABQR$ tenha lado AB , isto é, esteja aplicado a AB .

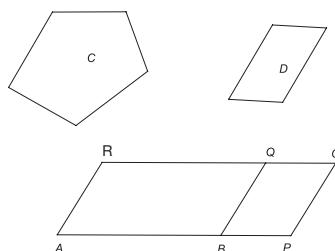


Figura 1.18: Aplicação de áreas hiperbólica ou com excesso

Nesta formulação mais geral, a solução desses problemas exige conhecimentos do Livro VI dos *Elementos*, que trata exatamente das aplicações da teoria de proporcionalidade de grandezas, de Eudoxo (exposta no Livro V dos *Elementos*), às figuras planas. Podemos, por enquanto, tratar de casos particulares desses problemas. Mostraremos como, usando somente os recursos já aprendidos sobre equivalência de áreas, podemos resolver alguns casos importantes desse problema.

Como aplicar um retângulo a um segmento, com falta? Voltemos à Proposição II.5 dos *Elementos*. Queremos aplicar ao segmento AB um retângulo igual ao polígono S de tal maneira que o que falta para termos uma figura aplicada a todo o segmento AB seja um quadrado ($LMBD$) (Figura 1.19).

É fácil fazer isso.

Pelos resultados anteriores, podemos supor que a figura retilínea dada é um quadrado de lado b . Seja C o ponto médio do segmento AB . Trace CO perpendicular a AB e igual a b . Prolongue OC até N , de maneira que $ON = CB$. Com centro em O , e raio ON , descreva uma circunferência que corta CD em D (Figura 1.20).

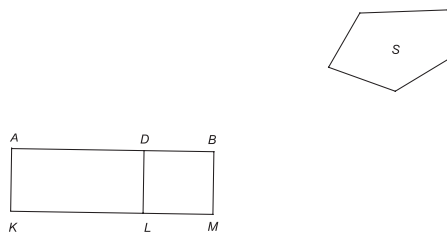


Figura 1.19: O problema de aplicação de áreas elíptica ou com falta

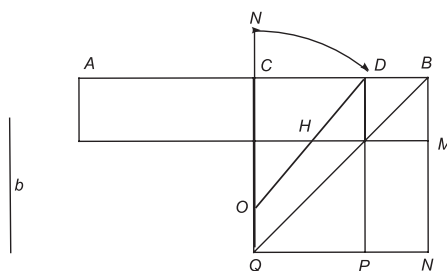


Figura 1.20: Resolução do problema de aplicação de áreas elíptica

Afirmamos que o retângulo de lados AD e DB resolve nosso problema.

Com efeito, pela proposição II.5 dos *Elementos* (p. 18), o retângulo de lados AD e DB , juntamente com o quadrado de lado CD é igual ao quadrado de lado CB . Ou seja, é igual ao quadrado de lado OD .

Pelo teorema de Pitágoras, o quadrado de lado OD é igual à soma dos quadrados de lados OC e CD . Retirando o quadrado de lado CD , vemos que o retângulo de lados AC e DB é igual ao quadrado de lado OC . \square

A solução deste problema está sujeita à condição de que b não seja maior do que $\frac{1}{2}a$, ou, equivalentemente, que b^2 não seja maior do que $(\frac{1}{2}a)^2$.

Esta construção resolve completamente o problema de aplicar um retângulo a um segmento, com falta, de maneira que o que falta seja um quadrado.

Como resolver o problema de aplicar um retângulo, cuja área é dada, a um segmento, com excesso (Figura 1.21)?

Figura 1.21: O problema de aplicação de áreas hiperbólica

A proposição II.6 (p. 19) dos *Elementos* de Euclides nos permitirá resolver este problema.

Em primeiro lugar, podemos supor que a área dada é um quadrado de lado b . Trace BQ perpendicular a AB e igual a b . Una C a Q e com centro C e raio CQ , descreva uma circunferência que corta o prolongamento de AB em D . Afirmamos que o ponto D resolve o problema (Figura 1.22).

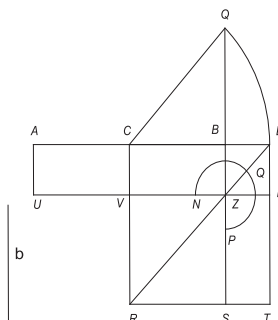


Figura 1.22: Resolução do problema de aplicação de áreas hiperbólica

Com efeito, o retângulo de lados AD e DB , juntamente com o quadrado de lado CB é igual ao quadrado de lado CD , ou seja, é igual ao quadrado de lado CQ . Pelo teorema de Pitágoras, este quadrado é igual à soma dos quadrados de lados CB e BQ . Assim, o retângulo de lados AD e DB é igual ao quadrado de lado BQ . \square

1.3.4 O Livro VI dos Elementos e o caso geral de aplicação de áreas

Euclides, no Livro V dos *Elementos* apresenta a teoria das proporções de Eudoxo, que permite trabalhar com razões de grandezas, sejam elas comensuráveis ou não. Trata-se de um dos pontos altos dos *Elementos*, e eliminou definitivamente a dificuldade que tinham os matemáticos gregos em trabalhar com razões de grandezas incomensuráveis. A solução que Eudoxo encontrou para o problema é um dos maiores feitos da Matemática grega.

É verdade que a formulação de Eudoxo é de leitura difícil, mas foi muito importante, no contexto da matemática grega. Hoje, para nós, que podemos trabalhar livremente com números reais, ela nos parece desnecessariamente complicada. Contudo, para os gregos, que não tinham nem mesmo o conceito de número racional, pois se limitavam a falar em *razão* de dois números naturais, ela resolveu um problema muito sério que tinha surgido desde a descoberta, bem anterior a Eudoxo, de que existem grandezas incomensuráveis.

Pode-se avaliar essa contribuição pelas palavras de Dedekind, no século XIX, ao afirmar que se inspirou em Eudoxo para formular sua definição de número real – os *cortes de Dedekind*.

No livro seguinte, o Livro VI, Euclides aplica os resultados do Livro V ao estudo da semelhança de grandezas geométricas, especificamente as figuras planas.

Não podemos, aqui, estudar os Livros V e VI. Admitiremos como sabidas as noções usuais de proporcionalidade. Tudo o que fizermos de agora em diante pode se justificar usando os resultados anteriores contidos nos *Elementos*, do Livro I ao Livro VI. Deste livro, nos deteremos apenas no problema mais geral de aplicação de áreas.

Antes de ver o caso mais geral de aplicação de áreas a uma reta, com falta e com excesso, necessitamos de dois resultados preliminares.

proposição VI.25: *Construir uma figura semelhante a uma figura retilínea dada e igual a outra figura retilínea.*

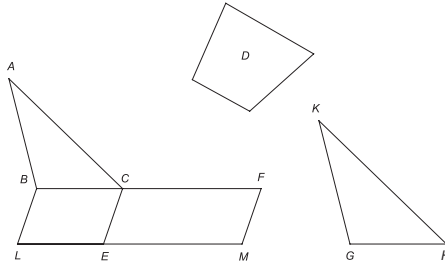


Figura 1.23: *Elementos* VI.25

Construção: Seja ABC a figura retilínea dada à qual a figura que deve ser construída tem que ser semelhante, e D a figura retilínea dada à qual deve ser igual; assim, é pedido para construir uma figura semelhante a ABC e igual a D (Figura 1.23).

Aplique a BC o paralelogramo $BLEC$ igual ao triângulo ABC , o que pode ser feito, pela Proposição I.44, e a CE o paralelogramo $CEMF$ igual a D , de tal maneira que o ângulo FCE seja igual ao ângulo CBL . Assim, BC está em linha reta com CF , e LE com EM .

Seja GH uma meia proporcional entre BC e CF (Livro VI.13), e sobre GH construa KHG semelhante e semelhantemente situado a ABC .

Então BC está para GH assim como GH para CF mas, se três retas forem proporcionais, a primeira está para a terceira, assim como a figura construída sobre a primeira está para a figura semelhantemente situada sobre a segunda. Portanto, BC está para CF assim como o triângulo ABC está para o triângulo KGH .

Mas os paralelogramos $BLEC$ e $CEMF$ estão entre si como BC e CF .

Então, o paralelogramo $BLEC$ está para o paralelogramo $CEMF$ assim como o triângulo ABC está para o triângulo KGH . Ou, equivalentemente, o triângulo ABC está para o paralelogramo $BLEC$ assim como o triângulo KGH está para o paralelogramo $CEMF$.

Mas o triângulo ABC é igual ao paralelogramo $BLEC$; portanto, o triângulo JGH é igual ao paralelogramo $CEMF$.

Mas o paralelogramo $CEMF$ é igual a D ; portanto, KGH é também semelhante a D .

E KGH é também semelhante a ABC .

Portanto, construímos uma figura KGH semelhante à figura retilínea ABC e igual

a outra figura dada D . □

Antes de mostrar como aplicar paralelogramos com uma área dada a uma reta, com falta ou com excesso de um paralelogramo semelhante a um outro paralelogramo dado, necessitamos de dois resultados dos *Elementos* de Euclides.

Proposição VI.27: *De todos os paralelogramos aplicados a uma mesma linha reta, com falta de paralelogramos semelhantes e semelhantemente situados à figura descrita sobre a metade da linha reta, é maior o paralelogramo aplicado à metade da linha reta e semelhante à figura que falta.*

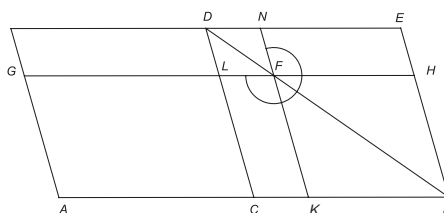


Figura 1.24: *Elementos* VI.27

Demonstração: Seja AB uma linha reta e seja C seu ponto médio; aplique à linha reta AB o paralelogramo de lados AC e CD , com falta do paralelogramo $DCBE$ descrito sobre metade de AB , ou seja, CB (Figura 1.24).

Afirmo que, de todos os paralelogramos aplicados a AB e com falta de paralelogramos semelhantes e semelhantemente situados a $DCBE$, o de lados AC e CD é o maior.

Com efeito, aplique à linha reta AB o paralelogramo $AKFG$, com falta do paralelogramo $FKBH$ e semelhantemente situado a $DCBE$. Então o paralelogramo de lados AC e CD é maior do que $AKFG$.

De fato, como o paralelogramo $DCBE$ é semelhante ao paralelogramo $FKBH$, eles estão situados sobre a mesma diagonal. Seja DB sua diagonal, e seja traçada a figura. Então, como $CKFL$ é igual a $FHEN$, e $FKBH$ é comum, o todo $CBHL$ é igual ao todo $KBEN$.

Mas $CBHL$ é igual a $CLGA$, pois AC é também igual a CB .

Portanto $GACL$ é também igual a $ENKB$.

Adicione $CKFL$ a ambos.

Assim o todo $AKFG$ é igual ao gnômon $LCBENF$; de maneira que o paralelogramo $DCBE$, ou seja, o paralelogramo de lados AC e CD , é maior do que o paralelogramo $AKFG$, como queríamos demonstrar. □

Podemos agora enunciar e mostrar como aplicar paralelogramos com uma área dada a uma reta, com falta ou com excesso de um paralelogramo semelhante a um outro paralelogramo dado.

Proposição VI.28: *Aplicar, a uma linha reta dada, um paralelogramo igual a uma figura retilínea dada com falta de um paralelogramo semelhante a um paralelogramo dado; assim, a figura retilínea dada não pode ser maior do que o paralelogramo descrito*

Assim, à linha reta dada AB , foi aplicado um paralelogramo $SQTA$ igual à figura retilínea dada C e com falta de um paralelogramo $QSBR$ que é semelhante a D . \square

Proposição VI.29: *Aplicar a uma linha reta dada um paralelogramo igual a uma figura retilínea dada com excesso de um paralelogramo semelhante a um paralelogramo dado.*

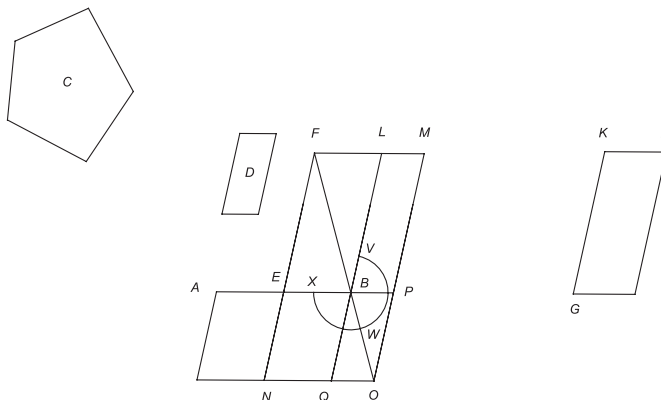


Figura 1.26: Elementos VI.29

Seja AB a linha reta dada, C a figura retilínea à qual a figura aplicada a AB tem que ser igual, e D a figura à qual o excesso deve ser semelhante (Figura 1.26).

Seja E o ponto médio de AB ; descreva sobre EB o paralelogramo $BLFE$ semelhante a D e semelhantemente situado. Construa o paralelogramo de lados GK e KH , igual à soma de $BLFE$ e C e semelhantemente situado a D .

Sejam KH e KG correspondentes, respectivamente, a FL e a FE .

Ora, como o paralelogramo de lados GK e KH é maior do que $FEBL$, segue-se que KH é também maior do que FL e KG é maior do que FE .

Prolongue FL e FE , e sejam FLM igual a KH e FEN igual a KG , e construa o paralelogramo $MFNO$. Então MN é simultaneamente igual e semelhante a GH .

Mas o paralelogramo de lados GK e HK é semelhante ao paralelogramo $EBLF$; portanto $MFNO$ é também semelhante a $EBLF$; e portanto EL está sobre a mesma diagonal que MN .

Trace a diagonal FO , e construa a figura.

Como o paralelogramo de lados GK e HK é igual a $EBLF$, C , enquanto que o paralelogramo de lados GK e HK é igual a $MFNO$, portanto $MFNO$ é também igual a $EBLF$, C .

De ambos, subtraia $EBLF$; portanto o restante, o gnômon $ENOMLB$ é igual a C .

Ora, como AE é igual a EB , o paralelogramo de lados AE e EN é também igual a $NQBE$ [I.36], ou seja, a $LBPM$ [I.43].

Acrescente $ENOP$ a ambos; o todo, o paralelogramo de lados AP e PO é igual ao gnômon $ENOMLB$. Mas o gnômon $ENOMLB$ é igual a C ; portanto o paralelogramo de lados AP e PO é também igual a C .

Portanto, foi aplicada à linha reta AB o paralelogramo o paralelogramo de lados AP e PO igual à figura retilínea C , com sobra de um paralelogramo $QOPB$ que é semelhante a D , pois $PBQO$ é também semelhante a $EBLF$. \square

Capítulo 2

OS TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS DA GEOMETRIA GREGA

É indubitável que, na História da Matemática, alguns problemas têm significação especial: agindo como “catalisadores” eles influenciam muito o desenvolvimento da ciência. Tais problemas atraem devido à simplicidade e lucidez de seus enunciados, fascinando muitos matemáticos. Como resultado, são elaborados novos métodos e até mesmo novas teorias e novas perguntas, profundas e abrangentes, são formuladas. (Raigorodski, 2004)

Os matemáticos gregos estudaram três problemas de Geometria que desempenharam papel importante no desenvolvimento da Matemática. Eles são problemas de construção e resistiram a todas as tentativas dos gregos para resolvê-los utilizando somente a régua sem graduação e o compasso, os únicos instrumentos empregados por Euclides nos Elementos. Os problemas, que ficaram conhecidos como os *três problemas clássicos*, são:

- 1 – A duplicação do cubo;
- 2 – A quadratura do círculo;
- 3 – A trissecação do ângulo.

Sabemos, desde o século XIX, que estes problemas não podem ser resolvidos somente com a régua e o compasso. Referências acessíveis sobre isso são, por exemplo, Courant and Robins (1996), Hadlock (1978), Klein (1930), Bunt, Jones and Bedient (1988, pp. 89-121). Uma discussão de por que os gregos tentavam resolver problemas de construção usando somente a régua e compasso, pode ser encontrada, por exemplo, em Bkouche et

Joölle, (1993).

Para os primeiros geômetras gregos, uma linha era o percurso de um ponto, e a linha reta era um percurso sem asperezas e desvios (Szabö, 2000). No entanto, aos poucos, os matemáticos gregos se distanciaram da realidade palpável, como se vê, por exemplo, em Platão:

[a Geometria] *tem por objeto o conhecimento do que sempre é e não do que nasce e perece.*

Passaram também a dar ao círculo e à reta papéis destacados:

... Aristóteles - O que não tem nem começo nem fim é portanto ilimitado
Parmênides- Ele é ilimitado.

Aristóteles - Portanto ele não tem forma, pois não participa nem do redondo nem do reto.

Além da idéia de perfeição ideal atribuída ao círculo e à linha reta uma outra razão para a restrição à régua e ao compasso pode ter sido à descoberta da irracionalidade de $\sqrt{2}$, número que pode, no entanto ser construído com régua e compasso. Esses instrumentos eram a garantia da existência de números como este.

No entanto, é falsa a crença de que os gregos, na resolução de problemas de construções geométricas, trabalhavam somente com a régua e o compasso. Exatamente como os matemáticos de hoje, para resolverem um problema eles usavam todas as ferramentas disponíveis ou criavam novas ferramentas apropriadas. De suas tentativas para achar soluções para os problemas clássicos, surgiram várias curvas e métodos que enriqueceram a Matemática. Encontram-se em Knorr (1986) e Bos (2001) construções geométricas, incluindo soluções dos três problemas clássicos, utilizando várias curvas e outros instrumentos.

O matemático van der Waerden (p. 263) resumiu a situação da seguinte maneira:

A idéia por vezes expressa de que os gregos permitiam somente construções com régua e compasso é inadmissível. Ela é negada pelas numerosas construções que nos chegaram para a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo. No entanto, é verdade que tais construções eram consideradas mais elementares, e Pappus afirma que sempre que uma construção for possível com régua e compasso métodos mais avançados não deveriam ser usados.

Isso parece seguir a mesma linha que o princípio da *navalha de Ockham*, muito posterior. Na linguagem popular, poderíamos dizer que não se deve usar um canhão para matar uma mosca.

É impossível superestimar a importância destes problemas. Como diz Yates, (1971, p. 5)

Na história da Matemática há três problemas que persistiram com vigor impressionante durante mais de dois mil anos. Eles são a trissecção do ângulo, a duplicação do cubo e a quadratura do círculo, e devido à sua existência robusta eles são atualmente chamados de problemas famosos. (...) Estes três problemas, solidamente inexpugnáveis malgrado todas as tentativas usando geometria plana, o método matemático dos antigos gregos, fizeram com que os matemáticos ficassem fascinados e construíssem novas técnicas e teoremas para sua solução. Por meio deste estímulo surgiu grande parte das estruturas atuais da álgebra e da geometria.

A procura constante de soluções para os três problemas durante tanto tempo forneceu descobertas frutíferas e que lançaram luz sobre tópicos bem distantes. Somente em 1837 é que foi demonstrado, por Wantzel, que um número real é construtível com régua e compasso se e somente se ele é um número algébrico, de grau uma potência de dois, sobre os racionais.

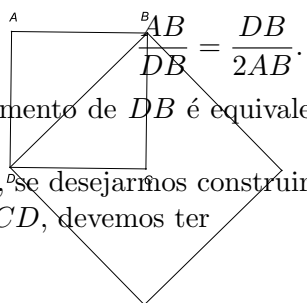
Os três problemas são muito naturais para quem tem curiosidade matemática. Sócrates, no diálogo *Meno* de Platão, usando perguntas apropriadas, faz com que um jovem escravo ache um quadrado cuja área é duas vezes a área de um quadrado dado. Isso pode ser feito facilmente usando régua e compasso.

Com efeito, o quadrado cujo lado é a diagonal do quadrado dado é a solução do problema. Se AB é o lado do quadrado dado (Figura 2.1), então

$$DB = \sqrt{2} \times AB \implies DB^2 = 2 \times AB^2.$$

Figura 2.1: Duplicação do quadrado

De $DB^2 = 2 \times AB^2$, vemos imediatamente que



$$\frac{AB}{DB} = \frac{DB}{2AB}.$$

Assim, achar o comprimento de DB é equivalente a inserir uma *meia proporcional* entre AB e $2AB$.

De maneira mais geral, se desejarmos construir um quadrado cuja área seja k vezes a área a do quadrado $ABCD$, devemos ter

$$\frac{AB}{DB} = \frac{DB}{kAB}.$$

Como veremos, a idéia de inserir meias proporcionais entre duas grandezas dadas está por traz da maioria das tentativas de duplicar o cubo.

“Quadrar” uma região plana consiste em traçar, *somente com régua e compasso*, um quadrado cuja área seja igual à área da região dada. O problema de quadrar qualquer região poligonal está completamente resolvido nos *Elementos* de Euclides, e já foi estudado no Capítulo 1. O problema da quadratura do círculo é também muito natural. Uma vez resolvido o problema da quadratura de qualquer região poligonal, o próximo passo é tentar “quadrar” regiões limitadas por linhas curvas. Entre estas regiões, o círculo é uma escolha óbvia. Isso levou à investigação das “lúnulas” por Hipócrates de Quios, em torno de 430 a.C. (van der Waerden, pp. 131-132). Curiosamente, somente há pouco tempo, em 1947, usando técnicas muito sofisticadas, é que o problema de achar todas as lúnulas “quadráveis” foi completamente resolvido (Scriba, 1987)!

A primeira menção conhecida do problema da quadratura do círculo encontra-se no problema 50 do papiro Rhind, em torno de 1600 a.C.:

Um campo circular tem 9 khet de diâmetro. Qual é a sua área? Resolução Tira 1/9 do diâmetro do seu diâmetro, isto é 1 Khet. O resto é 8 Khet. Multiplica 8 por 8; o que faz 64. Por isso, contém 64 setat de terra.

Nota: 1 setat é khet ao quadrado

Em sua comédia *Os pássaros*, Aristófanes introduz o astrônomo Meton e o ridiculariza por causa de suas tentativas de fazer a quadratura do círculo:

Farei minhas medições com um esquadro reto [90° graus], e assim você observa que o círculo se torna quadrangular.

Para Szabö (2000), o problema de quadratura que deu origem a todos os outros foi o de fazer a quadratura do retângulo. Este problema é facilmente resolvido com régua e compasso usando o resultado que, em um triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa é a meia proporcional entre os segmentos que ela determina sobre a hipotenusa.

Aristóteles,¹ por sua vez, pensa que este problema surgiu da procura da média geométrica (meia proporcional), mas que isso foi esquecido e só restou o próprio problema:

A definição não deve contentar-se em exprimir em que consiste a coisa (...), mas ela deve também incluir e exibir a causa. Ora, as definições são geralmente conclusões. Por exemplo, O que é a quadratura? É a igualdade de um quadrado e de um retângulo. Uma definição como essa é uma conclusão. Mas dizer que a quadratura é a descoberta da meia proporcional é exprimir a causa do que é definido.

¹ *Tratado da alma*, II,2, 413, 13-20

Semelhantemente, uma vez que se sabe dividir um ângulo ao meio (*Elementos*, I-9), é natural perguntar como dividir um ângulo em n partes; em particular, em 3 partes.

Embora não tenham conseguido resolver estes problemas com os instrumentos especificados, os matemáticos gregos não se deixaram intimidar e, com engenhosidade notável, foram capazes de achar soluções para os três problemas, usando vários outros tipos de instrumentos e construções.

Em verdade, da mesma maneira que a Matemática moderna cresce com respostas aos desafios de novos problemas, muito da Matemática grega se desenvolveu devido a tentativas de resolver os três problemas clássicos. Neste sentido, os matemáticos gregos eram realmente nossos colegas, pois tinham a mesma atitude mental dos matemáticos atuais e tentavam conscientemente atacar novos desafios. Quando os conceitos e técnicas existentes não conseguiam resolver estes problemas, eles inventavam novos conceitos e técnicas apropriadas para a tarefa.

2.1 A duplicação do cubo

O que sabemos sobre este problema encontra-se principalmente em Eutócio, um comentarista de Arquimedes.

Há duas lendas sobre a origem da duplicação do cubo, com detalhes contraditórios. Uma delas se refere à duplicação de um túmulo e a outra à duplicação de um altar (van der Waerden, pp. 160-161).

Segundo a primeira lenda, Minos mandou fazer um túmulo para Glauco. Ao saber que o túmulo era um cubo cuja aresta media 100 pés, ele disse que a residência real tinha sido construída demasiadamente pequena e que ela deveria ser duas vezes maior e ordenou imediatamente que duplicassem cada aresta do túmulo, sem estragar sua bela forma.

De acordo com a segunda lenda, quando um oráculo anunciou aos habitantes de Delos que, para se verem livres da peste, deveriam construir um altar duas vezes maior do que o existente, os arquitetos ficaram muito confusos, pois não sabiam construir um cubo duas vezes maior do que outro.

Hipócrates de Quios (viveu em torno de 430 a.C.) reduziu este problema ao de achar duas meias proporcionais x e y entre 1 e 2. Com efeito, se

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2},$$

vemos que

$$x^2 = y$$

e portanto, multiplicando ambos os membros por x , obtemos

$$x^3 = xy.$$

Mas, como

$$xy = 2,$$

vemos que

$$x^3 = 2.$$

No caso geral, se x e y são duas meias proporcionais entre a e b , temos

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

e disso vemos que

$$x^2 = ay$$

e que

$$xy = ab$$

e daí segue-se que

$$x^3 = axy = a^2b$$

e assim

$$\frac{x^3}{a^3} = \frac{a^2b}{a^3} = \frac{b}{a}.$$

Apresentaremos agora sete soluções do problema da duplicação do cubo, quase todas baseadas em achar duas meias proporcionais entre duas grandezas, usando construções que não podem ser efetuadas somente com régua e compasso e curvas que não podem ser traçadas usando somente estes dois instrumentos.

2.1.1 A máquina de Platão

O filósofo grego Platão (viveu de 429 a 347 a.C.) tinha grande interesse pela Matemática e lhe atribuía importância particular. Gravitaram em torno dele excelentes matemáticos, como Árqitas, Eudoxo, Menécmo, Teeteto, entre outros.

É bem conhecido que Platão desprezava construções mecânicas, materiais (ver van der Waerden, pp. 162-163) em Matemática. Assim, é irônico que a solução discutida a seguir seja conhecida como “máquina de Platão”.

A máquina de Platão (Figura 2.2) é um dispositivo, $ACDF$, formado por partes rígidas, com AC e FD paralelas e CD perpendicular a ambas. O segmento BE é paralelo a CD e pode deslizar ao longo de AC e de FD .

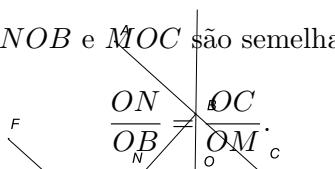
Para achar duas meias proporcionais entre $ON = a$ e $OM = b$, movimentamos $ACDF$ de maneira que o segmento CD passe por M , C esteja sobre o eixo horizontal e

Figura 2.2: A máquina de Platão

Figura 2.3: Meia proporcional entre $ON = a$ e $OM = b$

fazemos BE deslizar até que passe por N e B esteja sobre o eixo vertical, como mostrado na Figura 2.3.

Vemos que os triângulos NOB e MOC são semelhantes e portanto



É fácil ver que os triângulos NOB e OCB também são semelhantes. Logo,



e assim chegamos a

$$\frac{ON}{OB} = \frac{OB}{OC} = \frac{OC}{OM} \implies \frac{a}{OB} = \frac{OB}{OC} = \frac{OC}{b},$$

o que mostra que OB e OC são de fato meias proporcionais entre a e b .

2.1.2 A máquina de Eratóstenes

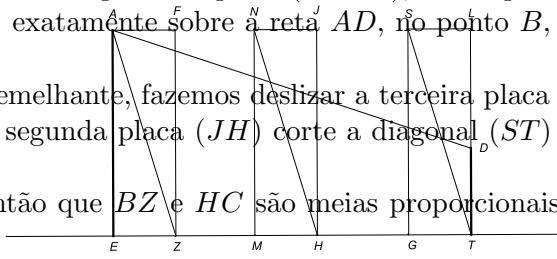
Considere três placas retangulares $AEZF$, $NMHJ$ e $SGTL$ (Figura 2.4), que podem deslizar sobre uma reta de maneira que a placa média, $(NMHJ)$, pode passar por traz da primeira, $(AEZF)$, e que a última, $(SGTL)$, deslize por traz da do meio. Suponha que desejamos achar duas meias proporcionais entre $a = AE$ e $b = DT$.

Figura 2.4: A máquina de Eratóstenes

Tracemos o segmento de reta AD e o prolongamos até a intersecção, K , com a reta que passa por ET . Fazemos as placas deslizar, da maneira descrita acima, de maneira que o lado direito ZF da primeira placa ($AEZF$), intercepte a diagonal NH da segunda placa, ($NMHJ$), exatamente sobre a reta AD , no ponto B , como mostrado na Figura 2.5.

De maneira semelhante, fazemos deslizar a terceira placa ($HGTL$) de tal forma que o lado direito da segunda placa (JH) corte a diagonal (ST) exatamente sobre AD , no ponto C .

Afirmamos então que BZ e HC são meias proporcionais entre AE e DT , ou seja, que



$$\frac{AE}{BZ} = \frac{BZ}{CH} = \frac{CH}{DT}$$

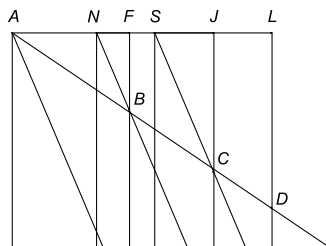
Figura 2.5: Meias proporcionais entre $AE = a$ e $DT = b$

Com efeito, como os triângulos AEK e BZK são semelhantes, temos

$$\frac{AE}{BZ} = \frac{KA}{KB} = \frac{KE}{KZ} \quad (2.1)$$

Temos também que os triângulos BZK e CHK são semelhantes, e portanto

$$\frac{BZ}{CH} = \frac{KZ}{KH} = \frac{KB}{KC} \quad (2.2)$$



Da semelhança dos triângulos CHK e DTK segue-se que

$$\frac{CH}{DT} = \frac{KH}{KT} = \frac{KC}{KD} \quad (2.3)$$

Da semelhança dos triângulos AZK e BHK decorre

$$\frac{AZ}{BH} = \frac{KZ}{KH} = \frac{KA}{KB} \quad (2.4)$$

Além disso, os triângulos BHK e CTK são semelhantes e, portanto,

$$\frac{BH}{CT} = \frac{KH}{KT} = \frac{KB}{KC} \quad (2.5)$$

De 2.3 e 2.5 obtemos

$$\frac{CH}{DT} = \frac{KH}{KT} = \frac{KC}{KD} = \frac{BH}{CT} = \frac{KB}{KC}, \quad (2.6)$$

pois ambos têm $\frac{KH}{KT}$ em comum.

Como 2.2 e 2.6 têm $\frac{KB}{KC}$ em comum, segue-se que

$$\frac{BZ}{CH} = \frac{KZ}{KH} = \frac{BK}{KC} = \frac{BH}{CT} = \frac{KH}{KT} = \frac{CH}{DT} = \frac{KC}{DK} \quad (2.7)$$

Como 2.1 e 2.4 têm $\frac{KA}{KB}$ em comum, segue-se que

$$\frac{AE}{BZ} = \frac{KA}{KB} = \frac{KE}{KZ} = \frac{AZ}{BH} = \frac{KZ}{KH} \quad (2.8)$$

Em 2.7 mantenhamos somente as razões que nos interessam:

$$\frac{BZ}{CH} = \frac{KZ}{KH} = \frac{CH}{DT} \quad (2.9)$$

Em 2.8 mantenhamos somente as razões que nos interessam:

$$\frac{AE}{BZ} = \frac{KZ}{KH} \quad (2.10)$$

Como 2.9 e 2.10 têm $\frac{KZ}{KH}$ em comum, obtemos, enfim, que

$$\frac{AE}{BZ} = \frac{BZ}{CH} = \frac{CH}{DT}, \quad (2.11)$$

o que queríamos demonstrar \square

O processo descoberto por Eratóstenes pode ser usado para inserir qualquer número de meias proporcionais entre a e b . Para inserir n meias proporcionais, é suficiente tomar $n + 1$ retângulos e proceder como acima.

2.1.3 A solução de Nicomedes

O método para duplicar o cubo encontrado por Nicomedes, que viveu em torno de 240 a.C., é verdadeiramente muito engenhoso.

Suponha que queremos inserir duas meias proporcionais entre $b = AB$ e $a = BC$ (Figura 2.6).

Figura 2.6: Meias proporcionais entre $a = BC$ e $b = AB$

Construa o retângulo $ABCL$. Seja D o ponto médio de AB e trace a reta que passa por L e D . Seja G seu ponto de intersecção com a reta que passa por C e B . Seja E o ponto médio de BC e trace a perpendicular a BC por E . Chame de F o ponto desta reta para o qual $BF = FC = AD$.

Trace a reta s que passa por F e por G e a paralela a s que passa por C , CH . Por F trace a reta FHK construída de tal maneira que $HK = CF = AD$. Trace a reta que passa pelos pontos K e L e chame de M sua intersecção com a reta definida por A e B .

Afirmamos que AM e CK são meias proporcionais entre a e b , ou seja, que

$$\frac{BC}{MA} = \frac{MA}{CK} = \frac{CK}{AB}. \quad (2.12)$$

Para compreender isso, devemos usar a Proposição II.6, dos *Elementos* de Euclides, já vista no Capítulo 1, p. 19.

Voltemos à justificacão da construção de Nicomedes, aplicando II-6 ao segmento BC cortado ao meio por E e prolongado até K :

$$BK \cdot KC + CE^2 = EK^2. \quad (2.13)$$

Adicionando EF^2 a ambos os lados desta igualdade e aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos EFK e CEF , temos

$$BK \cdot KC + CF^2 = FK^2. \quad (2.14)$$

Além disso, devido à semelhança dos triângulos AML e MBK temos que

$$\frac{AB}{MA} = \frac{LK}{ML} = \frac{CK}{BC}. \quad (2.15)$$

Observe que $BC = \frac{1}{2}GC$, devido à congruência dos triângulos GBD e DAL . Como $AB = 2AD$, temos

$$\frac{2 \cdot AD}{MA} = \frac{2 \cdot CK}{GC} \quad (2.16)$$

e assim,

$$\frac{AD}{MA} = \frac{CK}{GC} \quad (2.17)$$

Os triângulos GFK e CHK são semelhantes, pelo que obtemos

$$\frac{CK}{GC} = \frac{HK}{FH} \quad (2.18)$$

e daí segue-se que

$$\frac{AD}{MA} = \frac{CK}{GC} = \frac{HK}{FH}. \quad (2.19)$$

Temos então que

$$\frac{AD}{MA + AD} = \frac{HK}{FH + HK}. \quad (2.20)$$

Portanto

$$\frac{AD}{MD} = \frac{HK}{FK}. \quad (2.21)$$

Como $HK = AD$ por construção, segue-se de 2.21 que $MD = FK$ e assim, de 2.14, temos

$$BK \cdot KC + CF^2 = FK^2. \quad (2.22)$$

Usaremos mais uma vez Euclides II-6 (p. 19), agora aplicada ao segmento BA , cujo ponto médio é D , e prolongado até M :

$$BM \cdot MA + AD^2 = MD^2. \quad (2.23)$$

Como $MD = FK$, vemos que

$$BM \cdot MA + AD^2 = FK^2. \quad (2.24)$$

Comparando 2.22 e 2.24 vemos que

$$BM \cdot MA = BK \cdot KC \quad (2.25)$$

de maneira que

$$\frac{BK}{BM} = \frac{MA}{CK}. \quad (2.26)$$

Da semelhança dos triângulos MBK , MAL e LCK segue-se que

$$\frac{BK}{BM} = \frac{AL}{MA} = \frac{CK}{LC} \quad (2.27)$$

Finalmente, usando 2.26 e 2.27, temos que:

$$\frac{CK}{LC} = \frac{MA}{CK} = \frac{AL}{MA} \quad (2.28)$$

Como $LC = AB$, $AL = BC$, temos, enfim, que

$$\frac{BC}{MA} = \frac{MA}{CK} = \frac{CK}{AB}, \quad (2.29)$$

o que queríamos demonstrar. \square

A demonstração que acabamos de apresentar encontra-se em Heath (1981). Daremos a seguir uma demonstração analítica para a construção de Nicomedes (Veja Boos, 2001).

Na Figura 2.6, faça $x = FH$ e $y = CK$. Então, nos triângulos retângulos EFK e EFC temos que

$$EF^2 + EK^2 = FK^2, \quad (2.30)$$

$$EF^2 + EC^2 = FC^2. \quad (2.31)$$

De 2.30 e de 2.31 vemos imediatamente que

$$FK^2 - EK^2 = FC^2 - EC^2 \quad (2.32)$$

e assim

$$\left(\frac{1}{2}b + x\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a + y\right)^2 = \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2. \quad (2.33)$$

Disso, segue-se imediatamente que

$$ay + y^2 = bx + x^2. \quad (2.34)$$

Logo

$$\frac{a + y}{b + x} = \frac{x}{y}. \quad (2.35)$$

Os triângulos CHK e GFK são semelhantes e podemos portanto escrever

$$\frac{HK}{CK} = \frac{FH}{GC}, \quad (2.36)$$

ou seja

$$\frac{\frac{1}{2}b}{y} = \frac{x}{2a} \implies \frac{b}{y} = \frac{x}{a} \implies \frac{a}{x} = \frac{y}{b}. \quad (2.37)$$

Mas então

$$\frac{a+y}{y} = \frac{x+b}{b} \implies \frac{a+y}{x+b} = \frac{y}{b}. \quad (2.38)$$

De 2.34 e 2.36 vemos que

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{b} \implies \frac{x}{y} = \frac{y}{b} = \frac{a}{x} \quad (2.39)$$

e assim

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}. \quad (2.40)$$

Como, pela semelhança dos triângulos AML e LCK , temos que

$$\frac{a}{AM} = \frac{y}{b}, \quad (2.41)$$

vemos imediatamente que

$$AM = x, \quad (2.42)$$

o que conclui a demonstração.

Na construção apresentada por Nicomedes (Figura 2.6), foi necessário construir a reta FK tal que $HK = CF = AD$. Ou seja, tivemos que *ajustar* o segmento de comprimento AD sobre o segmento FK , a partir de K . Este tipo de construção, que não pode ser efetuado com régua e compasso, é chamado de *construção por neusis* ou *por ajustamento*. Ela é utilizada em várias soluções dos três problemas clássicos, em particular por Arquimedes

2.1.4 A Construção de Árqitas

Vamos agora considerar uma das soluções mais engenhosas do problema de duplicar um cubo, devida a Árqitas (viveu em torno de 390 a.C.). Reproduzimos aqui a solução apresentada em Teixeira (1995, pp. 289-290). Embora o raciocínio de Árqitas seja puramente geométrico (veja van der Waerden, p. 151 ou Heath, 1981, vol 1, pp. 246-249), usaremos seu equivalente analítico, mais familiar para nós, habituados com a linguagem algébrica.

Sejam a e b os dois segmentos dados, com $b < a$, para os quais desejamos construir duas meias proporcionais. Sejam OCA' uma circunferência cujo diâmetro OA' é igual a a e uma outra circunferência OBA , cujo diâmetro é igual a b e que está contida em um plano perpendicular ao plano da primeira circunferência (Veja a Figura 2.7).

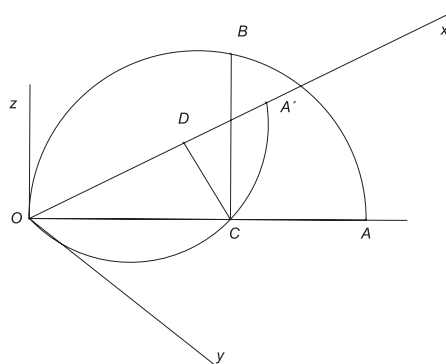


Figura 2.7: Duplicação do cubo por Arquitas

Considere o cilindro circular reto gerado pela circunferência OCA' e o toro gerado pela circunferência OBA ao girar em torno da reta OZ , perpendicular ao plano de OCA' .

A intersecção destas duas superfícies define uma curva, chamada *curva de Arquitas*, dada pelas equações

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= ax, \\(x^2 + y^2 + z^2)^2 &= a^2(x^2 + y^2).\end{aligned}$$

Seja $\Theta = \frac{b}{a}$ e considere o cone cujo eixo é a reta OA' e cuja geratriz forma com o eixo o ângulo Θ . A equação deste cone é

$$(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{a^2}{b^2}x^2. \quad (2.43)$$

Seja D a projeção de C sobre Ox . Então a *curva de Arquitas* corta o cone no ponto B cuja projeção sobre o plano de OCA' é o ponto C da circunferência tal que $\frac{OC}{OB} = \frac{b}{a}$. Afirmamos que OC e OB são duas meias proporcionais entre a e b . Com efeito,

$$\begin{aligned}OC^2 &= a \cdot OD, \\OB^2 &= a \cdot OC, \\b \cdot OB &= a \cdot OD.\end{aligned}$$

Disso, decorre que

$$\begin{aligned}OC^2 &= b \cdot OD, \\OB^2 &= a \cdot OC,\end{aligned}$$

e temos enfim que

$$\frac{a}{OB} = \frac{OB}{OC} = \frac{OC}{b}.$$

□

Teixeira (1995, p. 290) comenta que

Esta solução é muito engenhosa e tem grande interesse histórico, porque é o mais antigo exemplo de solução de um problema de geometria plana usando geometria espacial, e a curva usada é a mais antiga curva reversa conhecida.

Comentando a versão original, geométrica, desta solução, van der Waerden (p. 151) afirma que Árquitas deve ter tido uma inspiração divina para achar esta construção.

2.1.5 A solução achada por Menécmo

Menécmo viveu em torno de 350 a.C. Em seu *Comentário sobre o primeiro livro de Euclides*, Proclus, no *Sumário de Eudemo*, afirma que Menécmo foi um aluno de Eudoxo e um membro dos filósofos e matemáticos em torno de Platão. Ele era irmão de Dinóstrato o qual, segundo Proclus, "aperfeiçoou ainda mais a geometria".

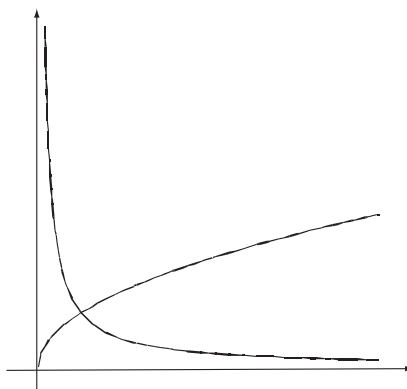


Figura 2.8: Duplicação do cubo por Menécmo

Se x e y são duas meias proporcionais entre a e b , temos que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

Isso é inteiramente equivalente às equações simultâneas,

$$y^2 = bx, \quad xy = ab.$$

Assim, para resolver o problema, é suficiente achar a intersecção das parábolas e hipérbolas definidas por estas equações, respectivamente (Veja a Figura 2.8). As coordenadas deste ponto são as meias proporcionais que estamos procurando.

É óbvio que 2.1.5 é também equivalente a

$$y^2 = bx, \quad x^2 = ay \quad (2.44)$$

Desta maneira, o problema pode também ser resolvido usando duas parábolas cujos vértices coincidem e cujos eixos são ortogonais. Estas duas soluções são descritas por Eutócio em seu comentário do *Tratado sobre a esfera e o cilindro*, de Arquimedes.

Nem todas as soluções deste problema consistiam em inserir duas meias proporcionais entre duas grandezas dadas. Isso pode ser verificado pela solução devida a Diocles. É claro que Menécmo não formulou sua solução usando a representação analítica das parábolas ou hipérbolas, mas seu raciocínio é equivalente a isso.

2.1.6 O método de Diocles

A solução de Diocles se baseia na cissóide, uma curva definida da seguinte maneira:

Seja uma circunferência que passa pela origem O do sistema de coordenadas, tem seu centro sobre o eixo dos x e diâmetro igual a 1. Sejam $T = (1, 0)$ e r a reta vertical que passa por T . Seja P um ponto qualquer sobre a circunferência. A reta que passa por O e por P intercepta r no ponto W . Tome o ponto M sobre OW tal que $OP = MW$. A *cissóide* é o lugar geométrico do ponto M quando P percorre a circunferência (Veja a Figura 2.9, que não mostra toda a cissóide, mas somente a parte que nos interessa para a resolução do problema da duplicação do cubo).

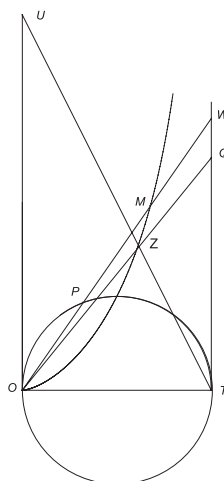


Figura 2.9: Duplicação do cubo usando a cissóide

A equação polar de uma circunferência que passa pela origem, tem raio R , e centro sobre o eixo dos x é

$$\frac{\rho}{2R} = \cos \theta.$$

Em nosso caso $R = \frac{1}{2}$, e portanto a equação 2.1.6 se reduz a $\rho = \cos \theta$.

Por outro lado, $OW = \frac{1}{\cos \theta}$.

Como $OM = OW - OP$, a equação polar da cissóide é

$$\rho = \frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta = \frac{\text{sen}^2 \theta}{\cos \theta}$$

Para achar a equação cartesiana da cissóide temos que:

$$x = \rho \cdot \cos \theta = \text{sen}^2 \theta = \frac{\text{tg}^2 \theta}{1 + \text{tg}^2 \theta} = \frac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} = \frac{y^2}{x^2 + y^2},$$

ou seja,

$$x(x^2 + y^2) - y^2 = 0.$$

Seja $U(0, 2)$ e considere o ponto de intersecção, $Z = (a, b)$, da reta TU com a cissóide. A equação cartesiana da reta TU é $y = 2(1 - x)$, de maneira que $b = 2(1 - a)$, e assim, como Z pertence à cissóide,

$$\begin{aligned} a(a^2 + b^2) - b^2 = 0 &\implies a^3 + ab^2 - b^2 = 0 \implies \\ a^3 = b^2(1 - a) = \frac{b^3}{2} &\implies 2a^3 = b^3. \end{aligned}$$

É imediato então que $\frac{b}{a} = \sqrt[3]{2}$. Assim, a equação cartesiana da reta que passa por O e por Z é $y = \sqrt[3]{2}x$. Seja Q o ponto de intersecção dessa reta com a reta $x = 1$. Temos, então, que as coordenadas de Q são $(1, \sqrt[3]{2})$.

Se temos um cubo cuja aresta mede 1, para duplicar seu volume, devemos achar a aresta y de um cubo que tem volume 2. Ou seja, devemos ter $y = \sqrt[3]{2}$. Vemos portanto que a ordenada do ponto Q , achada acima, resolve o problema.

2.1.7 O método de Hierão

Descrevemos a seguir o método proposto por Hierão² para achar duas meias proporcionais entre os segmentos a e b .

Construa o retângulo $OACB$, no qual $AO = a$ e $AB = b$ (Figura 2.10). Seja D o centro do retângulo. Tome uma régua que passa por B e sejam E e F seus pontos de intersecção com as retas definidas por AO e OB respectivamente. Faça a régua

²Matemático e físico grego, que viveu em torno de 60 d.C., em Alexandria.

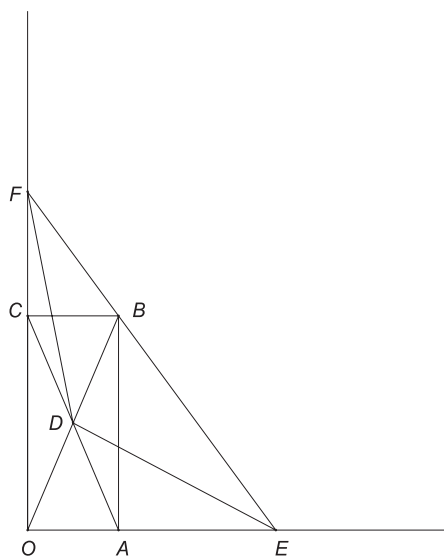


Figura 2.10: Método de Hierão para achar meias proporcionais

girar até que $DF = DE$. Afirmamos então que $CF = x$ e $AE = y$ são as duas meias proporcionais entre a e b .

Com efeito, usando a semelhança dos triângulos FBC , BAE e FOE , temos que

$$\frac{a}{x} = \frac{y}{b} = \frac{a+y}{b+x}.$$

Como $DE^2 = DF^2$, segue-se que

$$\left(y + \frac{1}{2}a\right)^2 + \frac{1}{4}b^2 = \left(x + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{1}{4}a^2,$$

de que obtemos $y(a+y) = x(b+x)$. Desta última igualdade decorre que

$$\frac{x}{y} = \frac{a+y}{b+x}.$$

e daí vemos imediatamente que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

Mais detalhes sobre a duplicação do cubo podem ser achados em Heath (1981, vol 1, pp 244-270). Uma explicação lúcida da solução de Árqitas encontra-se em van der Waerden (pp. 150-152), Heath (1981, vol 1, pp. 246-249) e Teixeira (1995, pp 285-326), o qual apresenta um total de 17 soluções para a duplicação do cubo, incluindo os métodos propostos por Viète, Descartes, Fermat, Newton e Clairaut.

2.2 A quadratura do círculo

“Quadrar” o círculo, ou seja, construir, com régua e compasso, um quadrado com área igual à área do círculo é um problema bem natural, uma vez resolvido o problema de fazer a quadratura de polígonos! Veremos agora como os matemáticos gregos encontraram maneiras de resolver este problema usando curvas e construções que não podem ser obtidas somente com régua e compasso.

A origem do interesse grego nos problemas de quadratura é pouco conhecida. Segundo Zsabo (2000), o problema primitivo do qual se originaram todos os outros foi o da quadratura do retângulo. Aristóteles afirma que a origem deste problema foi a procura da média geométrica, mas que isso foi esquecido e que só foi preservado o problema.

2.2.1 A quadratriz

Esta curva notável resolve dois dos problemas clássicos: a quadratura do círculo e a trisseção de um ângulo arbitrário. Para construí-la, suponhamos que no quadrado $ABCD$ o lado AD gira com movimento circular uniforme em torno de A até que coincida com o lado AB . Ao mesmo tempo, o lado DC desce com velocidade constante até coincidir com AB . Os dois movimentos estão sincronizados de maneira que ambos os lados, DC e AD coincidam com AB no mesmo instante.

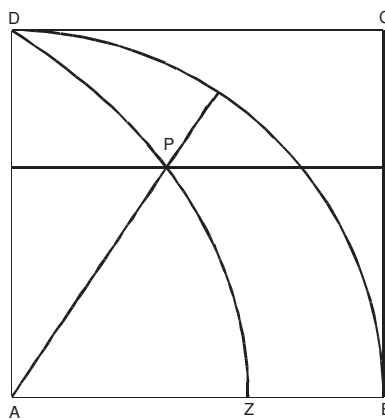


Figura 2.11: Duplicação do cubo com a quadratriz

A *quadratriz* é o lugar geométrico gerado pelas intersecções destes dois lados móveis. É a curva DPZ da Figura 2.11. Ela foi inventada por Hípias de Elis (viveu em torno de 420 a.C.), originariamente em suas tentativas para trissectar o ângulo. Tudo indica que foi Dinóstrato (viveu em torno de 350 a.C.) quem pela primeira vez usou esta curva para fazer a quadratura do círculo.

Afirmamos que $AZ = \frac{2a}{\pi}$, com a o comprimento do lado do quadrado. Com efeito, sejam θ o ângulo PAZ , $x = MP$, $y = AM$, $AB = AD = DC = a$ e $\rho = AP$. Então,

devido à proporcionalidade dos dois movimentos, temos que $\frac{y}{\theta} = k$, com k a constante de proporcionalidade. Quando $\theta = \frac{\pi}{2}$, temos que

$$\frac{a}{\frac{\pi}{2}} = k,$$

de maneira que

$$k = \frac{2a}{\pi}$$

e podemos concluir que

$$\theta = \frac{\pi y}{2a} \implies y = \frac{2a\theta}{\pi}.$$

Assim,

$$\frac{y}{\rho} = \text{sen } \theta \implies \rho = \frac{y}{\text{sen } \theta} = \frac{2a\theta}{\pi \text{sen } \theta}.$$

Temos então que

$$AZ = \lim_{\theta \rightarrow 0} \rho = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2a\theta}{\pi}.$$

Quando $\theta \rightarrow 0$,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\text{sen } \theta} = 1.$$

e assim vemos que

$$AZ = \rho = \frac{2a}{\pi}.$$

Após obter um segmento de comprimento $\frac{2a}{\pi}$ é imediato construir π para fazer a quadratura do círculo. Com efeito, é fácil dividir, usando somente régua e compasso, $\frac{2a}{\pi}$ por $2a$ e, em seguida, tomar o inverso de $\frac{1}{\pi}$.

Um tratamento mais completo do problema da quadratura do círculo pode ser encontrado em Heath (1981, vol I, pp. 220-235). Uma boa exposição encontra-se em Teixeira (1995, pp. 362-384). A história detalhada do número π pode ser lida em Beckmann (1977).

2.3 A trisseção do ângulo

Voltamo-nos agora para o terceiro dos problemas clássicos, ou seja, a trisseção de um ângulo qualquer. Este problema pode ser resolvido de várias maneiras. Acredita-se que Hípias de Elis, que viveu no século V a.C. foi um dos primeiros a tentar resolver este problema, utilizando curvas e construções que não podem ser efetuadas somente com régua e compasso.

Faremos, em primeiro lugar, uma digressão sobre as *construções por ajustamento* ou *por neusis*.

Em uma construção por neusis deve-se ajustar um segmento dado entre duas curvas dadas, com a exigência de que o segmento passe por um ponto dado. Nas palavras de Heath (1953, p. c)

Assim, uma linha reta tem que colocada entre duas linhas ou curvas de maneira que passe por um ponto dado e o segmento determinado sobre ela pelas intersecções com as linhas ou curvas seja igual a um comprimento dado.

Mostremos um exemplo de uma construção por neusis.

2.3.1 A trissecção do ângulo por Arquimedes

A construção que mostraremos a seguir, que utiliza *neusis*, é um exemplo das várias soluções do problema da trissecção do ângulo propostas por Arquimedes.

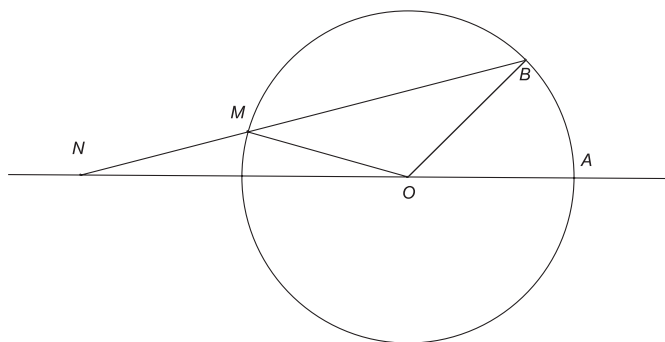


Figura 2.12: Trissecção do ângulo por Arquimedes

Suponha que desejamos trissectar o ângulo BOA . Tome uma reta r que passa por B e, tendo o cuidado para que ela sempre passe por B , movimente-a para que o segmento MN seja igual ao raio OM do círculo. Isso é exatamente o que se denomina uma construção por neusis: *Ajustamos* um segmento (o raio OM) entre o círculo e a linha reta que passa por C e por A .

Observe que os triângulos NMO e MOB são isósceles, de maneira que $x = \widehat{MNO} = \widehat{MON}$. De maneira semelhante, $\widehat{BMO} = \widehat{OBM}$.

No triângulo NOM , o teorema do ângulo externo permite escrever que $\widehat{BMO} = \widehat{MBO} = 2 \times \widehat{MNO}$. Aplicando o teorema do ângulo externo ao triângulo BNO , vemos que $\widehat{BOA} = \widehat{BNO} + \widehat{MBO} = 3 \times \widehat{BNO}$, e vemos assim que com esta construção é possível dividir o ângulo BOA em três partes iguais. \square

2.3.2 A trissecção do ângulo por Nicomedes

Examinemos agora outro exemplo de trissecção do ângulo, devido a Nicomedes, no qual ele utiliza uma construção por ajustamento.

Suponha que desejamos trissectar o ângulo $\alpha = AOB$. Por B levante uma reta perpendicular a OB e por A uma reta paralela a OB (Figura 2.13). Trace uma reta por O e sejam P e C suas intersecções com AB e AC respectivamente. Mova-a de maneira que $PC = 2OA$. Afirmamos que $\widehat{POB} = \widehat{AOB}/3$.

Figura 2.13: Trissecção do ângulo por Nicomedes

Com efeito, seja D o ponto médio de PC . Então o triângulo APC está inscrito em um círculo de centro D e raio PD , e assim $PD = AD = DC = OA$. Sejam $\beta = \widehat{AOD} = \widehat{ADO}$ e $\phi = \widehat{DAC} = \widehat{ACD}$. Aplicando o teorema do ângulo externo ao triângulo ADC vemos que $\beta = 2\phi$. Como AC e OB são paralelas, segue-se que $\phi = \widehat{POB}$ e portanto $\alpha = 3\phi$.

A construção neusis usada neste problema pode ser efetuada usando a *conchóide de Nicomedes*, cuja definição é dada a seguir.

Figura 2.14: Conchóide de Nicomedes

Sejam K um ponto fixo, o pólo da conchóide, e uma linha reta SA , denominada *diretriz* da conchóide, e um comprimento fixo d , chamado de *distância* da conchóide.

A conchóide é a curva gerada por P quando S se desloca sobre AB e o comprimento do segmento PS permanece sempre igual a d (Figura 2.14).

Para vermos que a conchóide pode ser usada para a trissecção do ângulo proposta por Nicomedes, trace a conchóide com pólo O , diretriz AB e distância igual a duas vezes OA . A intersecção C desta conchóide com a paralela a OB que passa por A é o ponto procurado, como já foi mostrado.

A conchóide pode também ser usada na duplicação do cubo feita por Nicomedes feita na página 40. Com efeito, a intersecção K da conchóide cujo pólo é F , diretriz CH e distância AD com a linha reta definida por G e C é exatamente o ponto que achamos anteriormente (compare com a Figura 2.6).

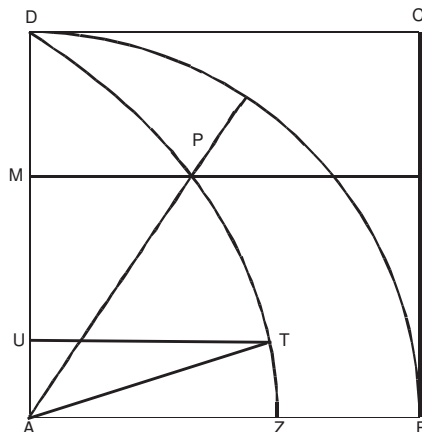


Figura 2.15: Trissecção do ângulo com a quadratriz

2.3.3 A trissecção do ângulo usando a quadratriz

Já dissemos que a quadratriz foi utilizada em primeiro lugar para resolver o problema da trissecção do ângulo. Como acontece freqüentemente em Matemática, às vezes uma idéia que permite atacar com sucesso um problema mostra, posteriormente, ser capaz de resolver outros problemas. Isso aconteceu com a quadratriz, pois foi logo depois observado que ela também permite resolver o problema da quadratura do círculo.

Suponha que desejamos dividir o ângulo PAZ em três partes iguais. Por P , trace a paralela a AZ que intercepta AD em M (Figura 2.15). Divida o segmento AM em três partes iguais e seja AU uma dessas partes. Por U trace a paralela a AZ que corta a quadratriz no ponto T . Por proporcionalidade, o tempo gasto por P para chegar a T é igual ao tempo gasto por M para chegar a U , e é igual a $2/3$ do tempo que P gasta para chegar a Z . Assim, $\widehat{PAZ} = 3 \times \widehat{TÁZ}$.

Esta é a solução mais antiga que conhecemos para o problema da trissecção do ângulo. Um tratamento mais amplo deste problema pode ser encontrado em Heath (1981, vol I, pp 235-244). Para uma discussão geral de problemas resolvidos usando construções neusis, ver Heath (1953, Capítulo V, pp. c-cxxii) e um tratamento mais didático em Yates (1971). Várias outras construções podem ser achadas em Teixeira (1995, pp. 327-358). Consultar também Dudley (1987) em que se encontram muitos processos aproximados ou exatos para trissectar um ângulo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. AABOE, Asger: *Episódios da História antiga da Matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2003.
2. BECKMANN, Peter: *A history of pi*. 4th ed. Boulder, Colorado: Golem Press, 1977.
3. BOS, Henk J. M.: *Redefining geometrical exactness: Descartes' transformation of the early modern concept of construction*. New York: Springer, 2001.
4. BUNT, Lucas N. H., Phillip S. JONES and Jack D. BEDIANT: *The historical roots of elementary mathematics*. New York: Dover, 1988.
5. COURANT, Richard and Herbert ROBBINS: *What is mathematics?* New York: Oxford University Press, 1996.
6. BKOUCHE, Rudolf et Joëlle DELATTRE: "Pourquoi la règle et le compas". Commission Inter-IREM, *Histoire de problèmes, Histoire des Mathématiques*. Paris: Ellipses, 1993.
7. DUDLEY, Underwood: *A budget of trisections*. New York: Springer, 1987.
8. ENRIQUES, Federico: *Los elementos de Euclides y la crítica antigua y moderna – libros I-IV*. Madrid: Instituto "Jorge Juan" de Matemáticas, 1954.
9. EVES, Howard: *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora da UNICAMP, 1995.
10. HADLOCK, Charles Robert: *Field theory and its classical problems*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1978. (Carus Mathematical Monographs 18).
11. FRIED, Michael N. and Sabetai UNGURU: *Apollonius of Perga's Conica: text, context, subtext*. Leiden: Brill, 2001.
12. HEATH, Thomas L.: *The works of Archimedes*. New York: Dover, 1953.

13. HEATH, Thomas L.: *The Thirteen books of Euclid's Elements*, vols 1, 2, 3. New York, Dover, 1956.
14. HEATH, Thomas L.: *A history of Greek mathematics*, two volumes. New York: Dover, 1981.
15. JOSEPH, George Gheverghese: *The crest of the peacock- Non-european roots of mathematics*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2000.
16. KATZ, Victor J.: *A History of Mathematics – an introduction*. New York: Harper-Collins, 1993.
17. KLEIN, Felix: *Famous problems of elementary geometry*, translated by Wooster Woodruff Beman e David Eugene Smith. New York: G. E. Stechert & Co. 1930.
18. KNORR, Wilbur Richard: *The evolution of the euclidean elements: a study of the theory of incommensurable magnitudes and its significance for early Greek geometry*. Dordrecht [u.a.], Holanda: Reidel, 1975.
19. KNORR, Wilbur Richard: *The ancient tradition of geometric problems*. Boston, Basel, Stuttgart: Birkhäuser, 1986.
20. LÜTZEN, Jesper and Walter PURKERT: "Conflicting tendencies in the historiography of mathematics: M. Cantor and H. G. Zeuthen". David E. Rowe, John McCleary and Eberhard Knobloch (eds.) *The history of modern mathematics*, vol III: *Images, ideas and communities*. San Diego, California: Academic Press, 1994.
21. MACHADO, Fernanda e outros: "Por que Báskhara?", in *História e educação matemática*, vol 2, no 2, jan/jun 2003, pp.119-166.
22. MAHHAMMED, Norredine: *Sur la résolution des équations algébriques*. Lille: IREM de Lille, 1995.
23. MUELLER, Ian: *Philosophy of mathematics and deductive structure in Euclid's elements*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1981.
24. NOBRE, Sérgio: *História da equação do 2º grau: Uma abordagem pedagógica*. Rio Claro: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2003.
25. RAIGORODSKI, Andrei M.: "The Borsuk partition problem: the seventieth anniversary". *The mathematical intelligencer*, vol 26, n. 3, 2004, pp 4-12.
26. SANTOS, Christovam dos: "Trissecção de um ângulo". *Revista brasileira de Matemática*. Ano 2, n. 5, jan/1931, p. 43 - 47.
27. SCRIBA, Christoph J.: "On the so-called 'Classical Problems' in the History of Mathematics". Ivor Grattan-Guinness (ed.) *Cahiers d'Histoire & de Philosophie des Sciences*, nº 21–1987, *History in mathematics education*. Proceedings of a Workshop held at the University of Toronto, Canada, July – August 1983. Paris: Belin, 1987.

28. SIMSON, Robert: *Elementos de Euclides. Dos seis primeiros livros, do undécimo e duodécimo, da versão latina de Frederico Commandino, adicionados e ilustrados por Roberto Simson, Professor de Mathematica na Academia de Glasgow.* Coimbra: Real Imprensa da Universidade, 1773. Com privilégio real.
29. SZABO, Arpad: *L'aube des mathématiques grecques.* Paris: Vrin, 2000.
30. TEIXEIRA, Francisco Gomes: *Traité des courbes spéciales planes et gauches*, vol III. Paris: Jacques Gabay, 1995. (1^a ed. Coimbra: Universidade de Coimbra, 1909).
31. TRÖPFKE, Johannes : "Zur Geschichte der quadratischen Gleichungen über dreieinhalb Jahrtausend". *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung*, 43(98-107), 44(26-47, 95-119).
32. TRÖPFKE, Johannes: *Geschichte der Elementarmathematik. Band 1 – Arithmetik und Algebra.* Vollständig neu bearbeitet von Kurt Vogel, Karin Reich, Helmut Gericke. Berlin: Walter de Gruyter, 1980, 4te Auflage.
33. UNGURU, Sabetai: "Does the quadratic equation have greek roots - I". *Libertas Mathematica*, I, 1981, pp. 1 -39.
34. UNGURU, Sabetai: "Does the quadratic equation have greek roots - II". *Libertas Mathematica*, II, 1982, pp. 1 -62.
35. VITRAC, Bernard: *Les éléments: traduits du texte de Heiberg / Euclide d'Alexandrie.* Introduction générale; Livres I - IV: Géométrie plane. Paris: Presses Univ. de France: 1. éd. - 1990.
36. VITRAC, Bernard: *Les éléments: traduits du texte de Heiberg / Euclide d'Alexandrie.* Livres V - VI: Proportions et similitude; Livres VII - IX: Arithmétique. Paris: Presses Univ. de France: 1. éd. - 1994.
37. van der WAERDEN, B. L. : *Science Awakening I.* Third edition. Grönigen: Wolters Noordhoff, s/d.
38. van der WAERDEN, B. L. : *Geometry and algebra in ancient civilizations.* New York: Springer Verlag, 1983.
39. van der WAERDEN, B. L. : *A History os algebra, from al-Khwarizmi to Emmi Noether.* New York: Springer Verlag, 1985.
40. WANTZEL, Pierre: "Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se resoudre avec règle et compas". *Journal de Mathématiques*, 2, 366-372, 1837.
41. YATES, Robert C. : *The trisection problem.* Reston, Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics, 1971. Classics in mathematics education, vol 4.

42. ZEUTHEN, Hieronymus G. : *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*. Hildesheim, Alemanha: Olms, 1966. Repr. d. Ausg. Kopenhagen 1886a.
43. ZEUTHEN, Hieronymus G. : *Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter*. New York:Johnson Teubner, 1966b.

Índice Remissivo

- Árquitas, 7, 36, 43, 45
 curva de, 44
 duplicação do cubo, 43, 48
Sumário de Eudemo, 45
- Aaboe, viii
- aplicação de áreas, 6, 11, 15, 21, 25, 26
 elíptica, 21, 26
 hiperbólica, 21, 22, 26, 28
 parabólica, 21
- Apolônio, 7
 As cônicas, 7
- Aristóteles, 7
- Aristófanes
 Os pássaros, 34
- Aristóteles, 32, 34
 média geométrica, 49
- Arquimedes, 7, 35
 Tratado sobre a esfera e o cilindro, 46
 construções por neusis, 43
 trissecação do ângulo, 51
- Clairaut, Alexis Claude
 duplicação do cubo, 48
- Commandino, 11
- Conchóide
 Nicomedes, 52
- conchóide
 diretriz da, 52
 distância da, 52
 pólo da, 52
 trissecação do ângulo, 52
- congruência, 13
 de figuras, 13
 de triângulos, 11, 13
- construção
 por ajustamento, 51
 por neusis, 51
- Dedekind, 24
 cortes de, 24
- Descartes, René
 duplicação do cubo, 48
- Dinóstrato, 45, 49
 quadratura do círculo, 49
- Diocles, 46
 cissóide, 46
 duplicação do cubo, 46
- duplicação
 do cubo, 7
- duplicação
 do cubo, 31–33, 48
 Árquitas, 43
 Clairaut, 48
 Descartes, 48
 Diocles, 46
 Eratóstenes, 37
 Fermat, 48
 Hierão, 47
 Menécmo, 45
 Newton, 48
 Nicomedes, 40
 Platão, 36
 Viète, 48
 do quadrado, 33
- Enriques, 14
- equivalência de áreas, 10, 11
- Eratóstenes
 duplicação do cubo, 37
 máquina de, 37
- Euclides, 5, 11, 13

- Elementos*, viii, 5, 7, 8, 11, 14, 18, 24,
 31, 40
 I-9, 35
 I.26, 11, 13
 I.34, 11
 I.35, 11
 I.36, 13
 I.37, 14
 I.38, 14
 I.4, 11, 13
 I.42, 16
 I.43, 14
 I.44, 16, 17, 21
 I.45, 17
 I.47, 9
 I.8, 11, 13
 II.14, 20
 II.5, 18, 22, 23
 II.6, 19, 24
 Livro I, 11, 25
 Livro II, 11
 Livro V, 11, 22, 24, 25
 Livro VI, 24, 25
 música teórica, 7
 VI.25, 25
 VI.27, 26
 VI.28, 26
 VI.29, 28
 Eudemo, 7
 Eudoxo, 6, 24, 36, 45
 teoria das proporções, 8, 10, 11, 22, 24
 Eutócio, 35, 46
 Fermat, Pierre de
 duplicação do cubo, 48
 grandezas
 comensuráveis, 8
 incomensuráveis, 8, 24
 Hípias
 quadratriz, 49
 trissecação do ângulo, 50
 Heath, Thomas Little, viii
The elements of Euclid, 9
The Elements of Euclid, 5
The elements of Euclid, 42, 43, 48, 50,
 51, 53
 Herôdoto, 6
 Hierão
 duplicação do cubo, 47
 Hipócrates, 35
 lúnulas, 34
 iguadade, 13
 igualdade
 de figuras, 13
 Marquês de Pombal, 11
 medida comum
 de dois segmentos, 8
 de duas grandezas, 8
 meia(s) proporcional(is), 33–37, 39, 40, 43,
 44, 46, 47
 Menécmo, 36, 45
 duplicação do cubo, 45
 neusis, 52
 Newton, Isaac
 duplicação do cubo, 48
 Nicomedes, 40
 conchóide, 52
 demonstração analítica da duplicação
 do cubo, 42
 duplicação do cubo, 40, 43, 52
 trissecação do ângulo, 51, 52
 papiro
 Rhind, 6, 34
 Pappus, 7
A coleção matemática, 7
 Parmênides, 32
 Pitágoras, 7
 teorema de, 9, 21
 Platão, 6, 7
 Platão, 32, 36
Meno, 33
 duplicação do cubo, 36
 máquina de, 36
 Proclus

- Comentário sobre o primeiro livro de* Yates, 32
Euclides, 45
- Zeuthen, H., 6
- quadratriz, 49
 quadratura do círculo, 49
 trissecação do ângulo, 53
- quadratura, 5
 de polígonos, 49
 de polígonos, 20
 de uma figura, 34
 do círculo, 31, 33, 34, 49, 53
 quadratriz, 49
 do círculo, 7
 do retângulo, 34, 49
- Sócrates, 33
- segmentos
 comensuráveis, 8
 incomensuráveis, 7, 8
- Simson, Robert, viii, 9, 11–13
- Szabó, 34
- Tales, 6
- Tannery, Paul, 6
- Teeteto, 6, 36
- três problemas clássicos, 7
- três problemas clássicos, 31
- transformação de áreas, 5
- trissecação do ângulo, 7
- trissecação do ângulo, 31–33, 49–51, 53
 aproximada, 53
 Arquimedes, 51
 conchóide, 52
 Nicomedes, 51, 52
 quadratriz, 53
- Unguru, Sabetai, 6
- van der Waerden, viii, 6
 Science awakening, 6, 32, 34–36, 43,
 45, 48
- Viète, François
 duplicação do cubo, 48
- Wantzel, 33



Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Matemática e Estatística

Quadraturas: uma alternativa metodológica para o ensino de
área de figuras planas

- Angelo Benedito dos Santos
- Orientadora: Jeanne Barros
- Coorientador: João Bosco Pitombeira de Carvalho

Roteiro

- Apresentação
- Introdução
- Objetivos
- Metodologia
- Fundamentos teóricos
- Ensino de Geometria no Brasil
- Atividades
- Considerações finais
- Bibliografia



Apresentação

Sou Angelo Benedito dos Santos, fui aluno de escola pública por toda a minha vida, desde o Ensino Fundamental até os dias atuais, onde retornei para fazer o mestrado e, quem sabe o doutorado. Tenho esta instituição com muito carinho, por ser parte importantíssima de minha vida.

Minha trajetória no PROFMAT é marcada por pandemia e dificuldades por conta dos horários e a demanda grande de trabalho nas escolas. Mas, com dedicação e esforço, busco concluir o programa e, quem sabe, não parar mais, buscando o aprimoramento da qualidade de ensino para o aluno trazendo um novo olhar para o ensino de Matemática e a minha prática docente.

ública por toda a minha vida, desde o ensino fundamental até os dias atuais, onde estou voltando para fazer o mestrado e quem sabe o doutorado nesta Universidade, que tenho com muito carinho, por ser parte importantíssima de

Introdução

Responder a questões que relacionam a possibilidade de, dentro das normas da BNCC, aplicar História da Matemática para abordar os conceitos de áreas de figuras planas, e se é possível.

Introdução

A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam “fazer a quadratura de uma figura.”) (BRASIL, 2017, p. 272).

Objetivo Geral

Avaliar a possibilidade, dentro das normas da BNCC, de aplicar a História da Matemática ao conceito de área de figuras planas e verificar se professores do Ensino Fundamental II e Ensino Médio conseguem aplicar, utilizando régua, compasso e/ou *softwares* de Geometria dinâmica, a técnica de quadratura.

Objetivos

Objetivos Específicos

- Analisar a contribuição dos povos antigos na evolução da Geometria e o surgimento da técnica de quadratura de figuras planas,
- Identificar nos documentos regulatórios a abordagem do conceito de quadraturas,
- Investigar o contato dos professores com a Geometria, o Desenho Geométrico e o conceito de quadraturas,
- Elaborar, a partir dos dados apresentados, situações onde a quadratura seja utilizada,
- Avaliar se a quadratura é uma alternativa para o ensino de área de figuras planas.

Metodologia

- Abordagem Qualitativa,
- Instrumentos:
 - Leitura inicial: Três Excursões Pela História da Matemática (Pitombeira de Carvalho, 2008),
 - Busca de materiais: catálogo de teses e dissertações da CAPES, BDTD, dissertações PROFMAT (Descritor “Quadraturas”).

Metodologia

➤ Descritor “Quadraturas”

Tabela 1 - Quantitativos por portal e descritor: Quadraturas

Pesquisa Bibliográfica Dados			
Produção Científica	BDTD	Periódicos Capes	PROFMAT
Dissertações	289	291	8
Teses	118	102	0

Legenda: Apresentação dos dados colhidos nos portais pesquisados.

Fonte: O próprio autor.

Metodologia

- Descritor “Quadratura de figuras planas”

Tabela 2 - Quantitativos por portal e descritor: Quadratura de figuras planas

Pesquisa Bibliográfica Dados			
Produção Científica	BDTD	Periódicos Capes	PROFMAT
Dissertações	8	3	0
Teses	0	0	0

Legenda: Apresentação dos dados colhidos nos portais pesquisados.

Fonte: O próprio autor.

Metodologia

- Descritor “Quadratura do círculo”

Tabela 3 - Quantitativos por portal e descritor: Quadratura do círculo

Pesquisa Bibliográfica Dados			
Produção Científica	BDTD	Periódicos Capes	PROFMAT
Dissertações	8	32	3
Teses	0	8	0

Legenda: Apresentação dos dados colhidos nos portais pesquisados.

Fonte: O próprio autor.

Metodologia

História da Matemática

- Pitombeira (2008),
- Roque e Pitombeira de Carvalho (2012),
- Soutier (2017),
- Corrêa (2008),
- Parreira (2017),
- Sousa (2018).

Metodologia

Análise dos documentos regulatórios

- Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998),
- Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017).

Metodologia

Atividades

- Entrevista com a professora Kamilla Rodrigues (Colégio Objetivo),
- Questionário de perguntas fechadas para 11 professores,
- Sugestões de atividades seguida de questionário.

Fundamentos Teóricos

Quadraturas: Um pouco de História

- Objetivo específico: “Analisar a contribuição dos povos antigos na evolução da Geometria e o surgimento da técnica de quadratura de figuras planas”.

Fundamentos Teóricos

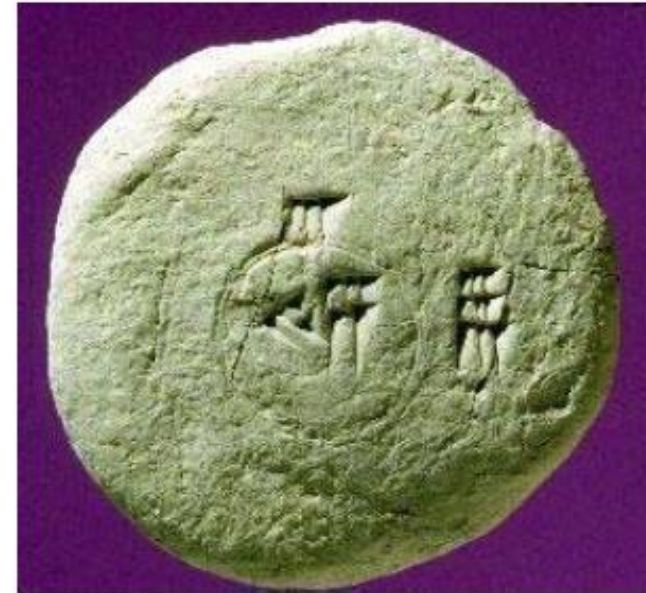
Egípcios e Babilônios

- “Geometria” essencialmente métrica, preocupada com cálculos de comprimentos áreas e volumes (Roque e Pitombeira de Carvalho, 2012 p. 37),
- Utilizavam propriedades geométricas de sólidos e de figuras planas sem justificativas desses resultados (comparam com os dias atuais),
- Práticas sociais influenciavam a determinação de áreas que estavam ligadas ao pagamento de tributos ao rei e ao faraó que os obrigavam a pagar pelo cultivo em suas terras (Correa, 2008).

Fundamentos Teóricos

Egípcios e Babilônios

- Tablete YBC 7302: concepção de círculo.



Fonte: Roque e Pitombeira (2012, p. 38, fig. 1.23)

Fundamentos Teóricos

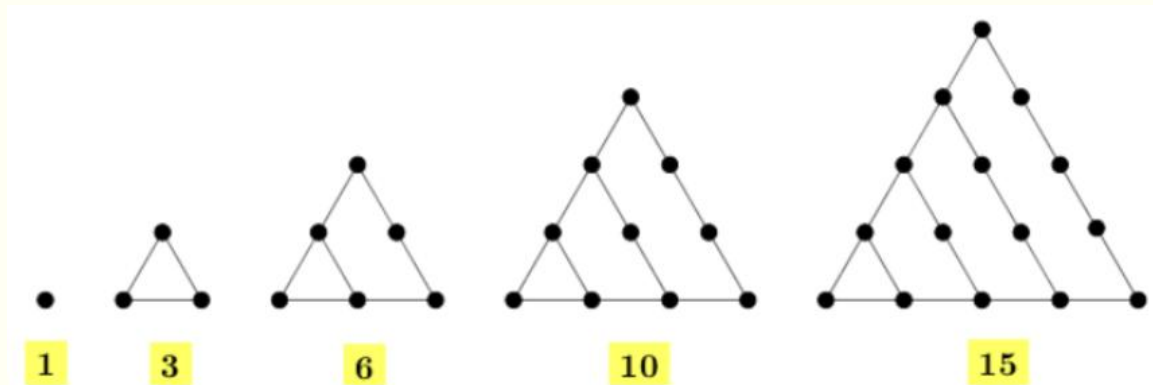
Quadratura pelos gregos

- Comparação entre a Matemática praticada entre babilônios e egípcios: Demonstrações e argumentações. Matemática mais teórica (Roque e Pitombeira, 2012),
- Tales de Mileto (VII – VI A.E.C):
 - Influência dos mesopotâmios e egípcios,
 - Cálculo das alturas das pirâmides do Egito.
- Pitágoras (c. 570 – 495 A.E.C.).

Fundamentos Teóricos

- Números triangulares

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

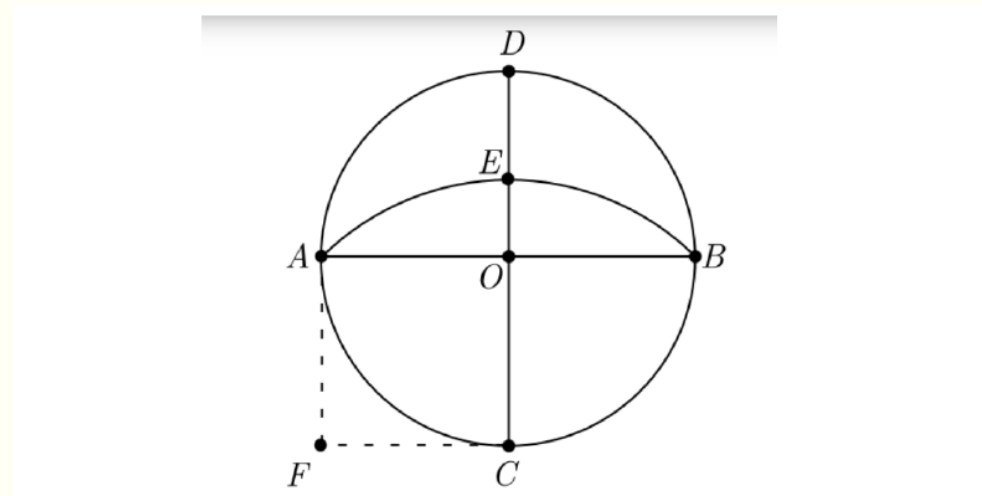


Fonte: <https://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-leitura-numeros-triangulares>
Acesso em 04/12/2024.

Fundamentos Teóricos

Quadratura pelos gregos

- Hipócrates de Quíos (460 A.E.C. – 370 A.E.C.):
 - Quadraturas do círculo e da lúnula: imaginava-se um caminho para a resolução da quadratura do círculo.



Fonte: <https://bit.ly/lunulas-hipocrates>. Data do acesso:10/11/2024.

Fundamentos Teóricos

Quadratura pelos gregos

- Por Correa (2008) e Roque e Pitombeira de Carvalho (2012):
 - Demonstração da proposição *XII.2* de *Elementos* de Euclides: *Círculos estão entre si como os quadrados de seus diâmetros (págs 28 e 29).*

Fundamentos Teóricos

Quadratura pelos gregos

Arquimedes (287 A.E.C. - 212 A.E.C.):

- Contribuições para Matemática e Física (Grudtner; Bertato; D' Ottaviano, 2021),
- Prova rigorosa da área do círculo,
- Utilização do método da exaustão de Eudoxo (408 A.E.C – 355 A.E.C.).

Fundamentos Teóricos

- Quadratura pelos gregos

Na busca pela quadratura do círculo, Arquimedes faz referência à equivalência entre as áreas de um círculo e de um triângulo retângulo cujos catetos são o comprimento da circunferência e o raio.

Todo círculo é igual a um triângulo retângulo, do qual um dos[lados] ao redor do [ângulo] reto é igual ao raio, e a base, ao perímetro [do círculo]. (Grudtner; Bertato; D' Ottaviano, 2021, p. 5)

Fundamentos Teóricos

Quadratura pelos gregos

➤ Euclides (300 A.E.C. - 275 A.E.C):

- “Pai da Geometria”,
- Obra *Os Elementos*:
 - 3 grandes partes: Geometria (livros de I – VI); Aritmética (livros VII – IX) e Geometria Espacial (XI – XIII),
 - Primeiros Livros: construções com régua não graduada e compasso,
 - Livros I e II: Equivalência de áreas.

Ensino de Geometria no Brasil

- Objetivo específico: “Identificar nos documentos regulatórios a abordagem do conceito de quadraturas”.

Análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Ensino de Geometria no Brasil

- Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998):
 - Ensino Fundamental II,
 - História da Matemática era um ramo em construção,
 - Após a publicação, em 1998: História da Matemática como caminho para se fazer Matemática. Recurso eficaz no processo de ensino aprendizagem,
 - Atualmente: Geometria contextualizada, conceitos geométricos relacionados com situações do cotidiano,
 - Desenho Geométrico: desenvolvimento para estudantes. Mudanças na abordagem.

Ensino de Geometria no Brasil

- Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998):
 - Décadas de 1990 e 2000: reorientação da Geometria: compreensão de conceitos e na resolução de problemas. Desenho Geométrico integrado às aulas de Matemática, como ferramenta de exploração e construção de conhecimentos geométricos.

Ensino de Geometria no Brasil

- Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017):
 - Caráter normativo,
 - Conjunto de aprendizagens essenciais desenvolvidas ao longo das etapas da Educação Básica,
 - Três componentes principais: unidade temática, objetos de conhecimento e habilidades,
 - Geometria como unidade temática,
 - Tabelas de competências e habilidades da unidade temática: Geometria dos anos finais do Ensino Fundamental (págs 41 a 43 da dissertação).

Atividades

Atividades

- Responder às questões “Podemos relacionar, dentro das normas da BNCC, a História da Matemática com a abordagem dos conceitos de áreas de figuras planas na Educação Básica? E os professores, atualmente, conseguem fazer essa abordagem?”.
- Objetivos específicos: “Investigar o contato dos professores com a Geometria, com o Desenho Geométrico e com o conceito de quadraturas” e “elaborar, a partir dos dados apresentados, situações onde a quadratura seja utilizada”.

Atividades

➤ Entrevista

- Professora Kamilla Rodrigues,
- Professora de Desenho Geométrico no Colégio Objetivo,
- Formação,
- Contato com o Desenho Geométrico e com a técnica de quadraturas,
- Metodologia de ensino da professora,
- Contribuições (dissertação, regências).

Atividades

➤ Entrevista com professores (9 perguntas; Formulários do Google)

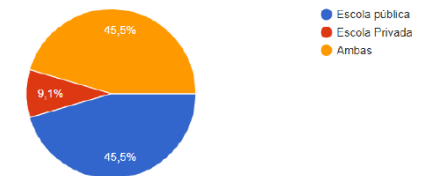
- 11 professores,
- (10) Álgebra e Geometria, (4) Desenho Geométrico,
- Maioria de 3 a 10 anos de magistério,
- 8 professores têm conhecimento do conceito e 6 utilizam-no em sala de aula abordando História da Matemática (maioria com régua e compasso).

1. Você atua ou atuou em:

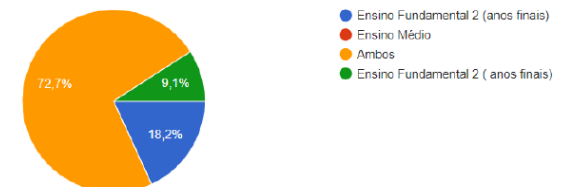
- Escola pública
- Escola Privada
- Ambas

As respostas coletadas geraram a Figura 16:

Figura 16 - Pergunta 1: Rede de atuação do docente



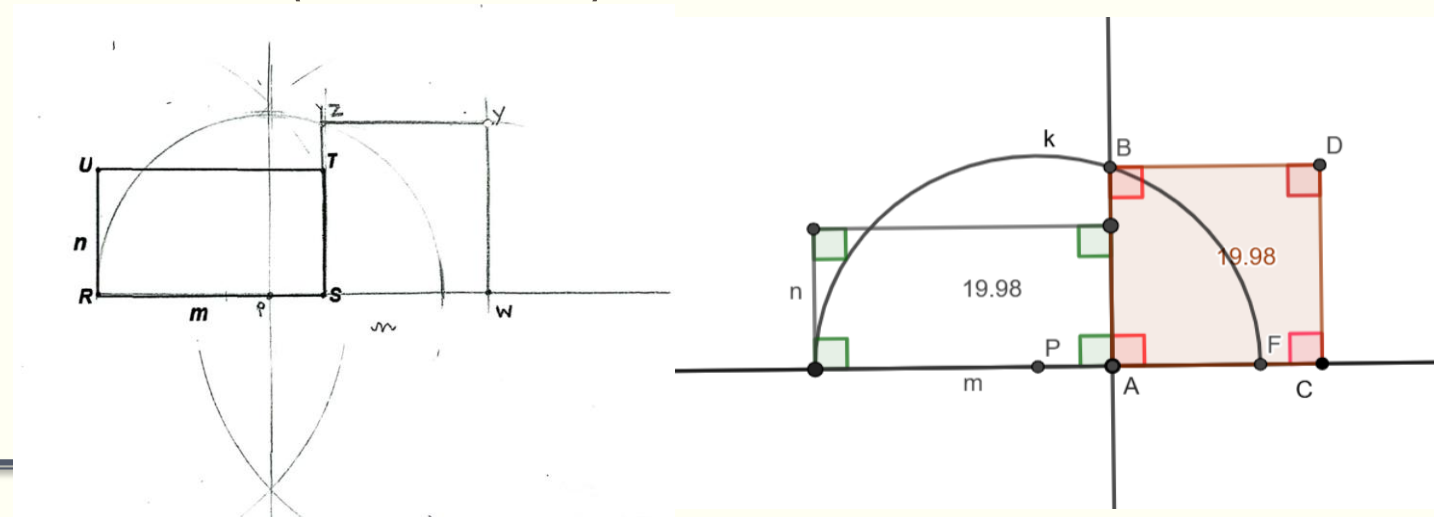
Legenda: Análise das respostas da rede de trabalho do docente.
Fonte: O próprio autor.



Legenda: Segmentos da educação básica de atuação do professor.
Fonte: o próprio autor.

Atividades

- Sugestões de atividades (para introduzir conceito de quadratura)
 - Proposta inicial de três atividades: uma situação problema onde espera-se que seja realizada a quadratura do retângulo. As outras duas: a quadratura do losango e do triângulo,
 - Material cedido pela professora Kamilla Rodrigues como referência,
 - Utilização de régua e compasso ou *software* (GeoGebra),



Atividades

- Elaboração de um plano de entrevista (Tabela 8 – pág. 59).

Tabela 8 - Plano de entrevista

Objetivo da Pergunta	Perguntas
Coletar informações dos entrevistados a respeito do conhecimento do conceito de quadratura de figuras planas.	Nossa atividade se propõe a utilizar o conceito de quadratura de figuras planas para uma alternativa de abordagem de técnicas antigas para se entender alguns conceitos que são aplicados sobre área de figuras planas. Antes desta aula, você conhecia o conceito de quadratura de figuras planas? Se sim, em que disciplina(s) você teve este contato?
Avaliar a abordagem inicial da sequência didática apresentada.	Durante a sequência didática apresentada, propusemos atividades que exigiam o conceito inicial de área de figuras planas. Na sua opinião, você acha que os alunos precisam deste conceito como uma abordagem inicial? O conceito de equivalência de áreas precisa ser abordado? Acha importante a utilização de situações problema para esta abordagem?
Analisar as observações que os entrevistados fizeram no processo de realização da sequência de atividades.	A sequência realizada utilizando régua e compasso, foi de fácil entendimento? Inicialmente, você utilizaria esses instrumentos? Pensaria algebricamente? Em uma escala de 1 (péssima) a 5 (excelente), como você avalia a sua experiência na utilização do compasso na construção de figuras e solução de problemas? Que outras figuras planas você acredita que os alunos tenham facilidade para realizar estes tipos de atividades?
Buscar a opinião dos professores acerca da importância inserção da Geometria e do Desenho Geométrico no currículo do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio.	Na realidade do ensino público, como inserir no currículo a Geometria e o Desenho Geométrico, de forma que se tenha uma importância maior e que seja trabalhada desde o início do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio? Qual a importância, na sua opinião de se trabalhar a Geometria e o Desenho Geométrico com os alunos?
Considerações Finais	Em uma escala de 1 (péssima) a 5 (excelente), como você avalia a experiência do uso de quadratura para o ensino de matemática e suas áreas afins?

Legenda: Perguntas Plano Entrevista.

Fonte: O próprio autor.

Considerações Finais

Objetivo específico: “Analisar a contribuição dos povos antigos na evolução da Geometria e o surgimento da técnica de quadraturas”:

- Contribuições dos gregos, babilônios, egípcios e indianos,
- Demonstrações importantes na busca da quadratura do círculo.

Objetivo específico: “Identificar nos documentos regulatórios a abordagem do conceito de quadraturas”:

- Análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e da Base Nacional Comum Curricular (BNCC),

Considerações Finais

Objetivo específico: “ Investigar o contato dos professores com a Geometria, o Desenho Geométrico e o conceito de quadraturas”:

- Entrevista com a professora Kamilla Rodrigues,
- Aplicação de um questionário com perguntas fechadas para 11 professores,
- Elaboração de uma sequência de atividades com 3 questões que podem ser utilizadas como introdução do conceito e de um plano de entrevista.

Considerações Finais

Objetivo geral: “Avaliar a possibilidade, dentro das normas da BNCC, de aplicar a História da Matemática ao conceito de área de figuras planas e verificar se professores do Ensino Fundamental II e Ensino Médio conseguem aplicar, utilizando régua, compasso e/ou *softwares* de Geometria dinâmica, a técnica de quadratura.”:

- Possibilidade de abordagem utilizando a História da Matemática,
- Olhar estratégico, diferenciado e gradativo desde o sexto ano do Ensino Fundamental, desde as construções elementares até as mais complexas,
- Criação de um ambiente mais interativo e envolvente,

Considerações Finais

- Formação contínua e intensiva, capacitação dos docentes na integração com a História da Matemática e na manipulação das ferramentas tradicionais,
- Melhor integração da Matemática com as práticas contemporâneas (GeoGebra).

Referências

ROQUE, T. M.. *História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Editora Schwarcz - Companhia das Letras, 2012.

ROQUE, T.M.; CARVALHO J.B.P.. *Tópicos de história da matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

CARVALHO, J.B.P.. *Três excursões pela história da matemática 1*. Rio de Janeiro: INTERMAT, 2008.

SOUTIER, C. C. *O Problema da Quadraturas e Números Construtíveis: Possibilidades para o ensino da Geometria e Relações com a Álgebra*. 2017. 65 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) - Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

CORRÊA, J. F. *Um Estudo Histórico sobre Quadraturas*. 2008. 68 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática - Mestrado) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

Referências

Referências

EC, M. d. E. Base Nacional Comum Curricular: educação é a base. MEC Brasília,

DF. Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>, 2017.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Ministério da Educação e do Desporto: Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, 1997.

GRITTI, P.; PREDEBON, F. O que Desmotiva os Alunos para aprender Matemática?, 2019

What discounts students to learn Mathematics?, 2019

PARREIRA, D. S. *Uma proposta de uso da História da Matemática como Recurso Didático no ensino de áreas*. 2017. 79 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, 2017.

GRUDTNER, G. L. , BERTATO, F. M. , D' OTTAVIANO, I. M. L. A Medida do Círculo: Uma tradução do texto KYKΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ de Arquimedes. Revista Brasileira de História da Matemática, v. 21, n. 41, p. 1 – 13, 2021.

Referências



OBRIGADO

