Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Matemática e Estatística

Herik da Silva Ribeiro

A análise textual aplicada a um livro do PNLD e a um material de um sistema de ensino no estudo de funções no ensino médio

Rio de Janeiro
2019

Herik da Silva Ribeiro

A Análise Textual aplicada a um livro do PNLD e a um material de um sistema de ensino no estudo de funções no Ensino Médio

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Matemática e Estatística, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientadora: Prof.ª Dra. Cláudia Ferreira Reis Concordido
Coorientador: Prof. Dr. João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho

Rio de Janeiro
2019

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

R484 Ribeiro, Herik da Silva.

A análise textual aplicada a um livro do PNLD e a um material de um sistema de ensino no estudo de funções no ensino médio / Herik da Silva Ribeiro. – 2019.

128f. : il.

Orientadora: Cláudia Ferreira Reis Concordido.

Coorientador: João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho.

Dissertação(Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Funções (Matemática) - Estudo e ensino - Teses. 2. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino - Teses. 3. Livros didáticos - Avaliação - Teses. 4. Programa Nacional do Livro Didático (Brasil). - Teses. I. Concordido, Cláudia Ferreira Reis. II. Carvalho, João Bosco Pitombeira Fernandes de. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.

CDU 517.5

Rosalina Barros *CRB-7 / 4204* - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Autorizo para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura Data

Herik da Silva Ribeiro

A análise textual aplicada a um livro do PNLD e a um material de um sistema de ensino no estudo de funções no ensino médio

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Matemática e Estatística, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 11 de Janeiro de 2019.

Banca Examinadora:

Prof.ª Dra. Cláudia Ferreira Reis Concordido(Orientadora)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho(Coorientador)
PROFMAT - Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Francisco Roberto Pinto Mattos
Instituto de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira - UERJ

Prof.ª Dra. Flávia dos Santos Soares
Universidade Federal Fluminense

Rio de Janeiro
2019

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus, o responsável por me dar todas as oportunidades que eu tive na vida, me mantendo perto do caminho do bem e me fazendo superar todas as maldades que caíram sobre mim.

Seguidamente, quero agradecer a minha família, em especial aos meus dois sobrinhos Joaquim e Manuella, por todo o amor doado sem interesse algum.

Também quero demonstrar gratidão a todos os amigos de infância, do EJC, do meu trabalho e do PROFMAT que adquiri ou mantive ao longo desses anos, pois foram fundamentais para que eu não esmorecesse.

À minha psicóloga, Erika, por me fazer voltar a querer ser grande e a acreditar em mim mesmo. Sem ela, este trabalho não teria nem começado.

Expresso meus agradecimentos aos meus orientadores Cláudia e João Bosco, cuja paciência para comigo foi tão imensa quanto a sabedoria que carregam consigo.

Por fim, agradeço ao programa PROFMAT pelo aperfeiçoamento, em especial aos professores que lecionaram à minha turma e todo o conhecimento passado por eles, e à UERJ, universidade onde concluí também a graduação, merecedora de profunda valorização, assim como seus funcionários, ao contrário do que é visto nos últimos anos.

RESUMO

RIBEIRO, Herik da Silva. *A análise textual aplicada a um livro do PNLD e a um material de um sistema de ensino no estudo de funções no ensino médio.* 2019. 128f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

O objetivo desta dissertação consiste em mostrar uma aplicação da Análise Textual proposta por Dormolen (1986) especificamente sobre a noção de função, estendendo-se ao estudo das funções polinomiais do primeiro grau, em dois materiais didáticos e compará-los: um livro aprovado pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), em 2018, e um material elaborado por uma rede particular de ensino do Rio de Janeiro. Para tanto, ao longo do Capítulo 1, primeiramente exibiremos um resumo histórico pertinente à evolução do conceito de função, seguido da discussão acerca das múltiplas ramificações que o mesmo proporciona, possibilitando, após isso, a pontuação do que esperar encontrar em um material didático, além da explanação do que viria a ser um texto matemático. No Capítulo 2 será exibida toda a metodologia de nossa pesquisa, dando enfoque às pesquisas qualitativas e, sequencialmente, conversaremos sobre a Análise de Conteúdo apresentada por Bardin (1977), fundamental para guiar nosso olhar sobre os materiais didáticos, definindo, também, nossa codificação utilizada. Apresentaremos por todo o Capítulo 3 a fundamentação teórica em que esta pesquisa se baseia, inclusive os conceitos de núcleo, linguagem, sequenciamento e condicionamento conceituais e signo. No penúltimo capítulo haverá uma introdução às duas obras que serão analisadas e as restrições aos capítulos ou módulos de cada livro a que restringiremos nosso olhar, imediatamente seguidas pelas análises individuais das mesmas. No Capítulo 5 colocaremos nossas considerações sobre todos os dados colhidos dos dois materiais didáticos em questão.

Palavras-chave: Análise textual. Núcleos. Análise de materiais didáticos. Conceito de função. Função afim.

ABSTRACT

RIBEIRO, Herik da Silva. *The textual analysis applied to a book of PNLD and a material of an educational system at studying functions in High School*. 2019. 128f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

The objective of this work consist in show an appliance of Textual Analysis proposed by Dormolen (1986) specifically about the notion of function, expanding itself at the study of the polynomial function of degree one, in two materials and compare them: one book approved by the Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), in 2018, and a material elaborated by a group of particular schools in Rio de Janeiro. Therefore, through the Chapter 1, first we'll show an historic resume related to the concept of function's evolution, followed by the discussion around of multiple subdivisions that this concept provides, permitting, after that, a pointing of what hope to find in a material, besides the explanation about what becomes a mathematical text. The Chapter 2 will exhibit all methodology of our research, focusing the qualitative researches and, sequentially, we'll talk about Content Analysis showed by Bardin (1977), primordial to guide our view over materials, defining too the codification we used. We'll introduce all over the Chapter 3 the theoretical basis of this research, including the concepts of kernel, language, cursory and conceptual preparation and sign. At the last but one chapter will have an introduction to the two books that will be analyzed and the restrictions to the chapters from each work, followed immediately by their individual analysis. In Chapter 5 we'll put our consideration about all collected data from those two materials.

Keywords: Textual analysis. Kernels. Textbooks analysis. Concept of function. Linear function.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho é o resultado da união de meu ímpeto em continuar aprendendo com a vontade de melhorar o meu ambiente de trabalho. Escolher me aventurar num ambiente no qual não possuo domínio, como foi com a seleção do tema desta pesquisa, foi o meu jeito de não parar de angariar conhecimento e, desta vez, tomei uma decisão com um objetivo um pouco mais especial: aplicá-lo em um livro aprovado pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2018, comparando-o com o material de uma rede particular de ensino, possibilitando que os autores aprimorem seus trabalhos.

Entender como é estruturado um material didático, principalmente por sua importância na rotina educacional, de modo especial o livro de Matemática e o estudo de funções, me trouxe brilho aos olhos e me permitiu evoluir a minha prática docente. Devido ao fato de os materiais didáticos agirem como base tanto para a execução das aulas dos professores, quanto para os estudos individuais dos alunos, avaliar se uma obra possui ou não um bom encadeamento de ideias – futuramente discutido por nós por meio do *sequenciamento conceitual* e do *condicionamento conceitual* de *núcleos* – trouxe satisfação pessoal e possibilidade de evolução em meus planejamentos futuros.

No entanto, a escolha de analisar especificamente o conceito de função não é mero acaso. Sua importância tamanha é notada no ensino de Matemática desde o ensino fundamental até o superior, além das inúmeras aplicações nas mais diversas ramificações de outras ciências, ainda que não estejamos falando necessariamente de um contexto numérico, como é de costume.

Surgiam, porém, algumas indagações de como iria proceder para avaliar as obras e, enfim, justificar a escolha de um material didático ou a não seleção do mesmo. Quais argumentos tornariam válida a seleção? Como começar a avaliar? Que parâmetros seguir? Algumas teorias guiam nossos olhares para este tipo de trabalho, como a Análise Textual, proposta por Dormolen (1986), a qual foi escolhida para nortear nossa pesquisa.

A Análise Textual toma por base a análise de expressões gerais que produzem algum tipo de conhecimento específico, conhecidas por *núcleos*, primeiro de forma individual, representado pelas categorizações, depois de modo conjunto, como será amplamente debatido futuramente no nosso trabalho.

Após o consenso de que metodologias e teorias usaríamos para construir os argumentos que almejávamos, decidimos explicar neste momento como a estrutura do projeto se estabelecerá. O primeiro capítulo se preocupará em passear pela história, apontando alguns fatos importantes para a constante evolução do conceito de função ao longo dos milênios, discutindo a importância do mesmo na atualidade e, por fim, exibindo aquilo que esperamos encontrar em textos matemáticos contidos em livros didáticos.

O segundo conterá a parte metodológica de nosso trabalho, definido como uma pesquisa qualitativa, a discussão sobre a Análise de Conteúdo apresentada por Bardin (1977) e a codificação que usaremos ao longo deste documento; o terceiro capítulo explanará a fundamentação teórica deste projeto, como os conceitos de núcleo, linguagem, sequenciamento e condicionamento conceituais e signo; o quarto é, de fato, reservado para a introdução dos dois materiais didáticos utilizados, seguida de suas análises feitas; enquanto o último capítulo possuirá nossas considerações sobre todos os dados colhidos dos dois materiais didáticos em questão.

1 **A NOÇÃO DE FUNÇÃO PARA A MATEMÁTICA**

Neste capítulo abordaremos o perfil histórico da noção de função e, por consequência, o desenvolvimento da Matemática como um todo. Em seguida, dissertaremos acerca da relevância do assunto, além de apresentarmos as técnicas e erros mais comuns. Na sequência, por conta da importância do livro didático no processo de ensino e aprendizagem, explicitaremos o que estamos considerando ser um texto matemático e o que desejamos encontrar nos materiais de apoio ao professor e ao aluno.

1.1 **O conceito de função ao longo da história**

As definições de objetos e operações são a solidificação da base dos conhecimentos matemáticos e, principalmente, possibilitam a obtenção de saberes desconhecidos que conduzam à evolução todas as ciências. Desta forma, é importante destacar que as funções, como um todo, são extremamente relevantes em todo este processo evolucionário e, como não podia deixar de ser, foi necessário admitir uma estrutura sólida de definições.

Apesar de a formalidade da descrição do conceito de função só surgir, de fato, no período moderno, são conhecidas as atribuições de casos particulares na Antiguidade. Segundo Youschkevitch (1976), os matemáticos Babilônios em 2.000 a.C. já usavam tabelas para múltiplas ações, como potenciações, radiciações, conversões de base sexagesimal, entre outras. Dois tipos de tabela[1] do período de reinado dos Selêucidas (312 a.C. – 64 a.C.) tornaram-se a pedra fundamental para todo o desenvolvimento da Astronomia, por registrarem empiricamente as efemérides – posições do curso natural de objetos astronômicos – do Sol, da Lua e de outros planetas.

Tempos depois, temos os gregos por meio dos pitagóricos com suas tentativas de determinar as leis que regiam a acústica e, durante a época alexandrina, de toda a trigonometria das cordas e seus registros em tabelas[2], especialmente exploradas pelos hindus

---

[1] Neugebauer (apud YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 40) atribui a dois tipos de tabelas de funções os nomes *step-function* e *linear-zigzag-function*.

[2] Ptolomeu, em sua obra célebre *Mathēmatikē Syntaxis* em grego antigo (*Syntaxis Mathematica* ou *Almagestum* em latim e até *Almagest* em inglês), divulga os trabalhos perdidos de Hiparco, dentre eles a mais antiga tabela de cordas existente.

mais tarde. Entretanto, a não restrição dos gregos às funções tabuladas os destacou perante a construção desse conceito fundamental.

Há quem defenda que uma forma analítica é necessária para caracterizarmos uma relação como função, conforme Euler. Todavia, apesar de não conter todo o simbolismo algébrico que nos é praticamente natural, as relações funcionais criadas pelos matemáticos da Antiguidade mediante exemplos numéricos ou até formas verbalizadas sobre percepções de elementos da natureza, para parte dos matemáticos dos tempos atuais, mostram um conceito primitivo ou implícito de função.

É oportuno dizer que a palavra *função* não havia sido pronunciada até o momento – apenas séculos depois por Leibniz – e que estes grupos não registraram análises sobre as dependências entre as grandezas e, muito menos, generalizações para os estudos feitos. Kleiner (1989) indica que, além da falta de pré-requisitos algébricos, a falta de motivação para definir noções abstratas sem que alguém possuísse exemplos suficientes para generalizar também era uma razão principal para que o conceito de função não tivesse surgido de maneira precoce.

Não estamos a dizer que os gregos não possuíam a ideia de *quantidade variável*, vide os paradoxos de Zenão e a cinemática de Aristóteles; contudo ainda não estava formado o conceito de *variáveis independentes* e *variáveis dependentes*. Muito devido ao estudo dos árabes sobre as funcionalidades – principalmente na Trigonometria, na Ótica e na Astronomia – durante os séculos X e XI e de seus sucessores no ocidente, cerca de três séculos depois, com uma noção de função mais geral, a Matemática ganha um papel importante no estudo de fenômenos naturais, expandindo o campo da Cinemática. Enquanto na Inglaterra, Heytesbury, Swineshead, entre outros, exibiam uma versão aritmética, na França, principalmente Oresme, escolhe a direção geométrica, segundo Youschkevitch (1976).

Oresme afirma que “cada coisa mensurável [...], exceto os números [que ele, como os gregos antigos, acreditava ser um conjunto de unidades] é concebido como quantidade contínua.”[3] (CLAGETT, 1968, p. 164 – 165, apud YOUSCHKEVITSCH, 1976, p. 46), deixando visível em seus estudos ideias gerais sobre variáveis independentes e dependentes. Nesta época, entre os anos 1450 e 1650, conforme Kleiner (1989), desenvolvem-se temas fundamentais como: a extensão do conceito de número abrangendo reais e até complexos por Bombelli, Stifel e outros; a criação da álgebra simbólica por Viète, Descartes e outros; os estudos do movimento como problema central da ciência por Kepler, Galileu e outros; e a

---

[3] Salvo indicação contrária, as traduções são do autor deste trabalho.

proximidade – ou, como diz Kleiner, “o casamento” – da álgebra e da geometria por Fermat, Descartes e outros.

Apesar de o conceito de *infinitesimal* não estar presente de forma explícita nos conceitos atribuídos à Física do século XIV, com o crescimento voraz de uma Matemática computacional, acompanhado da criação da álgebra simbólica de Viète, no século XVI, aperfeiçoada por Descartes, Newton, Leibniz e Euler, a análise infinitesimal, junto de uma nova série de problemas, proporcionou o desenvolvimento de uma nova visão de função: a visão analítica. Nela, o conceito de função era baseado na relação entre conjuntos de números além de uma representação via fórmula.

A geometria analítica de Descartes proporciona dinamismo e amplia o conceito de relação entre grandezas. É disposto pela primeira vez e de forma clara que uma equação em *x* e em *y* significa estabelecer uma dependência de uma variável quantitativa em correspondência com os valores dados da outra. Faltava ainda, entretanto, a identificação de variáveis independentes e dependentes numa equação para a obtenção da nova visão sobre o conceito abordado:

> Variáveis não são funções. O conceito de função implica em uma relação unidirecional entre uma variável “independente” e uma “dependente”. Mas, no caso de variáveis como elas ocorrem em problemas matemáticos ou físicos, não é necessário que haja uma divisão de papeis. E enquanto não for dado o papel especial de variável independente a uma das variáveis envolvidas, as variáveis não são funções, mas simplesmente variáveis. (BOS, 1980, p. 348 apud, KLEINER, 1989, p. 283).

Newton iniciou esta etapa de diferenciação entre as variáveis independentes, chamadas *fluentes*, e as dependentes, nomeadas *relacionadas*, enquanto associava essas variáveis às curvas geométricas. Segundo Kleiner (1989), seu “método das fluxões” era aplicado às *fluentes* – a imagem de um ponto “fluindo” por sobre a curva – e não às funções. Newton se destaca na observação das funções utilizando séries de potências, caminho pelo qual obteremos contribuições significativas sobre a noção de função.

Leibniz, no mesmo período, mas de forma independente, também atrelava curvas geométricas à ideia de função. Em correspondência com Johann I Bernoulli durante os anos de 1694 a 1698, apontou a necessidade da criação de uma expressão que fosse capaz de representar essas associações entre as variáveis, sendo o primeiro a chamar por *funções*[4] (*functiones* ou *fonctions*) “quaisquer partes de linhas retas, isto é, segmentos obtidos por

---

[4] Segundo Youschkevitch (1976), a palavra *função* foi publicada pela primeira vez nos manuscritos de Agosto de 1672 de Gottfried Wilhelm Leibniz e, em particular, no intitulado *Methodus tangentium inversa, seu de functionibus*.

construção de infinitas linhas retas correspondentes a um ponto fixo e a pontos de uma curva dada" (YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 57).

Apesar de sua definição não ter sido levada adiante, Bernoulli difundiu o uso do termo criado por Leibniz, ampliando sua divulgação ao utilizá-lo em suas obras publicadas em sequência. Em 1718, Bernoulli apresentou a primeira definição formal sobre o conceito de função: "Chamaremos aqui por função de uma variável a quantidade composta em qualquer modo dessa variável e de constantes." (RÜTHING, 1984, p. 72), não deixando claro o que significava "composta em qualquer modo".

Segundo Youschkevitch (1976), Bernoulli propôs a letra grega φ como notação para a característica de função – sem parênteses: φx – enquanto Euler, seu pupilo, apresentaria *f* pela primeira vez em seu artigo comunicado em 1734 e publicado em 1740. Euler também foi responsável por definir noções iniciais, como *constante* e *variável*, e mudando a palavra "quantidade" para "expressão analítica".

Para ele, "uma quantidade constante é uma quantidade determinada que mantém sempre um mesmo valor" (RÜTHING, 1984, p. 72) enquanto "uma quantidade variável é uma quantidade indeterminada, ou quantidade universal, que compreende em si absolutamente todos os valores determinados" (KRAZER e RUDIO, 1922, p. 17 apud YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 61). Além disso, Euler descreve que,

> deste modo, uma quantidade variável compreende em si absolutamente todos os números, tanto positivos quanto negativos, tanto inteiros quanto fracionários, tanto racionais quanto irracionais e transcendentes. Até mesmo o zero e os números imaginários não estão excluídos do significado de quantidade variável. (KRAZER e RUDIO, 1922, p. 18 apud YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 61)

Seguindo a definição de seu mestre, Euler admite que "uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de alguma maneira desta quantidade variável e de números e quantidades" (KRAZER e RUDIO, 1922, p. 18 apud YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 61). Todavia, o mais importante neste contexto é que o brilhante matemático, apesar de não ter inventado o termo "expressão analítica", foi o primeiro a tentar explicar seu significado, enumerando operações, nomeando funções como explícitas e implícitas, formulando teoremas da existência da função inversa e as expansões por séries de potências[5], entre outras coisas, encaixando-as, de um modo geral, sob sua primeira definição geral de função. Vale salientar que "apesar da noção formal de função não ter sido originada com Euler, foi ele o pioneiro a oferecê-la de maneira notória pelo tratamento do cálculo como uma

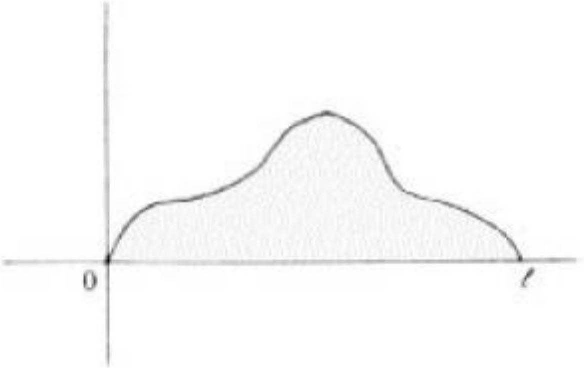
---

[5] "exatamente por conta das séries de potências o conceito de função pelas expressões analíticas ocuparam o papel central na análise matemática" (YOUSCHKEVITCH, 1976, p.54)

teoria formal de funções.” (HAWKINS, 1975, p. 54 apud KLEINER, 1989, p. 285), ampliando o campo de visão dos matemáticos da época.

Levantados neste período o problema da corda vibrante e sua controvérsia, aumentam ainda mais as discussões acerca do conceito de função: uma corda elástica com suas extremidades fixas em 0 e *l* que era deformada em uma forma inicial e, então, solta para vibrar. O problema consistia em determinar uma função que descrevesse o formato da corda em um momento *t*, conforme a figura 1.

Figura 1 – Problema da corda vibrante.



Fonte: KLEINER, 1989, p. 285.

Segundo Kleiner (1989), a controvérsia girou ao redor da caracterização de função na época, visto que, segundo o *artigo de fé* seguido pelos matemáticos do século XVIII, se duas expressões analíticas coincidem em um determinado intervalo, então elas coincidirão em todo o domínio. Assumia-se, portanto, que toda curva podia ser determinada em um intervalo qualquer, embora pequeno, e perceberam, por fim, que as funções descontínuas (ou *não diferenciáveis,* na visão euleriana) foram desprezadas por completo.

Havia, pois, a necessidade de repensar este conceito e, por conseguinte, a remodelagem do conceito de função como um todo. D’Alembert, em 1747, restringiu as condições iniciais da corda para obter uma função contínua (ou *diferenciável*, segundo a definição de Euler) e resolveu o problema, por fim, mostrando que a movimentação da corda é regida por equações diferenciais parciais como

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

chamada de *equação de onda*, em que a é uma constante. Resolvendo-a, dadas as condições inicialmente apresentadas, obteve o que chamava de “solução mais geral” somando duas funções arbitrárias φ, expressa por

$$y(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}.$$

Segundo Kleiner (1989), Euler discordava desta afirmação de D'Alembert[6] e mostrou que esta solução apresentava a forma da corda para diferentes valores de *t*, mesmo que o formato inicial não fosse dado por uma (única) fórmula. Acusa, ainda, que a forma inicial da corda pode ser dada de duas maneiras: por inúmeras expressões analíticas em diferentes intervalos de $(0,\ \ell)$ ou por uma curva feita à mão livre. Contudo, segundo as condições do *artigo de fé*, esses dois tipos não poderiam ser descritos por uma expressão analítica única e que, por tudo isso, a solução de D'Alembert não poderia ser a mais geral. Por meio de suas considerações físicas, Euler apresentou para um caso particular uma fórmula dada por séries trigonométricas como

$$y = \alpha \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \beta \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + \gamma \sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right) + \cdots,$$

que não era aceita por D'Alembert, o que deu início à longa controvérsia. Grandes nomes se juntaram à historia, como o físico Daniel Bernoulli e os matemáticos Lagrange, Monge, Laplace, Fourier, entre outros, levando Euler a refletir sobre a definição de continuidade de uma função e apresentar uma nova:

> Se algumas quantidades dependem de outras quantidades que, caso as últimas sejam alteradas, as anteriores sofram mudanças também, então as quantidades anteriores são ditas funções das últimas. Esta denominação é da natureza mais ampla e compreende todo método por significar que aquela quantidade pode ser determinada por outras. Se, portanto, *x* denota uma quantidade variável, então todas as quantidades que dependem de *x* de alguma maneira ou são determinadas por ela são ditas funções dela. (KOWALEWSKI, 1913, p. 4 apud YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 70)

Dentre os trabalhos da época, segundo Kleiner (1989), Fourier não se destacou apenas por apontar as inconsistências na definição antiga de Euler, mas também por mostrar aos matemáticos de seu tempo que a noção de integral precisava ser revista, por tornar o *artigo de fé* impróprio àquela altura e por possibilitar a criação da teoria dos conjuntos de Cantor. Fourier definiu que toda função poderia ser representada por uma série trigonométrica e que suas ordenadas não eram regidas por uma lei única, encerrando, desta maneira, o princípio da “continuidade analítica”, segundo Santana Filho (2017), e proporcionando a revisão do conceito de função construído até aquele momento.

Debruçando-se sobre as produções de Fourier, dois matemáticos de grande valor impuseram suas ideias mediante novas definições e abordagens, aprimorando aquelas que seus antecessores trouxeram à comunidade, em um período bem curto: Cauchy e Dirichlet. O

---

[6] Euler apresenta em 16 de maio de 1748 a *De vibratione chordarum exercitato*, publicada em 1749 pela *Acta Eruditorium*.

primeiro atacou sob o ponto de vista considerado por Euler, enquanto o segundo focou na definição de Fourier e suas séries.

Cauchy discutiu o sistema de “continuidade” e “descontinuidade” de uma função com um simples exemplo. A função

$$f(x) = \begin{cases} x, & se\ x \geq 0 \\ -x, & se\ x < 0 \end{cases}$$

que é considerada “descontínua” segundo a definição de Euler também pode ser escrita como $f(x) = \sqrt{x^2}$, a qual é considerada “contínua” pela mesma definição. Segundo o próprio Cauchy, em 1823, essa situação não ocorria com a definição apresentada por ele mesmo, na qual o domínio não era restrito ao conjunto dos reais.

> Quando as quantidades variáveis são correlacionadas de tal maneira que, quando o valor de uma delas é dado, nós podemos inferir os valores de todas as outras, nós ordinariamente concedemos que essas variadas quantidades são expressas por meio de uma delas, a qual recebe então o nome de *variável independente*; e as quantidades restantes, expressas através da variável independente, são chamadas de *funções* desta variável (BOTTAZZINI, 1986, p. 104 apud KLEINER, 1989, p.291).

Dirichlet preocupou-se mais em mostrar que nem toda função pode ser dada pelas séries de Fourier, como imaginava-se na época. Publicada por ele em 1829,

$$D(x) = \begin{cases} c, & se\ x \text{ é } racional \\ d, & se\ x \text{ é } irracional \end{cases}$$

é conhecida por *função de Dirichlet* e, segundo Kleiner (1989), foi importante por vários motivos: i) foi o primeiro exemplo explícito de uma função que não é dada por uma expressão analítica nem uma curva à mão livre; ii) foi o primeiro exemplo de função descontínua em todo o domínio; iii) ilustrou o conceito de função como um pareamento arbitrário. Além disso, Dirichlet foi um dos primeiros a restringir explicitamente o domínio da função a um intervalo, diferentemente de seus antecessores, os quais definiam as funções para todos os reais. Em 1837, publicou sua definição de função:

> Suponhamos que *a* e *b* são dois valores definidos e *x* uma quantidade variável que deve assumir, gradualmente, todos os valores situados entre *a* e *b*. Agora, se a cada *x* corresponde um único *y*, finito, de tal maneira que, quando *x* passa continuamente pelo intervalo de *a* a *b*, *y=f(x)* varia do mesmo modo gradualmente, então *y* é chamado uma função contínua de *x* para esse intervalo. E, além disso, não é de todo necessário, que *y* dependa de *x* nesse intervalo de acordo com a mesma lei; de fato, não é necessário pensar em apenas relações que podem ser expressas por meio de operações matemáticas. Geometricamente representada, ou seja, com *x* e *y* considerados como abcissa e coordenada vertical, uma função contínua parece ser uma curva ininterrupta, para a qual apenas um ponto corresponde a cada abcissa entre *a* e *b*. (RUTHING, 1984, p.74)

Com o exemplo da função de Dirichlet, o crescimento do estudo das funções patológicas e das classes das funções foi exponencial nos 50 anos subsequentes, impulsionando o campo da análise e gerando trabalhos de grande importância, como os de

Riemann e de Weierstrass. Depois de seu trabalho, o termo *função* adquiriu um sentido independente mais claro do termo *expressão analítica*.

Muitos matemáticos desenvolveram e sofisticaram as definições de função apresentadas até o momento. Com o desenvolvimento da teoria dos conjuntos de Cantor, destacamos as três definições mais próximas daquilo que temos na atualidade.

Dedekind, em 1887, apresentou o termo *imagem* quando definiu que "por um mapeamento de um sistema *S* entende-se uma lei pela qual cada elemento determinado *s* de *S* está associado a um determinado objeto, que é chamado de imagem de *s* e é designado por $\phi(s)$" (RUTHING, 1984, p.75); Tannery, em 1904, posiciona-se quanto à unicidade da imagem ao dizer que "*b* é um elemento de (*Y*), mais uma vez isto significa que um elemento *a* de (*X*) corresponde a um número *b*. Cada elemento de (*X*) corresponde a um elemento de (*Y*) e vice-versa." (RUTHING, 1984, p.76); e o grupo de matemáticos Bourbaki, em 1939, chegando ao mais adotado hoje em dia ao distinguir "função" de "relação funcional", além de englobar os dois enfoques anteriores:

> Sejam *E* e *F* dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável *x* de *E* e uma variável *y* de *F* chama-se relação funcional em *y*, ou relação funcional de *E* em *F*, se, qualquer que seja *x* de *E*, existe um elemento *y* de *F*, e somente um, que esteja na relação considerada com *x*. Dá-se o nome de função à operação que associa a todo elemento *x* de *E* o elemento *y* de *F* que encontra na relação dada com *x*; diz-se que *y* é o valor da função para o elemento *x*, e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função. (BOURBAKI, 1990, p. 6 apud PIRES, 2016, p. 10)

1.2 **A importância do estudo do conceito de função**

É perceptível em muitos "matemáticos em potencial" dos tempos atuais a objetividade e concisão quando nos estudos da Matemática, como se todo e qualquer assunto devesse ser descrito em forma binária: se o problema apresentar o mesmo resultado final que minha solução, então estou correto; caso contrário, estou completamente equivocado. Temos a frequente impressão de que o fato de chegar à resposta certa de um exercício é mais importante que o porquê de o desenvolvimento não estar errado e essa ligeira falta de preocupação com o meio do percurso pode ser o reflexo de uma base matemática desestruturada ou incompleta.

Em todos os níveis educacionais em que se encontra, o conceito de função, um dos pilares desta ciência, esbarra nestas deficiências oriundas de diversos outros tópicos principalmente pelas diversas facetas e inúmeras aplicações tais quais o universo das funções admite. Hamley (1934) afirma que os conceitos de classe, de ordem, de variável e de correspondência são fundamentais para a Matemática elementar alcançar a Matemática superior e, por este motivo, voltando os olhos para a noção de função, é nítida a importância da construção de uma estrutura sólida no estudo das funções, principalmente por suas múltiplas apresentações, uma vez que “o conceito de função é central à habilidade dos estudantes para descrever relações de troca entre variáveis, explicar trocas de parâmetro, e interpretar e analisar gráficos” (CLEMENT, 2001, p. 745).

No entanto, nós professores, em comunhão com o livro didático, contribuímos por vezes para a escuridão que envolve o assunto quando simplesmente expomos uma versão final da definição, desprezando suas diferentes formas de exibição e/ou seu trajeto histórico com a finalidade de não gerar confusão em suas mentes. Ao longo dos séculos os matemáticos descreveram as funções por diversas maneiras, como a correspondência entre os números e os objetos durante a contagem, e as representaram de inúmeros jeitos distintos, exemplificado facilmente pelas sequências, porém insistimos em sobrecarregar os alunos com um conjunto de palavras meticulosamente pronunciadas quase exigindo a exibição de uma fórmula algébrica.

Esta última traz aos estudantes a manipulação, vista como o conceito mais básico de função – o de ação –, isto é, por meio de uma regra explícita em que se insere uma medida e, após algumas operações pré-estabelecidas, recolhe-se um novo valor. Apesar da simplicidade da exposição, devemos compreender que, “em um senso pedagógico, para estes estudantes, números são entidades primitivas essenciais cujos conceitos matemáticos mais abstratos precisam ser frequentemente referenciados” (PONTE, 1992, p. 7).

A representação geométrica desempenha papel importante quanto ao quesito relação entre conjuntos, além de ser possivelmente a representação mais identificável das funções, e abre caminho para as expressões analíticas. Vale ressaltar que as funções não necessariamente admitem uma formulação algébrica ou estão obrigatoriamente associadas a números e, então, naturalmente alguns *obstáculos epistemológicos* surgem, como sobre a existência das funções descontínuas ou definidas por mais de uma fórmula. Na próxima seção ampliaremos a discussão que envolve estes obstáculos.

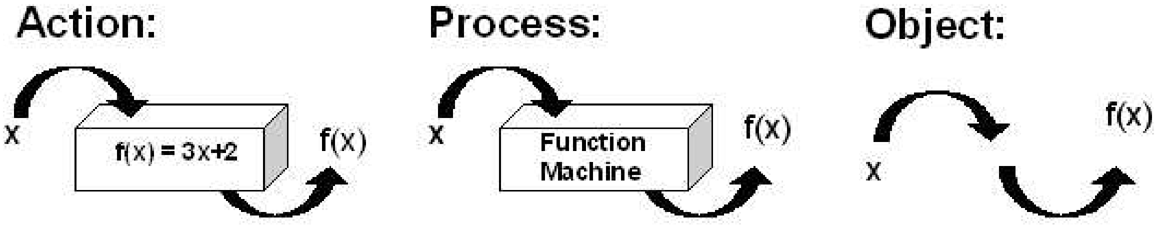
Vinner (1992 apud CLEMENT, 2001) disserta acerca desses obstáculos, nomeados por ele de *imagens conceito*, com a finalidade de conectar todas as figuras mentais que uma pessoa associa a um conceito dado, muitas vezes diferenciando-se bastante da definição matematicamente aceitável ou até incluindo suposições equivocadas. Dentre alguns exemplos, destacam-se a limitação de alguns alunos ao teste da linha vertical em gráficos e a descaracterização de uma função pelo fato de a mesma não ter sido dada por uma única fórmula, por sua descontinuidade ou até por uma imagem estar relacionada a mais de um elemento do domínio.

Segundo Jones (2006), o estágio seguinte à concepção de ação, que se resume à parte operacional, na qual as funções são regidas por algoritmos ou regras específicas dadas, é a concepção de processo, o qual envolve um profundo entendimento do estudo de função, especialmente quando a mesma seleciona um objeto, o transforma e produz um completamente novo. Assim, ao atingir este nível, os estudantes não exigem mais a presença de uma fórmula por aceitarem que as funções podem envolver transformações vagas.

De modo frequente, muitos professores recorrem à técnica da “máquina de função” para auxiliar seus alunos a visualizarem a concepção de processo. Este método consiste em uma caixa que aceita entradas e saídas, todavia não exibem o conteúdo de seu interior. Outra maneira de encarar esta concepção é sob a correspondência entre dois conjuntos, em que cada elemento do primeiro conjunto está relacionado a um único elemento do segundo conjunto, aproximando o estudo à definição de Dirichlet de 1837. Com este procedimento o estudante não sente a necessidade de manipular algebricamente a função; ao invés disso, concentra suas energias em mapear os pares estabelecidos pela relação funcional observada.

A maneira mais sofisticada de entender as funções é a que as trata como objetos, afirma Jones (2006), pois a visão da máquina não se faz mais necessária e os discentes passam a tratar as funções como entidades próprias, podendo sofrer transformações e participar de operações entre si. Na figura 2 podemos observar a diferença entre as três visões do conceito de função.

Figura 2 – A ideia de máquina de função estendida aos conceitos de função como ação, processo e objeto.



Fonte: JONES, 2006, p. 18.

A representação de pares ordenados, segundo o autor, é aquela que melhor enquadra o cenário apresentado pela ótica anterior. Para ele,

> a definição de par ordenado de função, como a introduzida por Bourbaki em 1939, é discutivelmente a mais matematicamente precisa no sentido que captura completamente a essência de uma função. Essa representação descreve uma função como um conjunto possivelmente infinito de pares ordenados (x, y), nos quais cada coordenada x é pareada com uma única coordenada y. Isto é importante porque pode descrever precisamente funções descontínuas, pareamentos arbitrários, e pode até ser estendido para acondicionar funções cujo domínio e contradomínio não são números. Além disso, o conceito de conjunto torna mais legível a noção de função como um objeto. (JONES, 2006, p. 8)

1.3 **O tratamento do conceito de função nos livros didáticos**

A Matemática promoveu ao longo dos séculos uma linguagem própria, resultando, com sua evolução, em uma teia vasta e complexa de informações descritas principalmente por meio de símbolos e definições. Portanto faz-se necessária a apresentação dessa linguagem desde as séries iniciais, promovendo um contato permanente e de constante evolução que perdurará por toda a educação básica, pelo menos.

É importante destacar sempre que possível que, apesar do rigor matemático nesse diálogo e nas definições dos conceitos que sustentam a si e as ciências que se apoiam nela, a Matemática também tem por objetivo apresentar resultados simples do cotidiano de todos nós. Sobre isso, apoiado sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), temos que

> A vitalidade da matemática deve-se também ao fato que, apesar de seu caráter abstrato, seus conceitos e resultados têm origem no mundo real e encontram muitas aplicações em outras ciências e em inúmeros aspectos da vida diária: na indústria, no comércio e na área tecnológica. Por outro lado, ciências como Física, Química e Astronomia tem a Matemática como ferramenta essencial (BRASIL, 1997, p.23).

Seguindo as orientações dos PCN, é fundamental capacitar o discente a “reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados a diferentes representações” (BRASIL, 1999, p. 42), “identificar, analisar e aplicar conhecimentos sobre valores de variáveis, representados em gráficos, diagramas ou expressões algébricas, realizando previsão de tendências, extrapolações e interpolações, e interpretações” (BRASIL, 2000, p. 96) e “traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra” (BRASIL, 2002, p. 114).

De acordo com Duval (2012), mais importante que exibir os diferentes esquemas de representação, chamados de *registros* pelo autor, são os tratamentos que poderão ser feitos depois disso. O próprio afirma que

> A coordenação de muitos registros [...] é, portanto, uma condição absolutamente necessária para que o esquema diádico de representação habitualmente admitido [...] corresponda a um funcionamento cognitivo efetivo no sujeito e, para que, apenas superficialmente, o recurso a apenas um registro de representação parecesse suficiente. (DUVAL, 2012, p. 284)

Por este motivo, é deveras relevante a atribuição dos diversos modelos de apresentação das funções, como gráficos, diagramas, fórmulas, entre outros, para facilitar a conexão do estudante com essa linguagem mais carregada de conceitos. Conforme indicação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2018, o aluno deve ser capaz de "saber empregar os conceitos e procedimentos algébricos, incluindo o uso do conceito de função e de suas várias representações (gráficos, tabelas, fórmulas etc.) e a utilização das equações" (BRASIL, 2017, p. 11).

O convívio e a utilização de toda essa linguagem e manipulação nos diversos campos da ciência em questão por todo o período escolar traz à tona certa limitação que a própria sociedade matemática impõe, não por interesse em condicionar alguns intelectos à submissão, porém por uma estrutura lógica muito bem amarrada ao longo dos séculos. Como bem destaca Sierpinska (1992), os estudantes apresentam dificuldade na manipulação desses objetos matemáticos muitas vezes por culpa da própria linguagem adotada e um exemplo disso é usarmos $f(x)$ tanto para nomear a uma função f quanto para determinar seu valor em torno da variável x.

Portanto, alguns questionamentos serão norteadores em nossa análise sobre o ensino de funções nos livros didáticos: para entender um conceito matemático, basta apresentar uma definição precisa? Observar os objetos sempre da mesma maneira fará com que o aluno desenvolva seu conhecimento acerca do assunto? Mecanizar o raciocínio sobre o conteúdo apresentado é parte fundamental do processo? Que tipos de textos matemáticos usar para uma melhor explanação do tópico em pauta?

Dito isto, cabe aqui levantar "o que vem a ser um texto matemático?", visto que o livro didático é, em sua totalidade, constituído por textos das mais variadas formas. Despindo-se da visão matemática, um texto é uma estrutura organizada e limitada de palavras cujo objetivo é o de estabelecer um sentido sobre a proposição dissertada. Todavia, sabemos que para provocar entendimento de algo, não necessariamente estaremos munidos de palavras e, portanto, textos não verbais também estão incluídos na concepção de texto matemático por manterem a finalidade de apresentar sentido sobre o que está sendo exposto.

Mediante essa estrutura, decidimos adotar a análise textual apresentada por Dormolen (1986), o qual não limita de maneira quantitativa o que vem a ser um texto. Segundo este, seu método de análise não se direciona a livros, mas sim a textos e, por esta razão, não há um comprimento mínimo ou máximo. Pode ser entendido como tal um par de sentenças, um parágrafo ou até um capítulo inteiro. A única exigência é a de que o objeto seja plenamente capaz de propor sentido por si só ou em relação a textos previamente apresentados pela obra.

Dormolen (1986) destaca três tipos de livro didático:

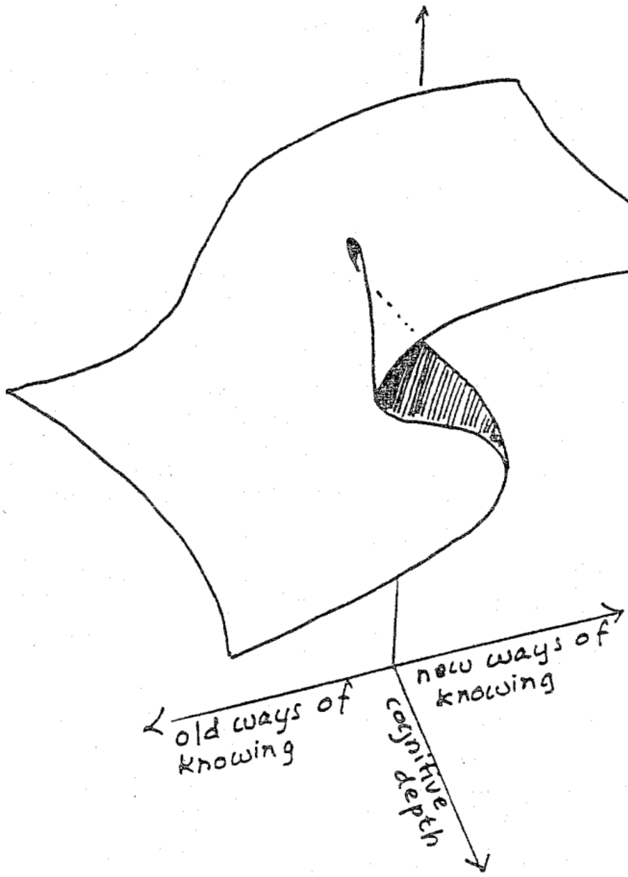
> Alguns livros-texto para escolas, como os livros de exercício, contêm apenas problemas e exercícios; sem generalizações, regras, convenções, etc., e sem explicações. Clareamento de teoremas, de definições e de provas devem ser realizadas parcialmente pelo estudante, com ou sem ajuda do professor, e parcialmente apenas pelo professor. [...]
> Outros livros escolares contêm generalizações e regras, entre outras coisas, com explicações em uma parte e problemas e exercícios em outra. Essas duas partes são estritamente separadas. [...]
> Um terceiro tipo de livro didático consiste de uma mistura: observações, explanações, generalizações, regras, etc., são regularmente interpassadas com problemas, exercícios e outras tarefas. O livro parece ser o próprio professor. (DORMOLEN, 1986, p. 141)

Diferente dos dois primeiros tipos de livro-texto, nos quais o professor tem papel fundamental na escolha de como os mesmos serão utilizados, o terceiro entende os textos como autossuficientes. Ainda assim, não se entende que o professor será irrelevante no processo educacional, contudo sua atuação deve ser diferente para cada uma das possibilidades apresentadas.

Decidimos que em nossa apresentação cada capítulo dos livros didáticos em análise reservados ao conceito de função é um texto matemático e, então, cada um deles é o resultado de uma abordagem moldada a partir de inúmeros enunciados. As características presentes em cada uma das obras – implícita ou explicitamente – serão amplamente elucidadas no capítulo 3, no qual discutiremos mais a fundo a Análise Textual.

Desta maneira, o livro – em conjunto com o professor – é altamente importante no processo de aprendizagem, mas não define se o assunto abordado será de fato absorvido pelo estudante. Como ilustra a figura 3, os antigos e os novos métodos de conhecimento não se anulam. Pelo contrário, os dois devem andar em comunhão para que haja desenvolvimento nas diversas etapas em que se encontram os discentes.

Figura 3 – Um ato de superar uma dificuldade ou um obstáculo.



Fonte: SIERPINSKA, 1992, p. 26.

Segundo Sierpinska (1992), quando estamos seguindo novos caminhos de aprendizagem e nos concentramos em antigos métodos, o caminho para o novo parece se fechar pelo que muitas vezes chamaremos de *obstáculos epistemológicos*. Entretanto, se focarmos no que está à nossa frente ao invés de mirarmos os erros do passado, então tenderemos a descrever um *salto* em termos de novos métodos de conhecimento, isto é, descreveremos importantes trocas relacionadas ao conhecimento matemático na mente humana, que nos levarão dos jeitos antigos aos jeitos novos de aprendizagem.

Um obstáculo que não pertence apenas a um grupo pequeno de pessoas, mas é bem mais abrangente, é chamado de obstáculo epistemológico. Podemos classificá-lo em três categorias: i) atitudes, crenças e convicções, não necessariamente satisfazendo um senso comum; ii) modos de pensar e interpretar aprendidos em experiências anteriores; iii) conhecimento técnico capaz de gerar justificativas racionais.

As três categorias não são independentes. Pelo contrário, cada uma delas é capaz de modificar a si mesma e também o estado de outra de acordo com a situação enfrentada. Por exemplo, reproduzir algumas soluções em problemas parecidos pode gerar demonstrações para casos genéricos, assim como o aprendizado de novas técnicas pode desconstruir algumas assertivas que julgávamos verídicas em tempos anteriores.

Em meio a todo este processo, está o indivíduo que deve extrair o conhecimento oriundo de suas experiências, sejam elas próprias ou induzidas pelo professor ou livro didático. Torna-se significativa, então, a obra que facilita a identificação dos *atos de entendimento*, ou seja, daquilo que é necessário para gerar conhecimento acerca do que está sendo abordado pelo texto no momento.

Como afirma Sierpinska (1992), apoiada por outros autores, os atos de entendimento podem ser separados em quatro classes: i) identificação de um objeto em meio a outros; ii) discriminação entre dois objetos; iii) generalização; iv) síntese. Além disso, "aplicar" é outra atividade com relevância no aprendizado. Apesar de não ser considerada um ato de entendimento, é uma condição necessária para qualquer um deles.

No caso específico da noção de função, o grau de dificuldade em relação ao aprendizado eleva-se de maneira acentuada quando assumimos nos primeiros contatos o discurso de que a Matemática não é dependente de exemplos cotidianos. Em contrapartida, ao exibirmos situações simples e corriqueiras, é notória a associação por parte dos estudantes da parte teórica à "prática", identificando com mais clareza as regularidades nas relações criadas e exemplificando para si o que é e o que não é pertinente ao estudo.

Daí, essa filosofia de que "matemática não se preocupa com problemas práticos" é um exemplo de obstáculo epistemológico, enquanto a ideia de "identificação de regularidades em relações como uma maneira de lidar com outras situações" é classificado como um ato de entendimento[7].

Sendo assim, toda essa mistura de situações cotidianas atreladas às representações geométricas, sejam diagramas, gráficos ou até tabelas numéricas, e algébricas, quando suportadas por definições precisas, proporciona um ambiente facilitador do aprendizado da noção de função e aumenta a capacidade de abstração, a qual será cada vez mais exigida dos discentes ao longo do período destinado ao estudo de funções, assim como em muitos outros ramos da Matemática.

---

[7] Para uma listagem maior de obstáculos epistemológicos e de atos de entendimento, inclusive os exemplos anteriores, ver Sierpinska (1992).

2 **CAMINHOS METODOLÓGICOS**

Neste capítulo faremos exibição da metodologia de pesquisa em que nos apoiamos, destacando as pesquisas qualitativas e, em sequência, apresentaremos a análise de conteúdo, fundamentação teórica que regerá nosso olhar aos livros didáticos observados.

2.1 **Metodologia de pesquisa**

Com a intenção de obter respostas para perguntas norteadoras, entendemos que a pesquisa qualitativa, por meio de seu método dinâmico de interpretação, é o modelo ideal para nossa análise textual. Acreditamos também em pesquisas cujos dados são colhidos de maneira quantitativa, porém, devido à subjetividade imposta pela análise de Dormolen (1986), dados estatísticos podem não refletir precisamente o objeto de interesse de nosso trabalho.

De maneira alguma estamos a dizer que os dois métodos são antagônicos ou excludentes, vide que, segundo Minayo (1994), os conjuntos de dados quantitativos e qualitativos são complementares, já que a realidade coberta pelos dois interage de maneira dinâmica, impossibilitando alguma dicotomia. Tampouco estamos rebaixando a pesquisa qualitativa à classe da simples opinião por não conter uma série inflexível de etapas em formato sequencial a qual devemos seguir. Quanto a isto, Borba (2004) afirma que

> o que se convencionou chamar de pesquisa qualitativa, prioriza procedimentos descritivos à medida em que sua visão de conhecimento explicitamente admite a interferência subjetiva, o conhecimento como compreensão que é sempre contingente, negociada e não é verdade rígida. O que é considerado "verdadeiro", dentro desta concepção, é sempre dinâmico e passível de ser mudado. Isso não quer dizer que se deva ignorar qualquer dado do tipo quantitativo ou mesmo qualquer pesquisa que seja feita baseada em outra noção de conhecimento. (BORBA, 2004, p. 2)

Garnica (2004 apud BORBA, 2004) afirma que uma pesquisa qualitativa tem, dentre outras características, a não neutralidade do pesquisador que, mediante o processo interpretativo, não consegue se desvencilhar de experiências prévias e a impossibilidade de estabelecer previamente, estaticamente e genericamente regulamentações sobre os procedimentos sistemáticos.

Quanto à primeira característica, não queremos dizer que está liberada a influência direta do observador nos elementos pesquisados e, portanto, no resultado final do produto.

Apenas não se pode negar que “a pesquisa, então, não se realiza numa estratosfera situada acima das atividades comuns e correntes do ser humano, sofrendo assim as injunções típicas dessas atividades” (LÜDKE e ANDRÉ, 2017, p. 2), além de que “o conhecimento tem sempre uma parte subjetiva, que é determinada a partir da visão daquele que pesquisa, dos temas que escolhe, dos valores que carrega e das preocupações que levanta na mesma, a partir da própria visão de conhecimento que possui” (BORBA, 2004, p. 11-12).

Em relação à segunda, Bogdan e Biklen (1982 apud LÜDKE e ANDRÉ, 2017) identificam dentre cinco características principais deste tipo de pesquisa que os dados coletados são predominantemente descritivos e que a análise de dados tende a seguir um processo indutivo. Com isso, é natural a orientação de que o *ciclo de pesquisa* não percorre um trajeto linear, mas em forma de espiral, no qual o início é marcado por um problema ou um questionamento e, por conseguinte, a produção de itens provisórios capazes de gerar novas indagações, conforme afirma Minayo (1994). “Certamente o ciclo nunca se fecha pois toda pesquisa produz conhecimentos afirmativos e provoca mais questões para aprofundamento posterior.” (MINAYO, 1994, p. 27)

O ciclo de pesquisa é formado basicamente por três etapas sequenciadas: *a fase exploratória da pesquisa*, cujo foco principal é a fundamentação do projeto investigatório; *o trabalho de campo*, no qual se determinam os limites da atuação de acordo com a construção teórica naquele instante; e *o tratamento do material obtido*, cujas etapas são a ordenação, a classificação e a análise do material.

Definida, portanto, a linha qualitativa de pesquisa, explicaremos melhor na próxima seção a análise de conteúdo proposta por Bardin (1977), na qual buscaremos inspiração metodológica, por conta da proximidade da análise textual de Dormolen (1986), nosso referencial teórico, abordado com mais profundidade no capítulo 3.

2.2 **Análise de Conteúdo**

Ao analisar as comunicações humanas, as ciências humanas desenvolveram um instrumento formado pela reunião de técnicas já aplicadas, nomeado por *análise de conteúdo*. Segundo Bardin (1977), não se trata de um instrumento propriamente dito, mas de um conjunto de apetrechos, podendo até ser visto como um único instrumento, todavia marcado por uma gama enorme de formas e adaptável a um campo de aplicação extenso.

Por tamanha aplicabilidade, entende-se que em pesquisas quantitativas ou qualitativas a análise de conteúdo possibilita uma melhor interpretação dos dados colhidos, ainda que esta interpretação seja parcialmente carregada por visões particulares do analista, por cumprir dois objetivos principais, de acordo com Bardin (1977): ultrapassar a incerteza, isto é, tornar a leitura válida e generalizável, partilhada por outros, e o enriquecimento da leitura por meio de uma leitura atenta com a pretensão de exibir estruturas que confirmam o propósito das mensagens, por exemplo.

Portanto, de forma resumida dizemos que "a análise de conteúdo constitui uma metodologia de pesquisa usada para descrever e interpretar o conteúdo de toda classe de documentos e textos" (MORAES, 1999, p. 2), vide que "tudo o que é dito ou escrito é susceptível de ser submetido a uma análise de conteúdo" (HENRY e MOSCOVICI, 1968 apud BARDIN, 1977, p. 33).

Dito isto, observa-se que cada texto analisado possibilita de maneira relativamente simples a dedução das predisposições causais do autor a partir do conteúdo, entretanto é difícil determinar o que será comunicado mediante o conhecimento destas causas. Daí, "a análise de conteúdo constitui um bom instrumento de indução para se investigarem as causas (variáveis inferidas) a partir dos efeitos (variáveis de inferência ou indicadores; referências no texto)" (BARDIN, 1977, p. 137), não desconsiderando-se a capacidade de percorrer o caminho inverso, ou seja, prever os efeitos a partir das causas.

Como afirma Moraes (1999), a análise de conteúdo tanto permitia o rigor da hipotética objetividade dos dados estatísticos quanto a questionada fecundidade da subjetividade. Porém, com o passar do tempo, as abordagens qualitativas ganharam espaço por admitir que a indução e a intuição fossem utilizadas como estratégias para alcançar camadas mais profundas de entendimento dos fenômenos investigados por elas.

Ao assumir a vertente qualitativa, por conta das diferentes perspectivas a que podemos dar enfoque, um texto possui muitos significados e, então

> (a) o sentido que o autor pretende expressar pode coincidir com o sentido percebido pelo leitor do mesmo;
> (b) o sentido do texto poderá ser diferente de acordo com cada leitor;
> (c) um mesmo autor poderá emitir uma mensagem, sendo que diferentes leitores poderão captá-la com sentidos diferentes;
> (d) um texto pode expressar um sentido do qual o próprio autor não esteja consciente. (OLABUENAGA e ISPIZÚA, 1989, p. 185 apud MORAES, 1999, p. 2)

A essa subjetividade inata ao processo construtivo ou heurístico não há depreciações, uma vez que "de certo modo a análise de conteúdo, é uma interpretação pessoal por parte do pesquisador com relação à percepção que tem dos dados. Não é possível uma leitura neutra.

Toda leitura se constitui numa interpretação" (MORAES, 1999, p. 3). Além disso, o contexto em que a comunicação está inserida é fundamental para a verificação dos múltiplos significados e interpretações oriundos de uma mensagem e das inúmeras possibilidades de análise.

Ao contrário do que possa parecer, o tratamento intuitivo das mensagens não exclui a necessidade de seguir certos passos para atingir o objetivo final. Bardin (1977) organiza as diferentes fases da análise de conteúdo de acordo com três polos cronológicos: i) pré-análise; ii) exploração do material; iii) tratamento dos resultados, inferência e interpretação. Moraes (1999) vai mais fundo, propondo que cinco etapas devem ser cumpridas: i) Preparação das informações; ii) Transformação do conteúdo em unidades; iii) Classificação das unidades em categorias; iv) Descrição; v) Interpretação. Mesmo que o enfoque seja principalmente em análises qualitativas, Moraes (1999) assume que o processo poderá ser reproduzido em estudos quantitativos.

Definimos, portanto, a partir deste momento, que faremos a leitura das obras a serem analisadas com o objetivo de confrontar os dados colhidos e o objetivo desta pesquisa. Cada texto será dividido em enunciados (unidades de análise), os quais serão categorizados por meio de uma codificação, facilitando tanto a identificação dos objetos quanto suas características que desejamos destacar. Cada uma das duas obras escolhidas será analisada apenas nos capítulos que dissertam sobre o conceito de função e suas transformações gráficas, com o intuito de exemplificar a análise textual apresentada por Dormolen (1986) aplicada em materiais didáticos.

A categorização realizada por nós será composta sequencialmente por quatro informações: i) uma letra maiúscula indicando a obra do qual foi retirado (P – livro aprovado pelo PNLD, referenciado por Material P; S – material do Sistema de Ensino, indicado por Material S); ii) uma ou duas letras maiúsculas apresentando o tipo de núcleo a que o enunciado foi relacionado (T – teórico; A – algorítmico; H – heurístico; R – restritivo; C – comunicativo); iii) um número de três dígitos informando sua posição na sequência da obra; iv) um número de três dígitos reforçando a página em que o enunciado se encontra.

Por exemplo, o código P.A.037.052 afirma que o núcleo foi retirado do Material P, é caracterizado como algorítmico, foi o trigésimo sétimo enunciado observado e encontra-se na página 52, ao passo que o código S.HR.106.113 mostra que o núcleo heurístico-restritivo em questão está localizado na página 113 do Material S, sendo o centésimo sexto encontrado nele.

Vale ressaltar que as unidades de análise não possuem extensão definida, podendo se encaixar nesta classificação palavras, frases, parágrafos e textos integralmente. Também devemos esclarecer que “nem todo o texto é tido em consideração. [...] Apenas uma dimensão, a das atitudes, é tida em consideração, e por consequência, só os enunciados que exprimem uma avaliação, são submetidos à análise” (BARDIN, 1977, p. 156).

As unidades serão retiradas de seu contexto original para que a classificação não seja influenciada pelo mesmo, pois, durante a fase de unitarização, é importante que cada objeto tenha como representar por si só a categoria a que está atrelado diretamente. Sobre a possível desconfiança da qualidade da análise por conta do processo de decomposição e reconstrução do texto exercido pela categorização, Bardin (1977) diz que

> a categorização tem como primeiro objectivo (da mesma maneira que a análise documental), fornecer, por condensação uma representação simplificada dos dados brutos. Na análise quantitativa, as inferências finais são, no entanto, efectuadas a partir do material reconstruído. Supõe-se portanto, que a decomposição – reconstrução, desempenha uma determinada função na indicação de correspondências entre as mensagens e a realidade subjacente. A análise de conteúdo assenta implicitamente na crença de que a categorização (passagem de dados brutos a dados organizados) não introduz desvios (por excesso ou por recusa) no material, mas que dá a conhecer índices invisíveis, ao nível dos dados brutos. (BARDIN, 1977, p. 119)

Além disso, Moraes (1999) destaca que

> é preciso compreender que a análise do material se processa de forma cíclica e circular, e não de forma seqüencial e linear. Os dados não falam por si. É necessário extrair deles o significado. Isto em geral não é atingido num único esforço. O retorno periódico aos dados, o refinamento progressivo das categorias, dentro da procura de significados cada vez melhor explicitados, constituem um processo nunca inteiramente concluído, em que a cada ciclo podem atingir-se novas camadas de compreensão. (MORAES, 1999, p. 6)

Findada a exploração do material, será a hora de tratar os resultados com base no que foi estabelecido na pré-análise, fazer inferências sobre os dados colhidos e interpretá-los de acordo com os objetivos almejados.

3 **REFERENCIAL TEÓRICO**

Apresentaremos neste capítulo a fundamentação teórica que suporta esta pesquisa. Em destaque, os conceitos que circundam os núcleos, as linguagens e os signos em um texto matemático.

3.1 **Os núcleos na análise textual**

O objetivo principal da análise textual é explorar uma obra enquanto reunião de inúmeros textos matemáticos. Estes serão particionados em trechos menores, nos quais é permitido, porém não obrigatório, o uso de imagens e que virão a ser classificados de acordo com as características que apresentam.

Nesta divisão, os núcleos têm papel fundamental, pois são eles que definem a que conjunto cada enunciado pertence. Afinal, dizemos que “núcleos são de fato expressões gerais que têm de ser aprendidas como conhecimento” (DORMOLEN, 1986, p.146) e, portanto, pode-se entender os núcleos como as estruturas matemáticas essenciais em cada texto capazes de caracterizar e estruturar os diferentes tipos de conhecimento, além de influenciar a maneira como o estudante aprende.

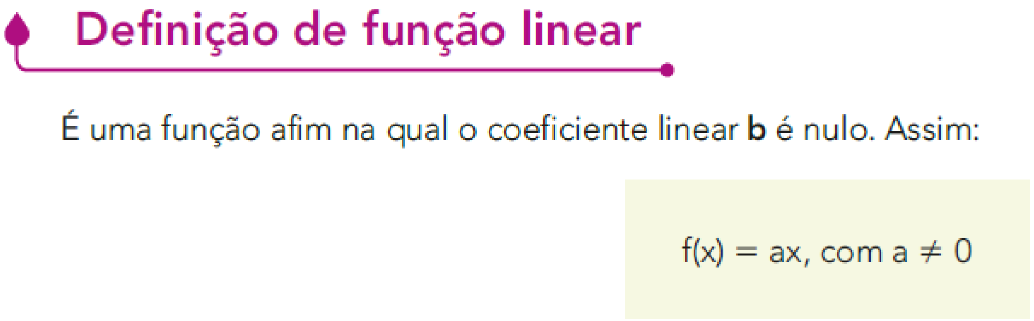
Segundo Dormolen (1986), não há um critério ou uma regra específica para determinar que enunciados serão classificados como núcleos e quais não serão ou até, para os identificados como tal, seu comprimento ou forma. Da mesma maneira que um parágrafo inteiro pode ser tomado com um único núcleo, em muitos casos uma sílaba pode ser encarada como outro núcleo.

Desta interpretação surge o desafio de definir muito bem quais expressões gerais são tomadas como núcleos e quais são tomadas como não-núcleos. Assumiremos daqui por diante que não-núcleos são todos os enunciados contidos nos livros didáticos analisados que não possuem encargo importante para o ensino ou que apenas retomam conceitos previamente discutidos na mesma obra.

Após a decisão de tornar uma expressão geral um núcleo, é preciso decidir a que tipo(s) de núcleo(s) este enunciado se aproxima. Os núcleos são caracterizados de acordo com pelo menos um dos cinco aspectos apresentados a seguir.

O aspecto teórico é responsável por axiomas, definições, teoremas, corolários e outros itens semelhantes. Portanto, os *núcleos teóricos* (T) são os enunciados que juntos constituem a estrutura matemática do texto ou parte dela. Aqui é comum o emprego de rigor matemático, vista a importância dos conteúdos para o desenvolvimento conceitual na área. Veja um exemplo na figura 4.

Figura 4 – Núcleo teórico 1.



Definição de função linear

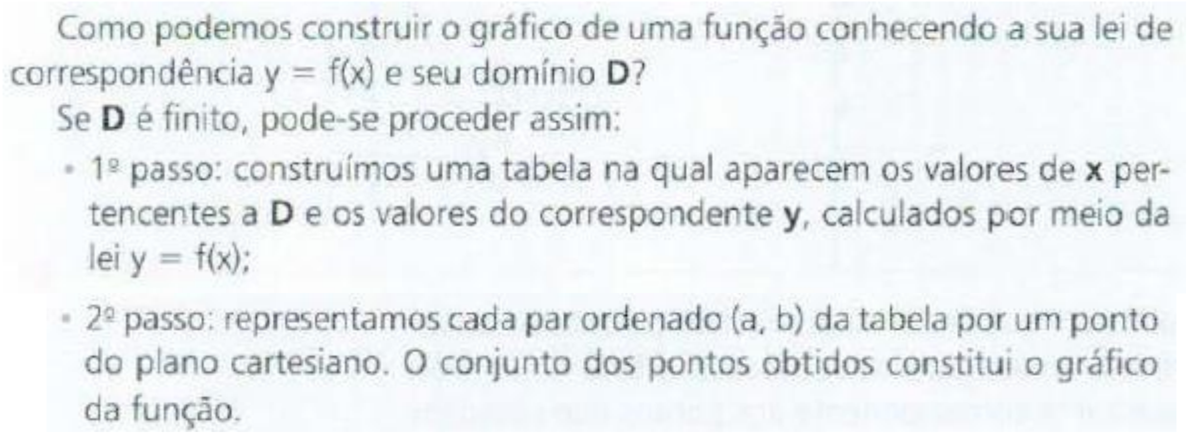
É uma função afim na qual o coeficiente linear **b** é nulo. Assim:

$f(x) = ax$, com $a \neq 0$

Fonte: Material S, 2016, p. 94.

Determinados enunciados têm por objetivo estabelecer um conjunto de regras práticas de como obter o desejado ou simplesmente estabelecer um exemplo para alguma tarefa próxima, a qual deve se resolver de maneira parecida ou idêntica. Este é o aspecto algorítmico e, por isso, os *núcleos algorítmicos* (A) têm por finalidade guiar cada passo na construção de uma base processual. Observe na figura 5.

Figura 5 – Núcleo algorítmico 1.



Como podemos construir o gráfico de uma função conhecendo a sua lei de correspondência $y = f(x)$ e seu domínio **D**?

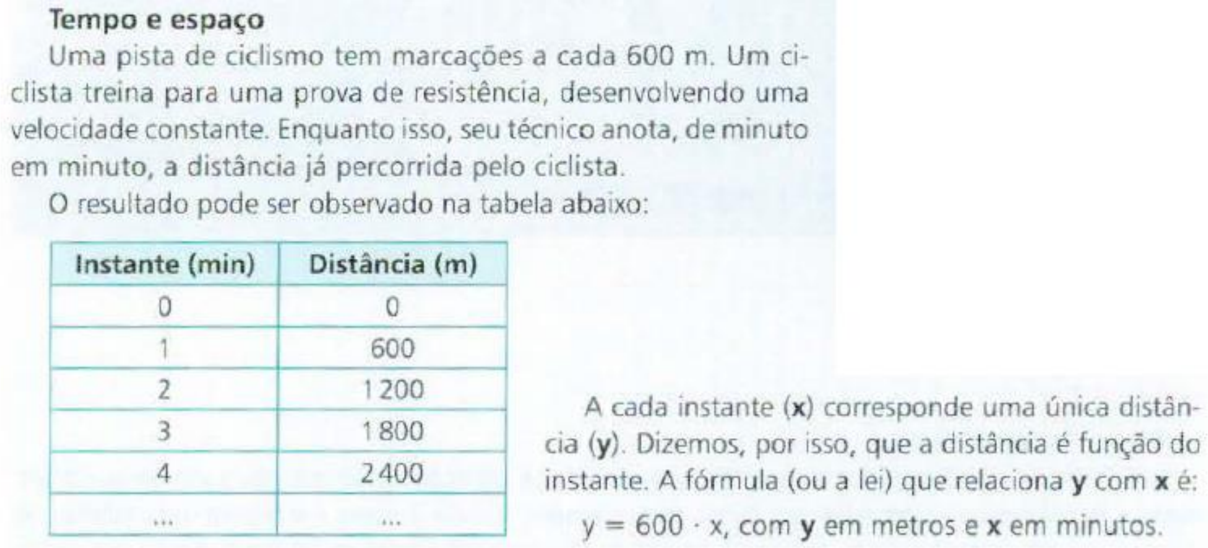
Se **D** é finito, pode-se proceder assim:

- 1º passo: construímos uma tabela na qual aparecem os valores de **x** pertencentes a **D** e os valores do correspondente **y**, calculados por meio da lei $y = f(x)$;
- 2º passo: representamos cada par ordenado (a, b) da tabela por um ponto do plano cartesiano. O conjunto dos pontos obtidos constitui o gráfico da função.

Fonte: Material P, 2016, p. 55-56.

Por vezes, os enunciados apresentam regras de como fazer, porém não se enquadram ao modelo algorítmico, já que nem sempre apresentam a resposta ao problema. Diferentemente, eles têm por interesse mover o estudante a solucionar por si só e, por conseguinte, fazer com que o próprio interessado descubra aquilo que se deseja que aprenda. O aspecto metodológico, por seguir uma natureza mais heurística, prioriza a reflexão e é basicamente isto que difere os *núcleos heurísticos* (H) dos algorítmicos. Um exemplo disto está na figura 6.

Figura 6 – Núcleo heurístico 1.



Tempo e espaço

Uma pista de ciclismo tem marcações a cada 600 m. Um ciclista treina para uma prova de resistência, desenvolvendo uma velocidade constante. Enquanto isso, seu técnico anota, de minuto em minuto, a distância já percorrida pelo ciclista.

O resultado pode ser observado na tabela abaixo:

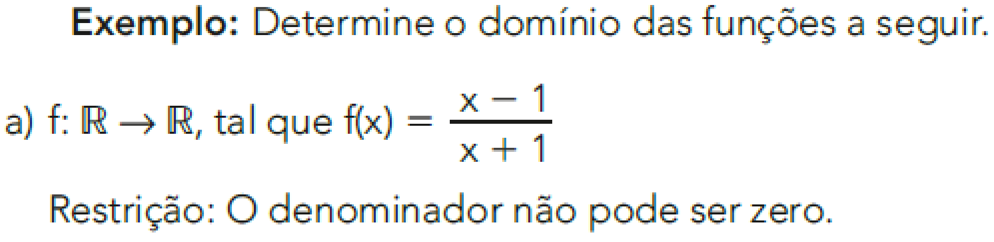
Instante (min)	Distância (m)
0	0
1	600
2	1 200
3	1 800
4	2 400
...	...

A cada instante (**x**) corresponde uma única distância (**y**). Dizemos, por isso, que a distância é função do instante. A fórmula (ou a lei) que relaciona **y** com **x** é: $y = 600 \cdot x$, com **y** em metros e **x** em minutos.

Fonte: Material P, 2016, p. 39.

O aspecto lógico, também conhecido por restritivo, é aquele que visa garantir ao estudante os limites do espaço teórico e dos procedimentos já abordados. Deste modo, os *núcleos restritivos* (R) são responsáveis por direcionar o que é e o que não é permitido fazer na teoria em questão. Em alguns casos, traz conhecimentos velados. Na figura 7 fica nítida a restrição, apesar do equívoco gerado pelos autores ao pedir que se determinasse o domínio da função f, afirmando em seguida que o domínio da função f é o conjunto dos números reais e, por fim, indicando a restrição do denominador da fração, contradizendo a afirmativa anterior.

Figura 7 – Núcleo restritivo 1.



Exemplo: Determine o domínio das funções a seguir.

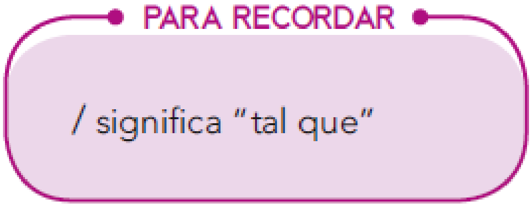
a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

Restrição: O denominador não pode ser zero.

Fonte: Material S, 2016, p. 27.

Por fim, o aspecto comunicativo tem por objetivo enfatizar as convenções matemáticas. Desta forma, os *núcleos comunicativos* (C) são responsáveis por avisar ao leitor o jeito correto de se referir a algum conteúdo específico, que simbologia é usada para representar um objeto de interesse, como uma propriedade ou uma frase, ou até mesmo como proceder para realizar uma prova matemática. Vejamos na figura 8.

Figura 8 – Núcleo comunicativo 1.



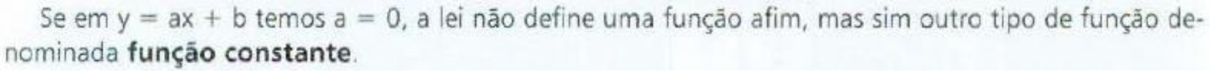
PARA RECORDAR

/ significa “tal que”

Fonte: Material S, 2016, p. 26.

É importante salientar que cada núcleo não é necessariamente exclusivo de uma categoria, uma vez que todo o processo que envolve a análise textual é altamente subjetivo e depende de quem analisa o enunciado. Ainda sobre este fato, como afirma Dormolen (1986), cada núcleo pode conter mais de um aspecto, sendo denominado nesse caso por *núcleo-conjunto*, e quem assume a tarefa de analisar as expressões gerais deve estar ciente deste fato, enfatizando, se julgar necessário, aquele mais relevante no contexto ao qual estão inseridas as mesmas. Observe um exemplo na figura 9.

Figura 9 – Núcleo restritivo-comunicativo.



Se em $y = ax + b$ temos $a = 0$, a lei não define uma função afim, mas sim outro tipo de função denominada **função constante**.

Fonte: Material P, 2016, p. 75.

Não é incomum que um outro analista, ao pegar o mesmo texto matemático, possa não caracterizá-lo da mesma maneira ou até defini-lo como um não-núcleo. Tais possibilidades não diminuem a importância da análise textual ou desmerecem o papel do atuante. A diferença está nos contextos em que tanto o analista quanto o texto se encontram e, por este motivo, qualquer pessoa que assuma a tarefa estará propícia a estas inferências externas.

3.2 **Os textos matemáticos e seus possíveis aspectos**

De um modo geral, todo material didático deve se apresentar como a interface intermediária entre a bagagem matemática trazida pelo discente e adquirida em séries anteriores e os conteúdos específicos que tem por objetivo apresentar ao longo do período letivo. Portanto, a maneira como isso ocorre é de suma importância e devemos destacar dois pontos principais de observação, como discutido por Santana Filho (2017): se os núcleos estão perfilados por meio de uma *sequência conceitual* e como vemos seu *condicionamento conceitual*.

Dizemos que houve uma *sequência conceitual* quando um núcleo que se deseja ensinar ao estudante foi precedido de outros núcleos essenciais diretamente associados à base informativa do mesmo. Todavia, ainda que tais núcleos estejam sequenciados, frisamos que o entendimento de um núcleo não depende exclusivamente dos conteúdos previamente exibidos pelo livro-texto, mas também das conexões realizadas pelo próprio aluno e de sua “maturidade” para conceber a ideia de que a compreensão dos núcleos tem impacto profundo em aplicações futuras.

Diferentemente do anterior, o *condicionamento conceitual* é a verificação de como cada núcleo influencia a aprendizagem dos próximos, isto é, se o emprego das técnicas e conceitos naquele núcleo tem funcionalidade clara na obtenção de novos conhecimentos prescritos no estudo de novos núcleos. Portanto, quando supomos esta conexão entre núcleos, estamos também interessados nas ligações feitas pelo estudante, porém muito mais atentos ao processo da aprendizagem do que ao próprio resultado final.

Sendo assim, de acordo com as inúmeras particularidades trazidas pelo vasto conjunto de alunos a que a obra se destina, é de extrema significância que, quando for o caso, os conteúdos (ou até a resolução de um problema em particular) sejam descritos de mais de uma maneira ou ponto de vista, com a finalidade de possibilitar um bom entendimento a todos os discentes, independentemente do modo que cada núcleo necessário foi exposto aos mesmos em momentos outros. Omitir esta possibilidade é limitar a aprendizagem e, portanto, dificultar a absorção de conhecimentos futuros àqueles que não possuem a reflexão como hábito pessoal de estudo.

Ainda que se cumpra esta última recomendação, provavelmente não terá êxito aquele material didático que não adequar seus objetivos à realidade do público pretendido. Deve-se estar atento, por exemplo, se a linguagem utilizada é compatível com o ano de escolaridade e, não obstante, se é acessível aos estudantes conforme ao seu nível cognitivo. Ferir um destes itens é imediatamente comprometer a autoestima ou o engajamento dos alunos mediante as futuras observações e aplicações temáticas.

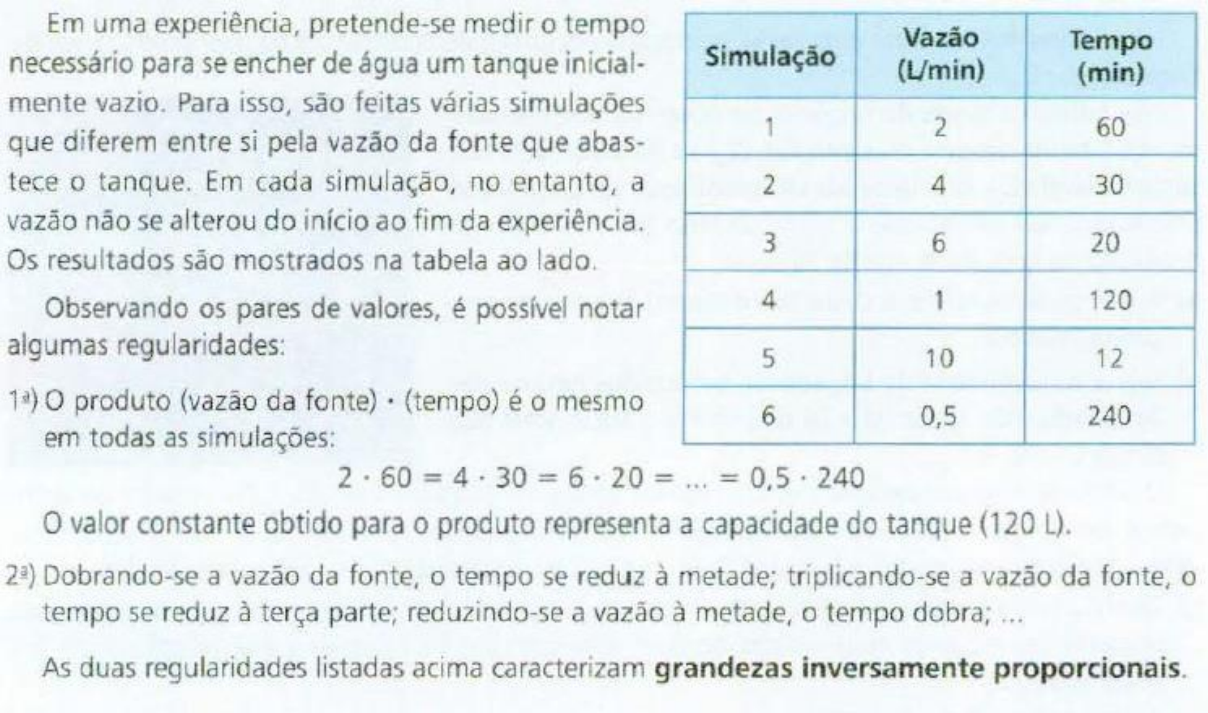
Contudo, a figura responsável por classificar os textos como aptos ou não aptos àquela turma ou escola é o professor e não o analista e as justificativas podem, inclusive, não estar contidas na publicação. Todo e qualquer apontamento realizado na obra serve única e exclusivamente para ser tomado como guia, não devendo ser utilizado como regra para a aceitação ou negação de tal.

É fundamental que cada texto estabeleça prévia e explicitamente, pelo menos aos profissionais que trabalharão diretamente com o material, suas intenções quanto aos processos que envolvem os diferentes momentos da aprendizagem do aluno, situando os conhecimentos supostamente já consolidados como impulsionadores em direção ao novo estágio de interesse. De fato, o estudante por si só, mas motivado pelo material, deve reconhecer a importância de sua atuação em cada momento anterior, trazendo à tona as competências trabalhadas e adquiridas, concatenando-as ao que está a ser apresentado e, por fim, sintetizando os conceitos novos e antigos de maneira coesa.

Para tal, é importante que o texto apresente linguagem adequada ao nível pretendido. Não se trata apenas de quais palavras serão usadas, mas também que representações (gráfica, simbólica, etc.) podem ser inseridas naquele ano para cumprir determinado objetivo e não limitar a evolução individual do aluno em alguma de suas diversas fases de aprendizagem. Segundo Dormolen (1986), dentre muitos fatores que impactam o estudante na leitura e no entendimento do livro, alguns devem ser observados pelo analista com mais atenção: *níveis de linguagem*, *símbolos e sinais* e *representação verbal e gráfica*.

Freudenthal (1978 apud Dormolen, 1986) divide o modo como as pessoas usam a linguagem matemática e a coloquial no processo de conceituação em três níveis de linguagem: a *linguagem exemplar*, a *linguagem relativa* e a *linguagem funcional*. A *linguagem exemplar* se vale de exemplos para explicar significados, usando verbos procedimentais (calcular, substituir, etc.) ou descritivos (ser, ter, etc.) de acordo com a familiaridade do indivíduo com o que está sendo abordado, além de indicar objetos matemáticos por meio de descrições simples (este, aquele, o último, o ponto P, etc.). Retratando melhor a descrição anterior, temos a figura 10.

Figura 10 – Linguagem exemplar.



Em uma experiência, pretende-se medir o tempo necessário para se encher de água um tanque inicialmente vazio. Para isso, são feitas várias simulações que diferem entre si pela vazão da fonte que abastece o tanque. Em cada simulação, no entanto, a vazão não se alterou do início ao fim da experiência. Os resultados são mostrados na tabela ao lado.

Simulação	Vazão (L/min)	Tempo (min)
1	2	60
2	4	30
3	6	20
4	1	120
5	10	12
6	0,5	240

Observando os pares de valores, é possível notar algumas regularidades:

1ª) O produto (vazão da fonte) · (tempo) é o mesmo em todas as simulações:

$$2 \cdot 60 = 4 \cdot 30 = 6 \cdot 20 = \ldots = 0{,}5 \cdot 240$$

O valor constante obtido para o produto representa a capacidade do tanque (120 L).

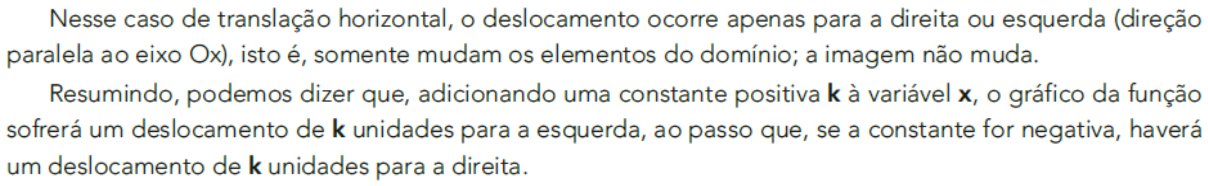
2ª) Dobrando-se a vazão da fonte, o tempo se reduz à metade; triplicando-se a vazão da fonte, o tempo se reduz à terça parte; reduzindo-se a vazão à metade, o tempo dobra; ...

As duas regularidades listadas acima caracterizam **grandezas inversamente proporcionais**.

Fonte: Material P, 2016, p. 92.

A *linguagem relativa* mantém a utilização dos verbos anteriores, porém os objetos são apresentados por suas relações, sem a subjetividade dos exemplos. Nela, há o emprego de variáveis, letras ou palavras para representá-los. Veja na figura 11.

Figura 11 – Linguagem relativa.



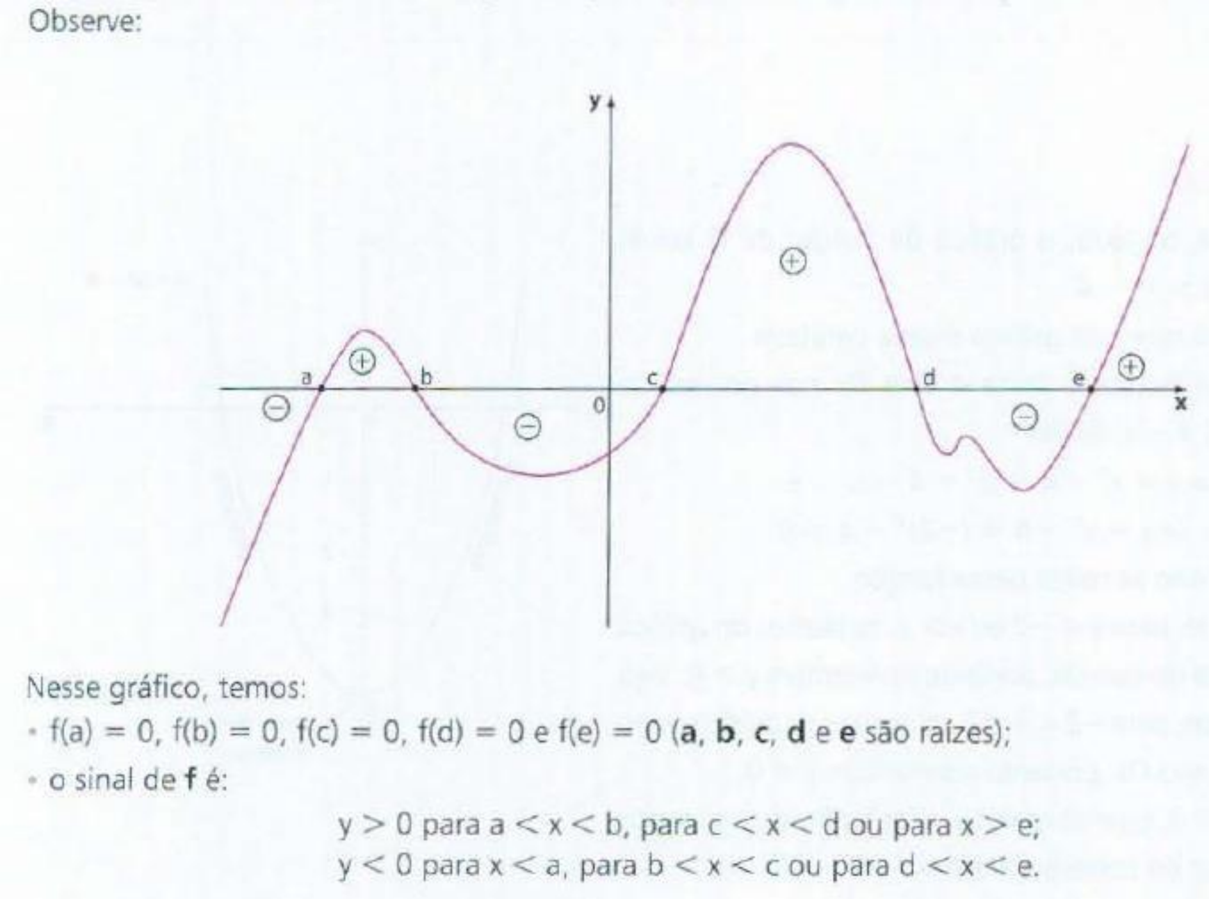
Nesse caso de translação horizontal, o deslocamento ocorre apenas para a direita ou esquerda (direção paralela ao eixo Ox), isto é, somente mudam os elementos do domínio; a imagem não muda.

Resumindo, podemos dizer que, adicionando uma constante positiva **k** à variável **x**, o gráfico da função sofrerá um deslocamento de **k** unidades para a esquerda, ao passo que, se a constante for negativa, haverá um deslocamento de **k** unidades para a direita.

Fonte: Material S, 2016, p. 75.

Já a *linguagem funcional* também estabelece a indicação dos objetos matemáticos por suas relações, mas por meio de funções, diferentemente das duas anteriores. Observe na figura 12 a seguir.

Figura 12 – Linguagem funcional.



Observe:

Nesse gráfico, temos:

- $f(a) = 0$, $f(b) = 0$, $f(c) = 0$, $f(d) = 0$ e $f(e) = 0$ (**a**, **b**, **c**, **d** e **e** são raízes);
- o sinal de **f** é:

$y > 0$ para $a < x < b$, para $c < x < d$ ou para $x > e$;
$y < 0$ para $x < a$, para $b < x < c$ ou para $d < x < e$.

Fonte: Material P, 2016, p. 60.

Em toda a leitura do texto, reconheceremos alguns signos – *signs* – que trarão ao leitor a lembrança de certo(s) conceito(s) ou o impulsionarão a realizar determinada ação. De acordo com Dormolen (1986), quando identificarmos a primeira situação, chamaremos este signo de *símbolo*, responsável pelos aspectos teóricos e lógicos; quando notarmos a segunda, nomearemos por *sinal*, referente aos aspectos metódicos e algorítmicos. “Este, em essência, é o aspecto comunicativo dos textos matemáticos” (DORMOLEN, 1986, p. 158).

Como afirma Otte (1981 apud Dormolen, 1986), cada marca, em uma situação ideal, deve trazer à luz uma estrutura cognitiva rica o suficiente a ponto de acender uma conexão entre os conceitos (trabalho dos símbolos) tanto quanto recuperar uma série de possíveis atividades (trabalho de sinal). Deste modo, é possível perceber que uma marca pode existir para representar uma inteligência descritiva ou até como instrumento de uma inteligência procedimental, complementando-se.

4 ANÁLISE DOS MATERIAIS DIDÁTICOS

No presente capítulo apresentaremos brevemente os materiais didáticos selecionados para nossa pesquisa, restringindo o olhar apenas aos autores de cada obra e aos capítulos referentes ao nosso trabalho. Em seguida, analisaremos individualmente cada texto, listando, classificando e codificando todos os núcleos encontrados em cada livro e, em sequência, para cada tipo de núcleo, destacar o uso das linguagens e o condicionamento conceitual.

4.1 A apresentação dos materiais didáticos

Diante da escolha de analisarmos como o conceito de função é abordado nos materiais didáticos do ensino médio e, além disso, de compararmos o material de um sistema de ensino com um livro aprovado no último PNLD, precisamos definir que obras utilizaremos. Para o primeiro, usaremos o Material S pelo fato de termos contato diário; para o segundo, selecionamos o Material P por estar entre os três livros didáticos mais distribuídos no PNLD de 2015[8].

Vale ressaltar que analisaremos apenas os capítulos em que a noção de função é explorada e também as funções polinomiais do primeiro grau, o que não proporciona algum tipo de perda, já que a análise textual de Dormolen não possui limitações sobre a extensão dos textos. Não incluiremos seções em que se abordam outras funções especiais por não possuirmos interesses específicos sobre elas.

O Material S é dividido em quatro cadernos de Matemática e Ciências da Natureza e quatro de Linguagens e Ciências Humanas com seis módulos por disciplina – exceto Matemática, a qual é dividida em Matemática I e Matemática II, ambas com seis unidades – em cada uma das três séries do ensino médio. Limitaremos nossa análise ao caderno 2 de Matemática e Ciências da Natureza da primeira série do ensino médio por conter os módulos 8, 9, 10, 11 e 12 de Matemática I, referentes à noção geral de função e suas abordagens gráficas, além das funções afim. Cada um deles pode ou não conter uma seção opcional, que apresenta conceitos, segundo os próprios autores, além da matriz de referência do Enem.

---

[8] Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/programas/programas-do-livro/livro-didatico/dados-estatisticos>. Acesso em: 11 jan. 2019.

No primeiro módulo, o material começa apresentando a definição e a notação de função, seguindo com exemplos numéricos, no intuito de estabelecer as relações de dependência entre as grandezas. Mostra também a abordagem por diagramas e o plano cartesiano, finalizando com exemplos de restrição de domínio de funções e uma situação-problema. Na seção opcional, definem-se pares ordenados, produtos cartesianos e relações binárias.

O segundo módulo trabalha definições de plano cartesiano e análises gráficas, incluindo construções. Na seção opcional, encontram-se estudos de paridade de funções. Após isso, no terceiro módulo, estudam-se as translações de funções, suas reflexões em torno dos eixos e as multiplicações por constantes reais.

No quarto módulo, os autores definem as funções afim, linear e constante, identificam quando duas grandezas são diretamente proporcionais, associando-as às funções anteriores, e introduzem o conceito de taxa de variação. Já no quinto módulo, o gráfico das funções polinomiais do primeiro grau, os coeficientes linear e angular, o crescimento e decrescimento dessas funções, zero e sinais das mesmas são enfatizados.

Já o Material P, no volume 1, no qual encontramos nosso objeto de estudo, há 13 capítulos, incluindo os capítulos 3 e 4, os quais se destinam ao estudo geral de funções e da função afim. Os autores o iniciam com exemplos cotidianos e relações de dependência entre as grandezas, sempre com a finalidade de estabelecer uma fórmula (ou lei) entre duas variáveis. Em seguida, após uma seção de exercícios, apresentam o conceito de função a partir da visão de conjuntos, abordada nos dois primeiros capítulos. Os autores informam a notação utilizada e seguem com as funções definidas por fórmulas.

Mais adiante, numa seção destacada, preocupam-se em exibir resumidamente a evolução do conceito de função, prosseguindo com os conceitos gráficos e uma área de aplicações, no qual se trabalham a velocidade escalar média e a aceleração escalar média como quocientes, tomando por base a taxa média de variação de uma função.

No capítulo seguinte, definem as funções afim, linear e constante, além de construir seus gráficos e interseções com os eixos coordenados, apresentando os coeficientes linear e angular. Também estabelece as possíveis relações de proporcionalidade entre duas grandezas e inequações envolvendo as funções polinomiais do primeiro grau.

4.2 **Análise do *Material P***

Nos capítulos 3 e 4, intitulados *Funções* e *Função afim*, respectivamente, os autores abordam a noção intuitiva de função, suas definições e propriedades gráficas, incluindo as funções afim, linear e constante. Em nossa análise foram definidos noventa e cinco núcleos, separados no quadro 1.

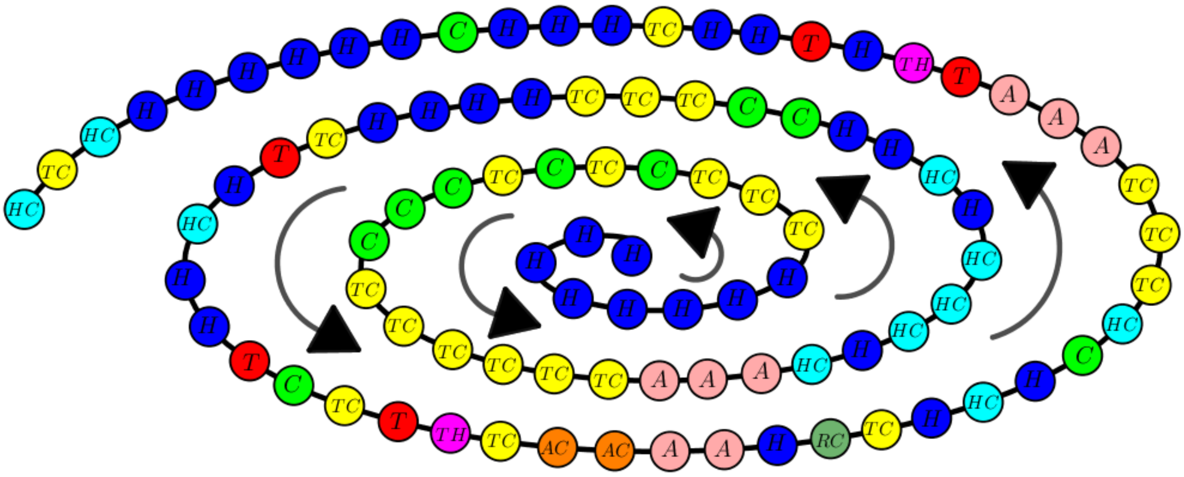
Quadro 1 – Quantitativo de núcleos no *Material P*.

Quantidade (%)	Teórico	Algorítmico	Heurístico	Restritivo	Comunicativo
Teórico	5 (5)	0 (0)	2 (2)	0 (0)	23 (24)
Algorítmico		8 (8)	0 (0)	0 (0)	2 (2)
Heurístico			34 (36)	0 (0)	10 (11)
Restritivo				0 (0)	1 (1)
Comunicativo					10 (11)
				Total	95 (100)

Fonte: O autor, 2018.

Nele é exibida a quantidade de núcleos de cada classificação – informada pela união dos aspectos da linha e da coluna correspondente – e o percentual referente à categoria. Por exemplo, há 34 núcleos puramente heurísticos, representando 36% dos 95 totais, e 23 teórico-comunicativos, equivalente a 24% do total. Destacamos novamente que alguns núcleos, os núcleos-conjuntos, podem conter mais de um aspecto. Ao longo da seção 4.2 discursaremos um pouco mais sobre os mesmos. Neste capítulo encontramos trinta e oito núcleos-conjuntos (40% dos 95). A ordem em que se apresentam os núcleos deste capítulo é indicada na figura 13 a seguir, a qual retiramos a inspiração do trabalho de Santana Filho (2017).

Figura 13 – Ordenação dos núcleos no *Material P*.

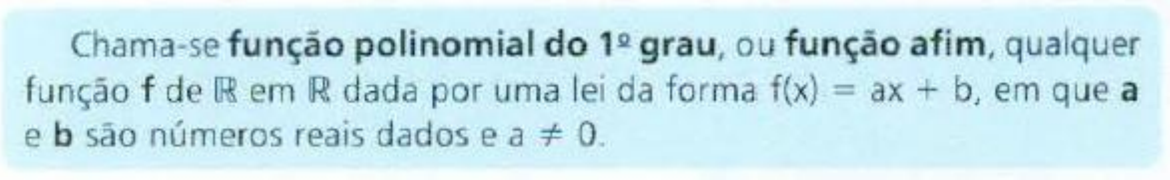


Fonte: O autor, 2018.

É fácil notar que a teoria praticamente não se dissocia da apresentação de uma nova linguagem, isto é, quase não se nota a presença de um núcleo puramente teórico em comparação aos núcleos teórico-comunicativos. É visível também a superioridade numérica dos núcleos heurísticos em relação aos núcleos algorítmicos, possivelmente com intenção de fazer com que os alunos descubram as propriedades por conta própria antes mesmo de a definição ser apresentada.

Um núcleo teórico é o enunciado que constitui a estrutura matemática do texto ou parte dela, como afirma Dormolen (1986). Na figura 14, observa-se a construção do objeto *função afim* a partir do conceito de função previamente explicitado.

Figura 14 – Núcleo teórico 2.

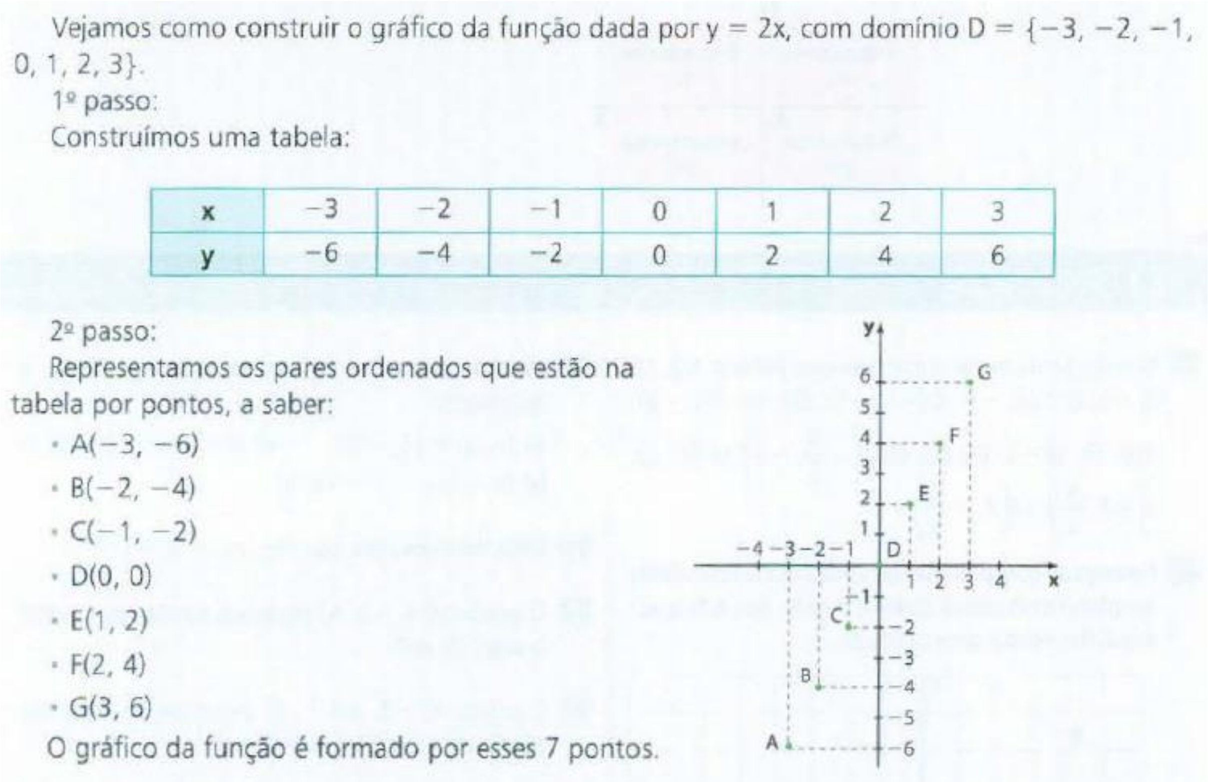


Chama-se **função polinomial do 1º grau**, ou **função afim**, qualquer função **f** de ℝ em ℝ dada por uma lei da forma f(x) = ax + b, em que **a** e **b** são números reais dados e a ≠ 0.

Fonte: Material P, 2016, p. 71.

Um núcleo algorítmico tem a pretensão de estimular a prática de algum item teórico apresentado. Nele, observa-se a descrição dos procedimentos de modo sequenciado. O método para a construção do gráfico de uma função, na figura 15, é dado por dois passos.

Figura 15 – Núcleo algorítmico 2.



Vejamos como construir o gráfico da função dada por y = 2x, com domínio D = {−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3}.

1º passo:

Construímos uma tabela:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−6	−4	−2	0	2	4	6

2º passo:

Representamos os pares ordenados que estão na tabela por pontos, a saber:

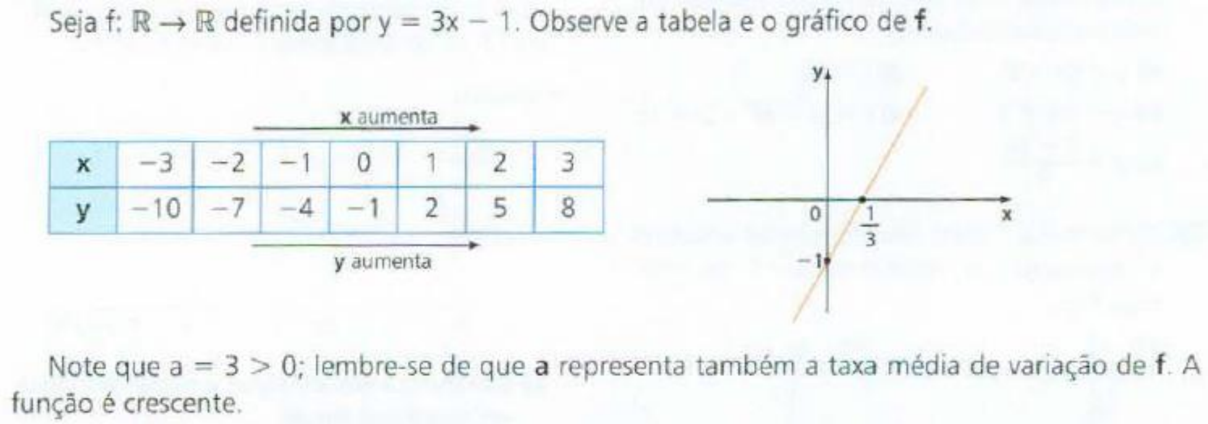
- A(−3, −6)
- B(−2, −4)
- C(−1, −2)
- D(0, 0)
- E(1, 2)
- F(2, 4)
- G(3, 6)

O gráfico da função é formado por esses 7 pontos.

Fonte: Material P, 2016, p. 56.

Um núcleo heurístico também segue comandos pré-estabelecidos, como o algorítmico, contudo é responsável por uma visão mais crítica do objeto, promovendo reflexão e descoberta de propriedades, quando existem. Por exemplo, na figura 16 os autores dão a entender que a taxa média de variação de uma função afim, quando positiva, a descreve como uma função crescente.

Figura 16 – Núcleo heurístico 2.



Seja f: ℝ → ℝ definida por y = 3x − 1. Observe a tabela e o gráfico de **f**.

x aumenta

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−10	−7	−4	−1	2	5	8

y aumenta

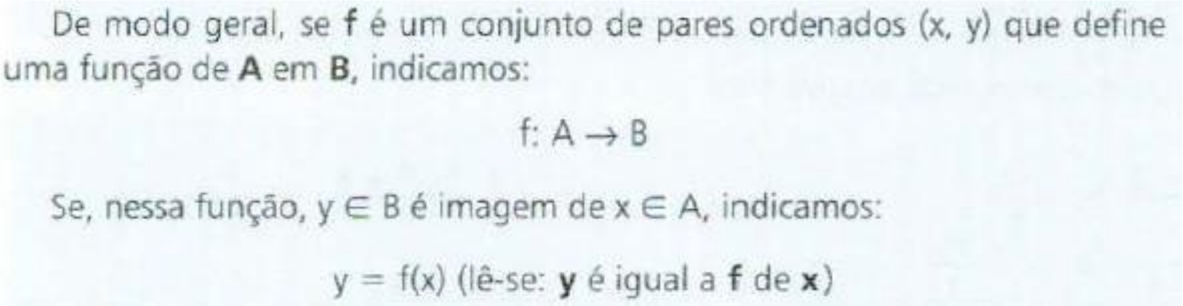
Note que a = 3 > 0; lembre-se de que **a** representa também a taxa média de variação de **f**. A função é crescente.

Fonte: Material P, 2016, p. 85.

Um núcleo restritivo limita o espaço teórico e os procedimentos já abordados. No entanto, não encontramos um núcleo nesta obra que classificássemos como restritivo.

Um núcleo comunicativo é aquele que indica ao leitor a representação que será utilizada a partir daquele momento para descrever determinados objetos. Por exemplo, a figura 17 apresenta a simbologia da relação entre os conjuntos de domínio e imagem da função f e como se faz a leitura da mesma.

Figura 17 – Núcleo comunicativo 2.



De modo geral, se **f** é um conjunto de pares ordenados (x, y) que define uma função de **A** em **B**, indicamos:

$$f: A \to B$$

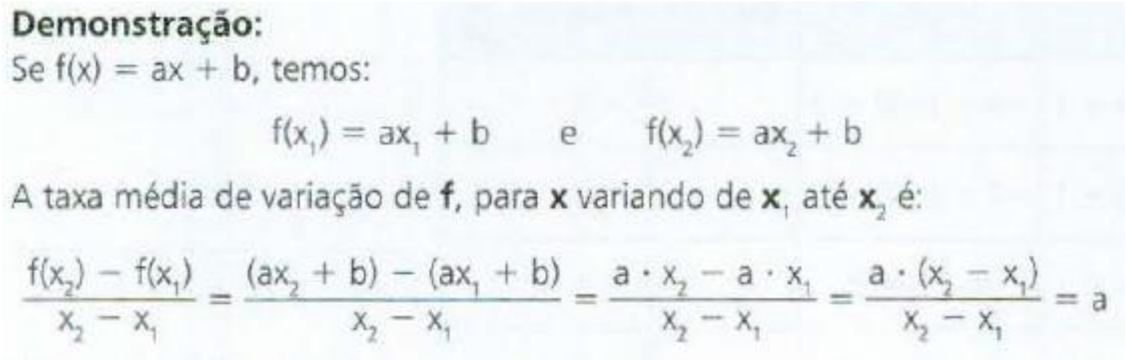
Se, nessa função, $y \in B$ é imagem de $x \in A$, indicamos:

$y = f(x)$ (lê-se: **y** é igual a **f** de **x**)

Fonte: Material P, 2016, p. 43.

Os núcleos-conjuntos apresentam uma mescla das características fundamentais de cada núcleo participante escolhido dentre os cinco anteriores.

Figura 18 – Núcleo teórico-heurístico.



Demonstração:

Se $f(x) = ax + b$, temos:

$$f(x_1) = ax_1 + b \qquad \text{e} \qquad f(x_2) = ax_2 + b$$

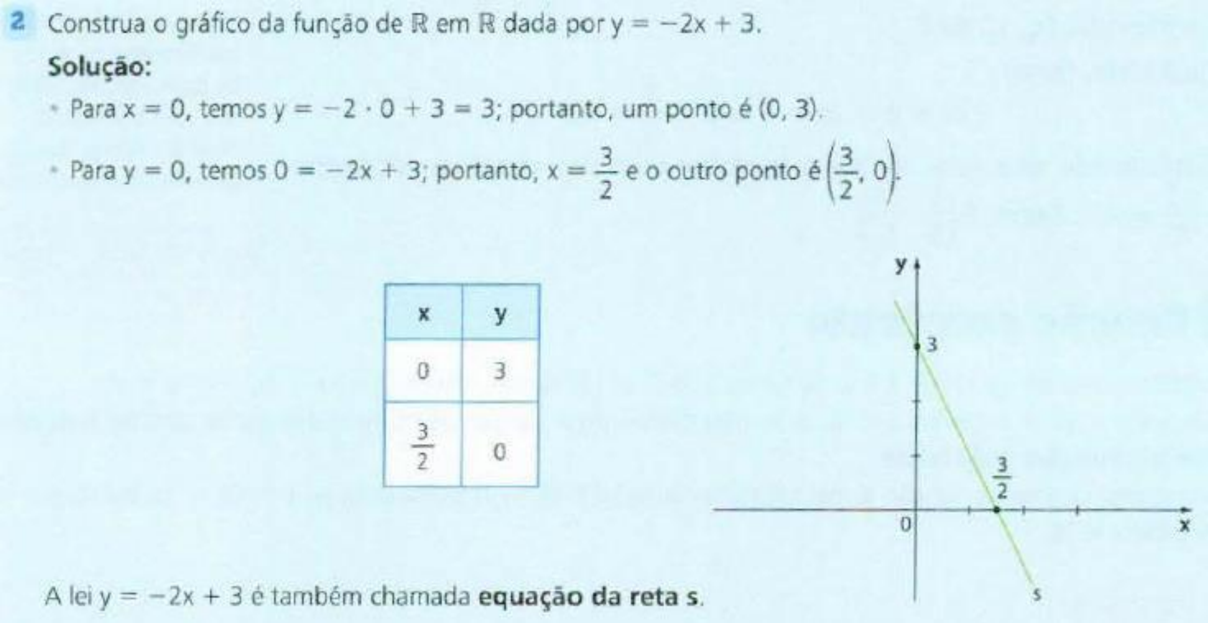
A taxa média de variação de **f**, para **x** variando de $\mathbf{x}_1$ até $\mathbf{x}_2$ é:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a \cdot x_2 - a \cdot x_1}{x_2 - x_1} = \frac{a \cdot (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

Fonte: Material P, 2016, p. 82.

Na figura 18 temos um exemplo de núcleo teórico-heurístico, enquanto na figura 19 o núcleo foi caracterizado como algorítmico-comunicativo.

Figura 19 – Núcleo algorítmico-comunicativo.



2 Construa o gráfico da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $y = -2x + 3$.

Solução:

- Para $x = 0$, temos $y = -2 \cdot 0 + 3 = 3$; portanto, um ponto é (0, 3).
- Para $y = 0$, temos $0 = -2x + 3$; portanto, $x = \frac{3}{2}$ e o outro ponto é $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

x	y
0	3
$\frac{3}{2}$	0

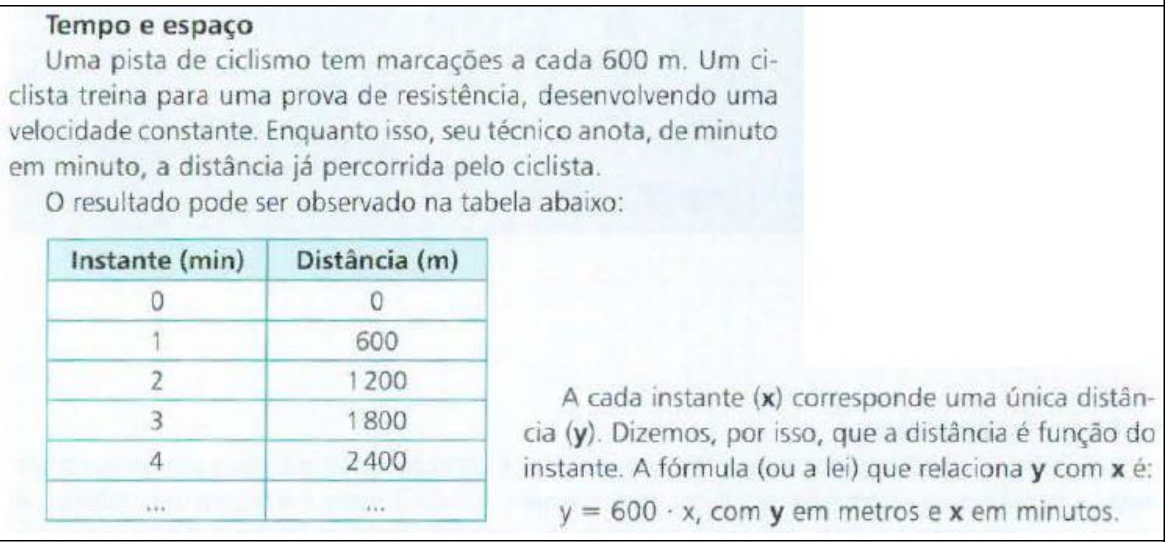
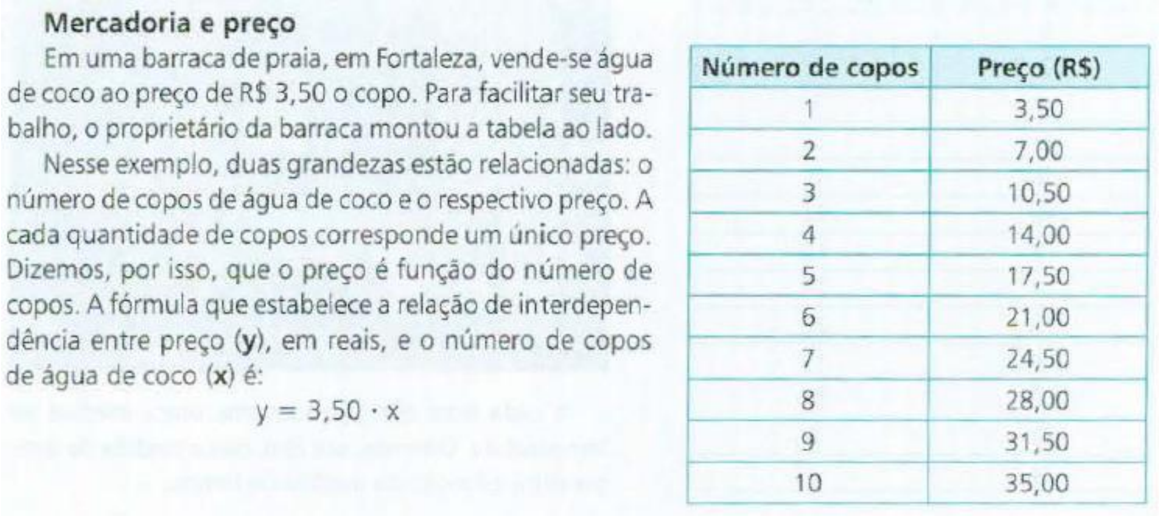
A lei $y = -2x + 3$ é também chamada **equação da reta s**.

Fonte: Material P, 2016, p. 73.

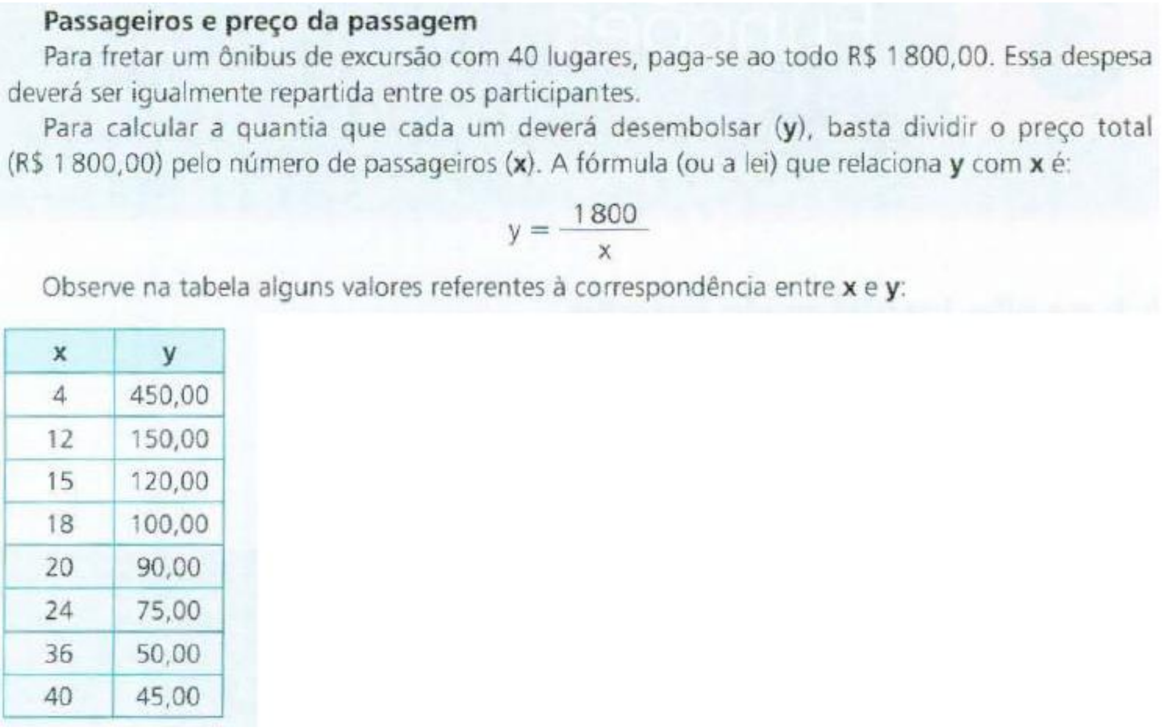
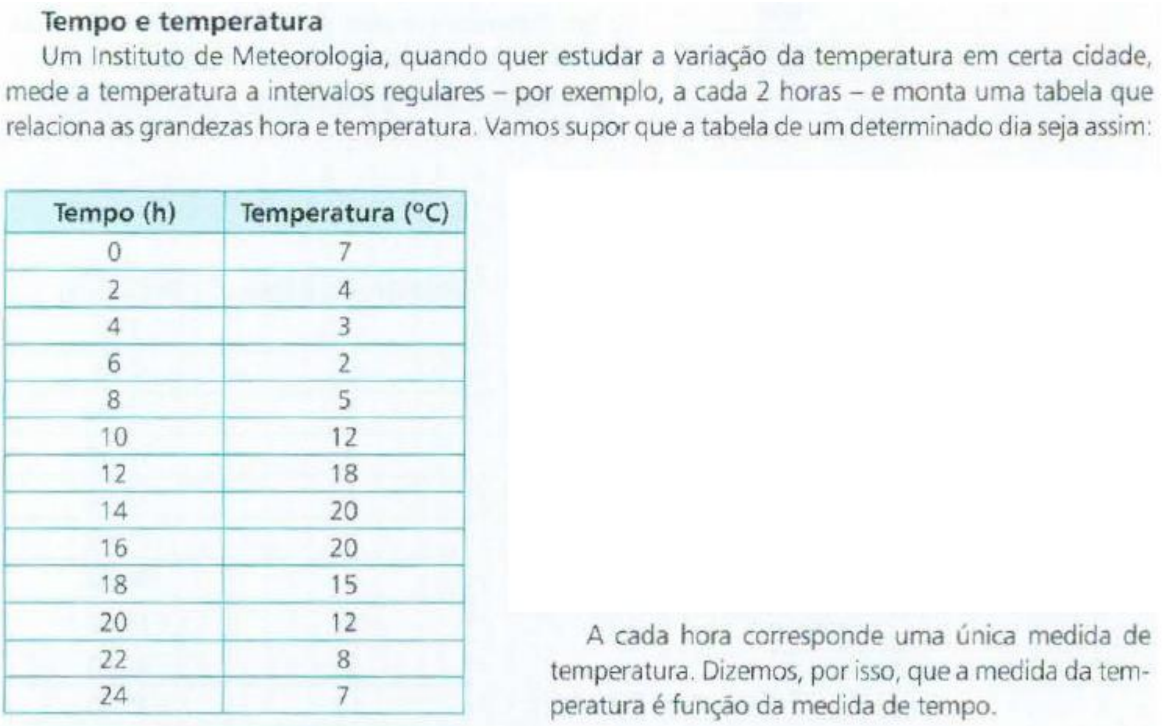
4.2.1 Quadro de núcleos

No quadro a seguir serão exibidos os núcleos encontrados nos capítulo 3 e 4 do Material P, que abordam o conceito de função. Para que cada núcleo seja identificado de maneira única, utilizaremos a seguinte codificação P.X.Y.Z. A letra inicial P representa que o núcleo pertence ao Material P; a letra X será substituída por outra que simbolize qual o tipo de núcleo que o enunciado foi classificado (T – Teórico; A – Algorítmico; H – Heurístico; R – Restritivo; C – Comunicativo) ou combinações delas; Y é um número de três algarismos que indica a sequência em que foi encontrado no texto; Z é um número de três algarismos e informa a página do livro em que o núcleo se encontra.

Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continua)

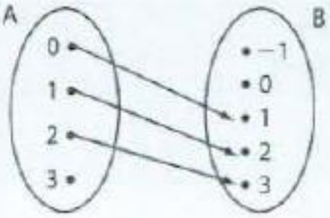
<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>P.H.001.039</td><td>

Tempo e espaço
Uma pista de ciclismo tem marcações a cada 600 m. Um ciclista treina para uma prova de resistência, desenvolvendo uma velocidade constante. Enquanto isso, seu técnico anota, de minuto em minuto, a distância já percorrida pelo ciclista.
O resultado pode ser observado na tabela abaixo:
<table>
<tr><th>Instante (min)</th><th>Distância (m)</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>600</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1 200</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1 800</td></tr>
<tr><td>4</td><td>2 400</td></tr>
<tr><td>...</td><td>...</td></tr>
</table>
A cada instante (x) corresponde uma única distância (y). Dizemos, por isso, que a distância é função do instante. A fórmula (ou a lei) que relaciona y com x é:
y = 600 · x, com y em metros e x em minutos.
</td></tr>
<tr><td>P.H.002.039</td><td>

Mercadoria e preço
Em uma barraca de praia, em Fortaleza, vende-se água de coco ao preço de R$ 3,50 o copo. Para facilitar seu trabalho, o proprietário da barraca montou a tabela ao lado.
Nesse exemplo, duas grandezas estão relacionadas: o número de copos de água de coco e o respectivo preço. A cada quantidade de copos corresponde um único preço. Dizemos, por isso, que o preço é função do número de copos. A fórmula que estabelece a relação de interdependência entre preço (y), em reais, e o número de copos de água de coco (x) é:
y = 3,50 · x
<table>
<tr><th>Número de copos</th><th>Preço (R$)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>3,50</td></tr>
<tr><td>2</td><td>7,00</td></tr>
<tr><td>3</td><td>10,50</td></tr>
<tr><td>4</td><td>14,00</td></tr>
<tr><td>5</td><td>17,50</td></tr>
<tr><td>6</td><td>21,00</td></tr>
<tr><td>7</td><td>24,50</td></tr>
<tr><td>8</td><td>28,00</td></tr>
<tr><td>9</td><td>31,50</td></tr>
<tr><td>10</td><td>35,00</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continuação)

<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>P.H.003.040</td><td>

Passageiros e preço da passagem
Para fretar um ônibus de excursão com 40 lugares, paga-se ao todo R$ 1 800,00. Essa despesa deverá ser igualmente repartida entre os participantes.
Para calcular a quantia que cada um deverá desembolsar (y), basta dividir o preço total (R$ 1 800,00) pelo número de passageiros (x). A fórmula (ou a lei) que relaciona y com x é:
$$y = \frac{1800}{x}$$
Observe na tabela alguns valores referentes à correspondência entre x e y:
<table>
<tr><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td>4</td><td>450,00</td></tr>
<tr><td>12</td><td>150,00</td></tr>
<tr><td>15</td><td>120,00</td></tr>
<tr><td>18</td><td>100,00</td></tr>
<tr><td>20</td><td>90,00</td></tr>
<tr><td>24</td><td>75,00</td></tr>
<tr><td>36</td><td>50,00</td></tr>
<tr><td>40</td><td>45,00</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>P.H.004.040</td><td>

Tempo e temperatura
Um Instituto de Meteorologia, quando quer estudar a variação da temperatura em certa cidade, mede a temperatura a intervalos regulares – por exemplo, a cada 2 horas – e monta uma tabela que relaciona as grandezas hora e temperatura. Vamos supor que a tabela de um determinado dia seja assim:
<table>
<tr><th>Tempo (h)</th><th>Temperatura (°C)</th></tr>
<tr><td>0</td><td>7</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3</td></tr>
<tr><td>6</td><td>2</td></tr>
<tr><td>8</td><td>5</td></tr>
<tr><td>10</td><td>12</td></tr>
<tr><td>12</td><td>18</td></tr>
<tr><td>14</td><td>20</td></tr>
<tr><td>16</td><td>20</td></tr>
<tr><td>18</td><td>15</td></tr>
<tr><td>20</td><td>12</td></tr>
<tr><td>22</td><td>8</td></tr>
<tr><td>24</td><td>7</td></tr>
</table>
A cada hora corresponde uma única medida de temperatura. Dizemos, por isso, que a medida da temperatura é função da medida de tempo.
</td></tr>
</table>

Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continuação)

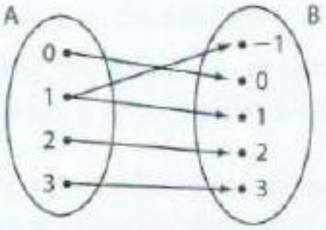
<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>P.H.005.042</td><td>
1ª) Vamos associar a cada elemento $x \in A$ o elemento $y \in B$ tal que $y = x + 1$:



<table>
<tr><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td></tr>
</table>

Para cada elemento $x \in A$, com exceção do 3, existe um só elemento $y \in B$ tal que **y** é o correspondente de **x**.

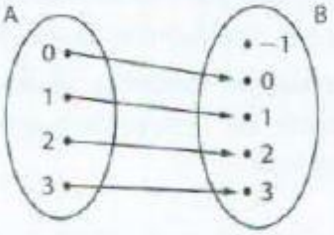
Para o elemento $3 \in A$ não existe correspondente $y \in B$.
</td></tr>
<tr><td>P.H.006.042</td><td>
2ª) Vamos associar a cada elemento $x \in A$ o elemento $y \in B$ tal que $y^2 = x^2$:



<table>
<tr><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>±1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td></tr>
</table>

Para cada elemento $x \in A$, com exceção de 1, existe um só elemento $y \in B$ tal que **y** é o correspondente de **x**.

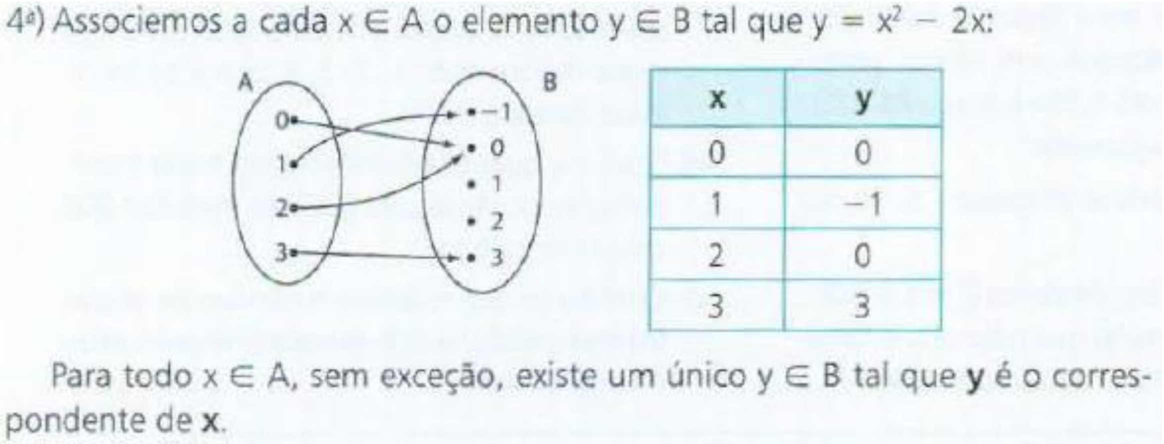
Para o elemento $1 \in A$ existem dois elementos correspondentes em **B**: o 1 e o −1.
</td></tr>
<tr><td>P.H.007.042</td><td>
3ª) Associemos a cada $x \in A$ o elemento $y \in B$ tal que $y = x$:

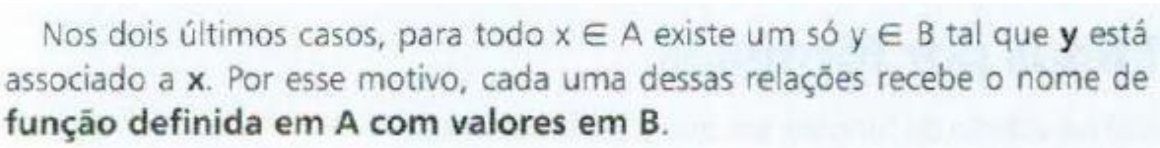
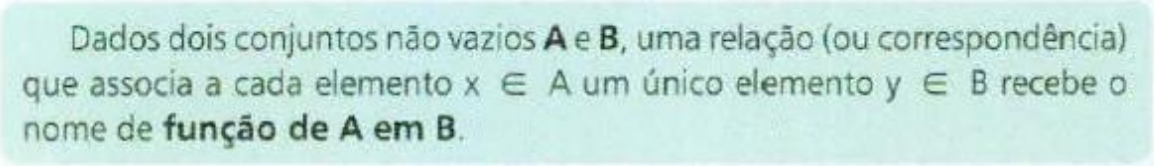


<table>
<tr><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td></tr>
</table>

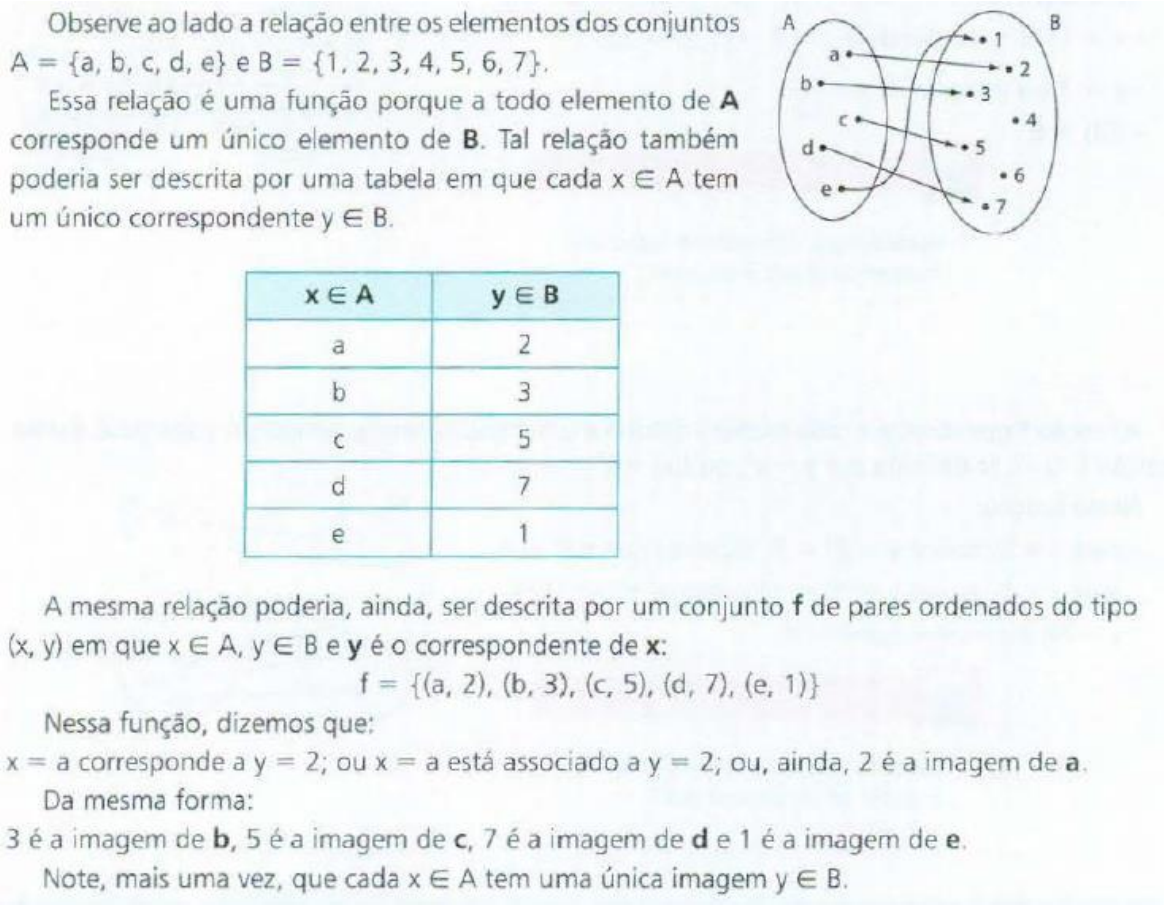
Para todo $x \in A$, sem exceção, existe um único $y \in B$ tal que **y** é o correspondente de **x**.
</td></tr>
</table>

Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continuação)

<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>P.H.008.042</td><td>

4ª) Associemos a cada $x \in A$ o elemento $y \in B$ tal que $y = x^2 - 2x$:

<table>
<tr><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>−1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td></tr>
</table>
Para todo $x \in A$, sem exceção, existe um único $y \in B$ tal que **y** é o correspondente de **x**.
</td></tr>
<tr><td>P.TC.009.043</td><td>

Nos dois últimos casos, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que **y** está associado a **x**. Por esse motivo, cada uma dessas relações recebe o nome de **função definida em A com valores em B**.
</td></tr>
<tr><td>P.TC.010.043</td><td>

Dados dois conjuntos não vazios **A** e **B**, uma relação (ou correspondência) que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$ recebe o nome de **função de A em B**.
</td></tr>
</table>

Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continuação)

<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>P.TC.011.043</td><td>


Observe ao lado a relação entre os elementos dos conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Essa relação é uma função porque a todo elemento de **A** corresponde um único elemento de **B**. Tal relação também poderia ser descrita por uma tabela em que cada $x \in A$ tem um único correspondente $y \in B$.

<table>
<tr><th>$x \in A$</th><th>$y \in B$</th></tr>
<tr><td>a</td><td>2</td></tr>
<tr><td>b</td><td>3</td></tr>
<tr><td>c</td><td>5</td></tr>
<tr><td>d</td><td>7</td></tr>
<tr><td>e</td><td>1</td></tr>
</table>

A mesma relação poderia, ainda, ser descrita por um conjunto **f** de pares ordenados do tipo (x, y) em que $x \in A$, $y \in B$ e **y** é o correspondente de **x**:

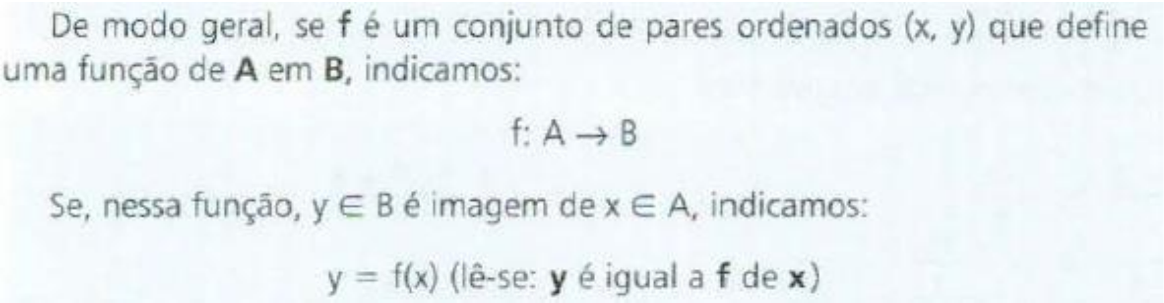
$$f = \{(a, 2), (b, 3), (c, 5), (d, 7), (e, 1)\}$$

Nessa função, dizemos que:

$x = a$ corresponde a $y = 2$; ou $x = a$ está associado a $y = 2$; ou, ainda, 2 é a imagem de **a**.

Da mesma forma:

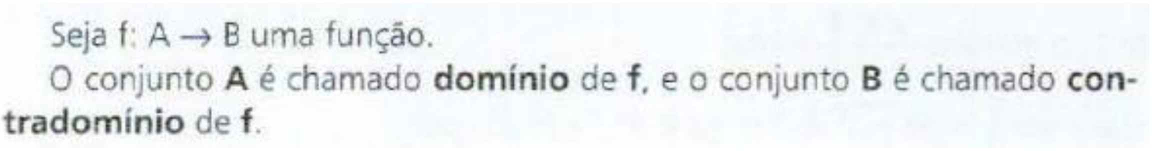
3 é a imagem de **b**, 5 é a imagem de **c**, 7 é a imagem de **d** e 1 é a imagem de **e**.

Note, mais uma vez, que cada $x \in A$ tem uma única imagem $y \in B$.
</td></tr>
<tr><td>P.C.012.043</td><td>


De modo geral, se **f** é um conjunto de pares ordenados (x, y) que define uma função de **A** em **B**, indicamos:

$$f: A \to B$$

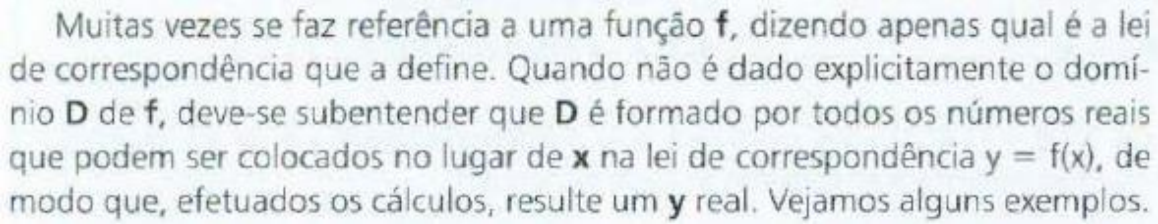
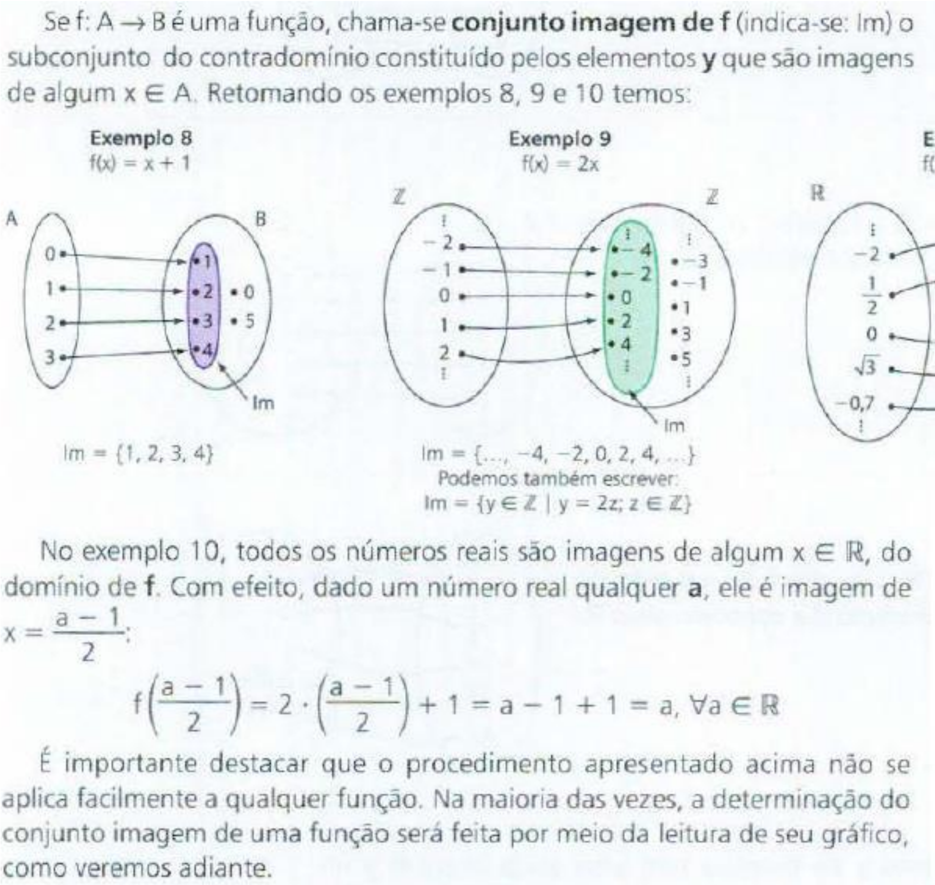
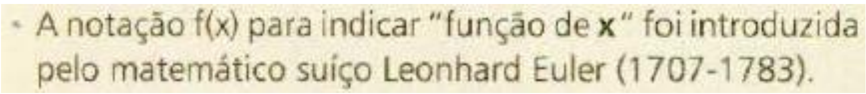
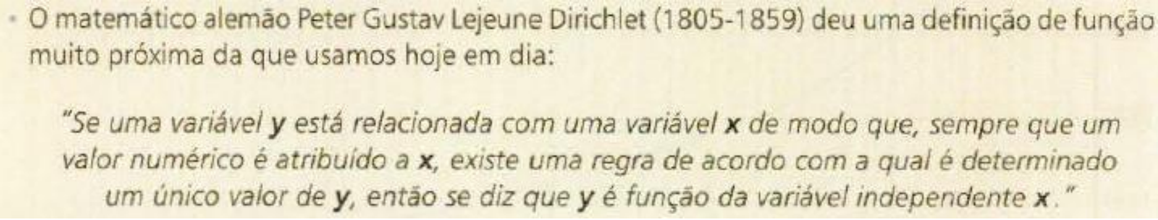
Se, nessa função, $y \in B$ é imagem de $x \in A$, indicamos:

$y = f(x)$ (lê-se: **y** é igual a **f** de **x**)
</td></tr>
<tr><td>P.TC.013.047</td><td>


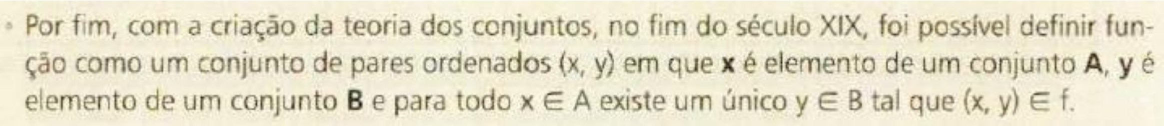
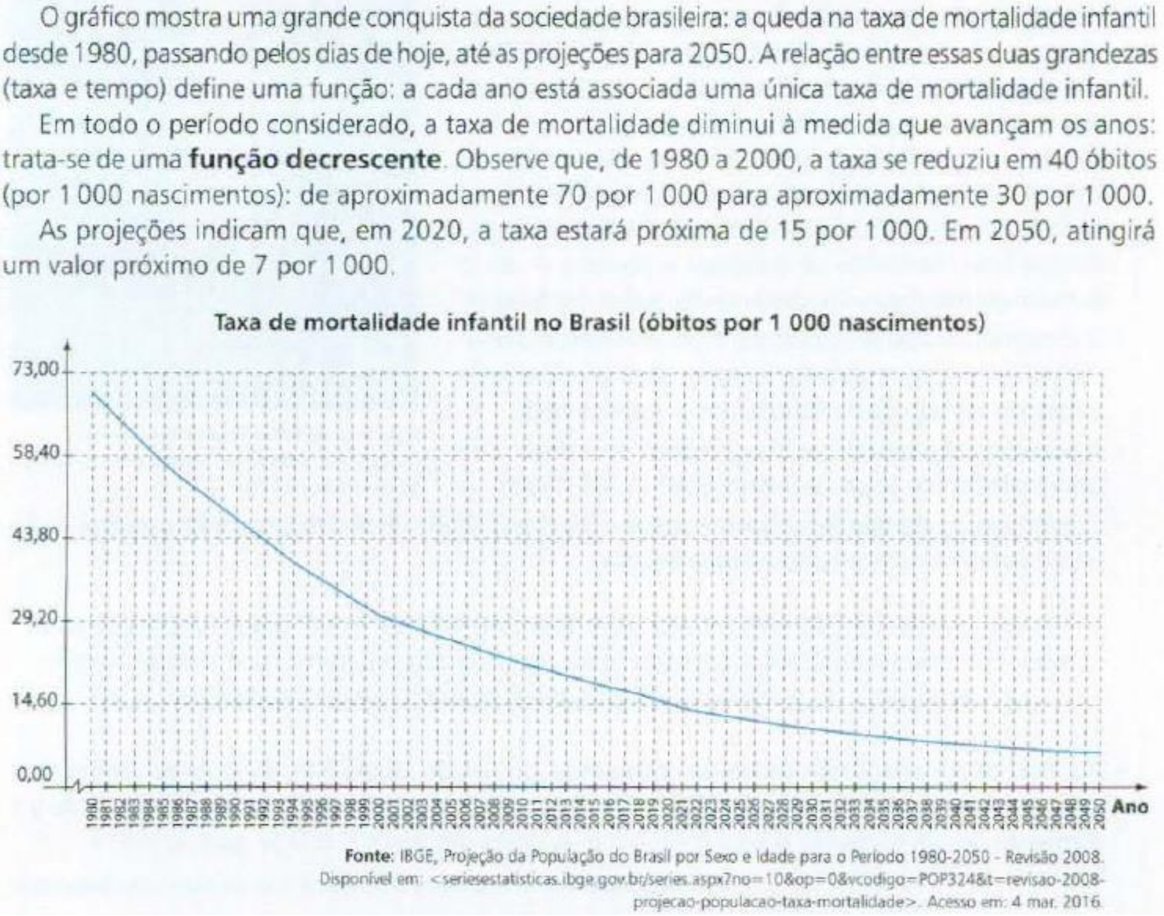
Seja $f: A \to B$ uma função.

O conjunto **A** é chamado **domínio** de **f**, e o conjunto **B** é chamado **contradomínio** de **f**.
</td></tr>
</table>

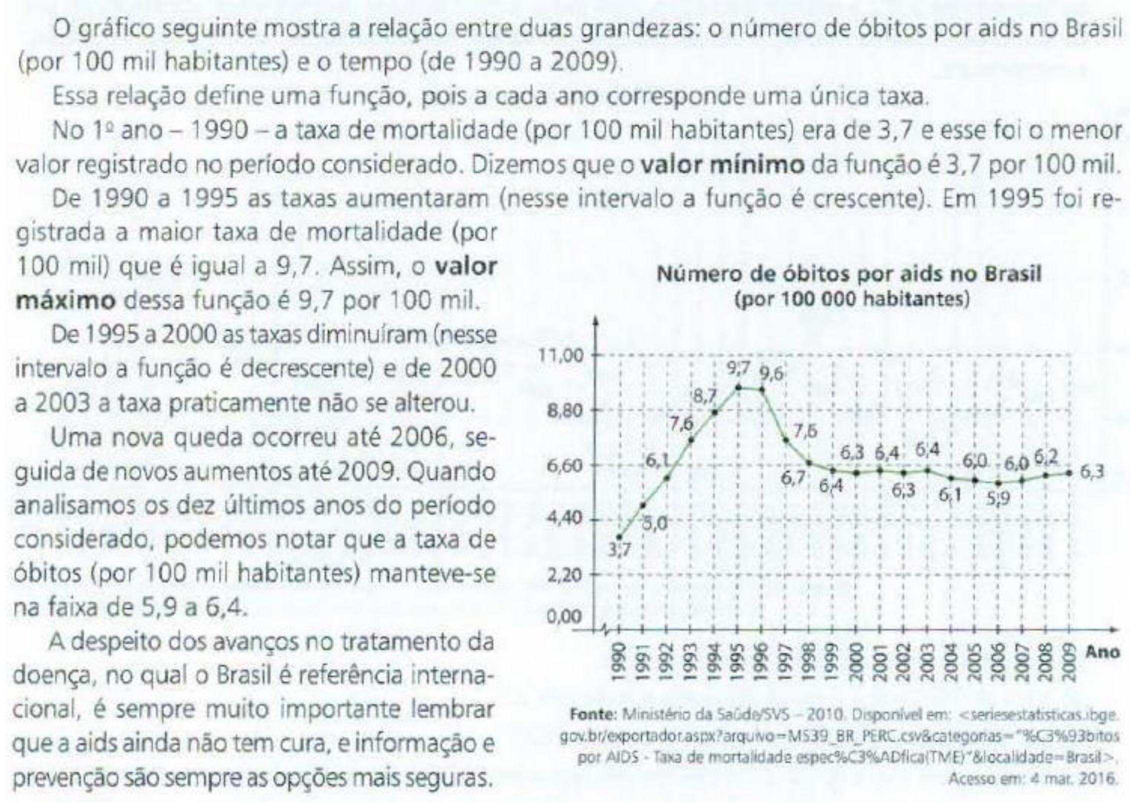
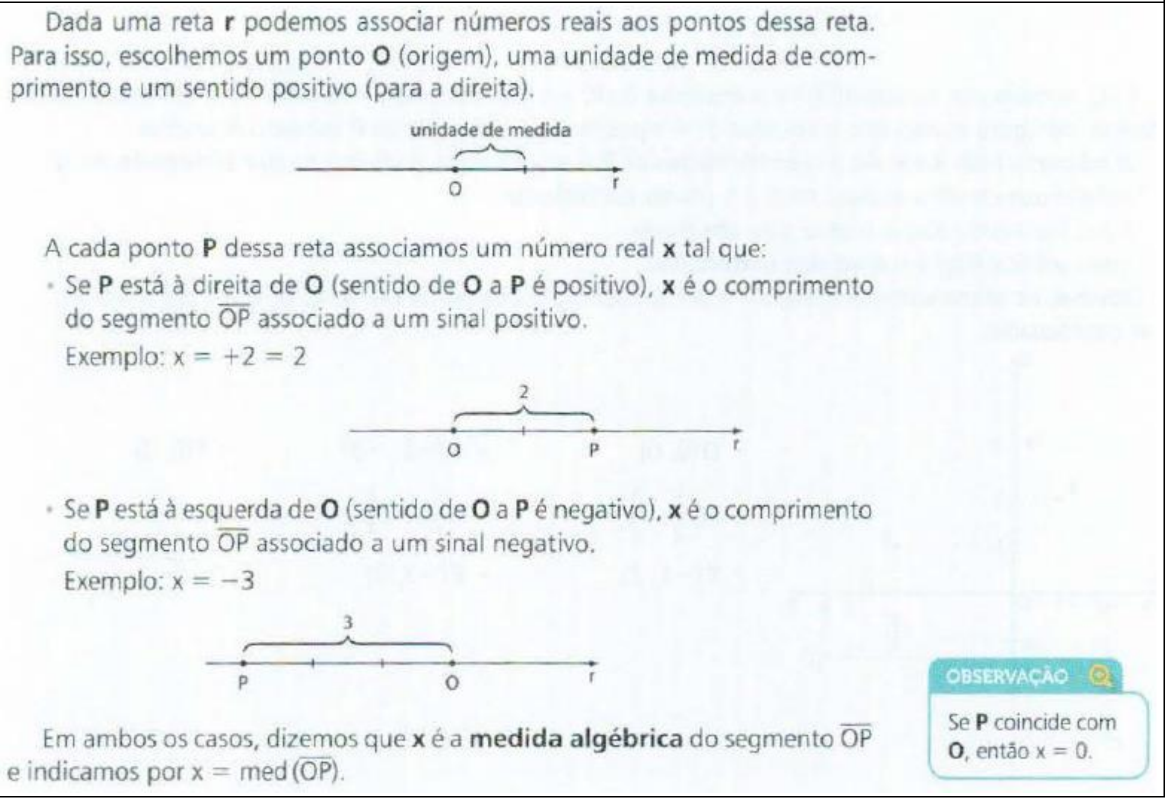
Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continuação)

Código	Núcleo
P.C.014.047	 Muitas vezes se faz referência a uma função **f**, dizendo apenas qual é a lei de correspondência que a define. Quando não é dado explicitamente o domínio **D** de **f**, deve-se subentender que **D** é formado por todos os números reais que podem ser colocados no lugar de **x** na lei de correspondência y = f(x), de modo que, efetuados os cálculos, resulte um **y** real. Vejamos alguns exemplos.
I.TC.015.048	 Se f: A → B é uma função, chama-se **conjunto imagem de f** (indica-se: Im) o subconjunto do contradomínio constituído pelos elementos **y** que são imagens de algum x ∈ A. Retomando os exemplos 8, 9 e 10 temos: **Exemplo 8** $f(x) = x + 1$ $Im = \{1, 2, 3, 4\}$ **Exemplo 9** $f(x) = 2x$ $Im = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$ Podemos também escrever: $Im = \{y \in \mathbb{Z} \mid y = 2z; z \in \mathbb{Z}\}$ **Exemplo 10** $f(x) = 2x + 1$ $Im = \mathbb{R}$ No exemplo 10, todos os números reais são imagens de algum $x \in \mathbb{R}$, do domínio de **f**. Com efeito, dado um número real qualquer **a**, ele é imagem de $x = \frac{a-1}{2}$: $$f\left(\frac{a-1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{a-1}{2}\right) + 1 = a - 1 + 1 = a, \forall a \in \mathbb{R}$$ É importante destacar que o procedimento apresentado acima não se aplica facilmente a qualquer função. Na maioria das vezes, a determinação do conjunto imagem de uma função será feita por meio da leitura de seu gráfico, como veremos adiante.
P.C.016.049	 • A notação f(x) para indicar "função de **x**" foi introduzida pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783).
P.C.017.049	 • O matemático alemão Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) deu uma definição de função muito próxima da que usamos hoje em dia: *"Se uma variável **y** está relacionada com uma variável **x** de modo que, sempre que um valor numérico é atribuído a **x**, existe uma regra de acordo com a qual é determinado um único valor de **y**, então se diz que **y** é função da variável independente **x**."*

Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continuação)

Código	Núcleo
P.C.018.049	 Por fim, com a criação da teoria dos conjuntos, no fim do século XIX, foi possível definir função como um conjunto de pares ordenados (x, y) em que **x** é elemento de um conjunto **A**, **y** é elemento de um conjunto **B** e para todo x ∈ A existe um único y ∈ B tal que (x, y) ∈ f.
P.TC.019.050	 O gráfico relaciona duas grandezas: a taxa (percentual) de urbanização e o tempo (período de 1940 a 2010). A taxa é função do tempo: para cada ano corresponde um único valor do percentual da população brasileira que vive em zonas urbanas. Por exemplo, em 2000, 81,23% da população brasileira vivia em zonas urbanas. É fácil perceber que a taxa cresce (aumenta) à medida que o tempo avança (aumenta). Dizemos que essa função é **crescente**. No gráfico evidencia-se, também, um forte crescimento da taxa até o ano 2000; a partir daí, os aumentos são mais "suaves". **Taxa de urbanização no Brasil – (em %)** **Fonte:** IBGE. Censo demográfico 1940-2010. Disponível em: <seriesestatisticas.ibge.gov.br/series.aspx?no=10&op=0&vcodigo=POP122&t=taxa-urbanizacao>. Acesso em: 4 mar. 2016.
P.TC.020.050	 O gráfico mostra uma grande conquista da sociedade brasileira: a queda na taxa de mortalidade infantil desde 1980, passando pelos dias de hoje, até as projeções para 2050. A relação entre essas duas grandezas (taxa e tempo) define uma função: a cada ano está associada uma única taxa de mortalidade infantil. Em todo o período considerado, a taxa de mortalidade diminui à medida que avançam os anos: trata-se de uma **função decrescente**. Observe que, de 1980 a 2000, a taxa se reduziu em 40 óbitos (por 1 000 nascimentos): de aproximadamente 70 por 1 000 para aproximadamente 30 por 1 000. As projeções indicam que, em 2020, a taxa estará próxima de 15 por 1 000. Em 2050, atingirá um valor próximo de 7 por 1 000. **Taxa de mortalidade infantil no Brasil (óbitos por 1 000 nascimentos)** **Fonte:** IBGE, Projeção da População do Brasil por Sexo e Idade para o Período 1980-2050 - Revisão 2008. Disponível em: <seriesestatisticas.ibge.gov.br/series.aspx?no=10&op=0&vcodigo=POP324&t=revisao-2008-projecao-populacao-taxa-mortalidade>. Acesso em: 4 mar. 2016.

Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continuação)

Código	Núcleo
P.TC.021.051	 O gráfico seguinte mostra a relação entre duas grandezas: o número de óbitos por aids no Brasil (por 100 mil habitantes) e o tempo (de 1990 a 2009). Essa relação define uma função, pois a cada ano corresponde uma única taxa. No 1º ano – 1990 – a taxa de mortalidade (por 100 mil habitantes) era de 3,7 e esse foi o menor valor registrado no período considerado. Dizemos que o **valor mínimo** da função é 3,7 por 100 mil. De 1990 a 1995 as taxas aumentaram (nesse intervalo a função é crescente). Em 1995 foi registrada a maior taxa de mortalidade (por 100 mil) que é igual a 9,7. Assim, o **valor máximo** dessa função é 9,7 por 100 mil. De 1995 a 2000 as taxas diminuíram (nesse intervalo a função é decrescente) e de 2000 a 2003 a taxa praticamente não se alterou. Uma nova queda ocorreu até 2006, seguida de novos aumentos até 2009. Quando analisamos os dez últimos anos do período considerado, podemos notar que a taxa de óbitos (por 100 mil habitantes) manteve-se na faixa de 5,9 a 6,4. A despeito dos avanços no tratamento da doença, no qual o Brasil é referência internacional, é sempre muito importante lembrar que a aids ainda não tem cura, e informação e prevenção são sempre as opções mais seguras. **Número de óbitos por aids no Brasil (por 100 000 habitantes)** **Fonte:** Ministério da Saúde/SVS – 2010. Disponível em: <seriesestatisticas.ibge.gov.br/exportador.aspx?arquivo=MS39_BR_PERC.csv&categorias="%C3%93bitos por AIDS - Taxa de mortalidade espec%C3%ADfica(TME)"&localidade=Brasil>. Acesso em: 4 mar. 2016.
P.TC.022.053	 Dada uma reta **r** podemos associar números reais aos pontos dessa reta. Para isso, escolhemos um ponto **O** (origem), uma unidade de medida de comprimento e um sentido positivo (para a direita). A cada ponto **P** dessa reta associamos um número real **x** tal que: - Se **P** está à direita de **O** (sentido de **O** a **P** é positivo), **x** é o comprimento do segmento $\overline{OP}$ associado a um sinal positivo. Exemplo: $x = +2 = 2$ - Se **P** está à esquerda de **O** (sentido de **O** a **P** é negativo), **x** é o comprimento do segmento $\overline{OP}$ associado a um sinal negativo. Exemplo: $x = -3$ Em ambos os casos, dizemos que **x** é a **medida algébrica** do segmento $\overline{OP}$ e indicamos por $x = \text{med}(\overline{OP})$. **OBSERVAÇÃO** Se **P** coincide com **O**, então $x = 0$.

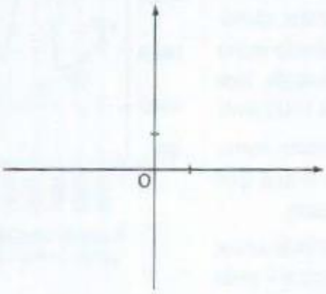
Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continuação)

<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>P.TC.023.054</td><td>

Para representar pontos em um plano, procederemos da seguinte maneira:

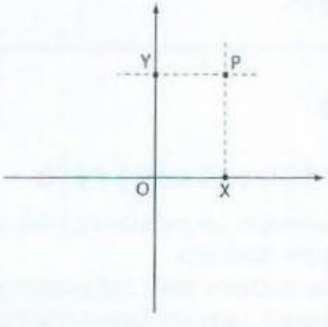
1º) Traçamos duas retas (eixos) perpendiculares e usamos a sua interseção **O** como origem para cada um desses eixos.

2º) Para cada um dos eixos, escolhemos uma unidade de medida e um sentido positivo.



3º) Para cada ponto **P** do plano traçamos:

- uma reta paralela ao eixo vertical que intersecta o eixo horizontal no ponto **X**.
- uma reta paralela ao eixo horizontal que intersecta o eixo vertical no ponto **Y**.



4º) O número real $x = \text{med}(\overline{OX})$ é a **abscissa** de **P**, e o número real $y = \text{med}(\overline{OY})$ é a **ordenada** de **P**. Observe, na figura acima, que a abscissa de **P** é positiva e a ordenada de **P** também é positiva.

Os números reais **x** e **y** são as **coordenadas** de **P** e as indicamos na forma de **par ordenado** P(x, y).

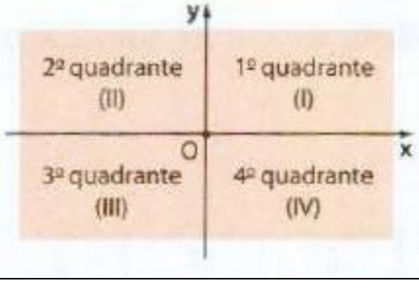
O plano que contém as duas retas é o **plano cartesiano**.

O eixo horizontal (Ox) é o **eixo das abscissas**.

O eixo vertical (Oy) é o **eixo das ordenadas**.

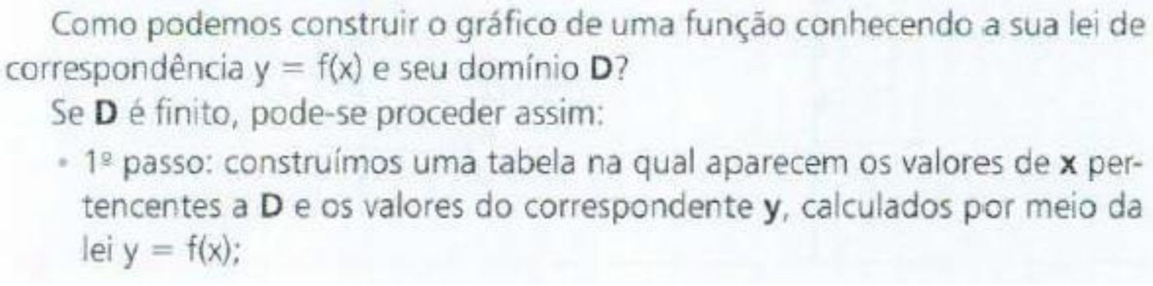
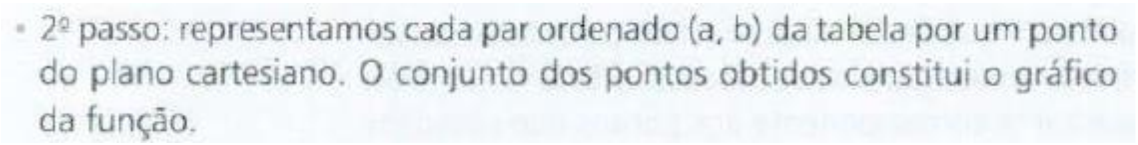
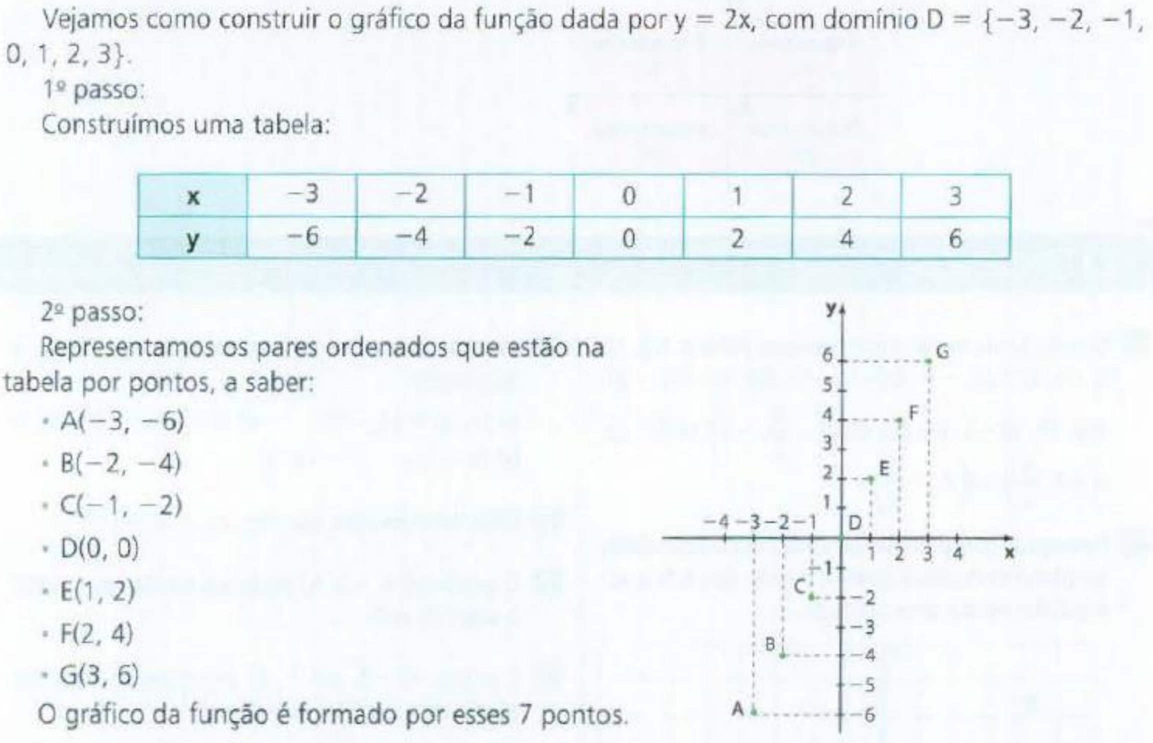
</td></tr>
<tr><td>P.TC.024.055</td><td>

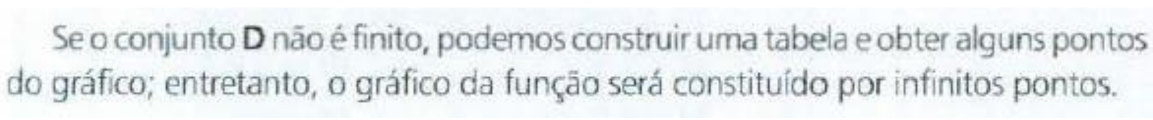
Cada uma das quatro partes em que fica dividido o plano pelos eixos cartesianos chama-se **quadrante**. A numeração dos quadrantes é feita no sentido anti-horário, a contar do quadrante correspondente aos pontos que possuem ambas as coordenadas positivas.



</td></tr>
</table>

Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continuação)

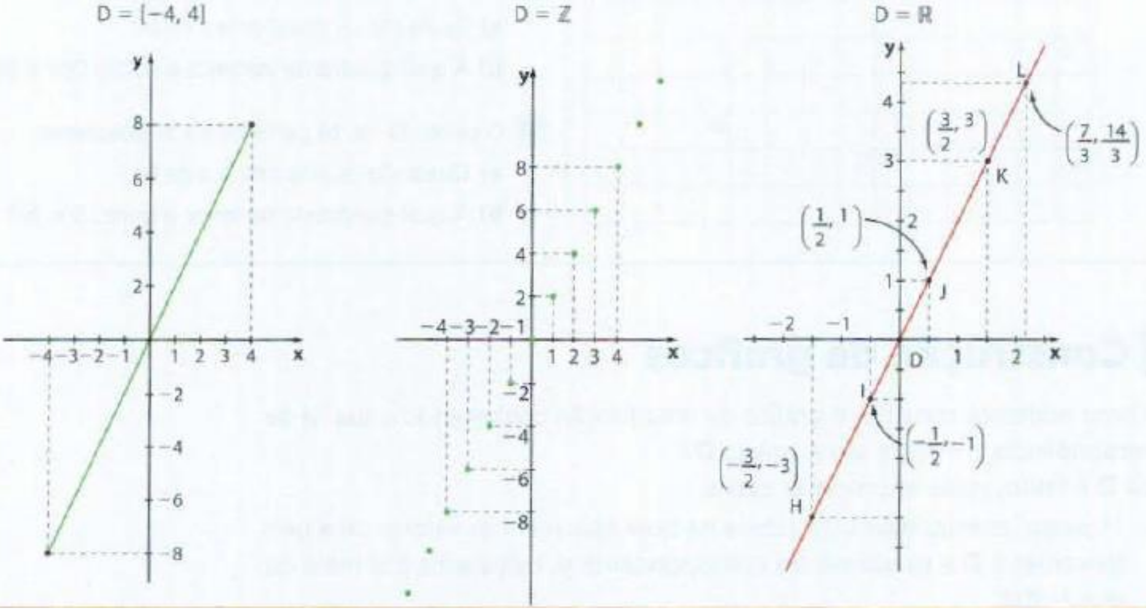
<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>P.A.025.055</td><td>

Como podemos construir o gráfico de uma função conhecendo a sua lei de correspondência y = f(x) e seu domínio D?
Se D é finito, pode-se proceder assim:
- 1º passo: construímos uma tabela na qual aparecem os valores de x pertencentes a D e os valores do correspondente y, calculados por meio da lei y = f(x);
</td></tr>
<tr><td>P.A.026.056</td><td>

- 2º passo: representamos cada par ordenado (a, b) da tabela por um ponto do plano cartesiano. O conjunto dos pontos obtidos constitui o gráfico da função.
</td></tr>
<tr><td>P.A.027.056</td><td>

Vejamos como construir o gráfico da função dada por y = 2x, com domínio D = {−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3}.
1º passo:
Construímos uma tabela:
<table>
<tr><td>x</td><td>−3</td><td>−2</td><td>−1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>y</td><td>−6</td><td>−4</td><td>−2</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td></tr>
</table>
2º passo:
Representamos os pares ordenados que estão na tabela por pontos, a saber:
- A(−3, −6)
- B(−2, −4)
- C(−1, −2)
- D(0, 0)
- E(1, 2)
- F(2, 4)
- G(3, 6)
O gráfico da função é formado por esses 7 pontos.

</td></tr>
<tr><td>P.HC.028.056</td><td>

Se o conjunto D não é finito, podemos construir uma tabela e obter alguns pontos do gráfico; entretanto, o gráfico da função será constituído por infinitos pontos.
</td></tr>
</table>

Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continuação)

<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>P.H.029.056</td><td>

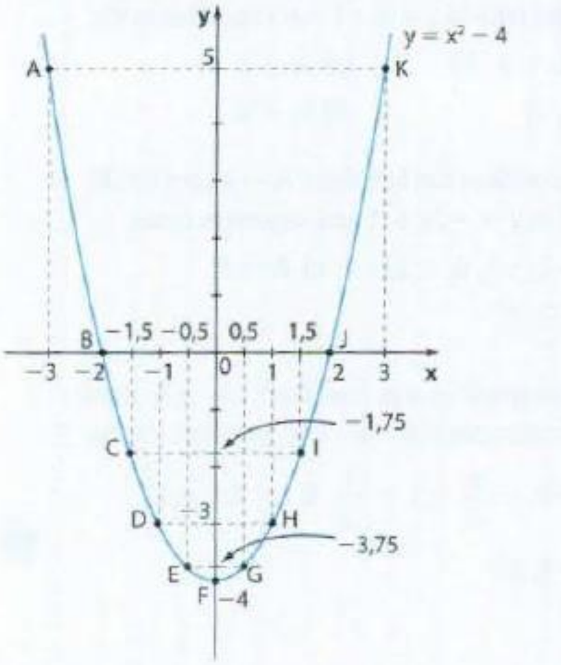
Veja como são os gráficos da função y = 2x em domínios diferentes do exemplo anterior.



</td></tr>
<tr><td>P.HC.030.057</td><td>

Vamos construir o gráfico da função dada por $y = x^2 - 4$ com domínio ℝ:

<table>
<tr><th>x</th><th>y</th><th>Ponto</th></tr>
<tr><td>−3</td><td>5</td><td>A</td></tr>
<tr><td>−2</td><td>0</td><td>B</td></tr>
<tr><td>−1,5</td><td>−1,75</td><td>C</td></tr>
<tr><td>−1</td><td>−3</td><td>D</td></tr>
<tr><td>−0,5</td><td>−3,75</td><td>E</td></tr>
<tr><td>0</td><td>−4</td><td>F</td></tr>
<tr><td>0,5</td><td>−3,75</td><td>G</td></tr>
<tr><td>1</td><td>−3</td><td>H</td></tr>
<tr><td>1,5</td><td>−1,75</td><td>I</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0</td><td>J</td></tr>
<tr><td>3</td><td>5</td><td>K</td></tr>
</table>



Essa curva é chamada **parábola** e será estudada com mais detalhes no capítulo 5.

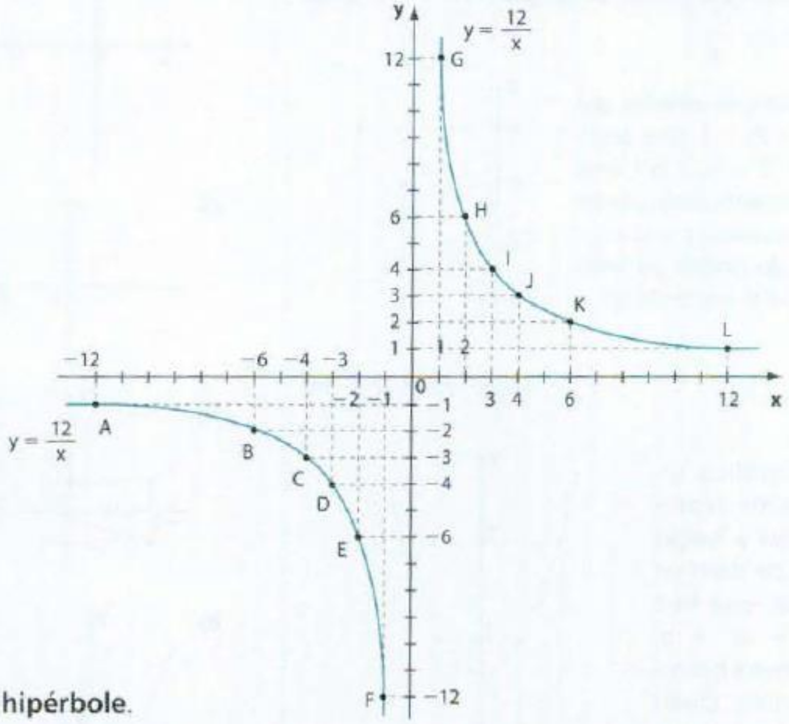
</td></tr>
</table>

Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continuação)

<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>P.HC.031.057</td><td>

Vamos construir o gráfico da função dada por $y = \frac{12}{x}$ no domínio $\mathbb{R}^*$:

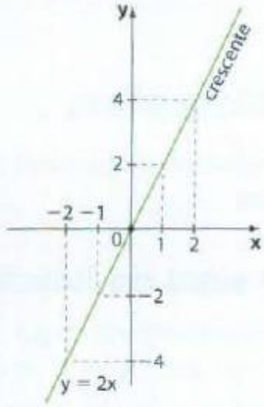
<table>
<tr><th>x</th><th>y</th><th>Ponto</th></tr>
<tr><td>−12</td><td>−1</td><td>A</td></tr>
<tr><td>−6</td><td>−2</td><td>B</td></tr>
<tr><td>−4</td><td>−3</td><td>C</td></tr>
<tr><td>−3</td><td>−4</td><td>D</td></tr>
<tr><td>−2</td><td>−6</td><td>E</td></tr>
<tr><td>−1</td><td>−12</td><td>F</td></tr>
<tr><td>1</td><td>12</td><td>G</td></tr>
<tr><td>2</td><td>6</td><td>H</td></tr>
<tr><td>3</td><td>4</td><td>I</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3</td><td>J</td></tr>
<tr><td>6</td><td>2</td><td>K</td></tr>
<tr><td>12</td><td>1</td><td>L</td></tr>
</table>



Essa curva é chamada **hipérbole**.

O estudo completo da hipérbole não será feito neste volume da coleção; veja, como complemento, a seção *Um pouco mais sobre* do capítulo 4.

</td></tr>
<tr><td>P.HC.032.059</td><td>



Observe, ao lado, o gráfico da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $y = 2x$.

Já vimos que esse gráfico é uma reta.

Como a reta corta o eixo Ox no ponto $x = 0$, então $x = 0 \Rightarrow \Rightarrow y = 2x = 2 \cdot 0 = 0$.

O valor de **x** que anula **y** é chamado **raiz** ou **zero** da função.

Note que, para $x > 0$, os pontos do gráfico estão acima do eixo Ox, portanto apresentam $y > 0$. Veja também que, para $x < 0$, os pontos do gráfico estão abaixo do eixo Ox, portanto apresentam $y < 0$.

Quanto maior o valor dado a **x**, maior será o valor do correspondente $y = 2x$. Dizemos, por isso, que essa função é **crescente**.

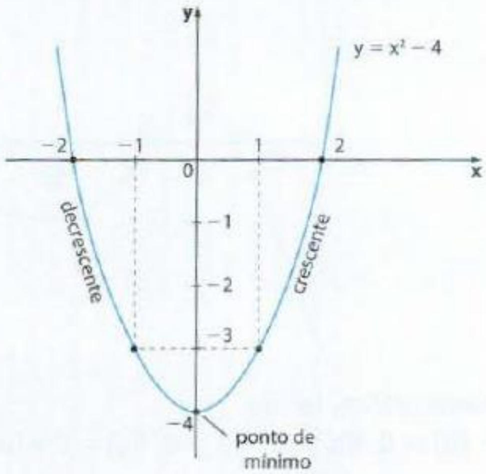
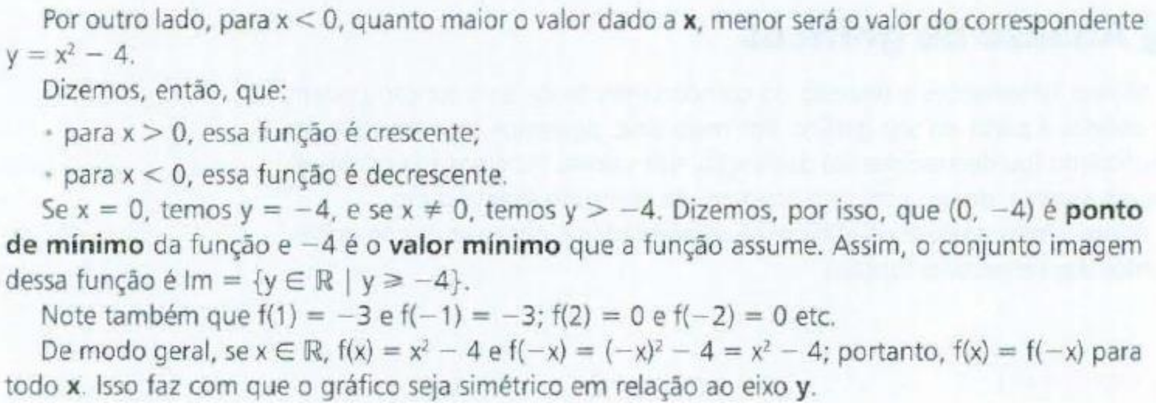
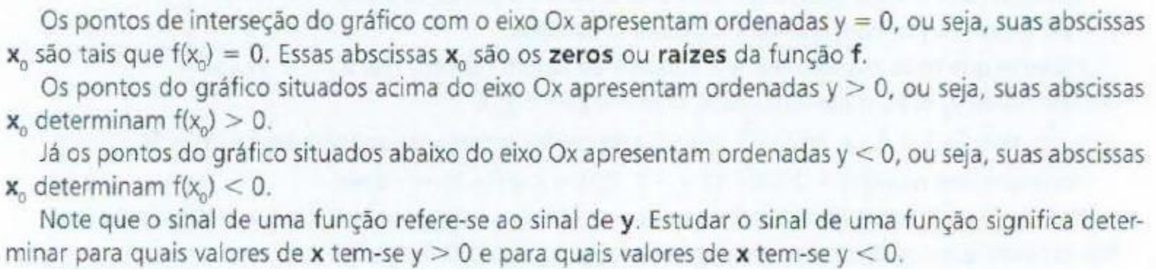
Observe que todo número real **y** é imagem de algum número real **x**. De fato, dado $y_0 \in \mathbb{R}$, o número real $\mathbf{x_0}$ cuja imagem é $\mathbf{y_0}$ é $x_0 = \frac{y_0}{2}$, pois $f(x_0) = 2 \cdot x_0 = 2 \cdot \frac{y_0}{2} = y_0$. Desse modo, o conjunto imagem de **f** é $Im = \mathbb{R}$.

Note também que $f(1) = 2$ e $f(-1) = -2$; $f(2) = 4$ e $f(-2) = -4$ etc.

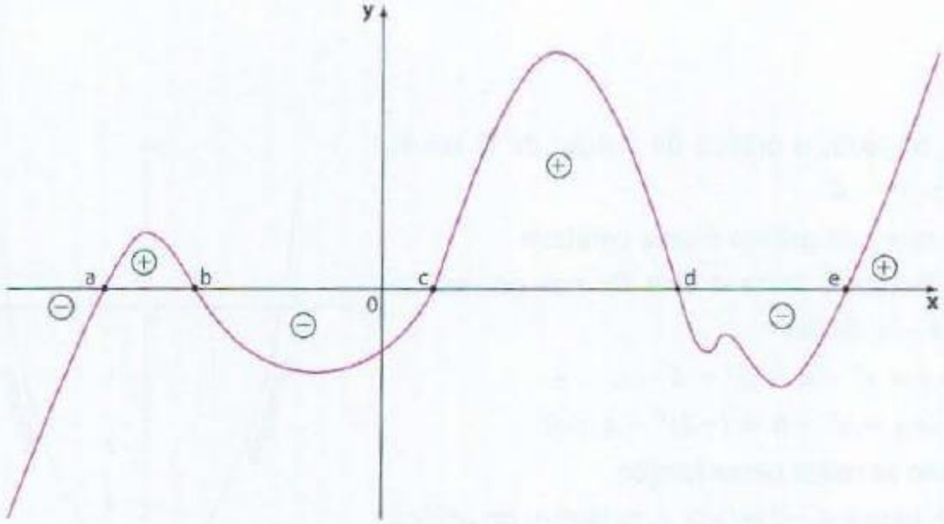
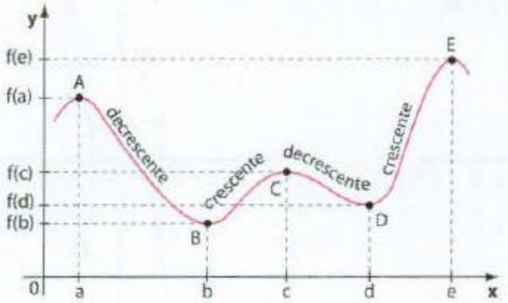
De modo geral, se $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ e $f(-x) = 2 \cdot (-x) = -2x$; portanto, $f(-x) = -f(x)$ para todo **x**. Isso faz com que o gráfico seja simétrico em relação ao ponto **O** (origem).

</td></tr>
</table>

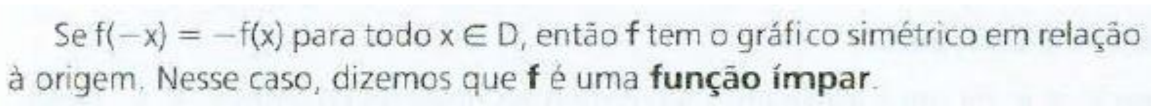
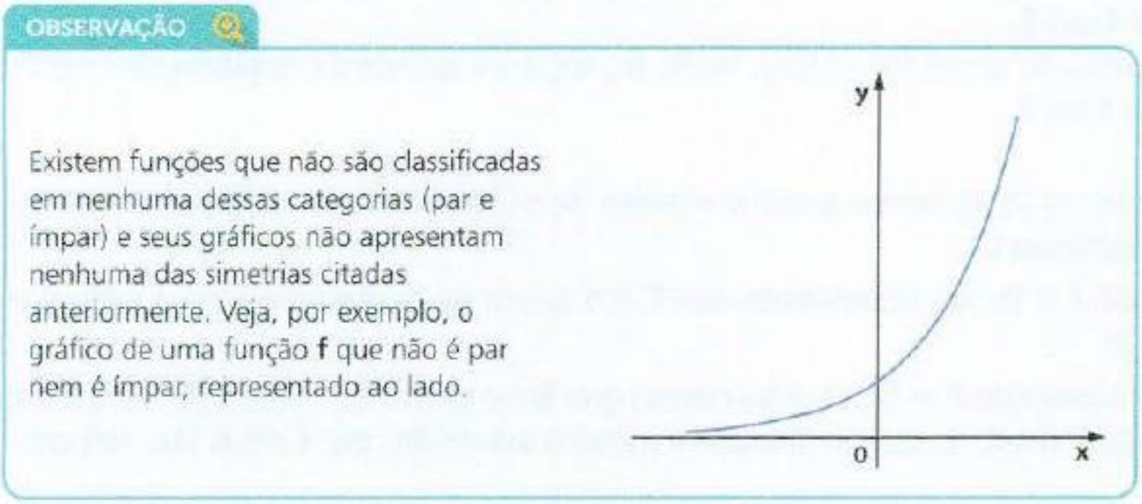
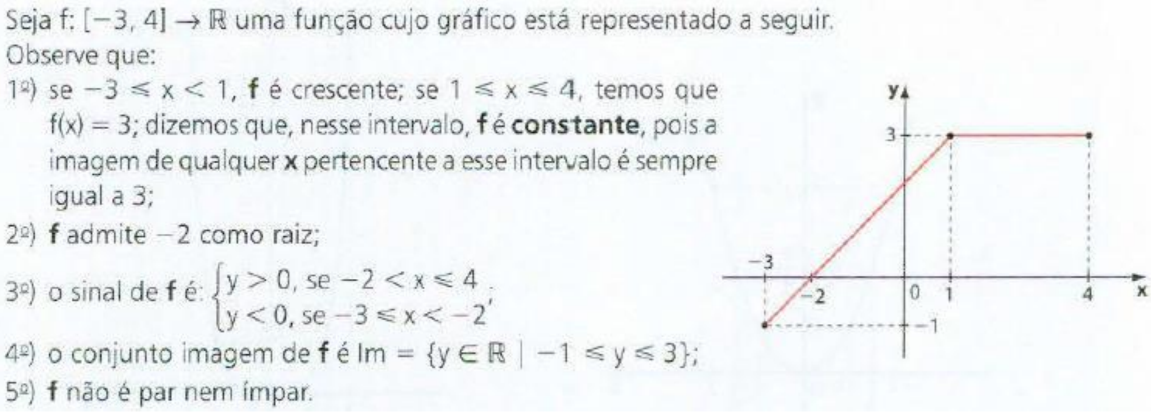
Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continuação)

Código	Núcleo
P.H.033.059	Observe, ao lado, o gráfico da função de ℝ em ℝ dada por $y = x^2 - 4$. Já vimos que esse gráfico é uma parábola. Como a parábola corta o eixo Ox nos pontos de abscissas 2 e −2, então: $x = 2 \Rightarrow y = x^2 - 4 = 2^2 - 4 = 0$ e $x = -2 \Rightarrow y = x^2 - 4 = (-2)^2 - 4 = 0$ −2 e 2 são as raízes dessa função. Note que, para $x < -2$ ou $x > 2$, os pontos do gráfico estão acima do eixo Ox, portanto apresentam $y > 0$. Veja também que, para $-2 < x < 2$, os pontos do gráfico estão abaixo do eixo Ox, portanto apresentam $y < 0$. Para $x > 0$, quanto maior o valor atribuído a **x**, maior será o valor do correspondente $y = x^2 - 4$. 
P.HC.034.060	Por outro lado, para $x < 0$, quanto maior o valor dado a **x**, menor será o valor do correspondente $y = x^2 - 4$. Dizemos, então, que: • para $x > 0$, essa função é crescente; • para $x < 0$, essa função é decrescente. Se $x = 0$, temos $y = -4$, e se $x \neq 0$, temos $y > -4$. Dizemos, por isso, que $(0, -4)$ é **ponto de mínimo** da função e −4 é o **valor mínimo** que a função assume. Assim, o conjunto imagem dessa função é $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -4\}$. Note também que $f(1) = -3$ e $f(-1) = -3$; $f(2) = 0$ e $f(-2) = 0$ etc. De modo geral, se $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$ e $f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4$; portanto, $f(x) = f(-x)$ para todo **x**. Isso faz com que o gráfico seja simétrico em relação ao eixo **y**.
P.H.035.060	Os pontos de interseção do gráfico com o eixo Ox apresentam ordenadas $y = 0$, ou seja, suas abscissas $\mathbf{x}_0$ são tais que $f(x_0) = 0$. Essas abscissas $\mathbf{x}_0$ são os **zeros** ou **raízes** da função **f**. Os pontos do gráfico situados acima do eixo Ox apresentam ordenadas $y > 0$, ou seja, suas abscissas $\mathbf{x}_0$ determinam $f(x_0) > 0$. Já os pontos do gráfico situados abaixo do eixo Ox apresentam ordenadas $y < 0$, ou seja, suas abscissas $\mathbf{x}_0$ determinam $f(x_0) < 0$. Note que o sinal de uma função refere-se ao sinal de **y**. Estudar o sinal de uma função significa determinar para quais valores de **x** tem-se $y > 0$ e para quais valores de **x** tem-se $y < 0$.

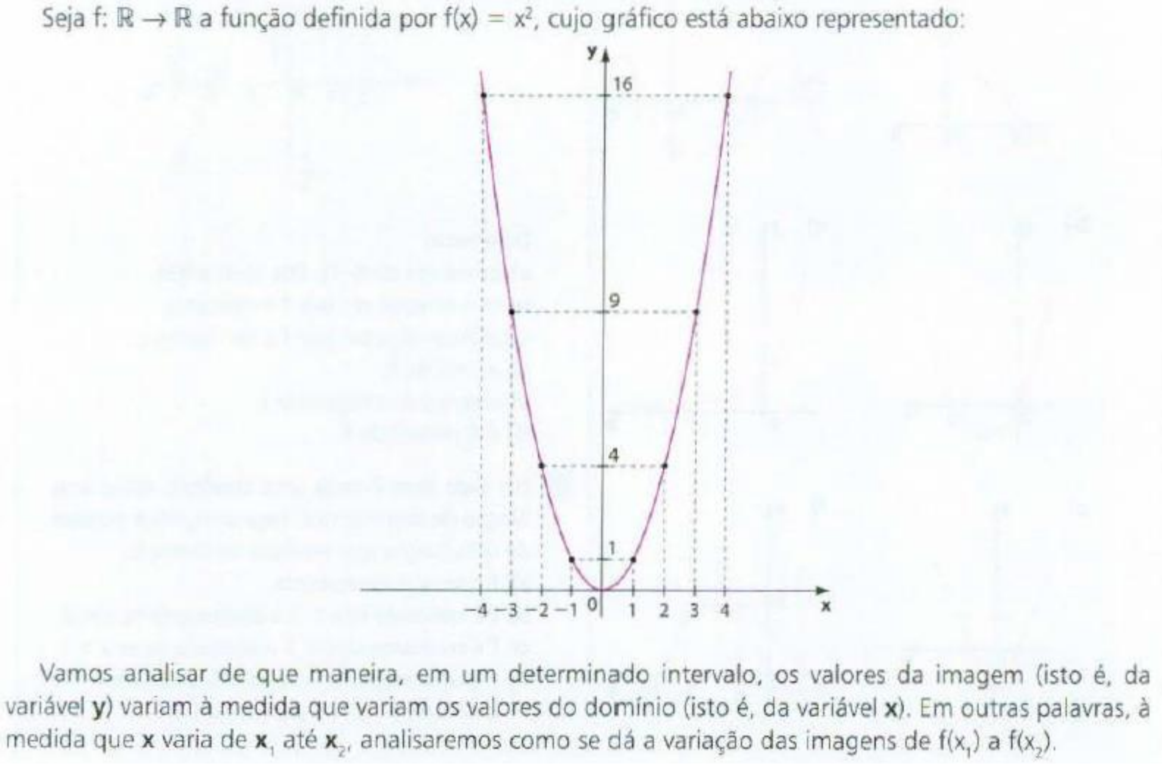
Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continuação)

Código	Núcleo
P.H.036.060	Observe:  Nesse gráfico, temos: • $f(a) = 0$, $f(b) = 0$, $f(c) = 0$, $f(d) = 0$ e $f(e) = 0$ (**a**, **b**, **c**, **d** e **e** são raízes); • o sinal de **f** é: $y > 0$ para $a < x < b$, para $c < x < d$ ou para $x > e$; $y < 0$ para $x < a$, para $b < x < c$ ou para $d < x < e$.
P.C.037.061	Se, para quaisquer valores **x_1** e **x_2** de um subconjunto **S** (contido no domínio **D**), com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$, então **f** é crescente em **S**. Se, para quaisquer valores **x_1** e **x_2** de um subconjunto **S**, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) > f(x_2)$, então **f** é decrescente em **S**. Observe: 
P.C.038.061	Seja **S** um subconjunto do domínio **D** e seja $x_0 \in S$. Se, para todo **x** pertencente a **S**, temos $f(x) \geq f(x_0)$, então $(x_0, f(x_0))$ é o **ponto de mínimo** de **f** em **S**, e $f(x_0)$ é o **valor mínimo** de **f** em **S**. Se, para todo **x** pertencente a **S**, temos $f(x) \leq f(x_0)$, então $(x_0, f(x_0))$ é o **ponto de máximo** de **f** em **S**, e $f(x_0)$ é o **valor máximo** de **f** em **S**.

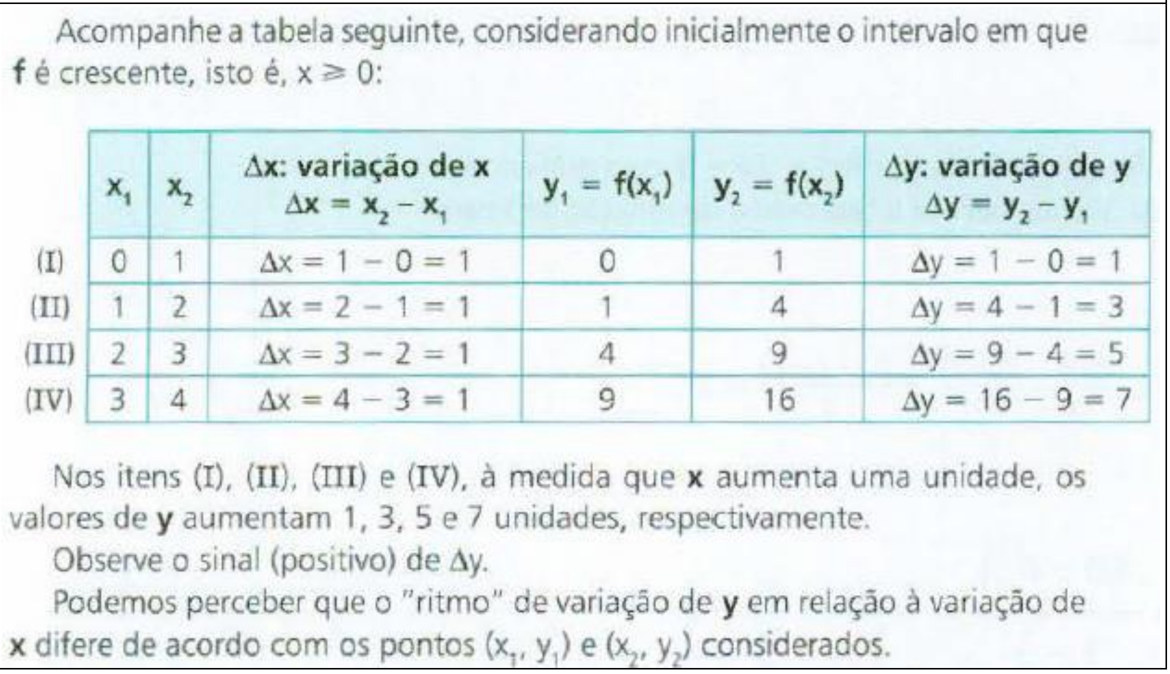
Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continuação)

Código	Núcleo
P.TC.039.061	 Se $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in D$, então **f** tem o gráfico simétrico em relação ao eixo **y**. Nesse caso, dizemos que **f** é uma **função par**.
P.TC.040.062	 Se $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in D$, então **f** tem o gráfico simétrico em relação à origem. Nesse caso, dizemos que **f** é uma **função ímpar**.
P.TC.041.062	 OBSERVAÇÃO Existem funções que não são classificadas em nenhuma dessas categorias (par e ímpar) e seus gráficos não apresentam nenhuma das simetrias citadas anteriormente. Veja, por exemplo, o gráfico de uma função **f** que não é par nem é ímpar, representado ao lado.
P.H.042.062	 Seja f: $[-3, 4] \to \mathbb{R}$ uma função cujo gráfico está representado a seguir. Observe que: 1ª) se $-3 \leq x < 1$, **f** é crescente; se $1 \leq x \leq 4$, temos que $f(x) = 3$; dizemos que, nesse intervalo, **f** é **constante**, pois a imagem de qualquer **x** pertencente a esse intervalo é sempre igual a 3; 2ª) **f** admite -2 como raiz; 3ª) o sinal de **f** é: $\begin{cases} y > 0, \text{ se } -2 < x \leq 4 \\ y < 0, \text{ se } -3 \leq x < -2 \end{cases}$; 4ª) o conjunto imagem de **f** é $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 3\}$; 5ª) **f** não é par nem ímpar.

Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continuação)

<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>P.H.043.064</td><td>


Seja f: ℝ → ℝ a função definida por $f(x) = x^2$, cujo gráfico está abaixo representado:

Vamos analisar de que maneira, em um determinado intervalo, os valores da imagem (isto é, da variável **y**) variam à medida que variam os valores do domínio (isto é, da variável **x**). Em outras palavras, à medida que **x** varia de x_1 até x_2, analisaremos como se dá a variação das imagens de $f(x_1)$ a $f(x_2)$.
</td></tr>
<tr><td>P.H.044.065</td><td>


Acompanhe a tabela seguinte, considerando inicialmente o intervalo em que **f** é crescente, isto é, $x \geqslant 0$:

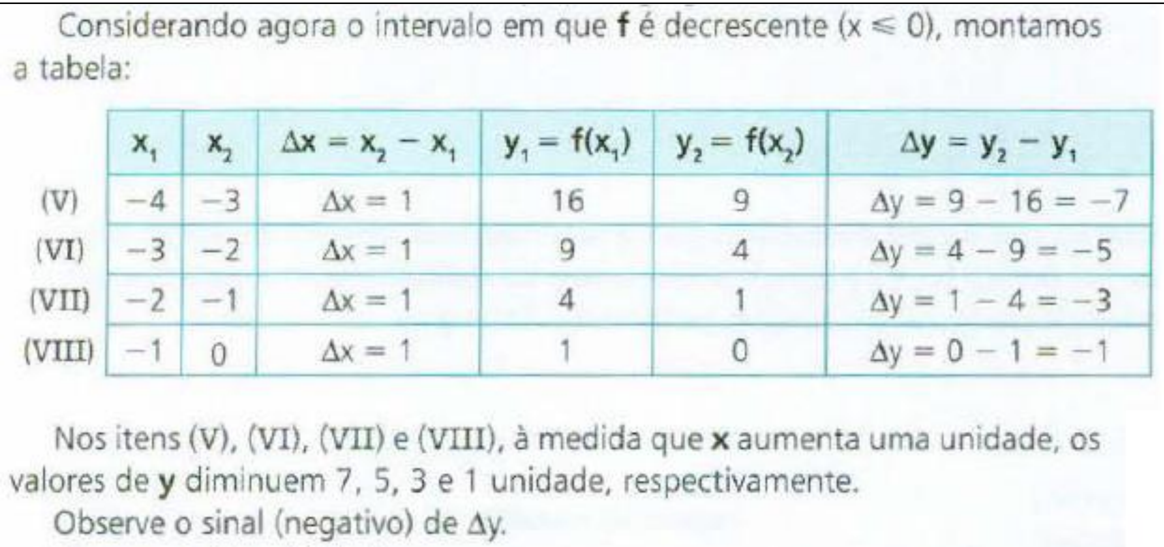
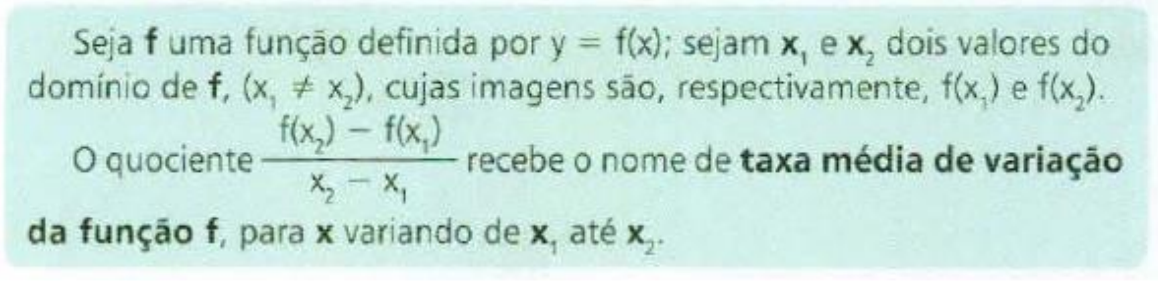
<table>
<tr><th></th><th>x_1</th><th>x_2</th><th>Δx: variação de x
$\Delta x = x_2 - x_1$</th><th>$y_1 = f(x_1)$</th><th>$y_2 = f(x_2)$</th><th>Δy: variação de y
$\Delta y = y_2 - y_1$</th></tr>
<tr><td>(I)</td><td>0</td><td>1</td><td>$\Delta x = 1 - 0 = 1$</td><td>0</td><td>1</td><td>$\Delta y = 1 - 0 = 1$</td></tr>
<tr><td>(II)</td><td>1</td><td>2</td><td>$\Delta x = 2 - 1 = 1$</td><td>1</td><td>4</td><td>$\Delta y = 4 - 1 = 3$</td></tr>
<tr><td>(III)</td><td>2</td><td>3</td><td>$\Delta x = 3 - 2 = 1$</td><td>4</td><td>9</td><td>$\Delta y = 9 - 4 = 5$</td></tr>
<tr><td>(IV)</td><td>3</td><td>4</td><td>$\Delta x = 4 - 3 = 1$</td><td>9</td><td>16</td><td>$\Delta y = 16 - 9 = 7$</td></tr>
</table>

Nos itens (I), (II), (III) e (IV), à medida que **x** aumenta uma unidade, os valores de **y** aumentam 1, 3, 5 e 7 unidades, respectivamente.

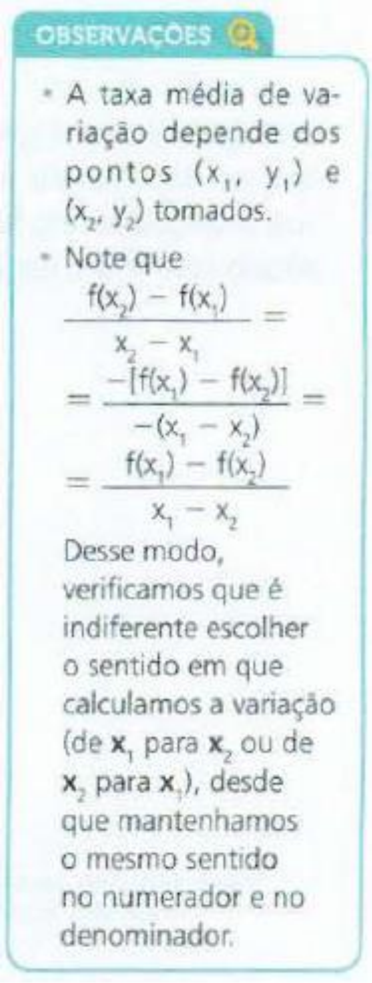
Observe o sinal (positivo) de Δy.

Podemos perceber que o "ritmo" de variação de **y** em relação à variação de **x** difere de acordo com os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) considerados.
</td></tr>
</table>

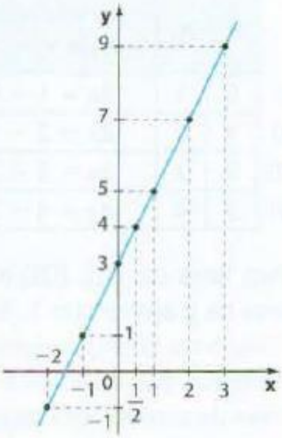
Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continuação)

<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>P.H.045.065</td><td>

Considerando agora o intervalo em que f é decrescente ($x \leq 0$), montamos a tabela:
<table>
<tr><th></th><th>x_1</th><th>x_2</th><th>$\Delta x = x_2 - x_1$</th><th>$y_1 = f(x_1)$</th><th>$y_2 = f(x_2)$</th><th>$\Delta y = y_2 - y_1$</th></tr>
<tr><td>(V)</td><td>−4</td><td>−3</td><td>$\Delta x = 1$</td><td>16</td><td>9</td><td>$\Delta y = 9 - 16 = -7$</td></tr>
<tr><td>(VI)</td><td>−3</td><td>−2</td><td>$\Delta x = 1$</td><td>9</td><td>4</td><td>$\Delta y = 4 - 9 = -5$</td></tr>
<tr><td>(VII)</td><td>−2</td><td>−1</td><td>$\Delta x = 1$</td><td>4</td><td>1</td><td>$\Delta y = 1 - 4 = -3$</td></tr>
<tr><td>(VIII)</td><td>−1</td><td>0</td><td>$\Delta x = 1$</td><td>1</td><td>0</td><td>$\Delta y = 0 - 1 = -1$</td></tr>
</table>
Nos itens (V), (VI), (VII) e (VIII), à medida que x aumenta uma unidade, os valores de y diminuem 7, 5, 3 e 1 unidade, respectivamente.
Observe o sinal (negativo) de Δy.
</td></tr>
<tr><td>P.TC.046.065</td><td>

Seja f uma função definida por $y = f(x)$; sejam $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ dois valores do domínio de f, ($x_1 \neq x_2$), cujas imagens são, respectivamente, $f(x_1)$ e $f(x_2)$.
O quociente $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ recebe o nome de taxa média de variação da função f, para x variando de $\mathbf{x_1}$ até $\mathbf{x_2}$.
</td></tr>
</table>

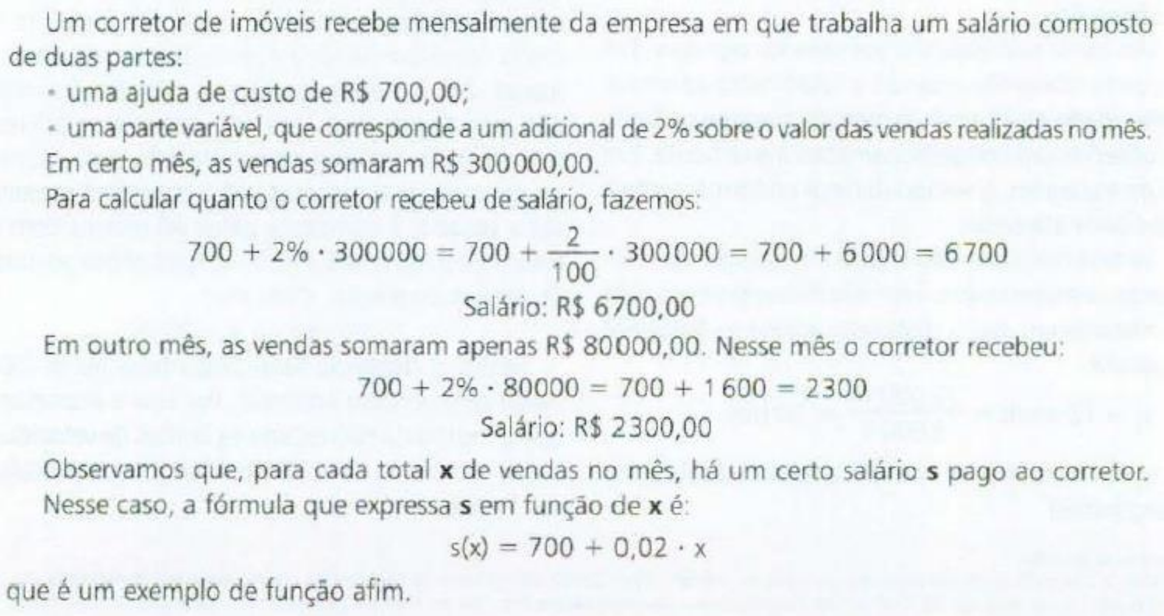
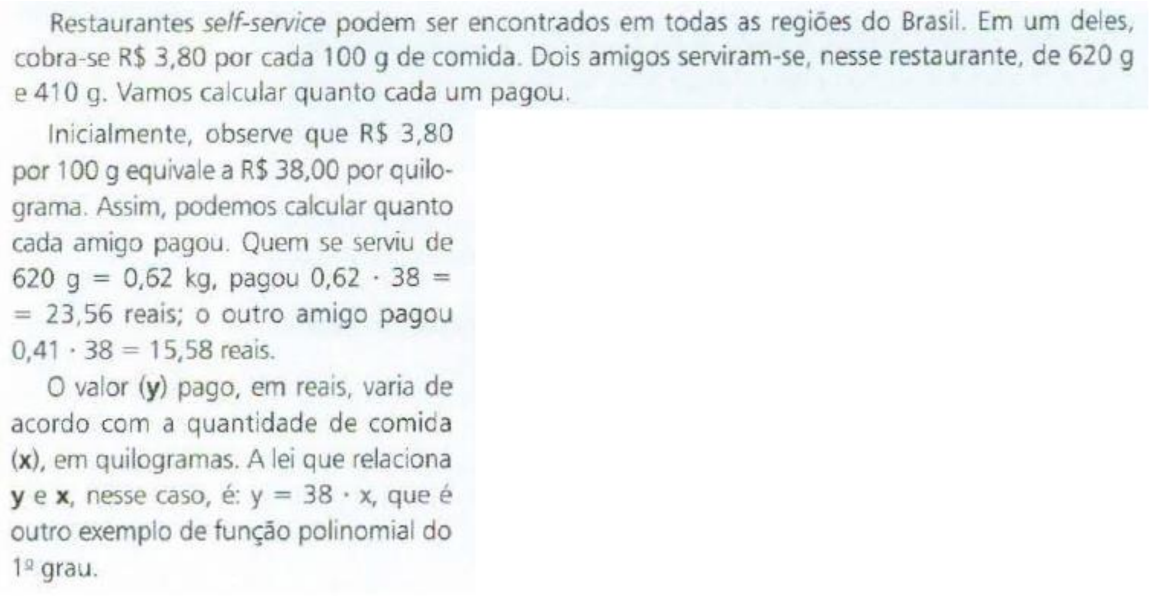
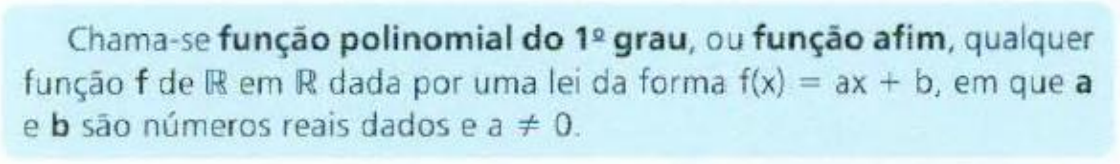
Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continuação)

Código	Núcleo
P.T.047.065	 OBSERVAÇÕES • A taxa média de variação depende dos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) tomados. • Note que $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-[f(x_1) - f(x_2)]}{-(x_1 - x_2)} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ Desse modo, verificamos que é indiferente escolher o sentido em que calculamos a variação (de $\mathbf{x}_1$ para $\mathbf{x}_2$ ou de $\mathbf{x}_2$ para $\mathbf{x}_1$), desde que mantenhamos o mesmo sentido no numerador e no denominador.

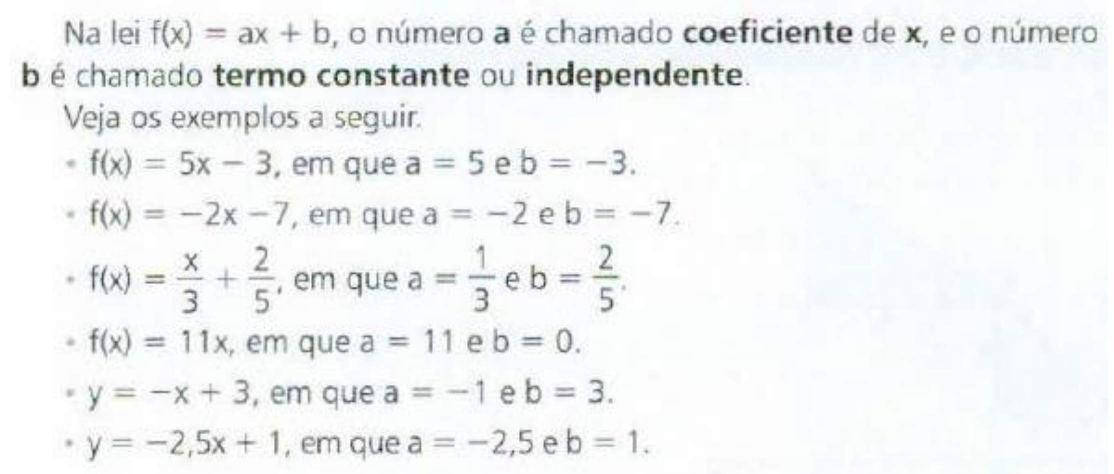
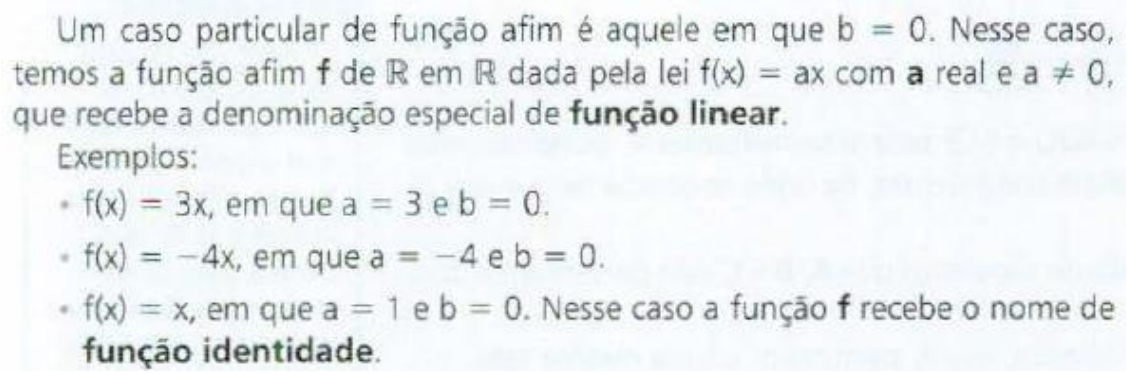
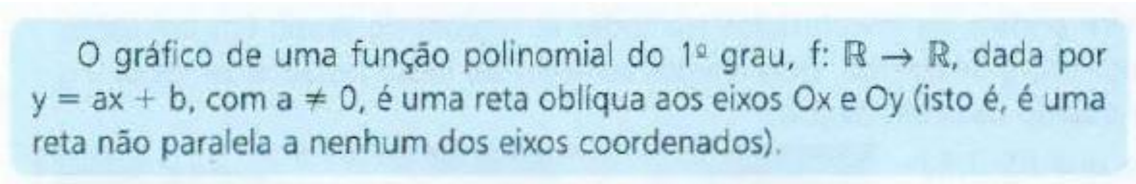
Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continuação)

Código	Núcleo
P.H.048.066	Seja f: ℝ → ℝ a função definida por f(x) = 2x + 3 cujo gráfico está representado ao lado. Vamos calcular a taxa média de variação de **f** para **x** variando de:  a) −2 a 0 $\begin{cases} f(-2) = -1 \\ f(0) = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{3 - (-1)}{2} = 2$ b) $\frac{1}{2}$ a 3 $\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \\ f(3) = 9 \end{cases} \Rightarrow \frac{f(3) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{3 - \frac{1}{2}} = \frac{9 - 4}{\frac{5}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = 2$ c) −1 a 1 $\begin{cases} f(1) = 5 \\ f(-1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{5 - 1}{2} = 2$ Observe, nesse exemplo, que o valor encontrado para a taxa média de variação da função **f** é o mesmo, independente dos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) considerados. No capítulo seguinte, veremos que se trata de uma propriedade particular das funções polinomiais do 1º grau.
P.HC.049.070	Antônio Carlos pegou um táxi para ir à casa de sua namorada, que fica a 15 km de distância. O valor cobrado engloba o preço da parcela fixa (bandeirada) de R$ 4,00 mais R$ 2,20 por quilômetro rodado (não estamos considerando aqui o tempo em que o táxi ficaria parado em um eventual congestionamento). Ou seja, ele pagou 15 · R$ 2,20 = R$ 33,00 pela distância percorrida mais R$ 4,00 pela bandeirada; isto é: R$ 33,00 + R$ 4,00 = R$ 37,00 Se a casa da namorada ficasse a 25 km de distância, Antônio Carlos pagaria, pela corrida: 25 · R$ 2,20 + R$ 4,00 = R$ 59,00. Podemos notar que, para cada distância **x** percorrida pelo táxi, há certo preço **p** para a corrida. Nesse caso, a fórmula que expressa **p** (em reais) em função de **x** (em quilômetros) é: $p(x) = 2{,}20 \cdot x + 4{,}00$ que é um exemplo de **função polinomial do 1º grau** ou **função afim**.

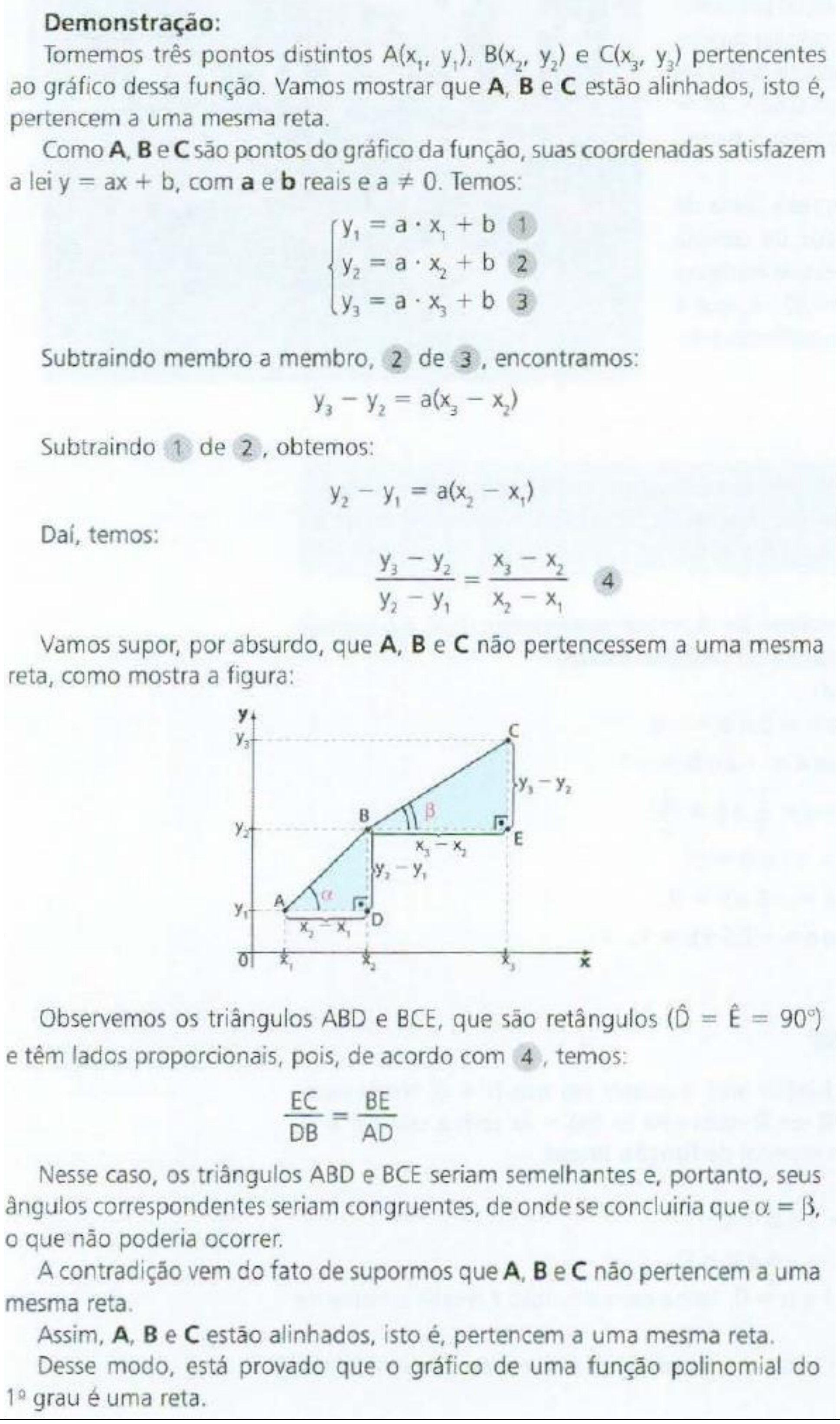
Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continuação)

Código	Núcleo
P.H.050.070	 Um corretor de imóveis recebe mensalmente da empresa em que trabalha um salário composto de duas partes: • uma ajuda de custo de R$ 700,00; • uma parte variável, que corresponde a um adicional de 2% sobre o valor das vendas realizadas no mês. Em certo mês, as vendas somaram R$ 300 000,00. Para calcular quanto o corretor recebeu de salário, fazemos: $700 + 2\% \cdot 300000 = 700 + \frac{2}{100} \cdot 300000 = 700 + 6000 = 6700$ Salário: R$ 6700,00 Em outro mês, as vendas somaram apenas R$ 80000,00. Nesse mês o corretor recebeu: $700 + 2\% \cdot 80000 = 700 + 1600 = 2300$ Salário: R$ 2300,00 Observamos que, para cada total **x** de vendas no mês, há um certo salário **s** pago ao corretor. Nesse caso, a fórmula que expressa **s** em função de **x** é: $s(x) = 700 + 0{,}02 \cdot x$ que é um exemplo de função afim.
P.H.051.071	 Restaurantes *self-service* podem ser encontrados em todas as regiões do Brasil. Em um deles, cobra-se R$ 3,80 por cada 100 g de comida. Dois amigos serviram-se, nesse restaurante, de 620 g e 410 g. Vamos calcular quanto cada um pagou. Inicialmente, observe que R$ 3,80 por 100 g equivale a R$ 38,00 por quilograma. Assim, podemos calcular quanto cada amigo pagou. Quem se serviu de 620 g = 0,62 kg, pagou $0{,}62 \cdot 38 = 23{,}56$ reais; o outro amigo pagou $0{,}41 \cdot 38 = 15{,}58$ reais. O valor (**y**) pago, em reais, varia de acordo com a quantidade de comida (**x**), em quilogramas. A lei que relaciona **y** e **x**, nesse caso, é: $y = 38 \cdot x$, que é outro exemplo de função polinomial do 1º grau.
P.T.052.071	 Chama-se **função polinomial do 1º grau**, ou **função afim**, qualquer função **f** de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x) = ax + b$, em que **a** e **b** são números reais dados e $a \neq 0$.

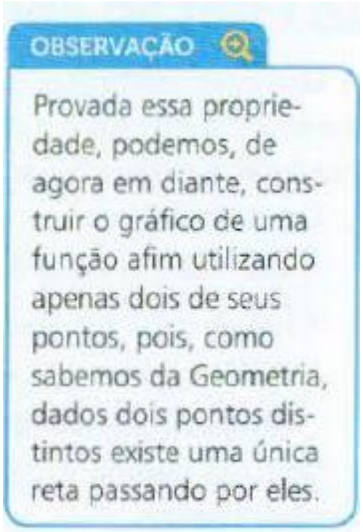
Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continuação)

Código	Núcleo
P.C.053.071	 Na lei $f(x) = ax + b$, o número **a** é chamado **coeficiente** de **x**, e o número **b** é chamado **termo constante** ou **independente**. Veja os exemplos a seguir. - $f(x) = 5x - 3$, em que $a = 5$ e $b = -3$. - $f(x) = -2x - 7$, em que $a = -2$ e $b = -7$. - $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{5}$, em que $a = \frac{1}{3}$ e $b = \frac{2}{5}$. - $f(x) = 11x$, em que $a = 11$ e $b = 0$. - $y = -x + 3$, em que $a = -1$ e $b = 3$. - $y = -2{,}5x + 1$, em que $a = -2{,}5$ e $b = 1$.
P.TC.054.071	 Um caso particular de função afim é aquele em que $b = 0$. Nesse caso, temos a função afim **f** de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = ax$ com **a** real e $a \neq 0$, que recebe a denominação especial de **função linear**. Exemplos: - $f(x) = 3x$, em que $a = 3$ e $b = 0$. - $f(x) = -4x$, em que $a = -4$ e $b = 0$. - $f(x) = x$, em que $a = 1$ e $b = 0$. Nesse caso a função **f** recebe o nome de **função identidade**.
P.T.055.072	 O gráfico de uma função polinomial do 1º grau, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $y = ax + b$, com $a \neq 0$, é uma reta oblíqua aos eixos Ox e Oy (isto é, é uma reta não paralela a nenhum dos eixos coordenados).

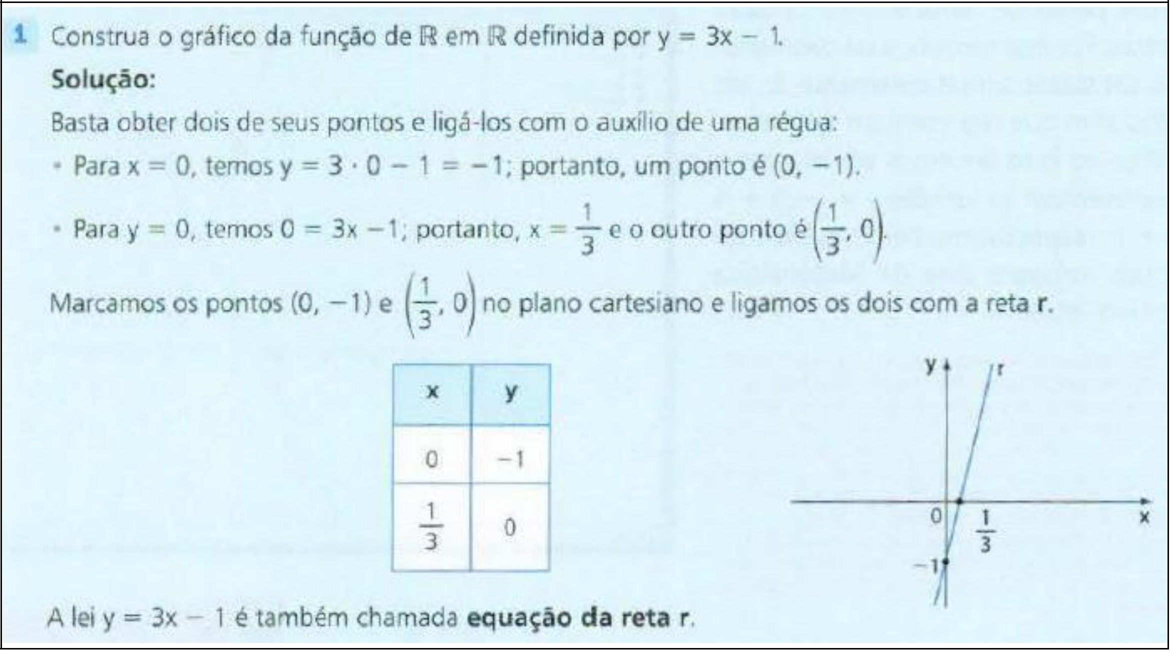
Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continuação)

Código	Núcleo
P.TH.056.072	 **Demonstração:** Tomemos três pontos distintos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ pertencentes ao gráfico dessa função. Vamos mostrar que **A**, **B** e **C** estão alinhados, isto é, pertencem a uma mesma reta. Como **A**, **B** e **C** são pontos do gráfico da função, suas coordenadas satisfazem a lei $y = ax + b$, com **a** e **b** reais e $a \neq 0$. Temos: $\begin{cases} y_1 = a \cdot x_1 + b \quad ① \\ y_2 = a \cdot x_2 + b \quad ② \\ y_3 = a \cdot x_3 + b \quad ③ \end{cases}$ Subtraindo membro a membro, ② de ③, encontramos: $y_3 - y_2 = a(x_3 - x_2)$ Subtraindo ① de ②, obtemos: $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$ Daí, temos: $\frac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} \quad ④$ Vamos supor, por absurdo, que **A**, **B** e **C** não pertencessem a uma mesma reta, como mostra a figura: Observemos os triângulos ABD e BCE, que são retângulos ($\hat{D} = \hat{E} = 90°$) e têm lados proporcionais, pois, de acordo com ④, temos: $\frac{EC}{DB} = \frac{BE}{AD}$ Nesse caso, os triângulos ABD e BCE seriam semelhantes e, portanto, seus ângulos correspondentes seriam congruentes, de onde se concluiria que $\alpha = \beta$, o que não poderia ocorrer. A contradição vem do fato de supormos que **A**, **B** e **C** não pertencem a uma mesma reta. Assim, **A**, **B** e **C** estão alinhados, isto é, pertencem a uma mesma reta. Desse modo, está provado que o gráfico de uma função polinomial do 1º grau é uma reta.

Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continuação)

<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>P.TC.057.072</td><td>


OBSERVAÇÃO

Provada essa propriedade, podemos, de agora em diante, construir o gráfico de uma função afim utilizando apenas dois de seus pontos, pois, como sabemos da Geometria, dados dois pontos distintos existe uma única reta passando por eles.
</td></tr>
<tr><td>P.AC.058.073</td><td>


1 Construa o gráfico da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $y = 3x - 1$.

Solução:

Basta obter dois de seus pontos e ligá-los com o auxílio de uma régua:

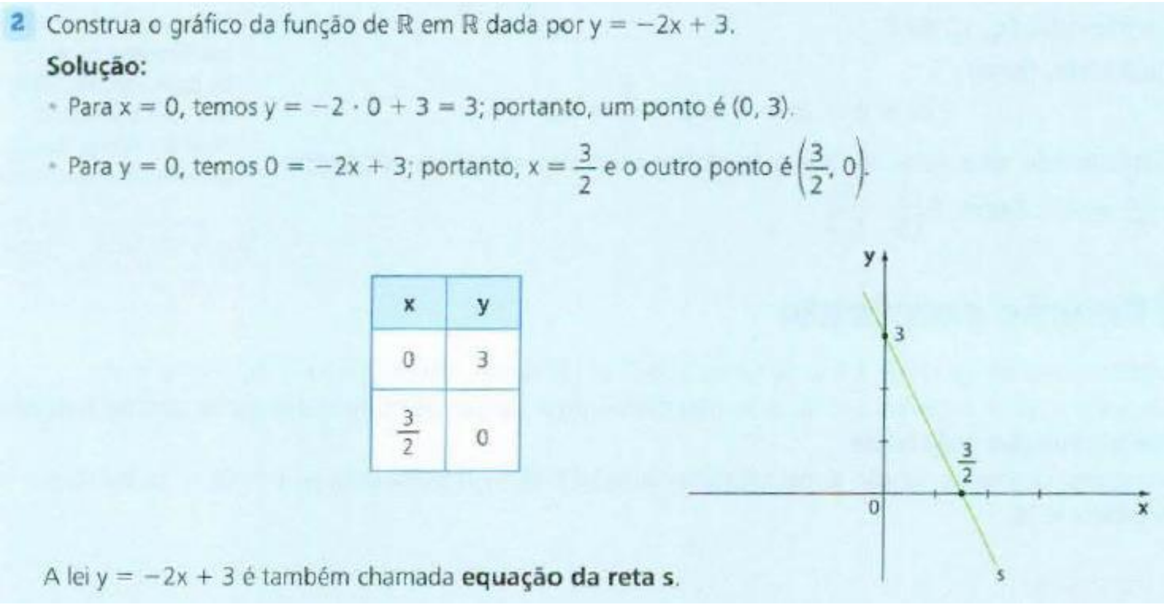
- Para $x = 0$, temos $y = 3 \cdot 0 - 1 = -1$; portanto, um ponto é $(0, -1)$.
- Para $y = 0$, temos $0 = 3x - 1$; portanto, $x = \frac{1}{3}$ e o outro ponto é $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

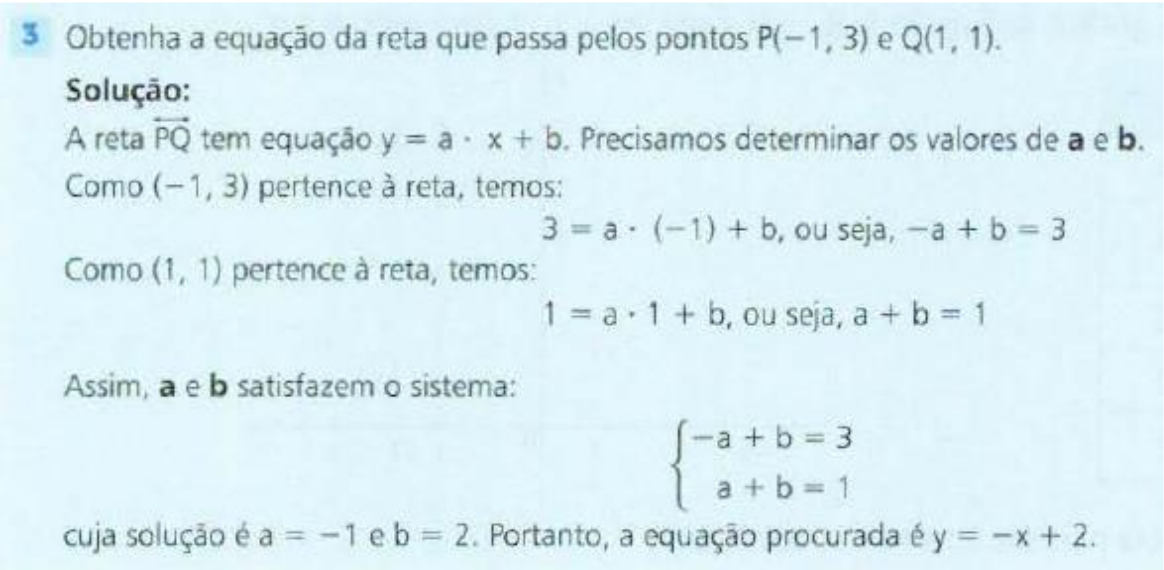
Marcamos os pontos $(0, -1)$ e $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ no plano cartesiano e ligamos os dois com a reta **r**.

<table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>0</td><td>−1</td></tr><tr><td>$\frac{1}{3}$</td><td>0</td></tr></table>

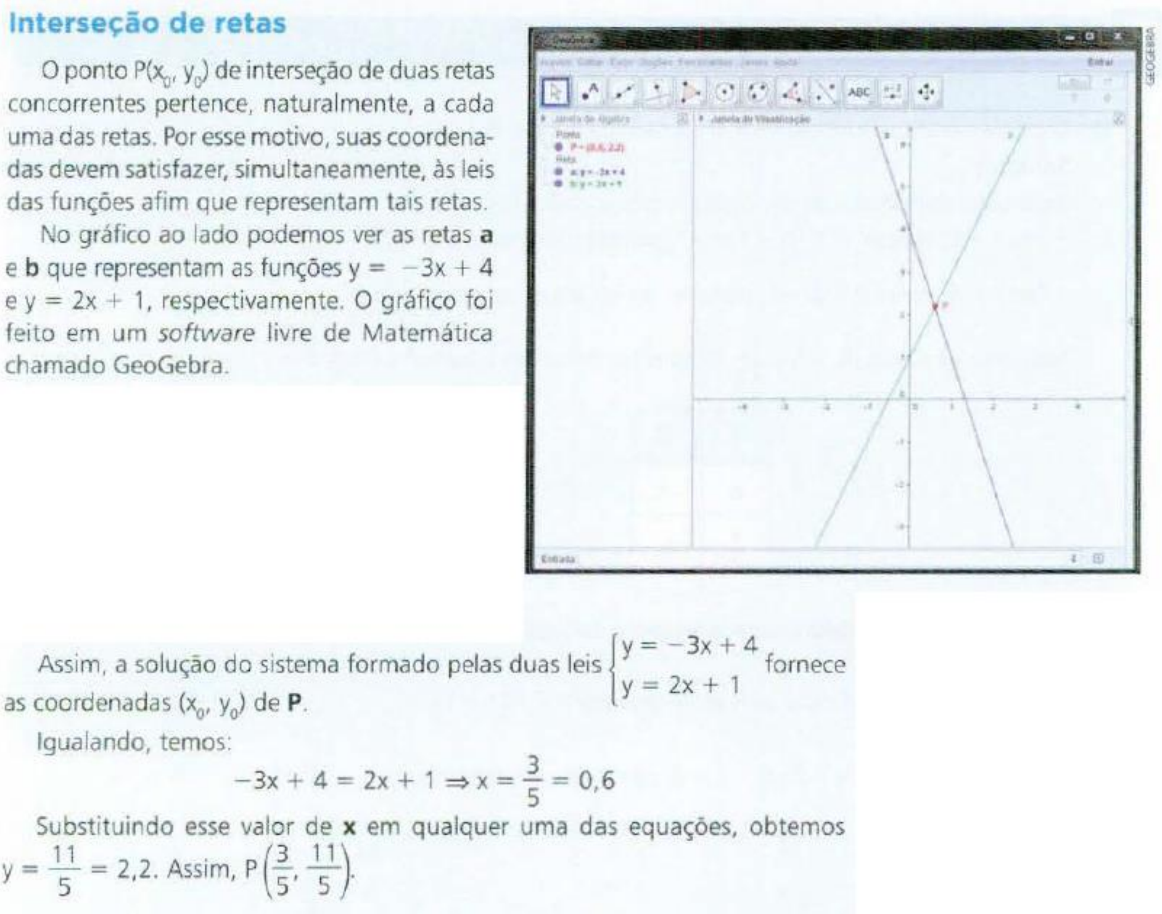
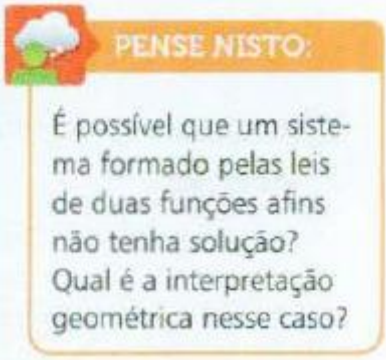
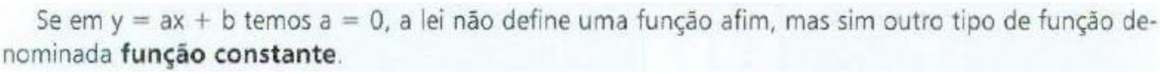
A lei $y = 3x - 1$ é também chamada **equação da reta r**.
</td></tr>
</table>

Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continuação)

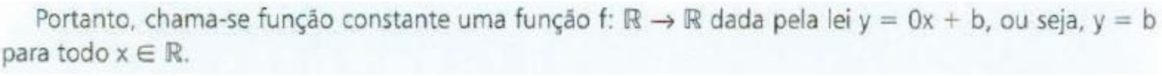
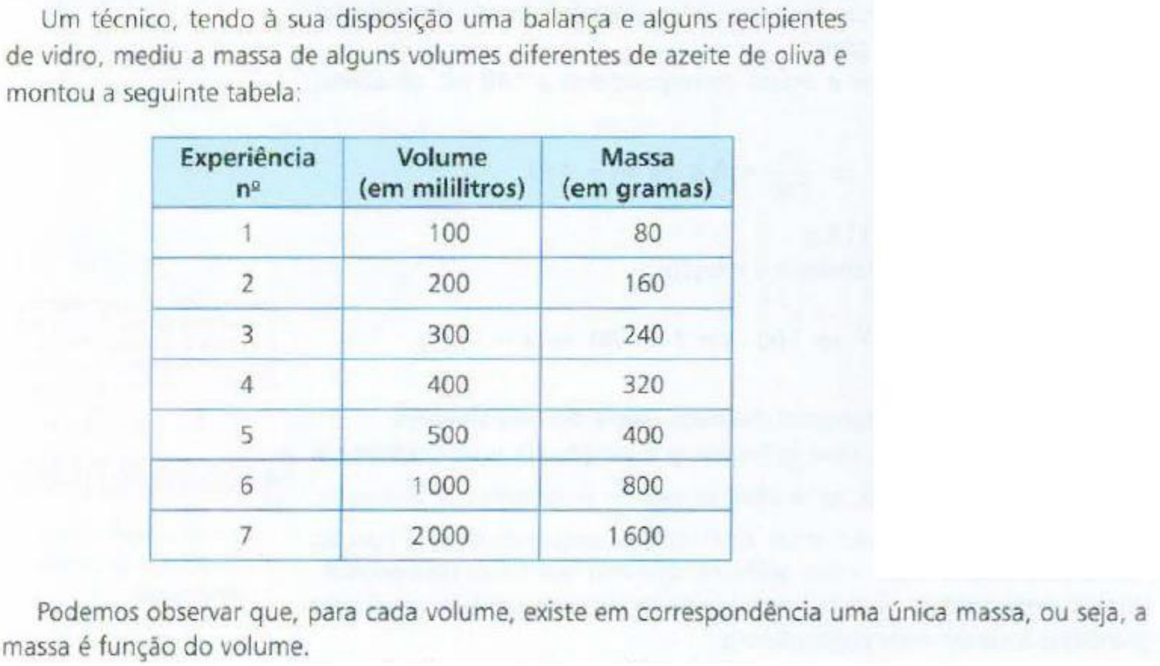
<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>P.AC.059.073</td><td>

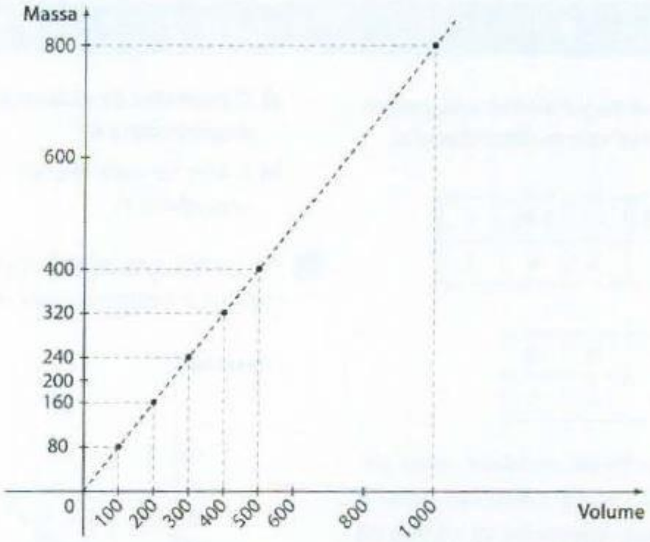
2 Construa o gráfico da função de ℝ em ℝ dada por $y = -2x + 3$.
Solução:
• Para $x = 0$, temos $y = -2 \cdot 0 + 3 = 3$; portanto, um ponto é (0, 3).
• Para $y = 0$, temos $0 = -2x + 3$; portanto, $x = \frac{3}{2}$ e o outro ponto é $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.
<table>
<tr><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td>0</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$\frac{3}{2}$</td><td>0</td></tr>
</table>
A lei $y = -2x + 3$ é também chamada **equação da reta s**.</td></tr>
<tr><td>P.A.060.073</td><td>
3 Obtenha a equação da reta que passa pelos pontos P(−1, 3) e Q(1, 1).
Solução:
A reta $\overleftrightarrow{PQ}$ tem equação $y = a \cdot x + b$. Precisamos determinar os valores de **a** e **b**.
Como (−1, 3) pertence à reta, temos:
$3 = a \cdot (-1) + b$, ou seja, $-a + b = 3$
Como (1, 1) pertence à reta, temos:
$1 = a \cdot 1 + b$, ou seja, $a + b = 1$
Assim, **a** e **b** satisfazem o sistema:
$\begin{cases} -a + b = 3 \\ a + b = 1 \end{cases}$
cuja solução é $a = -1$ e $b = 2$. Portanto, a equação procurada é $y = -x + 2$.</td></tr>
</table>

Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continuação)

Código	Núcleo
P.A.061.074	 **Interseção de retas** O ponto $P(x_0, y_0)$ de interseção de duas retas concorrentes pertence, naturalmente, a cada uma das retas. Por esse motivo, suas coordenadas devem satisfazer, simultaneamente, às leis das funções afim que representam tais retas. No gráfico ao lado podemos ver as retas **a** e **b** que representam as funções $y = -3x + 4$ e $y = 2x + 1$, respectivamente. O gráfico foi feito em um *software* livre de Matemática chamado GeoGebra. Assim, a solução do sistema formado pelas duas leis $\begin{cases} y = -3x + 4 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$ fornece as coordenadas (x_0, y_0) de **P**. Igualando, temos: $-3x + 4 = 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{3}{5} = 0,6$ Substituindo esse valor de **x** em qualquer uma das equações, obtemos $y = \frac{11}{5} = 2,2$. Assim, $P\left(\frac{3}{5}, \frac{11}{5}\right)$.
P.H.062.074	 PENSE NISTO: É possível que um sistema formado pelas leis de duas funções afins não tenha solução? Qual é a interpretação geométrica nesse caso?
P.RC.063.074	 Se em $y = ax + b$ temos $a = 0$, a lei não define uma função afim, mas sim outro tipo de função denominada **função constante**.

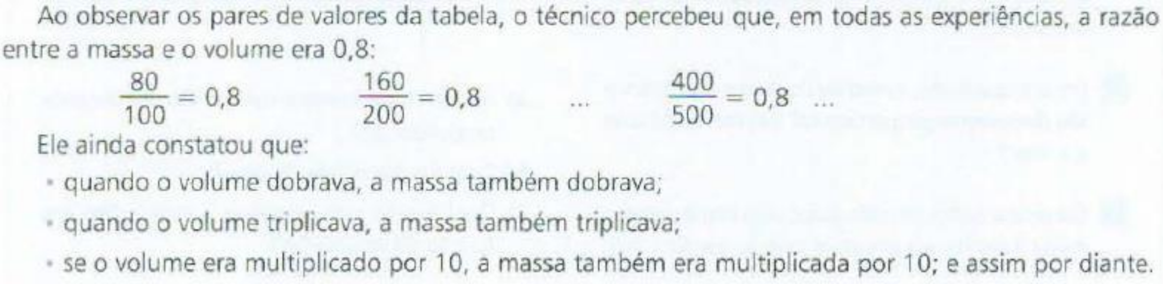
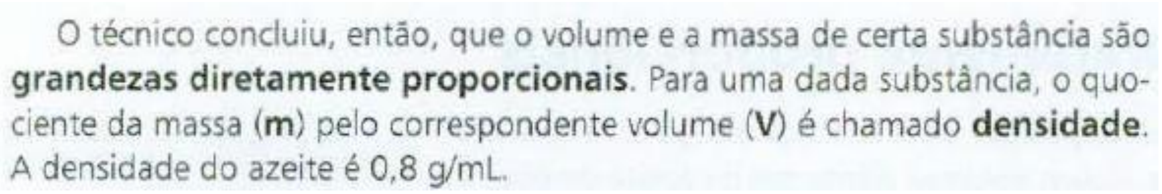
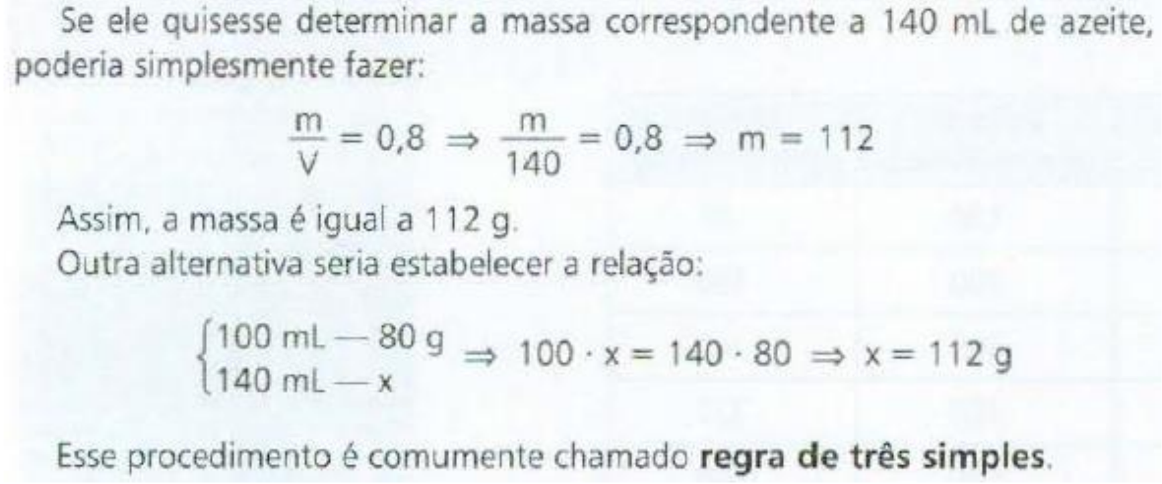
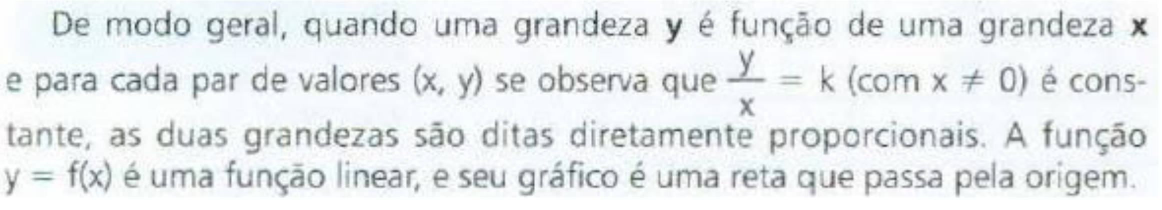
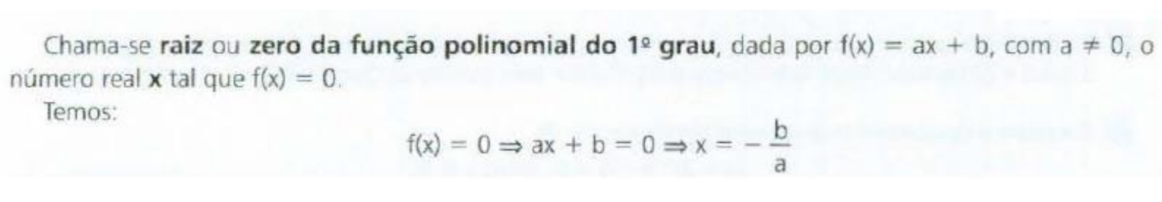
Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continuação)

<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>P.TC.064.074</td><td>
Portanto, chama-se função constante uma função f: ℝ → ℝ dada pela lei y = 0x + b, ou seja, y = b para todo x ∈ ℝ.</td></tr>
<tr><td>P.H.065.077</td><td>
Um técnico, tendo à sua disposição uma balança e alguns recipientes de vidro, mediu a massa de alguns volumes diferentes de azeite de oliva e montou a seguinte tabela:
<table>
<tr><th>Experiência nº</th><th>Volume (em mililitros)</th><th>Massa (em gramas)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>100</td><td>80</td></tr>
<tr><td>2</td><td>200</td><td>160</td></tr>
<tr><td>3</td><td>300</td><td>240</td></tr>
<tr><td>4</td><td>400</td><td>320</td></tr>
<tr><td>5</td><td>500</td><td>400</td></tr>
<tr><td>6</td><td>1 000</td><td>800</td></tr>
<tr><td>7</td><td>2000</td><td>1 600</td></tr>
</table>

Podemos observar que, para cada volume, existe em correspondência uma única massa, ou seja, a massa é função do volume.</td></tr>
<tr><td>P.HC.066.077</td><td>Com os resultados obtidos, o técnico construiu o gráfico abaixo.


Ele notou, então, que havia vários pontos alinhados determinando uma reta, a qual passa pela origem do sistema cartesiano, ou seja, tinha obtido o gráfico de uma **função linear**.</td></tr>
</table>

Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continuação)

Código	Núcleo
P.H.067.077	Ao observar os pares de valores da tabela, o técnico percebeu que, em todas as experiências, a razão entre a massa e o volume era 0,8: $\frac{80}{100} = 0{,}8 \quad \frac{160}{200} = 0{,}8 \quad \ldots \quad \frac{400}{500} = 0{,}8 \quad \ldots$ Ele ainda constatou que: • quando o volume dobrava, a massa também dobrava; • quando o volume triplicava, a massa também triplicava; • se o volume era multiplicado por 10, a massa também era multiplicada por 10; e assim por diante.
P.C.068.078	O técnico concluiu, então, que o volume e a massa de certa substância são **grandezas diretamente proporcionais**. Para uma dada substância, o quociente da massa (**m**) pelo correspondente volume (**V**) é chamado **densidade**. A densidade do azeite é 0,8 g/mL.
P.HC.069.078	Se ele quisesse determinar a massa correspondente a 140 mL de azeite, poderia simplesmente fazer: $\frac{m}{V} = 0{,}8 \Rightarrow \frac{m}{140} = 0{,}8 \Rightarrow m = 112$ Assim, a massa é igual a 112 g. Outra alternativa seria estabelecer a relação: $\begin{cases} 100\text{ mL} - 80\text{ g} \\ 140\text{ mL} - x \end{cases} \Rightarrow 100 \cdot x = 140 \cdot 80 \Rightarrow x = 112\text{ g}$ Esse procedimento é comumente chamado **regra de três simples**.
P.TC.070.078	De modo geral, quando uma grandeza **y** é função de uma grandeza **x** e para cada par de valores (x, y) se observa que $\frac{y}{x} = k$ (com $x \neq 0$) é constante, as duas grandezas são ditas diretamente proporcionais. A função $y = f(x)$ é uma função linear, e seu gráfico é uma reta que passa pela origem.
P.TC.071.079	Chama-se **raiz** ou **zero da função polinomial do 1º grau**, dada por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, o número real **x** tal que $f(x) = 0$. Temos: $f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$

Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continuação)

<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>P.TC.072.079</td><td>

OBSERVAÇÕES

- O ponto $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ pertence ao eixo das abscissas. Desse modo, a raiz de uma função do 1º grau corresponde à abscissa do ponto em que a reta intersecta o eixo Ox.
- A raiz da função **f** dada por $f(x) = ax + b$ é a solução da equação do 1º grau $ax + b = 0$, ou seja, $x = -\frac{b}{a}$.

</td></tr>
<tr><td>P.A.073.080</td><td>

- Obtenção do zero da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = 2x - 5$:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

- Cálculo da raiz da função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela lei $g(x) = 3x + 6$:

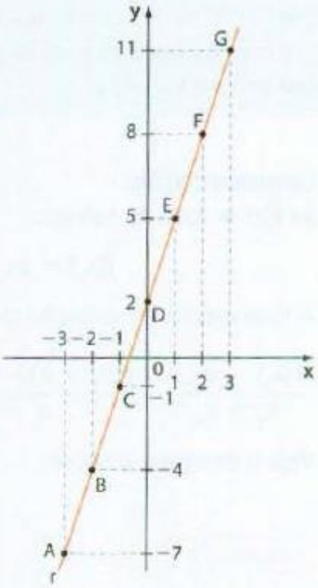
$$g(x) = 0 \Rightarrow 3x + 6 = 0 \Rightarrow x = -2$$

- A reta que representa a função $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $h(x) = -2x + 10$, intersecta o eixo Ox no ponto (5, 0), pois $h(x) = 0 \Rightarrow -2x + 10 = 0 \Rightarrow x = 5$.

</td></tr>
<tr><td>P.A.074.081</td><td>

Seja **f** a função afim dada por $y = 3x + 2$. No gráfico ao lado, destacamos alguns pontos da reta **r**, que é o gráfico de **f**. Vamos calcular a taxa média de variação dessa função nos seguintes intervalos:

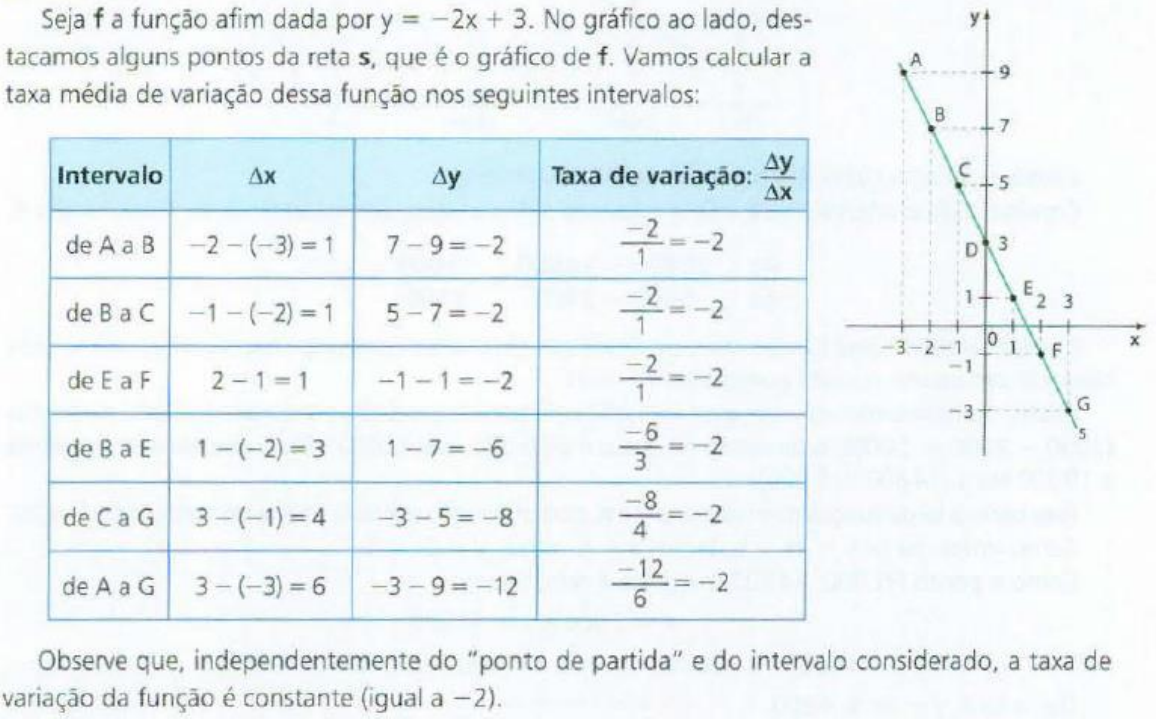
<table>
<tr><th>Intervalo</th><th>Δx</th><th>Δy</th><th>Taxa de variação: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$</th></tr>
<tr><td>de A a B</td><td>$-2 - (-3) = 1$</td><td>$-4 - (-7) = 3$</td><td>$\frac{3}{1} = 3$</td></tr>
<tr><td>de B a C</td><td>$-1 - (-2) = 1$</td><td>$-1 - (-4) = 3$</td><td>$\frac{3}{1} = 3$</td></tr>
<tr><td>de E a F</td><td>$2 - 1 = 1$</td><td>$8 - 5 = 3$</td><td>$\frac{3}{1} = 3$</td></tr>
<tr><td>de D a G</td><td>$3 - 0 = 3$</td><td>$11 - 2 = 9$</td><td>$\frac{9}{3} = 3$</td></tr>
<tr><td>de B a E</td><td>$1 - (-2) = 3$</td><td>$5 - (-4) = 9$</td><td>$\frac{9}{3} = 3$</td></tr>
<tr><td>de A a F</td><td>$2 - (-3) = 5$</td><td>$8 - (-7) = 15$</td><td>$\frac{15}{5} = 3$</td></tr>
</table>



Observe que, independentemente do "ponto de partida" e do intervalo considerado, a taxa de variação da função é constante (igual a 3).

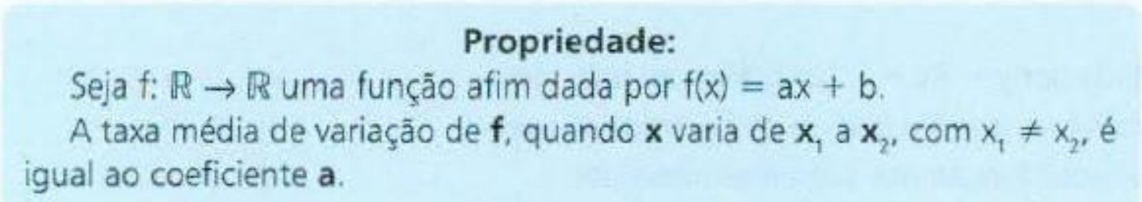
</td></tr>
</table>

Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continuação)

<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>P.A.075.081</td><td>


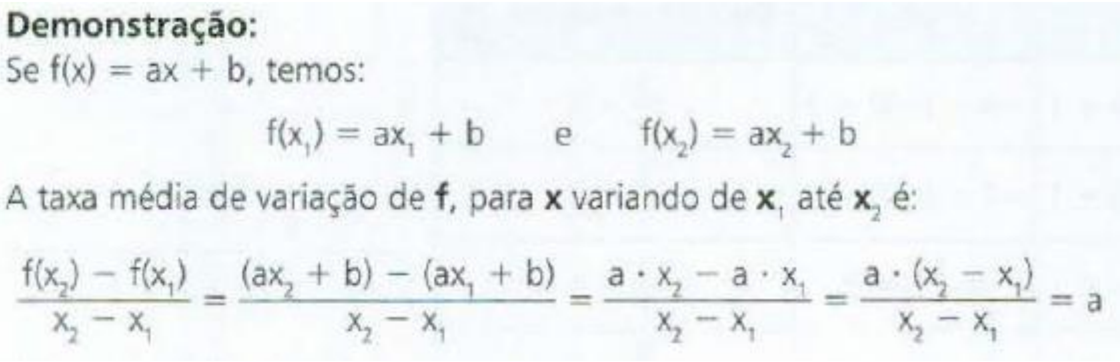
Seja **f** a função afim dada por $y = -2x + 3$. No gráfico ao lado, destacamos alguns pontos da reta **s**, que é o gráfico de **f**. Vamos calcular a taxa média de variação dessa função nos seguintes intervalos:

<table>
<tr><th>Intervalo</th><th>Δx</th><th>Δy</th><th>Taxa de variação: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$</th></tr>
<tr><td>de A a B</td><td>$-2-(-3)=1$</td><td>$7-9=-2$</td><td>$\frac{-2}{1}=-2$</td></tr>
<tr><td>de B a C</td><td>$-1-(-2)=1$</td><td>$5-7=-2$</td><td>$\frac{-2}{1}=-2$</td></tr>
<tr><td>de E a F</td><td>$2-1=1$</td><td>$-1-1=-2$</td><td>$\frac{-2}{1}=-2$</td></tr>
<tr><td>de B a E</td><td>$1-(-2)=3$</td><td>$1-7=-6$</td><td>$\frac{-6}{3}=-2$</td></tr>
<tr><td>de C a G</td><td>$3-(-1)=4$</td><td>$-3-5=-8$</td><td>$\frac{-8}{4}=-2$</td></tr>
<tr><td>de A a G</td><td>$3-(-3)=6$</td><td>$-3-9=-12$</td><td>$\frac{-12}{6}=-2$</td></tr>
</table>

Observe que, independentemente do "ponto de partida" e do intervalo considerado, a taxa de variação da função é constante (igual a -2).
</td></tr>
<tr><td>P.T.076.082</td><td>


Propriedade:

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função afim dada por $f(x) = ax + b$.

A taxa média de variação de **f**, quando **x** varia de $\mathbf{x_1}$ a $\mathbf{x_2}$, com $x_1 \neq x_2$, é igual ao coeficiente **a**.
</td></tr>
<tr><td>P.TH.077.082</td><td>


Demonstração:

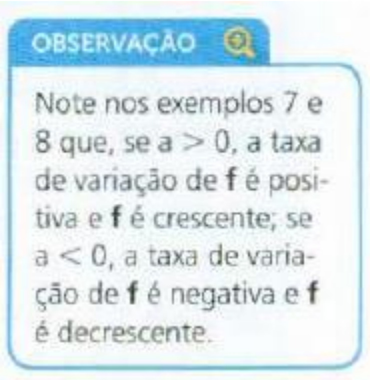
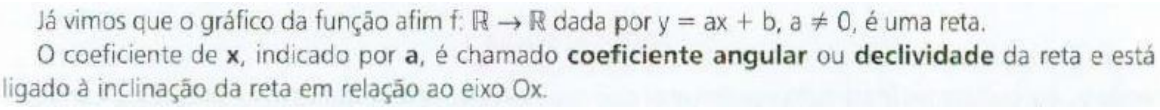
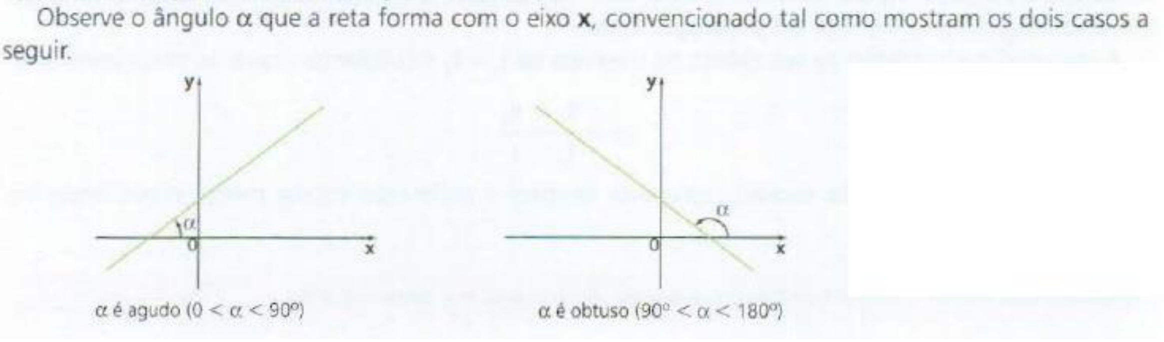
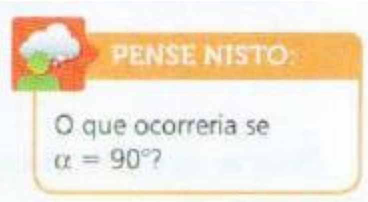
Se $f(x) = ax + b$, temos:

$$f(x_1) = ax_1 + b \quad \text{e} \quad f(x_2) = ax_2 + b$$

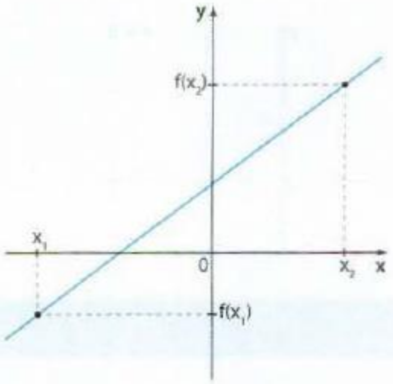
A taxa média de variação de **f**, para **x** variando de $\mathbf{x_1}$ até $\mathbf{x_2}$ é:

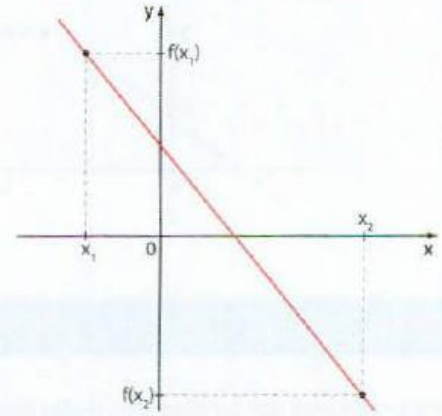
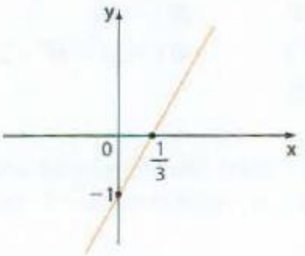
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a \cdot x_2 - a \cdot x_1}{x_2 - x_1} = \frac{a \cdot (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$
</td></tr>
</table>

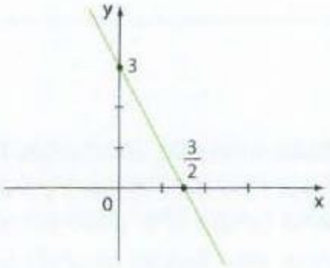
Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continuação)

Código	Núcleo
P.H.078.082	 **OBSERVAÇÃO** Note nos exemplos 7 e 8 que, se $a > 0$, a taxa de variação de **f** é positiva e **f** é crescente; se $a < 0$, a taxa de variação de **f** é negativa e **f** é decrescente.
P.T.079.084	 Já vimos que o gráfico da função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $y = ax + b$, $a \neq 0$, é uma reta. O coeficiente de **x**, indicado por **a**, é chamado **coeficiente angular** ou **declividade** da reta e está ligado à inclinação da reta em relação ao eixo Ox.
P.H.080.084	 Observe o ângulo α que a reta forma com o eixo **x**, convencionado tal como mostram os dois casos a seguir. α é agudo (0 < α < 90º) α é obtuso (90º < α < 180º)
P.H.081.084	 **PENSE NISTO:** O que ocorreria se $\alpha = 90°$?

Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continuação)

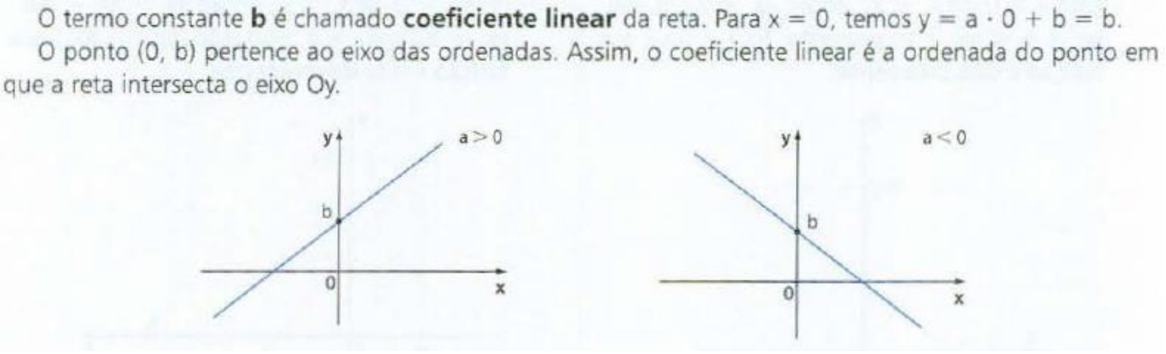
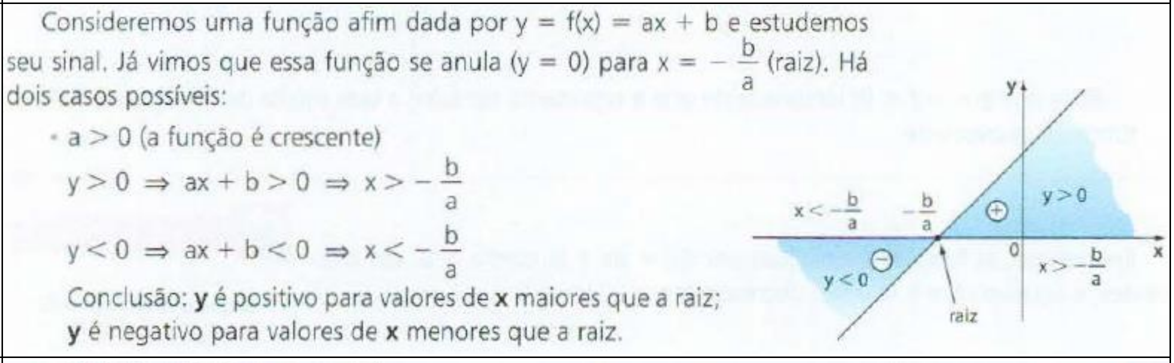
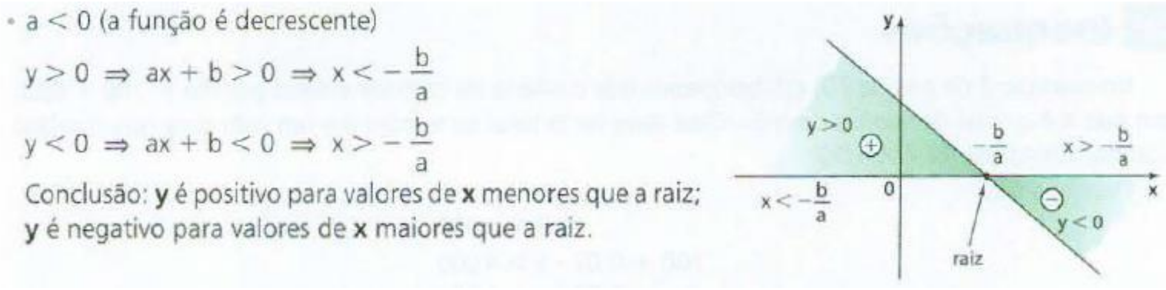
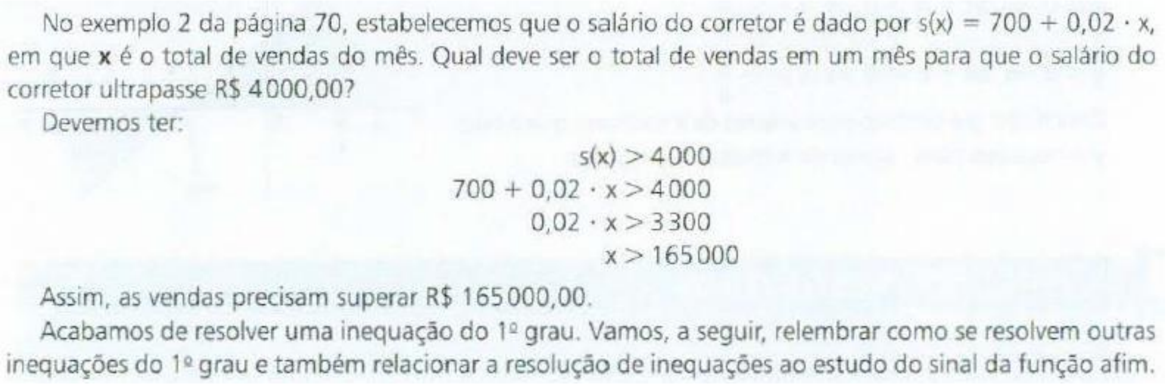
<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>P.TC.082.085</td><td>Considerando a função afim definida por $f(x) = ax + b$, temos duas possibilidades.
- Para $a > 0$, se $x_1 < x_2$, então $ax_1 < ax_2$ e, daí, $ax_1 + b < ax_2 + b$; portanto, $f(x_1) < f(x_2)$, e a função é dita crescente.


- Para $a < 0$, se $x_1 < x_2$, então $ax_1 > ax_2$ e, daí, $ax_1 + b > ax_2 + b$; portanto, $f(x_1) > f(x_2)$, e a função é dita decrescente.

 </td></tr>
<tr><td>P.H.083.085</td><td>Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $y = 3x - 1$. Observe a tabela e o gráfico de f.
x aumenta
<table>
<tr><th>x</th><th>−3</th><th>−2</th><th>−1</th><th>0</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th></tr>
<tr><td>y</td><td>−10</td><td>−7</td><td>−4</td><td>−1</td><td>2</td><td>5</td><td>8</td></tr>
</table>
y aumenta


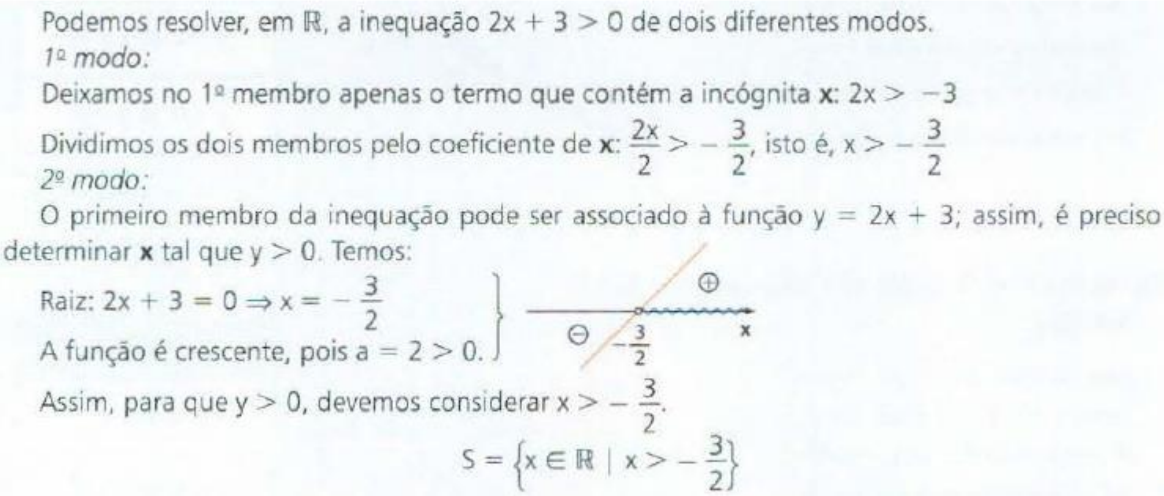
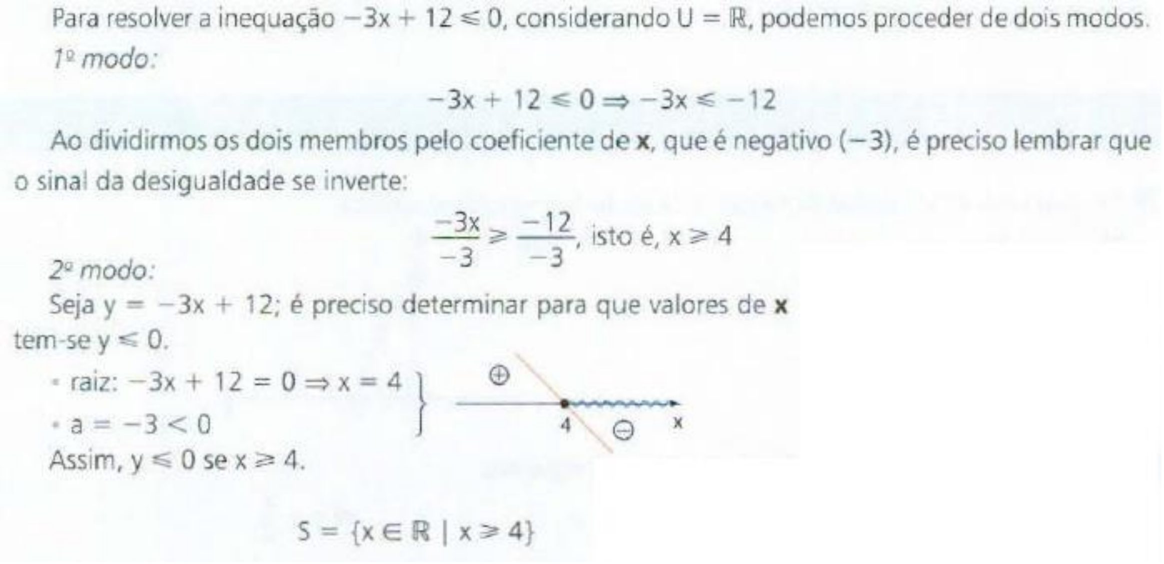
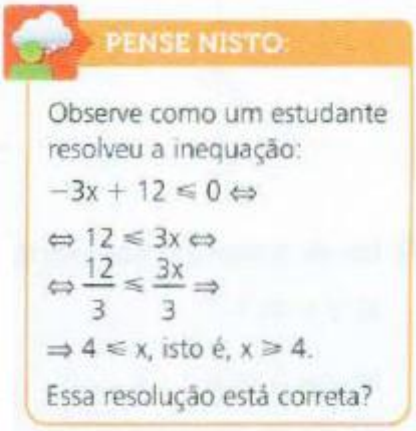
Note que $a = 3 > 0$; lembre-se de que a representa também a taxa média de variação de f. A função é crescente.</td></tr>
<tr><td>P.H.084.085</td><td>Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $y = -2x + 3$. Observe a tabela e o gráfico de f.
x aumenta
<table>
<tr><th>x</th><th>−3</th><th>−2</th><th>−1</th><th>0</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th></tr>
<tr><td>y</td><td>9</td><td>7</td><td>5</td><td>3</td><td>1</td><td>−1</td><td>−3</td></tr>
</table>
y diminui


Note que $a = -2 < 0$; lembre-se de que a representa também a taxa média de variação de f. A função é decrescente.</td></tr>
<tr><td>P.H.085.085</td><td>PENSE NISTO:
O que ocorre se $a = 0$?</td></tr>
</table>

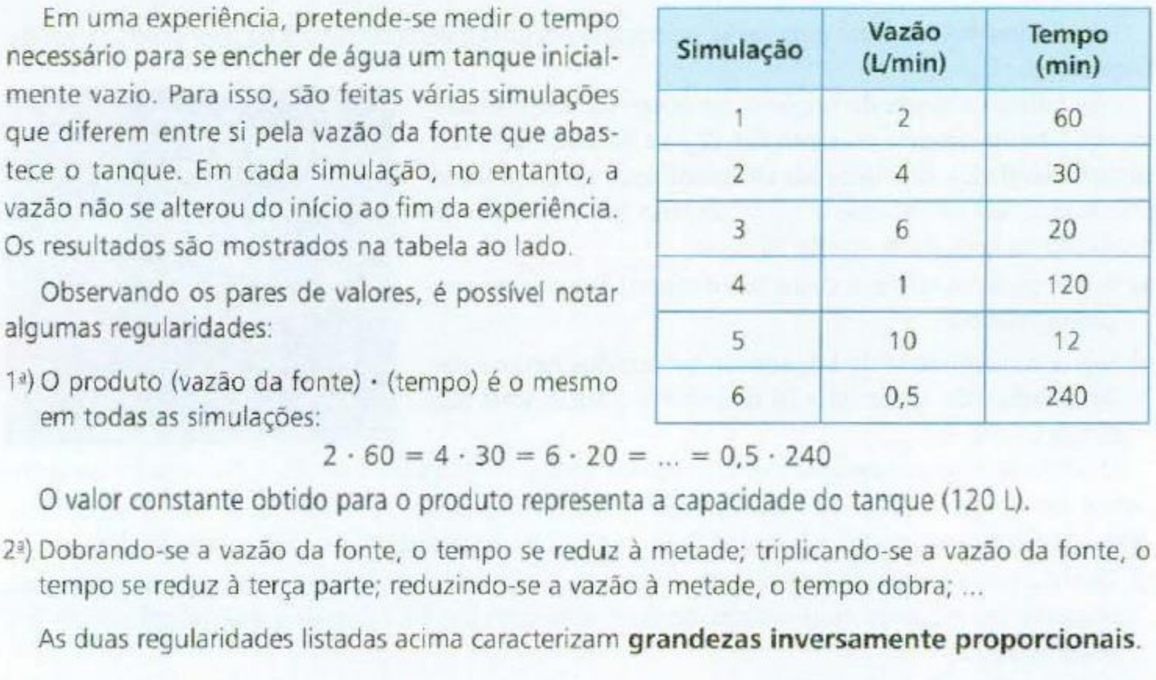
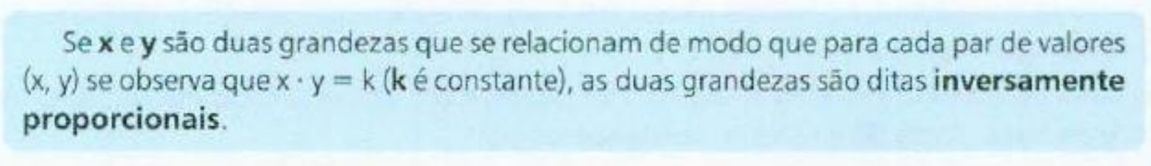
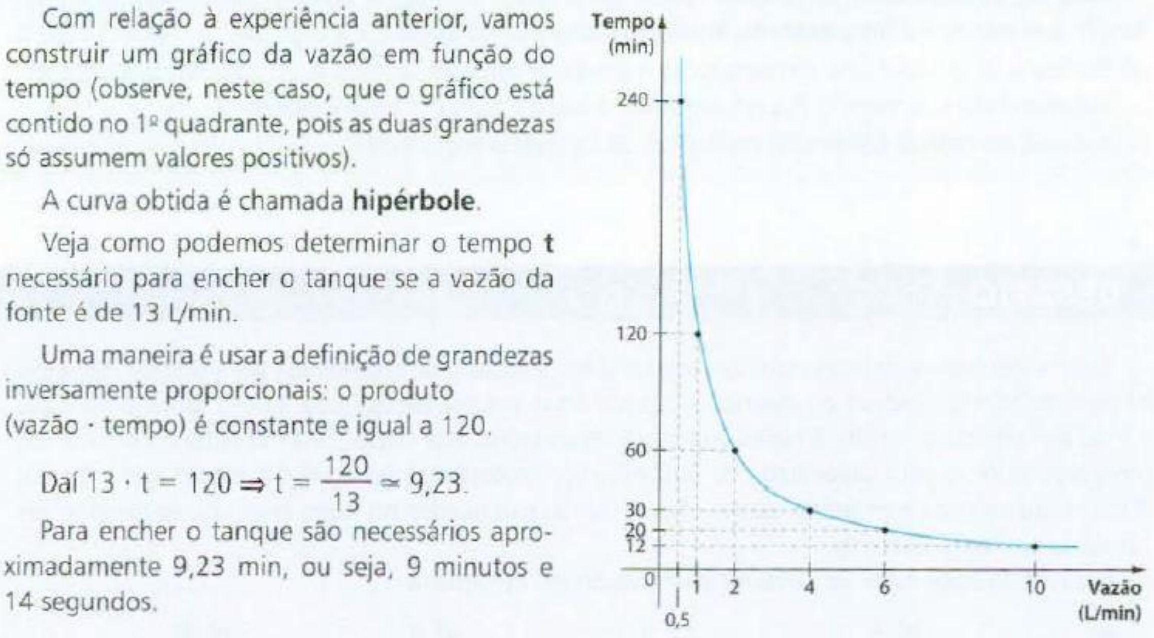
Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continuação)

Código	Núcleo
P.C.086.086	 O termo constante **b** é chamado **coeficiente linear** da reta. Para $x = 0$, temos $y = a \cdot 0 + b = b$. O ponto $(0, b)$ pertence ao eixo das ordenadas. Assim, o coeficiente linear é a ordenada do ponto em que a reta intersecta o eixo Oy.
P.H.087.086	 Consideremos uma função afim dada por $y = f(x) = ax + b$ e estudemos seu sinal. Já vimos que essa função se anula ($y = 0$) para $x = -\frac{b}{a}$ (raiz). Há dois casos possíveis: • $a > 0$ (a função é crescente) $y > 0 \Rightarrow ax + b > 0 \Rightarrow x > -\frac{b}{a}$ $y < 0 \Rightarrow ax + b < 0 \Rightarrow x < -\frac{b}{a}$ Conclusão: **y** é positivo para valores de **x** maiores que a raiz; **y** é negativo para valores de **x** menores que a raiz.
P.H.088.087	 • $a < 0$ (a função é decrescente) $y > 0 \Rightarrow ax + b > 0 \Rightarrow x < -\frac{b}{a}$ $y < 0 \Rightarrow ax + b < 0 \Rightarrow x > -\frac{b}{a}$ Conclusão: **y** é positivo para valores de **x** menores que a raiz; **y** é negativo para valores de **x** maiores que a raiz.
P.H.089.088	 No exemplo 2 da página 70, estabelecemos que o salário do corretor é dado por $s(x) = 700 + 0{,}02 \cdot x$, em que **x** é o total de vendas do mês. Qual deve ser o total de vendas em um mês para que o salário do corretor ultrapasse R$ 4 000,00? Devemos ter: $s(x) > 4000$ $700 + 0{,}02 \cdot x > 4000$ $0{,}02 \cdot x > 3300$ $x > 165000$ Assim, as vendas precisam superar R$ 165 000,00. Acabamos de resolver uma inequação do 1º grau. Vamos, a seguir, relembrar como se resolvem outras inequações do 1º grau e também relacionar a resolução de inequações ao estudo do sinal da função afim.

Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (continuação)

Código	Núcleo
P.H.090.088	 Podemos resolver, em ℝ, a inequação $2x + 3 > 0$ de dois diferentes modos. *1º modo:* Deixamos no 1º membro apenas o termo que contém a incógnita **x**: $2x > -3$ Dividimos os dois membros pelo coeficiente de **x**: $\frac{2x}{2} > -\frac{3}{2}$, isto é, $x > -\frac{3}{2}$ *2º modo:* O primeiro membro da inequação pode ser associado à função $y = 2x + 3$; assim, é preciso determinar **x** tal que $y > 0$. Temos: Raiz: $2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$ A função é crescente, pois $a = 2 > 0$. Assim, para que $y > 0$, devemos considerar $x > -\frac{3}{2}$. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{3}{2}\right\}$
P.H.091.088	 Para resolver a inequação $-3x + 12 \leqslant 0$, considerando $U = \mathbb{R}$, podemos proceder de dois modos. *1º modo:* $-3x + 12 \leqslant 0 \Rightarrow -3x \leqslant -12$ Ao dividirmos os dois membros pelo coeficiente de **x**, que é negativo (−3), é preciso lembrar que o sinal da desigualdade se inverte: $\frac{-3x}{-3} \geqslant \frac{-12}{-3}$, isto é, $x \geqslant 4$ *2º modo:* Seja $y = -3x + 12$; é preciso determinar para que valores de **x** tem-se $y \leqslant 0$. • raiz: $-3x + 12 = 0 \Rightarrow x = 4$ • $a = -3 < 0$ Assim, $y \leqslant 0$ se $x \geqslant 4$. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 4\}$
P.H.092.089	 **PENSE NISTO:** Observe como um estudante resolveu a inequação: $-3x + 12 \leqslant 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 12 \leqslant 3x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{12}{3} \leqslant \frac{3x}{3} \Rightarrow$ $\Rightarrow 4 \leqslant x$, isto é, $x \geqslant 4$. Essa resolução está correta?

Quadro 2 – Núcleos do *Material P* (conclusão)

<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>P.HC.093.092</td><td>

Em uma experiência, pretende-se medir o tempo necessário para se encher de água um tanque inicialmente vazio. Para isso, são feitas várias simulações que diferem entre si pela vazão da fonte que abastece o tanque. Em cada simulação, no entanto, a vazão não se alterou do início ao fim da experiência. Os resultados são mostrados na tabela ao lado.
<table>
<tr><th>Simulação</th><th>Vazão (L/min)</th><th>Tempo (min)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>60</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td><td>30</td></tr>
<tr><td>3</td><td>6</td><td>20</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1</td><td>120</td></tr>
<tr><td>5</td><td>10</td><td>12</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0,5</td><td>240</td></tr>
</table>
Observando os pares de valores, é possível notar algumas regularidades:
1ª) O produto (vazão da fonte) · (tempo) é o mesmo em todas as simulações:
$2 \cdot 60 = 4 \cdot 30 = 6 \cdot 20 = ... = 0,5 \cdot 240$
O valor constante obtido para o produto representa a capacidade do tanque (120 L).
2ª) Dobrando-se a vazão da fonte, o tempo se reduz à metade; triplicando-se a vazão da fonte, o tempo se reduz à terça parte; reduzindo-se a vazão à metade, o tempo dobra; ...
As duas regularidades listadas acima caracterizam **grandezas inversamente proporcionais**.
</td></tr>
<tr><td>P.TC.094.092</td><td>

Se **x** e **y** são duas grandezas que se relacionam de modo que para cada par de valores (x, y) se observa que $x \cdot y = k$ (**k** é constante), as duas grandezas são ditas **inversamente proporcionais**.
</td></tr>
<tr><td>P.HC.095.092</td><td>


Com relação à experiência anterior, vamos construir um gráfico da vazão em função do tempo (observe, neste caso, que o gráfico está contido no 1º quadrante, pois as duas grandezas só assumem valores positivos).
A curva obtida é chamada **hipérbole**.
Veja como podemos determinar o tempo **t** necessário para encher o tanque se a vazão da fonte é de 13 L/min.
Uma maneira é usar a definição de grandezas inversamente proporcionais: o produto (vazão · tempo) é constante e igual a 120.
Daí $13 \cdot t = 120 \Rightarrow t = \frac{120}{13} \simeq 9,23$.
Para encher o tanque são necessários aproximadamente 9,23 min, ou seja, 9 minutos e 14 segundos.
</td></tr>
</table>

4.2.1.1 Os núcleos teóricos

Os núcleos teóricos possuem a função de conceituar objetos matemáticos utilizando-se de algumas definições anteriormente apresentadas ao leitor ou não. Em nossa análise, dificilmente ocorreu uma classificação de um núcleo como puramente teórico, visto que em muitos casos se faz necessária a introdução de uma nova notação ou nomenclatura para diferenciar o objeto mais recente daqueles já exibidos em outro período.

Sendo assim, predomina a linguagem relativa nestes núcleos, já que há sempre a conexão entre os objetos presentes em cada conceito sem subjetividades, exemplificado em P.T.047.065, enquanto têm papel significativo no condicionamento conceitual da obra, pois o não entendimento de um núcleo teórico ou algum núcleo-conjunto semelhante impacta possivelmente no não entendimento de outro núcleo menos informativo, como um algorítmico ou heurístico. Podemos observar, portanto, que o núcleo P.TC.057.072 estabelece previamente o necessário para o real entendimento de P.AC.058.073, P.AC.059.073 e P.A.060.073.

No total, foram encontrados trinta núcleos com aspecto teórico, dos quais cinco são puramente teóricos, dois são teórico-heurísticos e os outros vinte e três são teórico-comunicativos.

4.2.1.2 Os núcleos algorítmicos

Os núcleos algorítmicos assumem o modelo prático para algum item discutido anteriormente, cuja intenção é apenas indicar o procedimento, sem necessariamente promover reflexão. Com isso, é visível o emprego da linguagem exemplar em núcleos deste modelo por conta dos verbos utilizados na descrição, como em P.A.073.080, e, quanto ao condicionamento conceitual, é sempre observado no fim das ramificações por seu aspecto mais procedimental que reflexivo, conforme observado na subseção anterior.

No total, foram encontrados dez núcleos com aspecto algorítmico, dos quais oito são puramente algorítmicos e dois são algorítmico-comunicativos.

4.2.1.3 Os núcleos heurísticos

Os núcleos heurísticos seguem a versão procedimental dos núcleos algorítmicos, contudo com uma promoção do pensamento crítico, isto é, possuem a iniciativa de fazer com que o próprio leitor deduza associações antes mesmo de os autores apresentá-las. Vale destacar que, em nossa análise desta obra, o quantitativo de núcleos heurísticos é 360% maior que o quantitativo de núcleos algorítmicos.

Desta forma, verificamos que a linguagem exemplar é utilizada – vide P.H.090.088 – assim como a linguagem relativa, vista em P.HC.069.078, e a linguagem funcional, por exemplo, em P.H.007.042, uma vez que a relação entre os objetos é feita por meio de uma expressão analítica. Os núcleos heurísticos participam ativamente do condicionamento conceitual do livro, seja quando promovem a comunicação, como P.HC.032.059, P.H.033.059 e P.HC.034.060 implicam diretamente em P.C.037.061 e em P.C.038.061, seja quando completam um núcleo conceitual, bem exemplificado em P.T.079.084 seguido por P.H.080.084 e P.H.081.084.

No total, foram encontrados quarenta e seis núcleos com aspecto heurístico, dos quais trinta e quatro são puramente heurísticos, dois são teórico-heurísticos e os outros dez são heurístico-comunicativos.

4.2.1.4 Os núcleos restritivos

Os núcleos restritivos têm por finalidade a classificação das ações que são e das que não são permitidas para aquele item em questão. Foi encontrado apenas núcleo com aspecto restritivo. Mais especificamente, o único núcleo P.RC.063.075, classificado como restritivo-comunicativo, apresenta linguagem relativa e é base para o entendimento do conteúdo do núcleo seguinte P.TC.064.075.

4.2.1.5 Os núcleos comunicativos

Os núcleos comunicativos fundamentalmente apresentam novas formas de se referir a objetos matemáticos e até notações específicas àqueles elementos. Verifica-se, portanto, que um núcleo comunicativo participa de núcleos-conjuntos com qualquer outro aspecto sem grandes dificuldades, destacando a ação conjunta com núcleos teóricos de maneira frequente, superando em 130% a quantidade de núcleos puramente comunicativos.

Apresentando a linguagem relativa, por exemplo, no núcleo P.C.012.043, ou a linguagem funcional, principalmente quando em um núcleo teórico-comunicativo, como em P.TC.046.065, os núcleos atuam diretamente ao longo de todo condicionamento conceitual iniciando, intermediando ou até concluindo uma observação, conforme descrito no decorrer da subseção 4.2.1.3.

No total, foram encontrados quarenta e seis núcleos com aspecto comunicativo, dos quais dez são puramente comunicativos, vinte e três são teórico-comunicativos, dois são algorítmico-comunicativos, dez são heurístico-comunicativos e o último é restritivo-comunicativo.

4.3 **Análise do Material S**

Nos módulos 8, 9, 10, 11 e 12 de Matemática I do Caderno 2, intitulados *Introdução à função*, *Análise de gráficos I*, *Análise de gráficos II*, *Função polinomial do 1º grau I* e *Função polinomial do 1º grau II*, respectivamente, os autores abordam a noção intuitiva de função, suas definições e propriedades gráficas, incluindo as definições de funções polinomiais do primeiro grau, seus coeficientes, sinais e raízes. Em nossa análise foram encontrados cento e nove núcleos, separados no quadro 3.

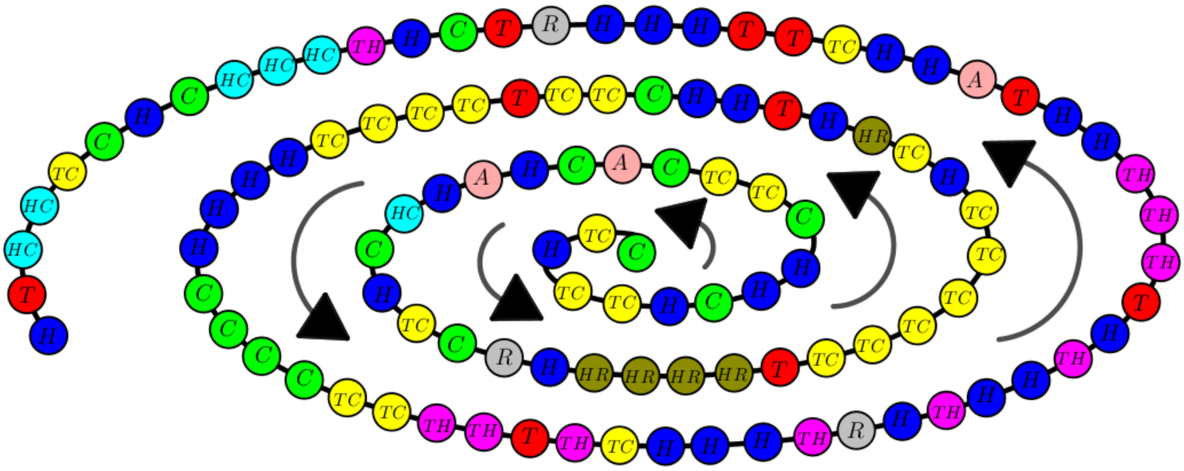
Quadro 3 – Quantitativo de núcleos no *Material S*.

Quantidade (%)	Teórico	Algorítmico	Heurístico	Restritivo	Comunicativo
Teórico	10 (9)	0 (0)	10 (9)	0 (0)	24 (22)
Algorítmico		3 (3)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
Heurístico			33 (30)	5 (5)	6 (6)
Restritivo				3 (3)	0 (0)
Comunicativo					15 (14)
				Total	109 (100)

Fonte: O autor, 2018.

No quadro é exibida a quantidade de núcleos de cada classificação – informada pela união dos aspectos da linha e da coluna correspondente – e o percentual referente à categoria. Por exemplo, há 10 núcleos puramente teóricos, representando 9% dos 109 totais, e 24 teórico-comunicativos, equivalente a 22% do total. Destacamos novamente que os núcleos podem conter mais de um aspecto. Ao longo da seção 4.3 discursaremos um pouco mais sobre os mesmos. Neste capítulo encontramos quarenta e cinco núcleos-conjuntos. A ordem em que se apresentam os núcleos desta obra é indicada na figura 20 a seguir.

Figura 20 – Ordenação dos núcleos no *Material S*.

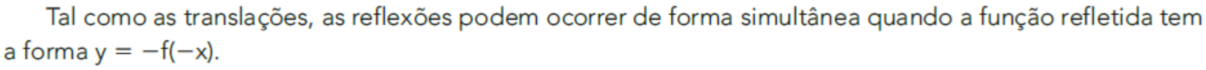


Fonte: O autor, 2018.

Podemos observar sem grandes dificuldades que a teoria poucas vezes não está atrelada à exibição de uma nova linguagem, ou seja, os núcleos puramente teóricos, em comparação aos núcleos teórico-comunicativos, praticamente não aparecem. Já que os núcleos heurísticos têm frequência maior que os núcleos algorítmicos, acreditamos que os autores desejavam proporcionar aos estudantes um ambiente de descoberta das relações próprias aos conteúdos sem que as mesmas tenham sido registradas de maneira explícita, muito bem percebido em seus núcleos teórico-heurísticos.

Segundo Dormolen (1986), um núcleo classificado como teórico é aquele em que a estrutura matemática do texto, em sua forma integral ou parcial, se faz presente. Por exemplo, na figura 21 podemos verificar que as reflexões em torno dos eixos coordenados, segundo os autores, ocorrem simultaneamente quando a função f assume a forma y = – f(–x) para todo x pertencente ao domínio de f.

Figura 21 – Núcleo teórico 3.

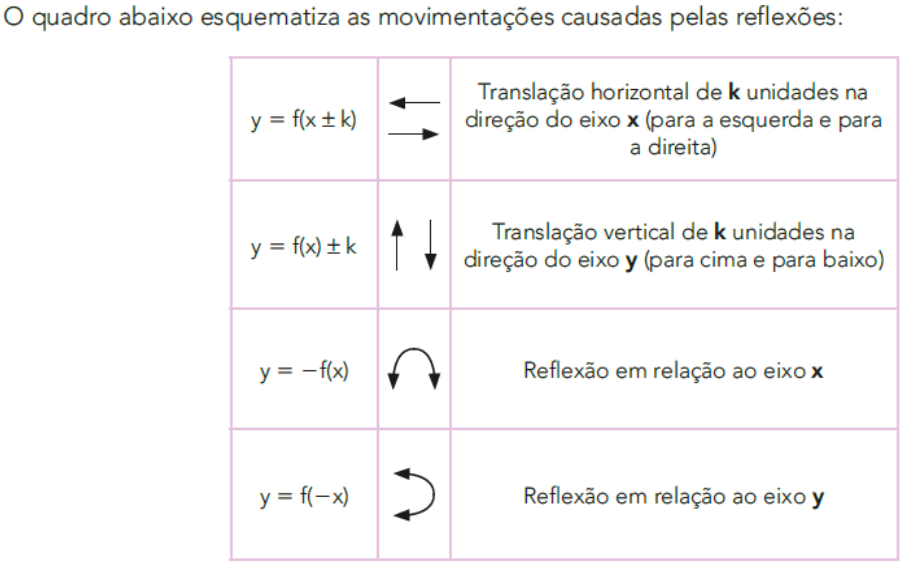


Tal como as translações, as reflexões podem ocorrer de forma simultânea quando a função refletida tem a forma $y = -f(-x)$.

Fonte: Material S, 2016, p. 78.

Já um núcleo algorítmico assume a tarefa de descrever todos os passos de uma técnica em ordem para a verificação de algum item teórico apresentado previamente. Seguindo no conhecimento sobre as transformações gráficas, a figura 22 mostra a correspondência entre a transformação da função em sua forma analítica e em sua forma geométrica.

Figura 22 – Núcleo algorítmico 3.



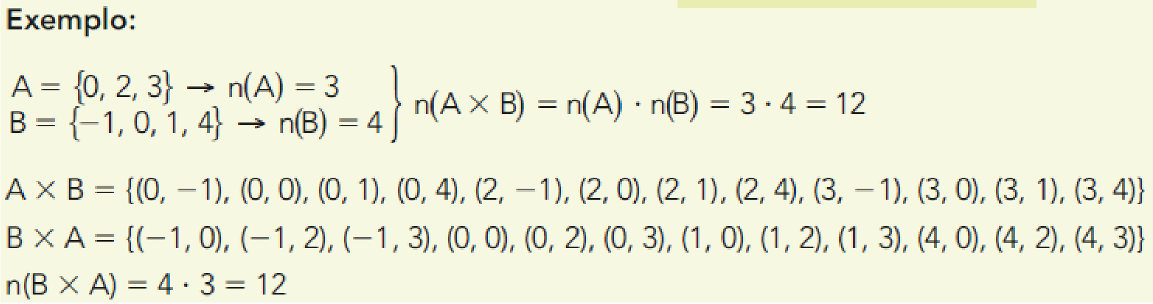
O quadro abaixo esquematiza as movimentações causadas pelas reflexões:

$y = f(x \pm k)$	← →	Translação horizontal de **k** unidades na direção do eixo **x** (para a esquerda e para a direita)
$y = f(x) \pm k$	↑ ↓	Translação vertical de **k** unidades na direção do eixo **y** (para cima e para baixo)
$y = -f(x)$	↷	Reflexão em relação ao eixo **x**
$y = f(-x)$	⤸	Reflexão em relação ao eixo **y**

Fonte: Material S, 2016, p. 78.

Um núcleo heurístico é responsável por uma sequência de processos, da mesma maneira que o algorítmico, porém assume uma postura mais reflexiva do núcleo, potencializando as conexões e descobertas feitas pelo discente. Na figura 23, por exemplo, os autores exibem os elementos do produto cartesiano de A por B e do produto cartesiano de B por A, contabilizando o número de elementos de ambos.

Figura 23 – Núcleo heurístico 3.



Exemplo:

$$\left.\begin{array}{l} A = \{0, 2, 3\} \rightarrow n(A) = 3 \\ B = \{-1, 0, 1, 4\} \rightarrow n(B) = 4 \end{array}\right\} n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = 3 \cdot 4 = 12$$

$$A \times B = \{(0, -1), (0, 0), (0, 1), (0, 4), (2, -1), (2, 0), (2, 1), (2, 4), (3, -1), (3, 0), (3, 1), (3, 4)\}$$

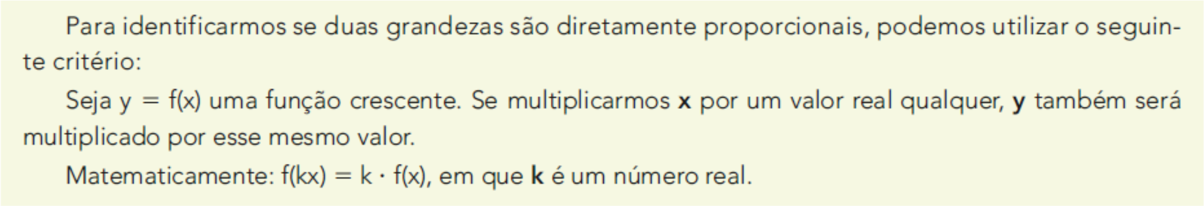
$$B \times A = \{(-1, 0), (-1, 2), (-1, 3), (0, 0), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 2), (1, 3), (4, 0), (4, 2), (4, 3)\}$$

$$n(B \times A) = 4 \cdot 3 = 12$$

Fonte: Material S, 2016, p. 35.

Um núcleo restritivo tem a importância de limitar o conjunto teórico e de procedimentos conhecidos. Na figura 24, os autores afirmam que duas grandezas podem ser classificadas como diretamente proporcionais quando uma está definida em função da outra e, ao passo que uma delas é multiplicada por um número real, a outra também seja multiplicada pelo mesmo valor.

Figura 24 – Núcleo restritivo 2.



Para identificarmos se duas grandezas são diretamente proporcionais, podemos utilizar o seguinte critério:

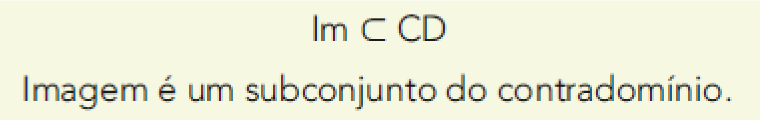
Seja $y = f(x)$ uma função crescente. Se multiplicarmos **x** por um valor real qualquer, **y** também será multiplicado por esse mesmo valor.

Matematicamente: $f(kx) = k \cdot f(x)$, em que **k** é um número real.

Fonte: Material S, 2016, p. 96.

Um núcleo é dito comunicativo quando exibe ao aluno a linguagem que passa a representar daquele instante em diante os objetos de estudo ou apenas informar observações pertinentes ao tópico. Por exemplo, a figura 25 indica que o conjunto imagem de qualquer função jamais conterá um elemento que não esteja no contradomínio da mesma.

Figura 25 – Núcleo comunicativo 3.



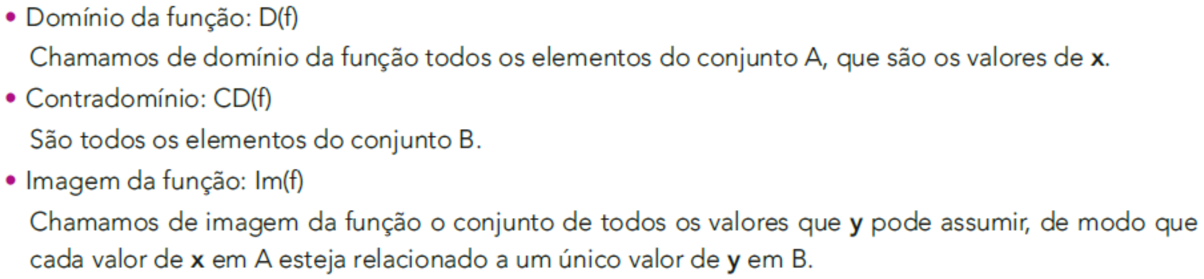
$$Im \subset CD$$

Imagem é um subconjunto do contradomínio.

Fonte: Material S, 2016, p. 25.

Como vimos, os núcleos-conjuntos são aqueles que mostram uma mistura das características principais de cada núcleo selecionado do grupo que contém os cinco anteriores.

Figura 26 – Núcleo teórico-comunicativo.

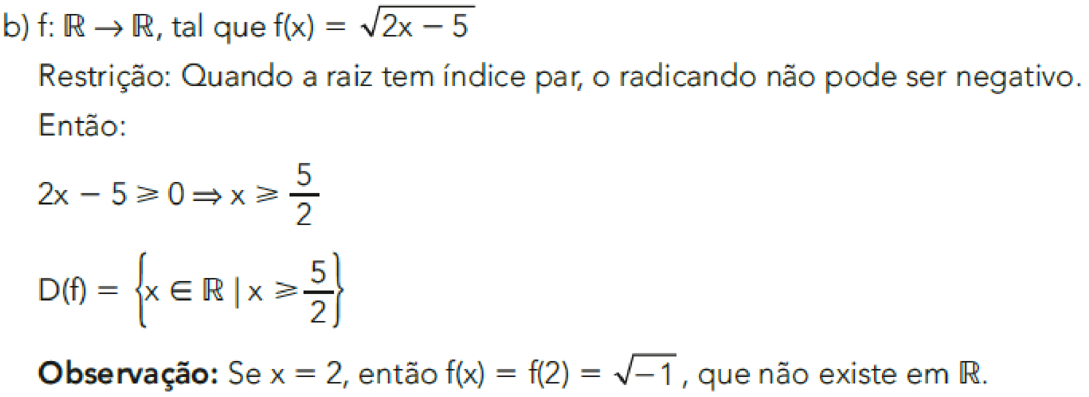


- Domínio da função: D(f)
  Chamamos de domínio da função todos os elementos do conjunto A, que são os valores de **x**.
- Contradomínio: CD(f)
  São todos os elementos do conjunto B.
- Imagem da função: Im(f)
  Chamamos de imagem da função o conjunto de todos os valores que **y** pode assumir, de modo que cada valor de **x** em A esteja relacionado a um único valor de **y** em B.

Fonte: Material S, 2016, p. 25.

Na figura 26 classificamos o núcleo como teórico-comunicativo, apesar da definição confusa de imagem da função, enquanto na figura 27 o núcleo assumiu o rótulo de heurístico-restritivo, novamente apresentando conflito sobre a questão de domínio da função f.

Figura 27 – Núcleo heurístico-restritivo.



b) f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \sqrt{2x - 5}$

Restrição: Quando a raiz tem índice par, o radicando não pode ser negativo.

Então:

$$2x - 5 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant \frac{5}{2}$$

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{5}{2}\right\}$$

Observação: Se $x = 2$, então $f(x) = f(2) = \sqrt{-1}$, que não existe em $\mathbb{R}$.

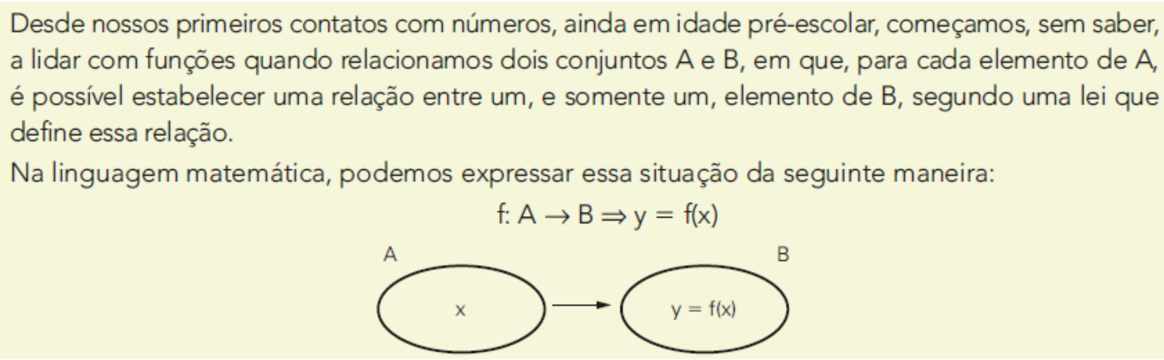
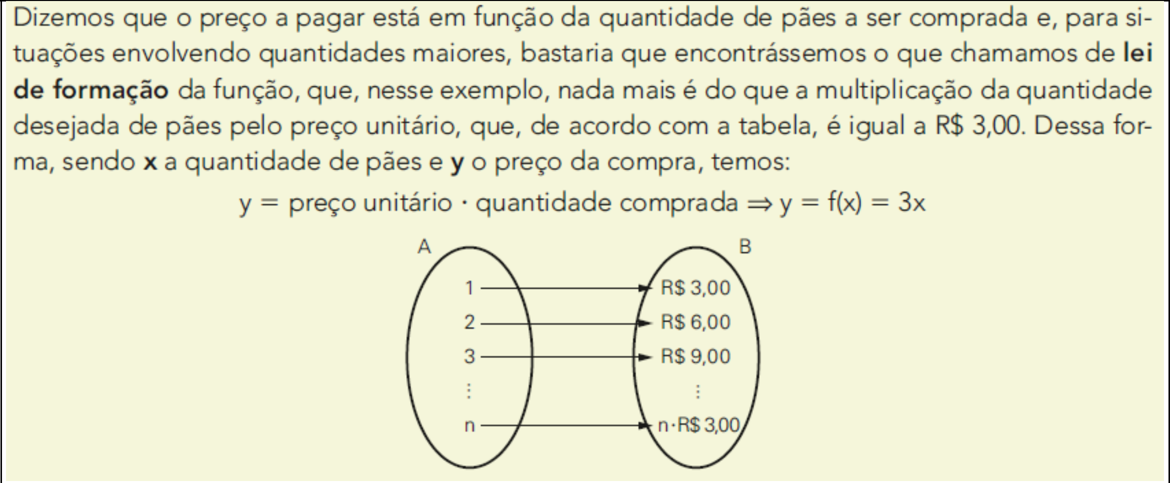
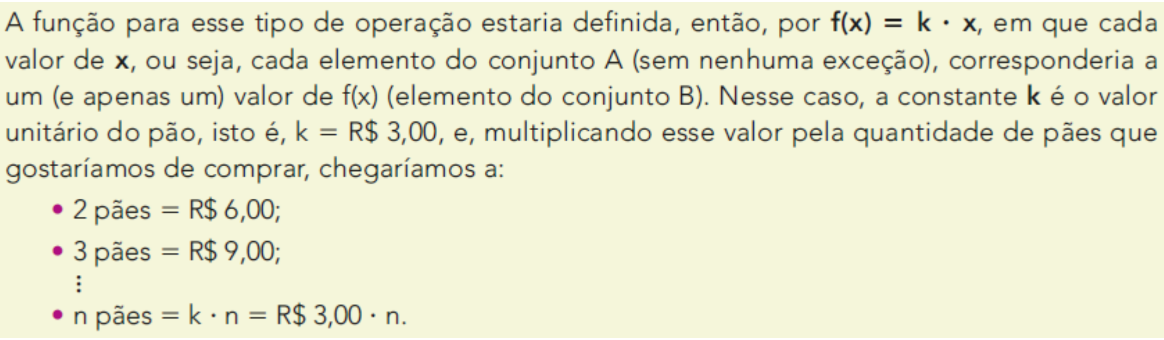
Fonte: Material S, 2016, p. 28.

4.3.1 Quadro de núcleos

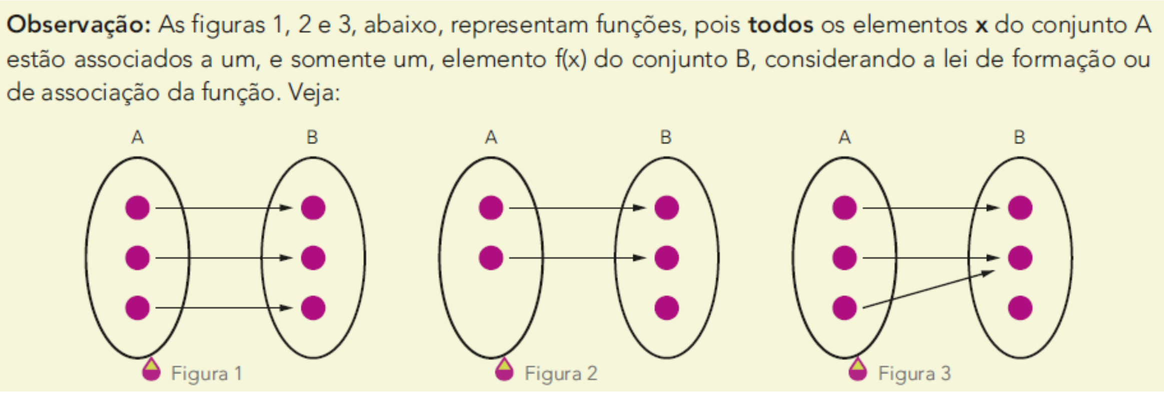
No quadro a seguir serão exibidos os núcleos encontrados nos módulos 8, 9 e 10 de Matemática I do caderno 2 do Material S, os quais abordam o conceito de função e suas propriedades gráficas. Para que cada núcleo seja identificado de maneira única, utilizaremos a seguinte codificação S.X.Y.Z. A letra inicial S representa que o núcleo pertence ao livro do

Sistema de Ensino; a letra X será substituída por outra que simbolize qual o tipo de núcleo que o enunciado foi classificado (T – Teórico; A – Algorítmico; H – Heurístico; R – Restritivo; C – Comunicativo) ou combinações delas; Y é um número de três algarismos que indica a sequência em que foi encontrado no texto; Z é um número de três algarismos e informa a página do livro em que o núcleo se encontra.

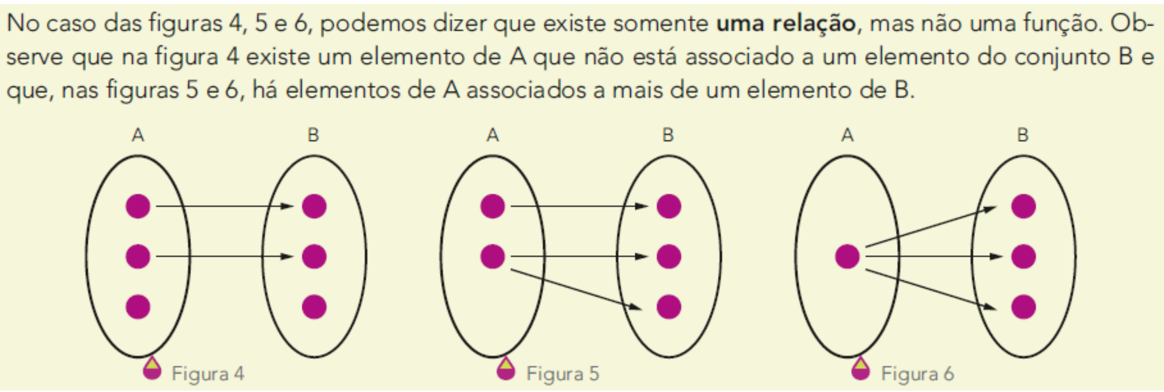
Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continua).

Código	Núcleo
S.C.001.022	 Desde nossos primeiros contatos com números, ainda em idade pré-escolar, começamos, sem saber, a lidar com funções quando relacionamos dois conjuntos A e B, em que, para cada elemento de A, é possível estabelecer uma relação entre um, e somente um, elemento de B, segundo uma lei que define essa relação. Na linguagem matemática, podemos expressar essa situação da seguinte maneira: $f: A \rightarrow B \Rightarrow y = f(x)$
S.TC.002.022	 Dizemos que o preço a pagar está em função da quantidade de pães a ser comprada e, para situações envolvendo quantidades maiores, bastaria que encontrássemos o que chamamos de **lei de formação** da função, que, nesse exemplo, nada mais é do que a multiplicação da quantidade desejada de pães pelo preço unitário, que, de acordo com a tabela, é igual a R$ 3,00. Dessa forma, sendo **x** a quantidade de pães e **y** o preço da compra, temos: $y = \text{preço unitário} \cdot \text{quantidade comprada} \Rightarrow y = f(x) = 3x$
S.H.003.022	 A função para esse tipo de operação estaria definida, então, por **f(x) = k · x**, em que cada valor de **x**, ou seja, cada elemento do conjunto A (sem nenhuma exceção), corresponderia a um (e apenas um) valor de f(x) (elemento do conjunto B). Nesse caso, a constante **k** é o valor unitário do pão, isto é, k = R$ 3,00, e, multiplicando esse valor pela quantidade de pães que gostaríamos de comprar, chegaríamos a: • 2 pães = R$ 6,00; • 3 pães = R$ 9,00; ⋮ • n pães = k · n = R$ 3,00 · n.

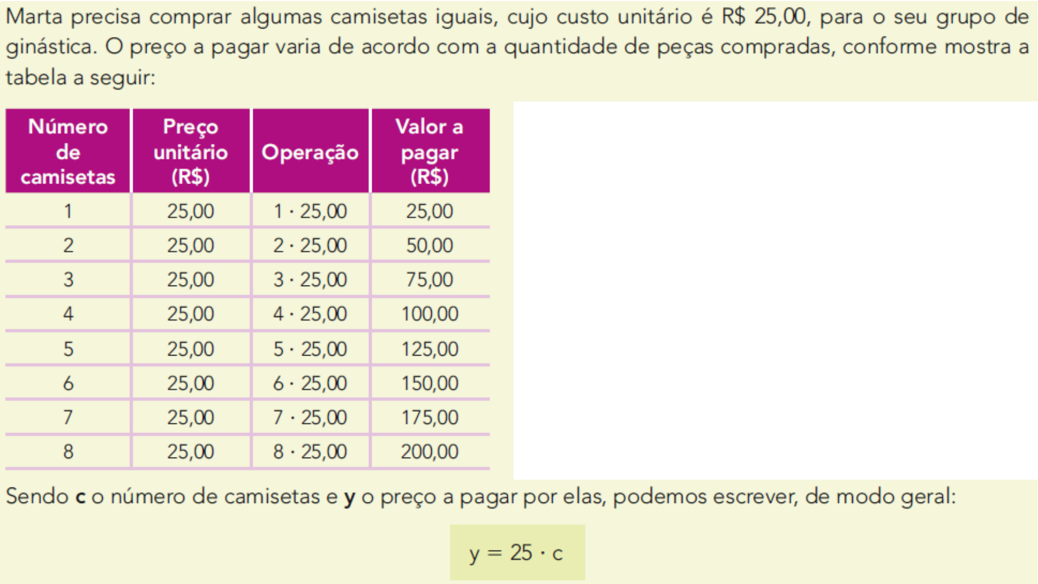
Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continuação).

<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>S.TC.004.023</td><td>


Observação: As figuras 1, 2 e 3, abaixo, representam funções, pois **todos** os elementos **x** do conjunto A estão associados a um, e somente um, elemento f(x) do conjunto B, considerando a lei de formação ou de associação da função. Veja:

Figura 1 Figura 2 Figura 3
</td></tr>
<tr><td>S.TC.005.023</td><td>


No caso das figuras 4, 5 e 6, podemos dizer que existe somente **uma relação**, mas não uma função. Observe que na figura 4 existe um elemento de A que não está associado a um elemento do conjunto B e que, nas figuras 5 e 6, há elementos de A associados a mais de um elemento de B.

Figura 4 Figura 5 Figura 6
</td></tr>
<tr><td>S.H.006.023</td><td>


Marta precisa comprar algumas camisetas iguais, cujo custo unitário é R$ 25,00, para o seu grupo de ginástica. O preço a pagar varia de acordo com a quantidade de peças compradas, conforme mostra a tabela a seguir:

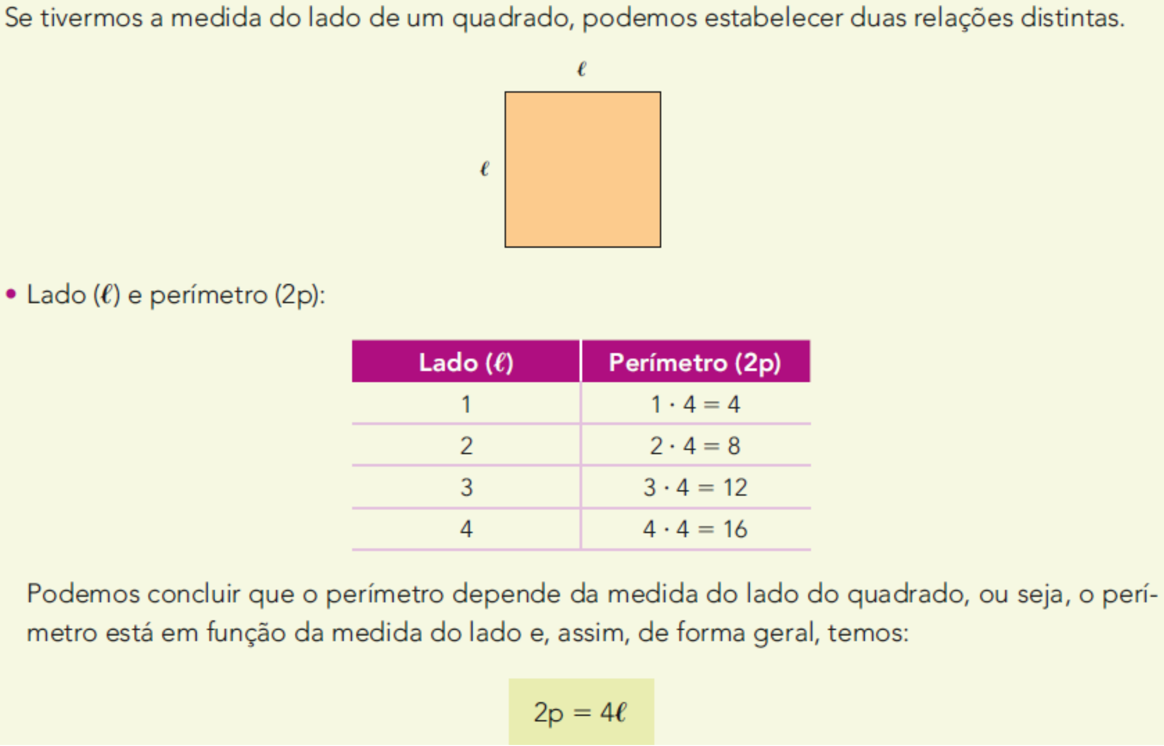
<table>
<tr><th>Número de camisetas</th><th>Preço unitário (R$)</th><th>Operação</th><th>Valor a pagar (R$)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>25,00</td><td>1 · 25,00</td><td>25,00</td></tr>
<tr><td>2</td><td>25,00</td><td>2 · 25,00</td><td>50,00</td></tr>
<tr><td>3</td><td>25,00</td><td>3 · 25,00</td><td>75,00</td></tr>
<tr><td>4</td><td>25,00</td><td>4 · 25,00</td><td>100,00</td></tr>
<tr><td>5</td><td>25,00</td><td>5 · 25,00</td><td>125,00</td></tr>
<tr><td>6</td><td>25,00</td><td>6 · 25,00</td><td>150,00</td></tr>
<tr><td>7</td><td>25,00</td><td>7 · 25,00</td><td>175,00</td></tr>
<tr><td>8</td><td>25,00</td><td>8 · 25,00</td><td>200,00</td></tr>
</table>

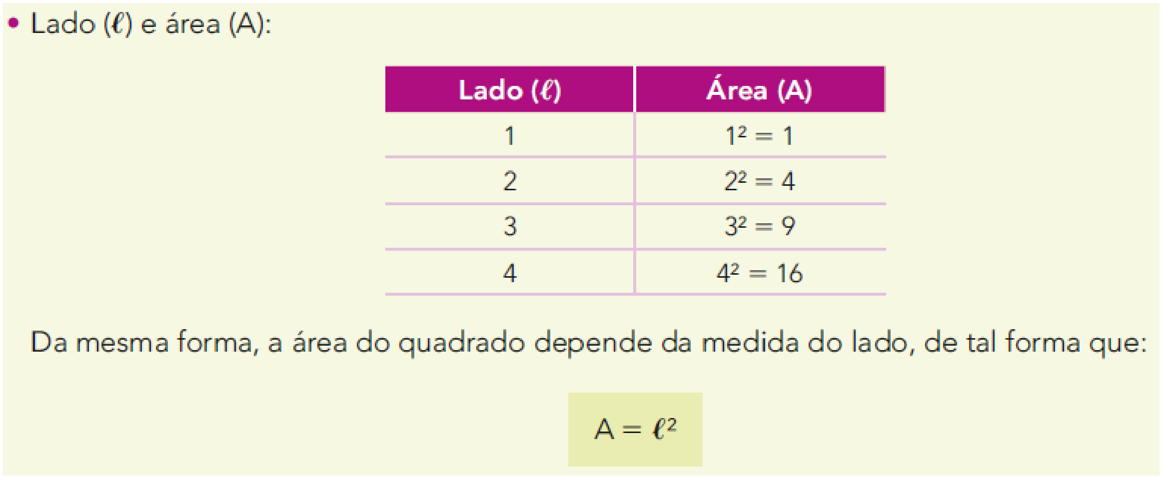
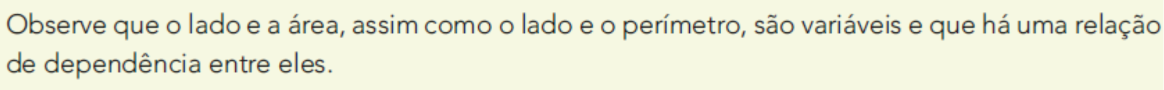
Sendo **c** o número de camisetas e **y** o preço a pagar por elas, podemos escrever, de modo geral:

$$y = 25 \cdot c$$
</td></tr>
<tr><td>S.C.007.024</td><td>

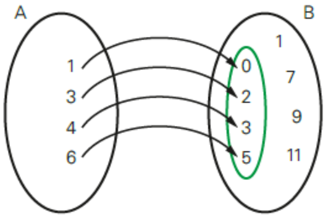

Dizemos que o preço a pagar é função da quantidade de camisetas a ser comprada.
</td></tr>
</table>

Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continuação).

<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>S.H.008.024</td><td>
Se tivermos a medida do lado de um quadrado, podemos estabelecer duas relações distintas.

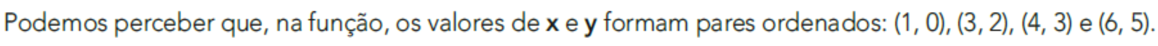
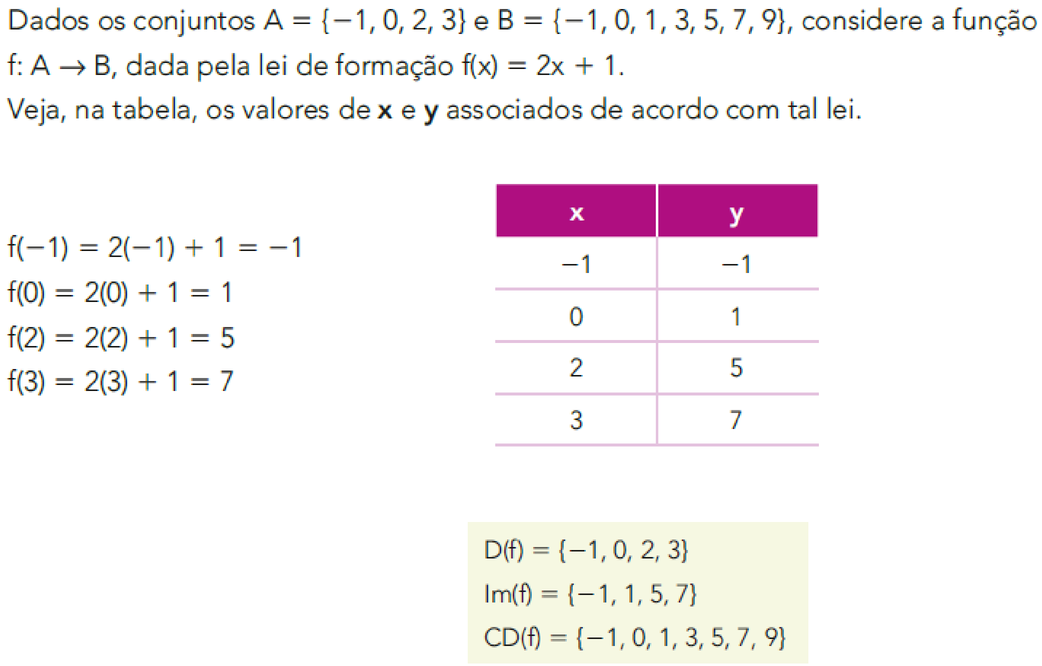
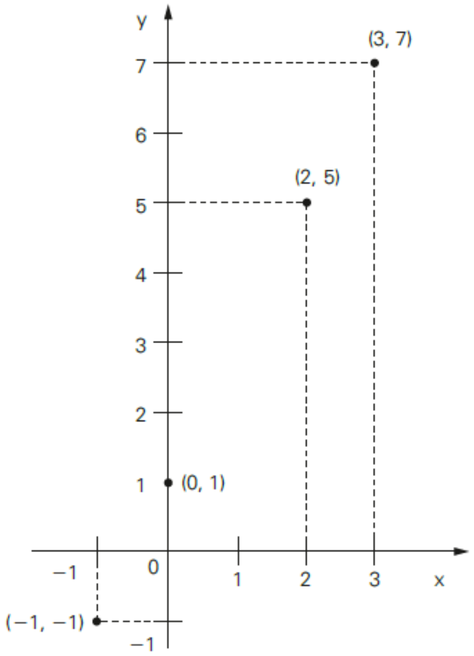
• Lado (ℓ) e perímetro (2p):
<table><tr><th>Lado (ℓ)</th><th>Perímetro (2p)</th></tr><tr><td>1</td><td>$1 \cdot 4 = 4$</td></tr><tr><td>2</td><td>$2 \cdot 4 = 8$</td></tr><tr><td>3</td><td>$3 \cdot 4 = 12$</td></tr><tr><td>4</td><td>$4 \cdot 4 = 16$</td></tr></table>
Podemos concluir que o perímetro depende da medida do lado do quadrado, ou seja, o perímetro está em função da medida do lado e, assim, de forma geral, temos:
$2p = 4\ell$</td></tr>
<tr><td>S.H.009.024</td><td>
• Lado (ℓ) e área (A):
<table><tr><th>Lado (ℓ)</th><th>Área (A)</th></tr><tr><td>1</td><td>$1^2 = 1$</td></tr><tr><td>2</td><td>$2^2 = 4$</td></tr><tr><td>3</td><td>$3^2 = 9$</td></tr><tr><td>4</td><td>$4^2 = 16$</td></tr></table>
Da mesma forma, a área do quadrado depende da medida do lado, de tal forma que:
$A = \ell^2$</td></tr>
<tr><td>S.C.010.024</td><td>
Observe que o lado e a área, assim como o lado e o perímetro, são variáveis e que há uma relação de dependência entre eles.</td></tr>
</table>

Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continuação).

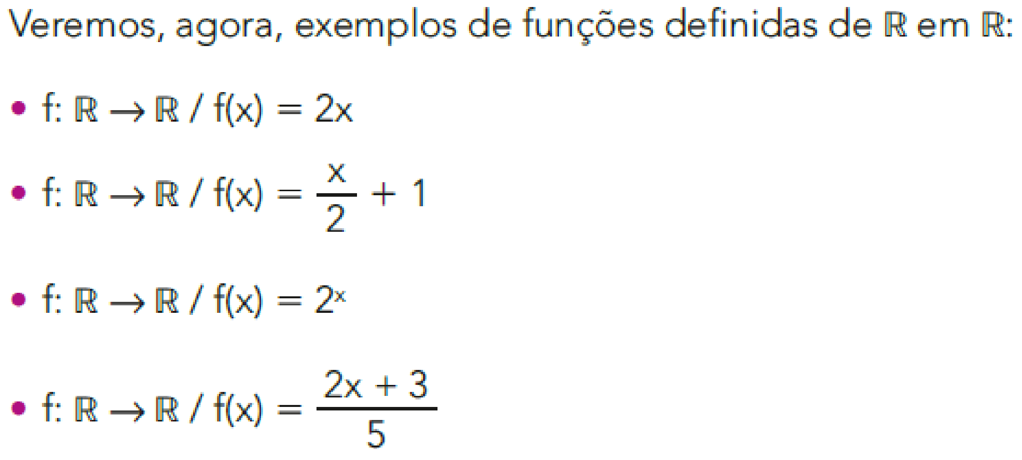
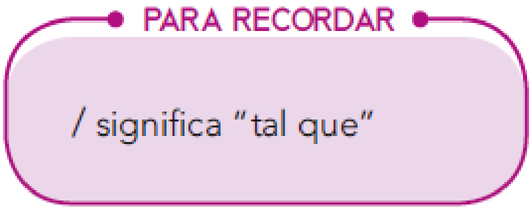
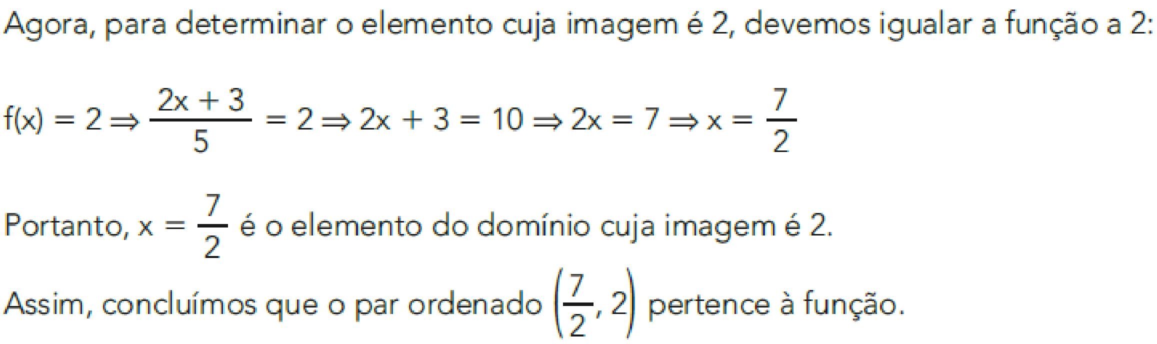
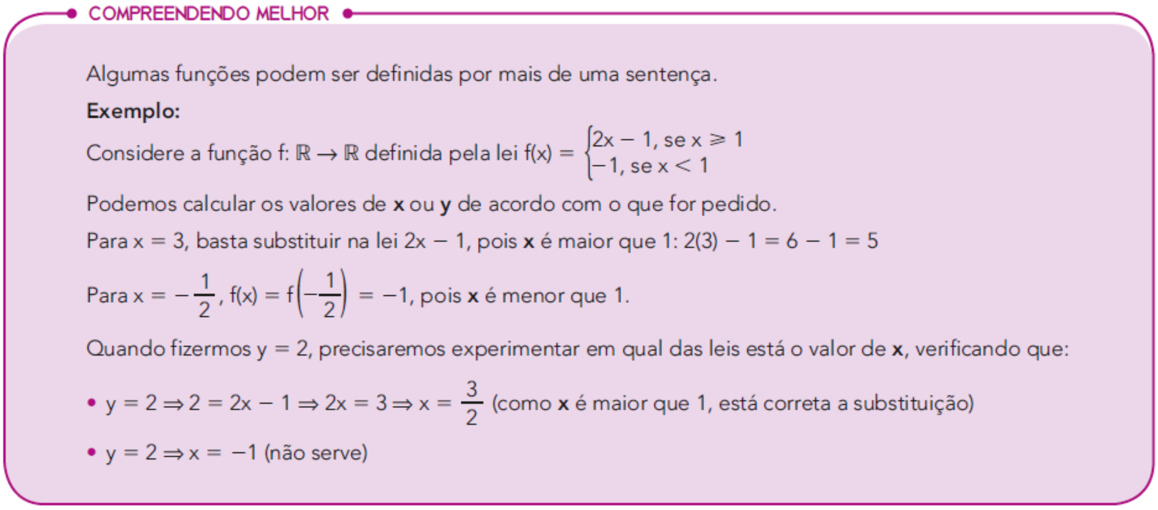
<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>S.TC.011.025</td><td>Dados dois conjuntos não vazios, a função f de um conjunto A para um conjunto B é uma relação entre elementos de A e elementos de B, em que cada elemento de A está relacionado a um único elemento de B.
Notação:
f: A → B (f é uma função de A em B)
x → y = f(x) (lei de associação)</td></tr>
<tr><td>S.TC.012.025</td><td>• Domínio da função: D(f)
Chamamos de domínio da função todos os elementos do conjunto A, que são os valores de x.
• Contradomínio: CD(f)
São todos os elementos do conjunto B.
• Imagem da função: Im(f)
Chamamos de imagem da função o conjunto de todos os valores que y pode assumir, de modo que cada valor de x em A esteja relacionado a um único valor de y em B.</td></tr>
<tr><td>S.C.013.025</td><td>Observação: O domínio, o contradomínio e a imagem são definidos para qualquer conjunto numérico (natural, inteiro, racional ou real), dependendo da relação entre as grandezas envolvidas.</td></tr>
<tr><td>S.A.014.025</td><td>Dados os conjuntos A = {1, 3, 4, 6} e B = {0, 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11}, vamos definir uma função de A em B que associa cada elemento x ao seu valor diminuído de 1.
Podemos definir tal função das seguintes maneiras:
f: A → B ou f: A → B, dada pela lei de formação f(x) = x − 1
x → f(x) = x − 1
Veja, na tabela, a correspondência entre alguns valores de x e y = f(x).
<table>
<tr><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1 − 1 = 0</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3 − 1 = 2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4 − 1 = 3</td></tr>
<tr><td>6</td><td>6 − 1 = 5</td></tr>
</table>


D(f) = {1, 3, 4, 6}
CD(f) = {0, 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11}
Im(f) = {0, 2, 3, 5}</td></tr>
<tr><td>S.C.015.025</td><td>Im ⊂ CD
Imagem é um subconjunto do contradomínio.</td></tr>
</table>

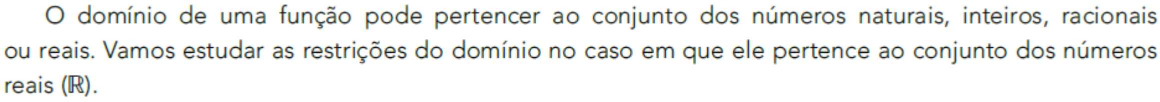
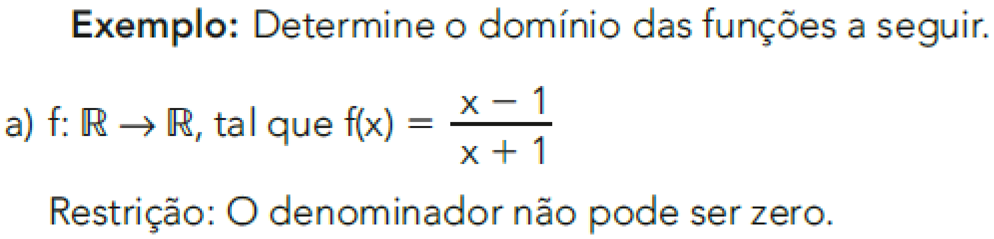
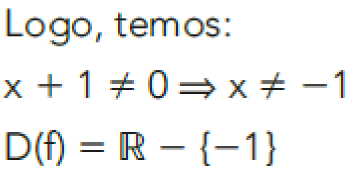
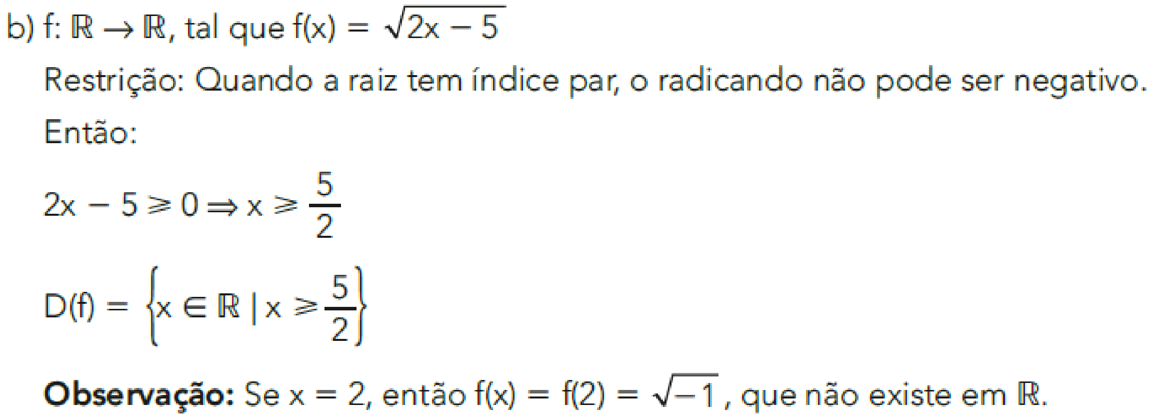
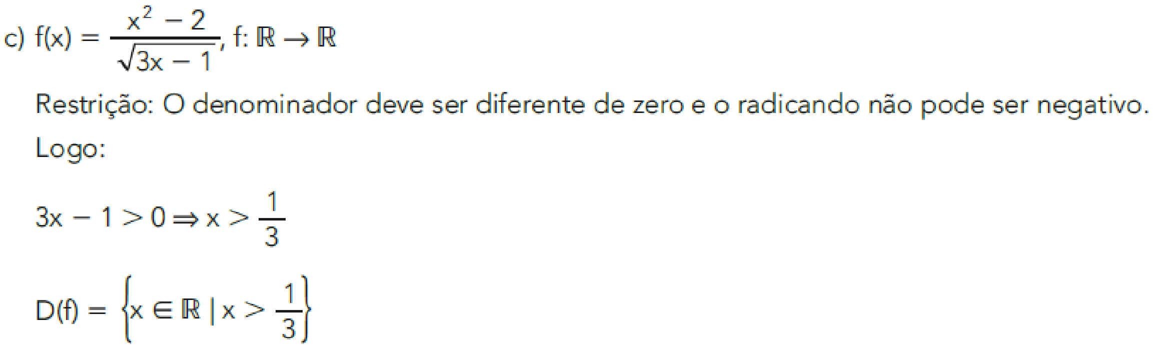
Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continuação).

<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>S.H.016.025</td><td>
Podemos perceber que, na função, os valores de x e y formam pares ordenados: (1, 0), (3, 2), (4, 3) e (6, 5).</td></tr>
<tr><td>S.A.017.026</td><td>
Dados os conjuntos A = {−1, 0, 2, 3} e B = {−1, 0, 1, 3, 5, 7, 9}, considere a função f: A → B, dada pela lei de formação f(x) = 2x + 1.
Veja, na tabela, os valores de x e y associados de acordo com tal lei.
f(−1) = 2(−1) + 1 = −1
f(0) = 2(0) + 1 = 1
f(2) = 2(2) + 1 = 5
f(3) = 2(3) + 1 = 7
<table>
<tr><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td>−1</td><td>−1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>5</td></tr>
<tr><td>3</td><td>7</td></tr>
</table>
D(f) = {−1, 0, 2, 3}
Im(f) = {−1, 1, 5, 7}
CD(f) = {−1, 0, 1, 3, 5, 7, 9}</td></tr>
<tr><td>S.H.018.026</td><td>Podemos representar essa função no plano cartesiano, por pares ordenados, da seguinte forma:

</td></tr>
</table>

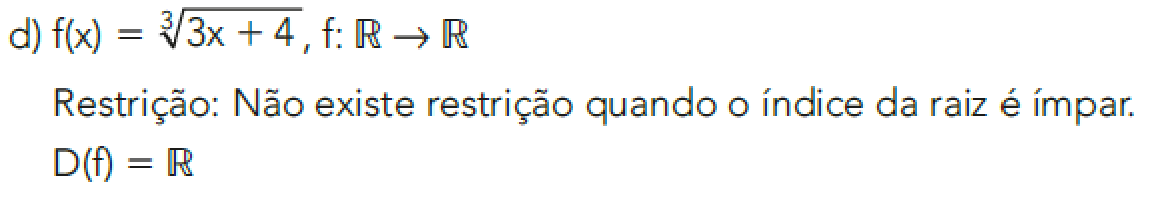
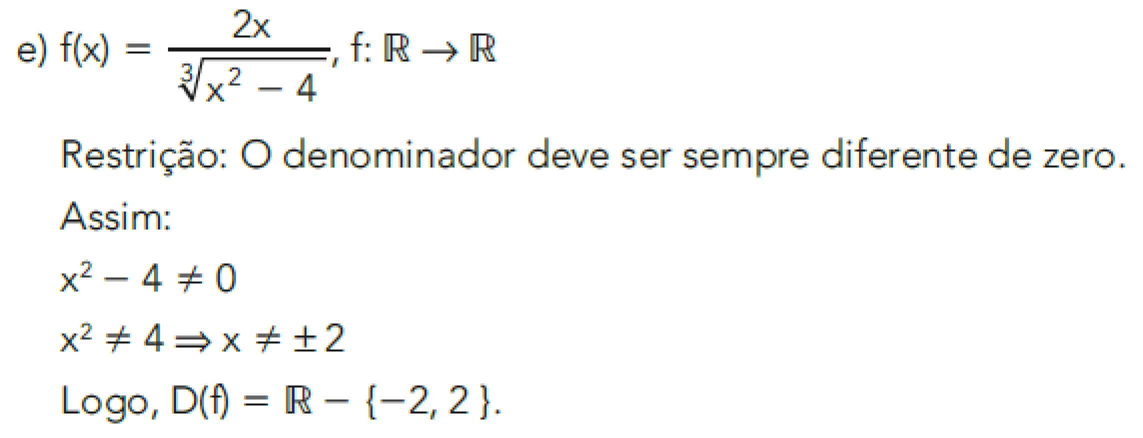
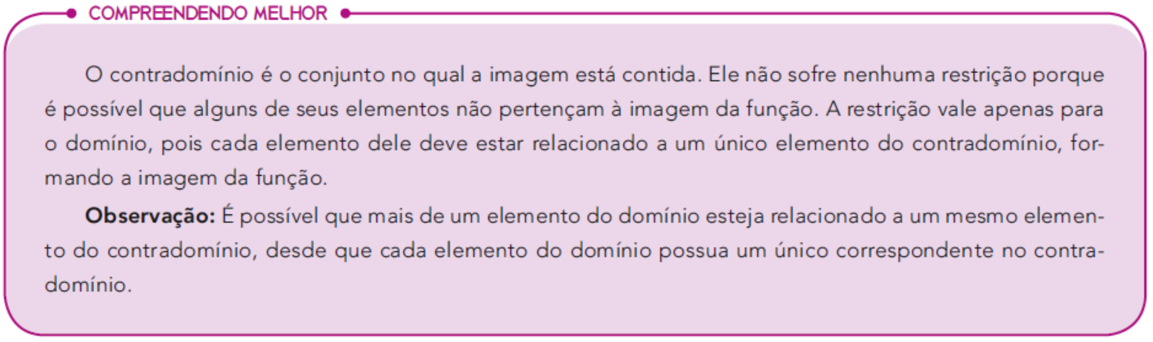
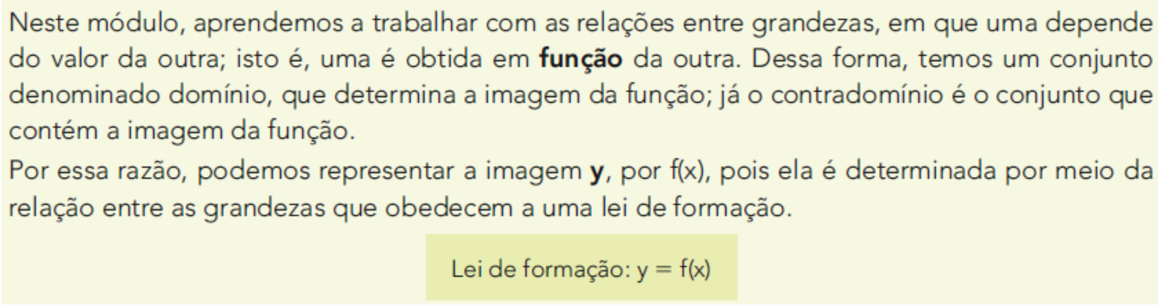
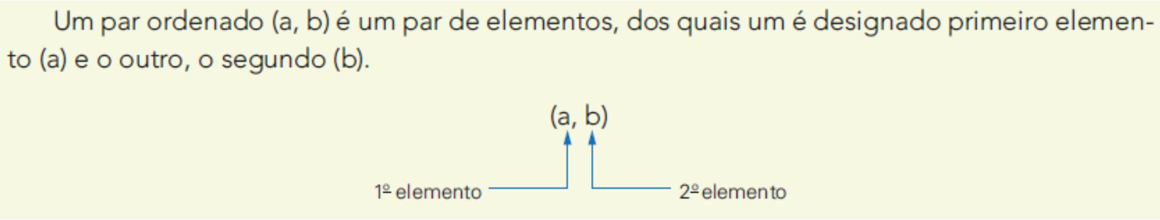
Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continuação).

Código	Núcleo
S.HC.019.026	 Veremos, agora, exemplos de funções definidas de ℝ em ℝ: • $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = 2x$ • $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = \frac{x}{2} + 1$ • $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = 2^x$ • $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = \frac{2x + 3}{5}$
S.C.020.026	 PARA RECORDAR / significa "tal que"
S.H.021.027	 Agora, para determinar o elemento cuja imagem é 2, devemos igualar a função a 2: $f(x) = 2 \Rightarrow \frac{2x + 3}{5} = 2 \Rightarrow 2x + 3 = 10 \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$ Portanto, $x = \frac{7}{2}$ é o elemento do domínio cuja imagem é 2. Assim, concluímos que o par ordenado $\left(\frac{7}{2}, 2\right)$ pertence à função.
S.TC.022.027	 COMPREENDENDO MELHOR Algumas funções podem ser definidas por mais de uma sentença. **Exemplo:** Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela lei $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, \text{ se } x \geqslant 1 \\ -1, \text{ se } x < 1 \end{cases}$ Podemos calcular os valores de **x** ou **y** de acordo com o que for pedido. Para $x = 3$, basta substituir na lei $2x - 1$, pois **x** é maior que 1: $2(3) - 1 = 6 - 1 = 5$ Para $x = -\frac{1}{2}$, $f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$, pois **x** é menor que 1. Quando fizermos $y = 2$, precisaremos experimentar em qual das leis está o valor de **x**, verificando que: • $y = 2 \Rightarrow 2 = 2x - 1 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ (como **x** é maior que 1, está correta a substituição) • $y = 2 \Rightarrow x = -1$ (não serve)

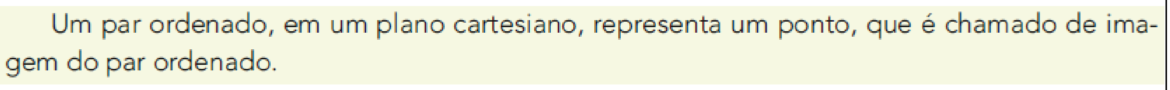
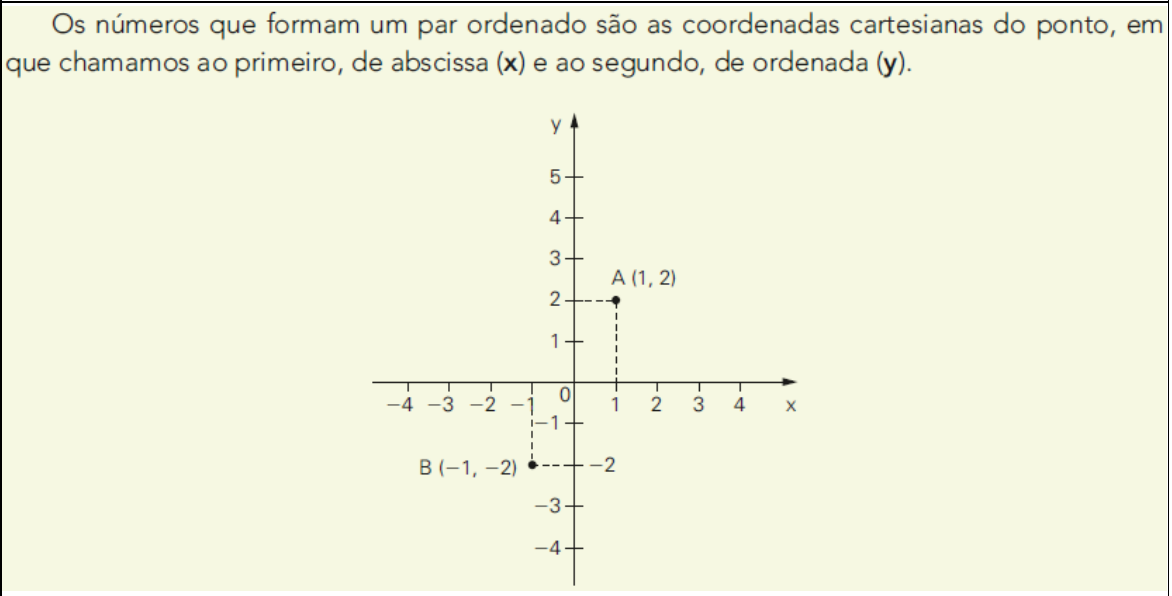
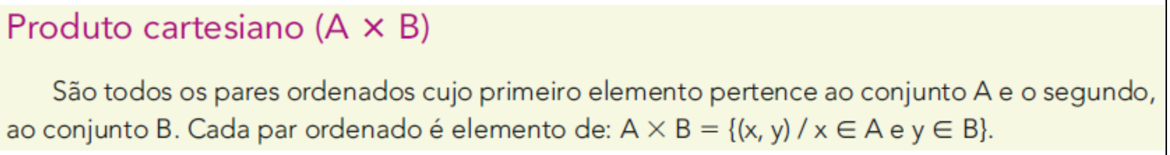
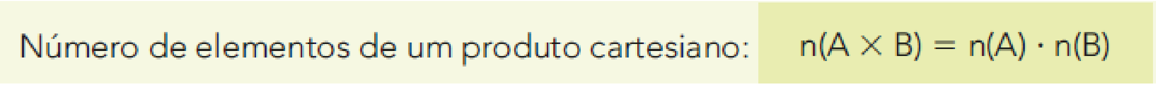
Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continuação).

Código	Núcleo
S.C.023.027	 O domínio de uma função pode pertencer ao conjunto dos números naturais, inteiros, racionais ou reais. Vamos estudar as restrições do domínio no caso em que ele pertence ao conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$).
S.R.024.027	 **Exemplo:** Determine o domínio das funções a seguir. a) f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ Restrição: O denominador não pode ser zero.
S.H.025.028	 Logo, temos: $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$ $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$
S.HR.026.028	 b) f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \sqrt{2x-5}$ Restrição: Quando a raiz tem índice par, o radicando não pode ser negativo. Então: $2x - 5 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant \dfrac{5}{2}$ $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \dfrac{5}{2}\right\}$ **Observação:** Se x = 2, então $f(x) = f(2) = \sqrt{-1}$, que não existe em $\mathbb{R}$.
S.HR.027.028	 c) $f(x) = \dfrac{x^2-2}{\sqrt{3x-1}}$, f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Restrição: O denominador deve ser diferente de zero e o radicando não pode ser negativo. Logo: $3x - 1 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{1}{3}$ $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \dfrac{1}{3}\right\}$

Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continuação).

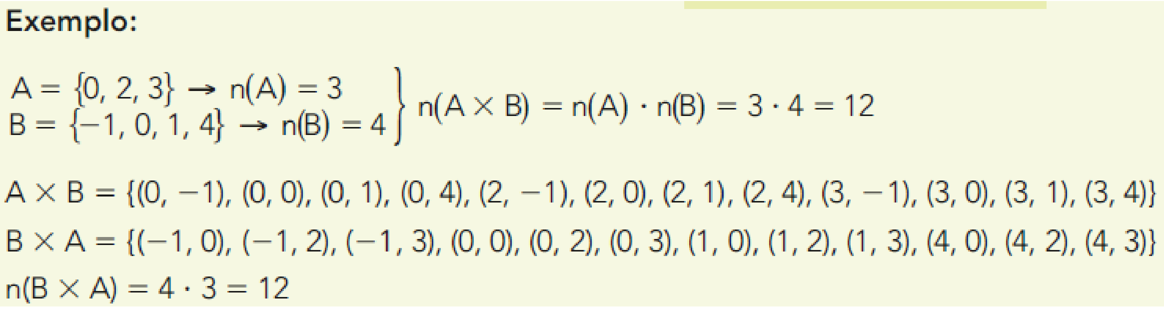
Código	Núcleo
S.HR.028.028	 d) $f(x) = \sqrt[3]{3x + 4}$, f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Restrição: Não existe restrição quando o índice da raiz é ímpar. $D(f) = \mathbb{R}$
S.HR.029.028	 e) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt[3]{x^2 - 4}}$, f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Restrição: O denominador deve ser sempre diferente de zero. Assim: $x^2 - 4 \neq 0$ $x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq \pm 2$ Logo, $D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.
S.T.030.028	 COMPREENDENDO MELHOR O contradomínio é o conjunto no qual a imagem está contida. Ele não sofre nenhuma restrição porque é possível que alguns de seus elementos não pertençam à imagem da função. A restrição vale apenas para o domínio, pois cada elemento dele deve estar relacionado a um único elemento do contradomínio, formando a imagem da função. **Observação:** É possível que mais de um elemento do domínio esteja relacionado a um mesmo elemento do contradomínio, desde que cada elemento do domínio possua um único correspondente no contradomínio.
S.TC.031.029	 Neste módulo, aprendemos a trabalhar com as relações entre grandezas, em que uma depende do valor da outra; isto é, uma é obtida em **função** da outra. Dessa forma, temos um conjunto denominado domínio, que determina a imagem da função; já o contradomínio é o conjunto que contém a imagem da função. Por essa razão, podemos representar a imagem **y**, por f(x), pois ela é determinada por meio da relação entre as grandezas que obedecem a uma lei de formação. Lei de formação: $y = f(x)$
S.TC.032.035	 Um par ordenado (a, b) é um par de elementos, dos quais um é designado primeiro elemento (a) e o outro, o segundo (b). (a, b) 1º elemento 2º elemento

Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continuação).

Código	Núcleo
S.TC.033.035	 Um par ordenado, em um plano cartesiano, representa um ponto, que é chamado de imagem do par ordenado.
S.TC.034.035	 Os números que formam um par ordenado são as coordenadas cartesianas do ponto, em que chamamos ao primeiro, de abscissa (**x**) e ao segundo, de ordenada (**y**).
S.TC.035.035	 **Produto cartesiano (A × B)** São todos os pares ordenados cujo primeiro elemento pertence ao conjunto A e o segundo, ao conjunto B. Cada par ordenado é elemento de: $A \times B = \{(x, y) / x \in A \text{ e } y \in B\}$.
S.TC.036.035	 Número de elementos de um produto cartesiano: $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$

Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continuação).

<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>S.H.037.035</td><td>



Exemplo:

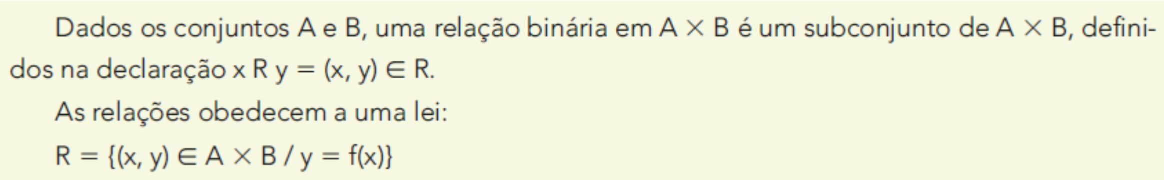
$$\left.\begin{array}{l} A = \{0, 2, 3\} \rightarrow n(A) = 3 \\ B = \{-1, 0, 1, 4\} \rightarrow n(B) = 4 \end{array}\right\} n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = 3 \cdot 4 = 12$$

$A \times B = \{(0, -1), (0, 0), (0, 1), (0, 4), (2, -1), (2, 0), (2, 1), (2, 4), (3, -1), (3, 0), (3, 1), (3, 4)\}$

$B \times A = \{(-1, 0), (-1, 2), (-1, 3), (0, 0), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 2), (1, 3), (4, 0), (4, 2), (4, 3)\}$

$n(B \times A) = 4 \cdot 3 = 12$

</td></tr>
<tr><td>S.TC.038.036</td><td>

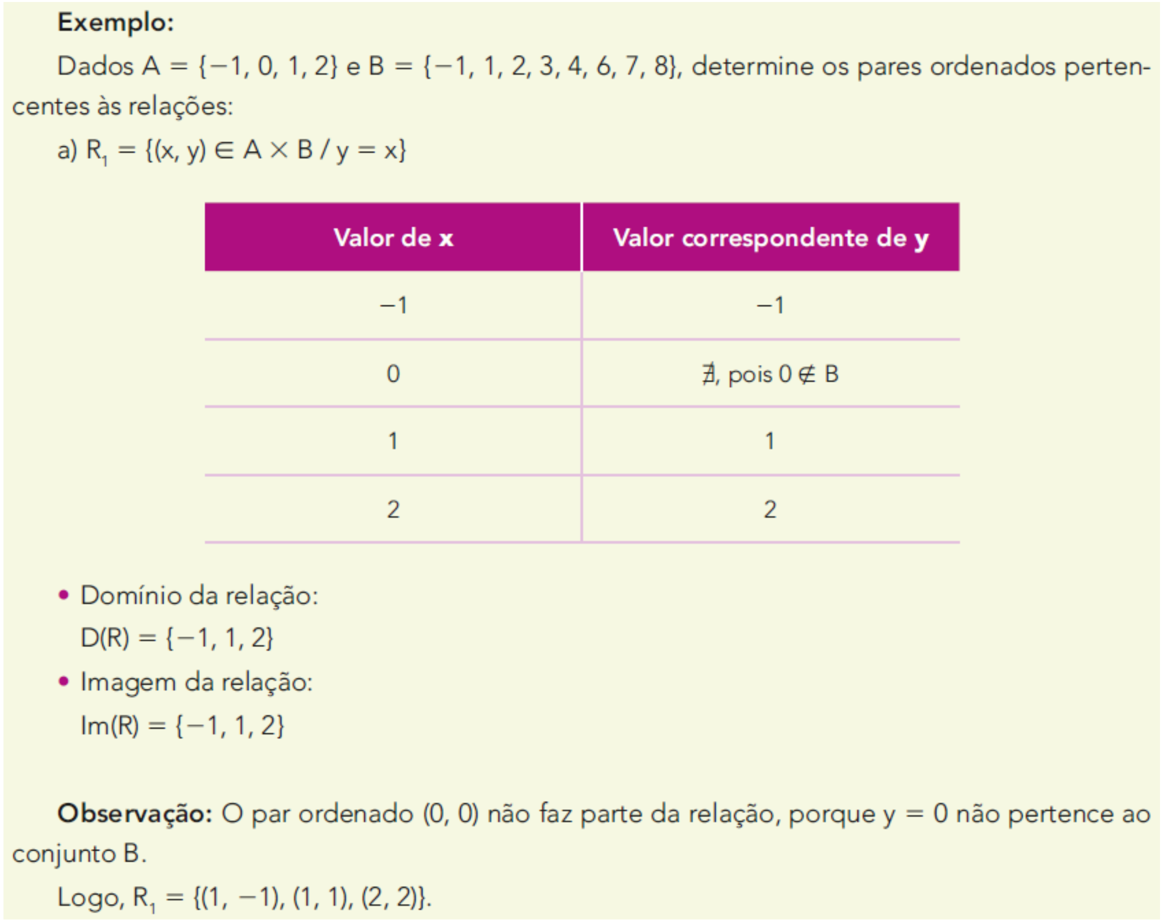


Dados os conjuntos A e B, uma relação binária em $A \times B$ é um subconjunto de $A \times B$, definidos na declaração $x \, R \, y = (x, y) \in R$.

As relações obedecem a uma lei:

$R = \{(x, y) \in A \times B \,/\, y = f(x)\}$

</td></tr>
<tr><td>S.HR.039.036</td><td>



Exemplo:

Dados $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$, determine os pares ordenados pertencentes às relações:

a) $R_1 = \{(x, y) \in A \times B \,/\, y = x\}$

<table>
<tr><th>Valor de x</th><th>Valor correspondente de y</th></tr>
<tr><td>−1</td><td>−1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>$\nexists$, pois $0 \notin B$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td></tr>
</table>

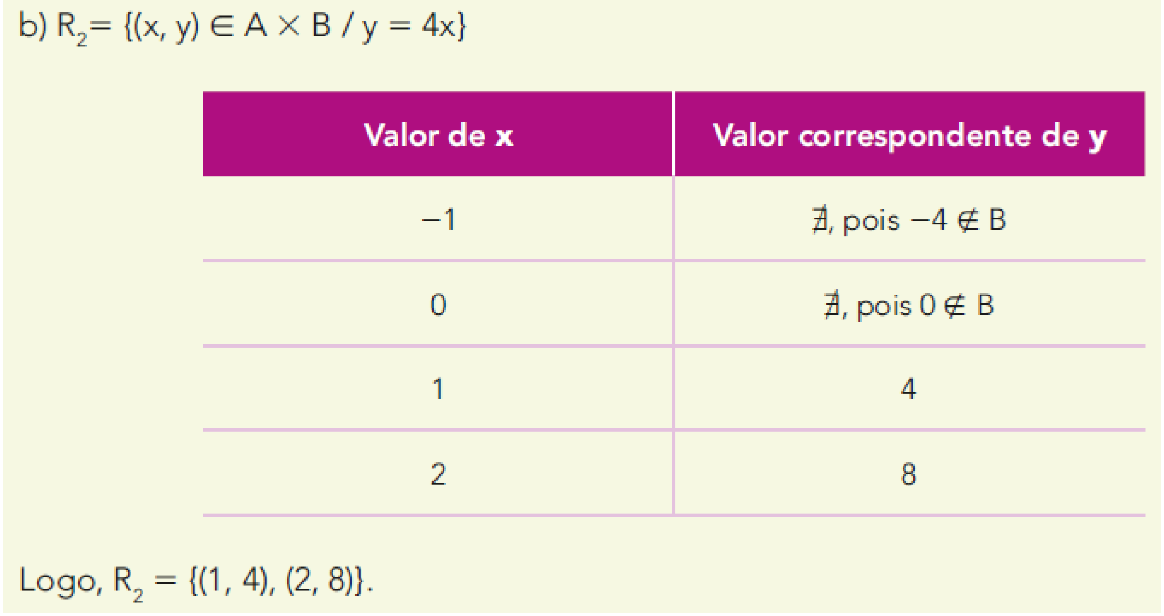
- Domínio da relação:
  $D(R) = \{-1, 1, 2\}$
- Imagem da relação:
  $Im(R) = \{-1, 1, 2\}$

Observação: O par ordenado (0, 0) não faz parte da relação, porque $y = 0$ não pertence ao conjunto B.

Logo, $R_1 = \{(1, -1), (1, 1), (2, 2)\}$.

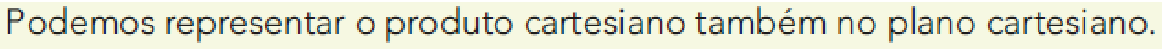
</td></tr>
</table>

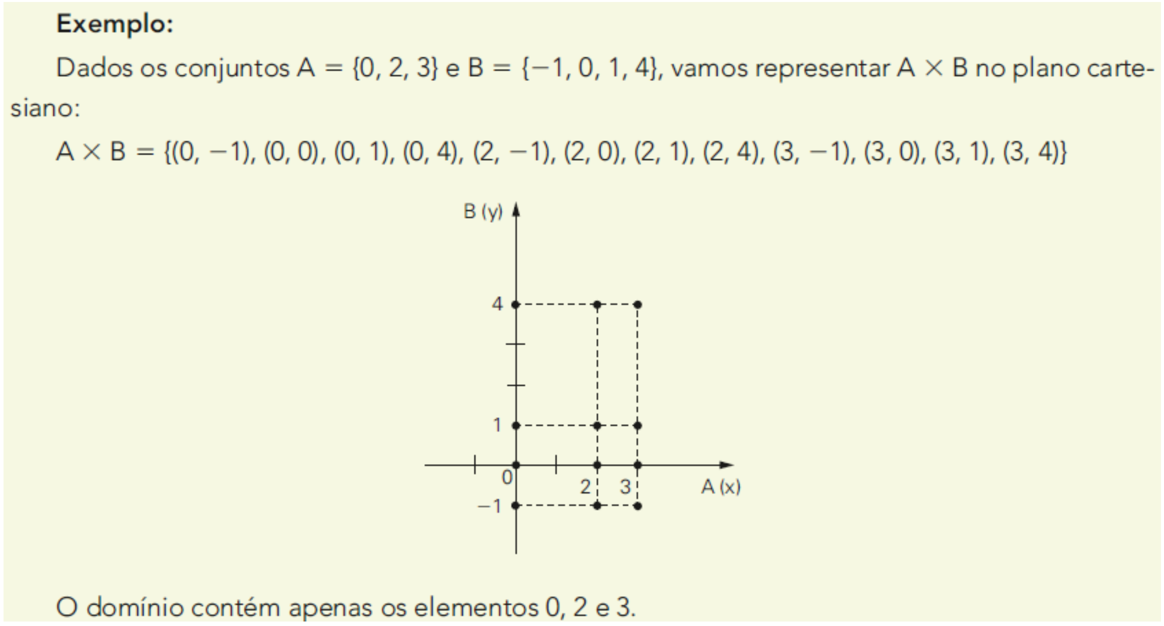
Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continuação).

<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>S.H.040.036</td><td>


b) $R_2 = \{(x, y) \in A \times B \ / \ y = 4x\}$

<table>
<tr><th>Valor de x</th><th>Valor correspondente de y</th></tr>
<tr><td>−1</td><td>∄, pois −4 ∉ B</td></tr>
<tr><td>0</td><td>∄, pois 0 ∉ B</td></tr>
<tr><td>1</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2</td><td>8</td></tr>
</table>

Logo, $R_2 = \{(1, 4), (2, 8)\}$.
</td></tr>
<tr><td>S.T.041.036</td><td>


Podemos representar o produto cartesiano também no plano cartesiano.
</td></tr>
<tr><td>S.H.042.037</td><td>


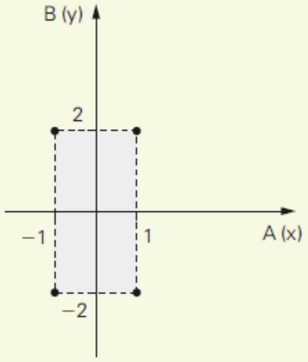
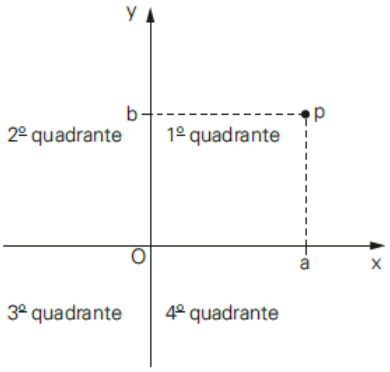
Exemplo:

Dados os conjuntos A = {0, 2, 3} e B = {−1, 0, 1, 4}, vamos representar A × B no plano cartesiano:

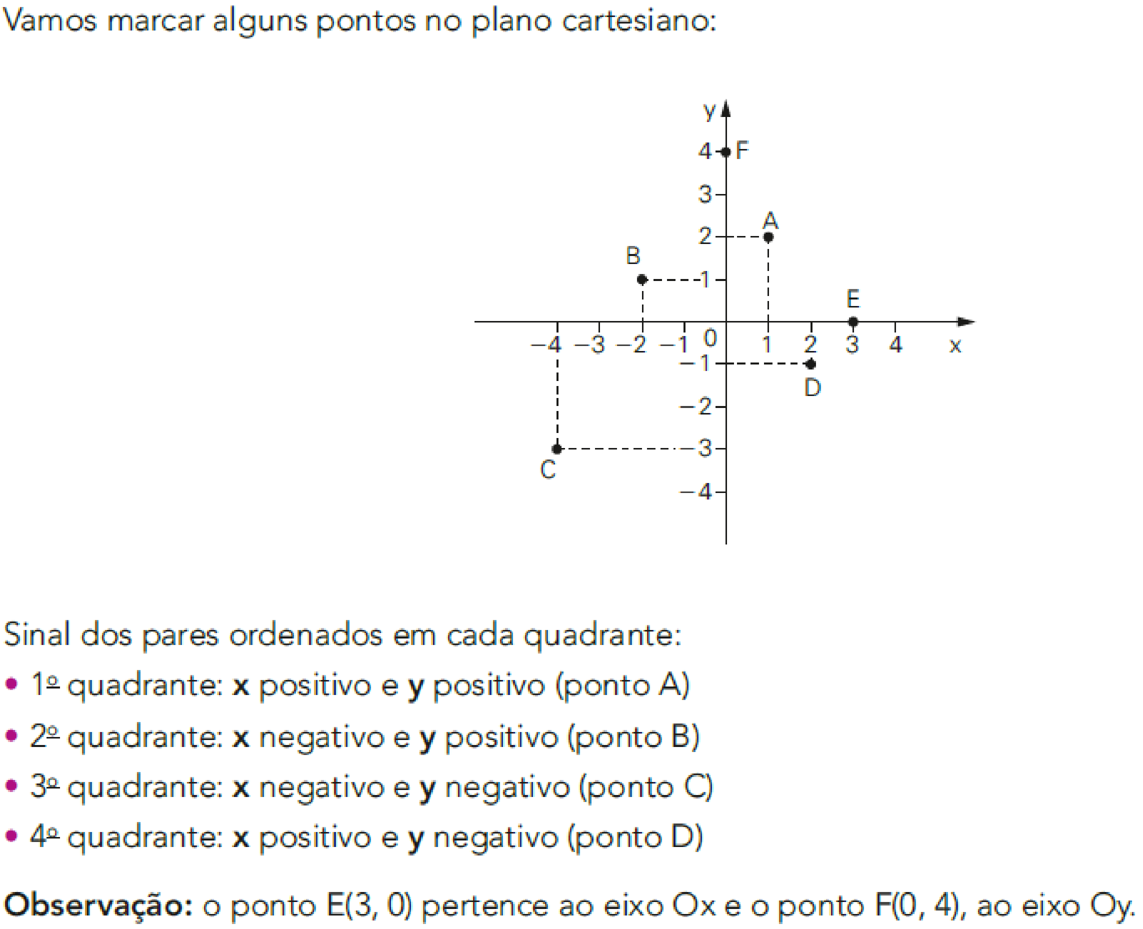
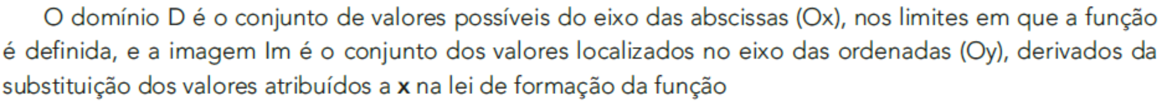
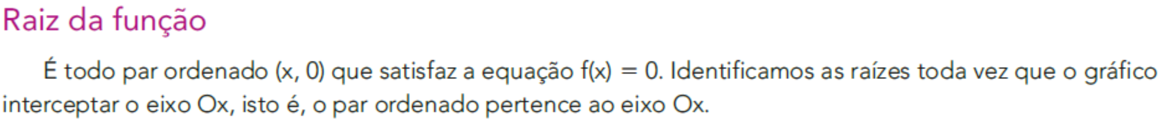
A × B = {(0, −1), (0, 0), (0, 1), (0, 4), (2, −1), (2, 0), (2, 1), (2, 4), (3, −1), (3, 0), (3, 1), (3, 4)}

O domínio contém apenas os elementos 0, 2 e 3.
</td></tr>
</table>

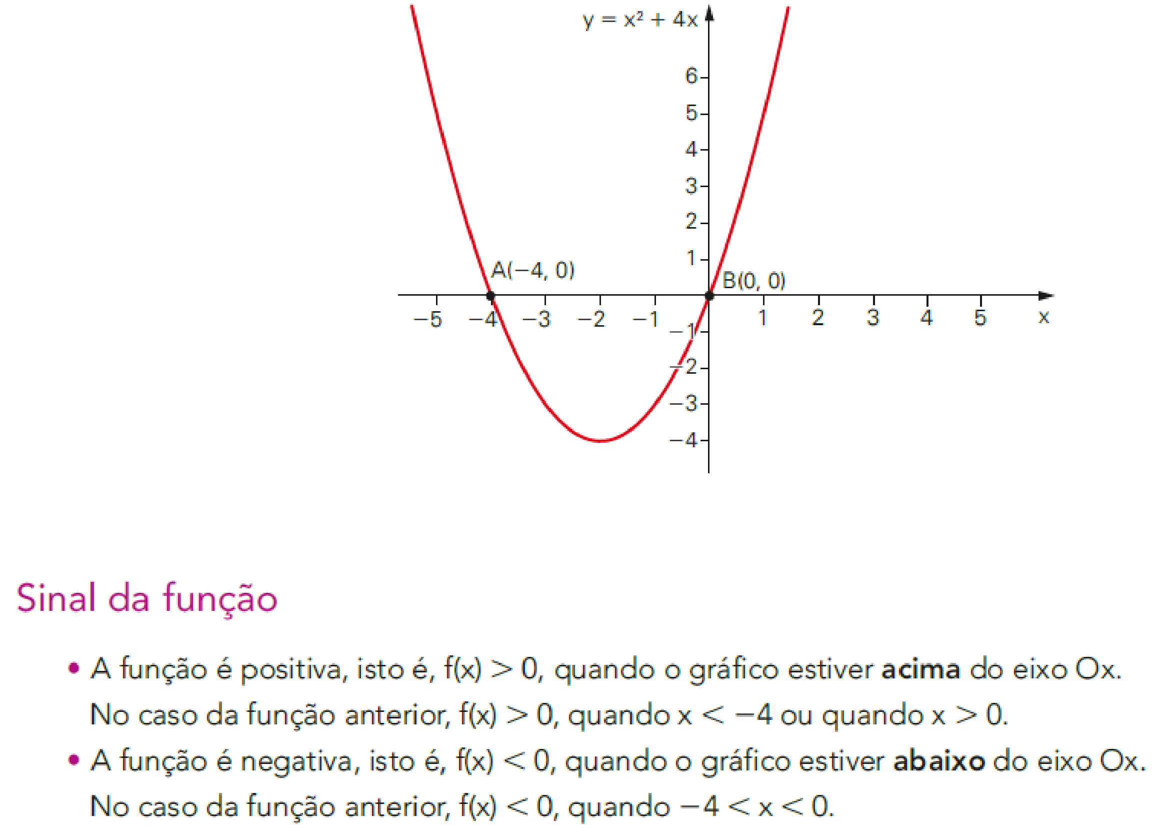
Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continuação).

Código	Núcleo
S.H.043.037	Agora, vejamos um exemplo de representação do produto cartesiano de intervalos reais: Dados A = [−1, 1] e B = [−2, 2], representamos A × B por:  Nesse caso, por se tratar de intervalo real, o produto cartesiano somente pode ser representado no plano cartesiano, uma vez que não é possível enumerar seus elementos. O domínio da relação é representado por todos os números reais existentes entre −1 e 1. A imagem da relação é representada pelos números reais existentes entre −2 e 2.
S.C.044.045	Para entendimento dos gráficos apresentados, devemos recordar o estudo do sistema de coordenadas cartesianas, conhecido por **plano cartesiano**. Criado por René Descartes, filósofo, físico e matemático francês nascido em Le Haye em 1596, esse sistema se baseia em dois eixos ortogonais graduados em escalas iguais ou diferentes entre si, onde podemos locar pontos e defini-los graficamente em relação às distâncias entre os pontos e os dois eixos citados, chamados de eixo das abscissas (Ox) e eixo das ordenadas (Oy).
S.TC.045.045	Características do plano cartesiano:  Ox: Eixo das abscissas Oy: Eixo das ordenadas O: Origem do plano cartesiano P(a, b): Coordenadas do ponto P

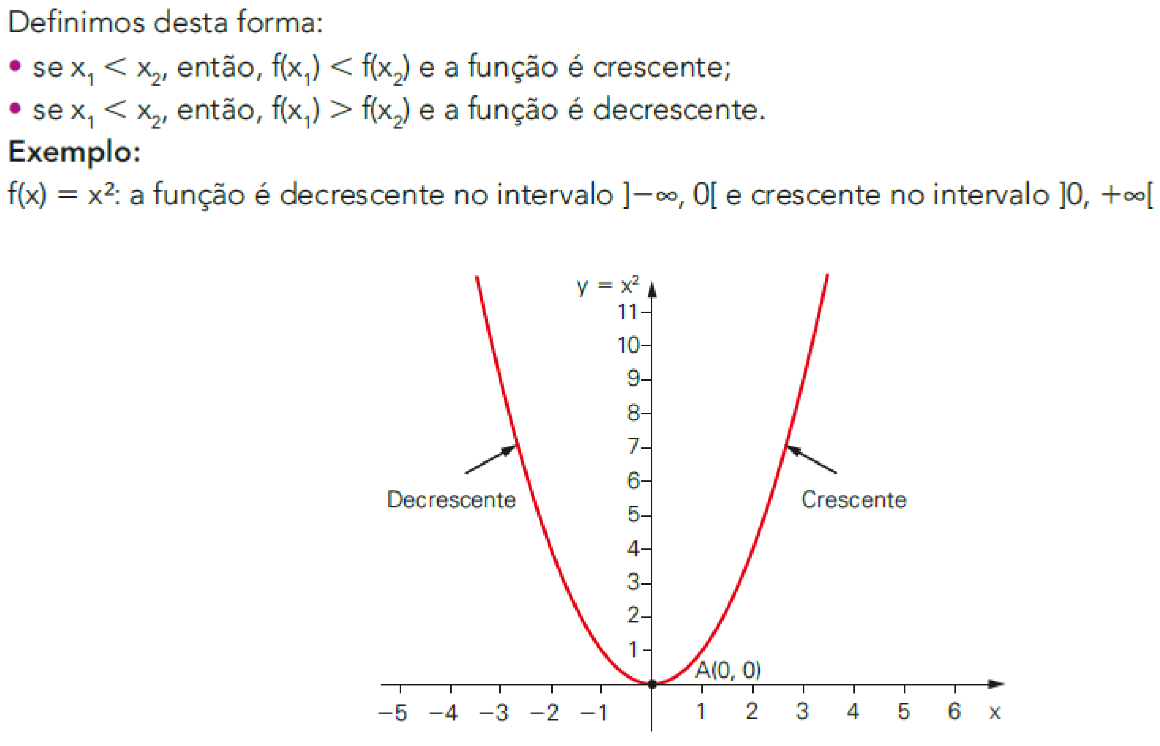
Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continuação).

Código	Núcleo
S.TC.046.045	 Vamos marcar alguns pontos no plano cartesiano: Sinal dos pares ordenados em cada quadrante: - 1º quadrante: **x** positivo e **y** positivo (ponto A) - 2º quadrante: **x** negativo e **y** positivo (ponto B) - 3º quadrante: **x** negativo e **y** negativo (ponto C) - 4º quadrante: **x** positivo e **y** negativo (ponto D) **Observação:** o ponto E(3, 0) pertence ao eixo Ox e o ponto F(0, 4), ao eixo Oy.
S.T.047.046	 O domínio D é o conjunto de valores possíveis do eixo das abscissas (Ox), nos limites em que a função é definida, e a imagem Im é o conjunto dos valores localizados no eixo das ordenadas (Oy), derivados da substituição dos valores atribuídos a **x** na lei de formação da função
S.TC.048.046	 Raiz da função É todo par ordenado (x, 0) que satisfaz a equação f(x) = 0. Identificamos as raízes toda vez que o gráfico interceptar o eixo Ox, isto é, o par ordenado pertence ao eixo Ox.

Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continuação).

<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>S.TC.049.047</td><td>


Sinal da função

- A função é positiva, isto é, $f(x) > 0$, quando o gráfico estiver **acima** do eixo Ox. No caso da função anterior, $f(x) > 0$, quando $x < -4$ ou quando $x > 0$.
- A função é negativa, isto é, $f(x) < 0$, quando o gráfico estiver **abaixo** do eixo Ox. No caso da função anterior, $f(x) < 0$, quando $-4 < x < 0$.
</td></tr>
<tr><td>S.TC.050.047</td><td>


Definimos desta forma:

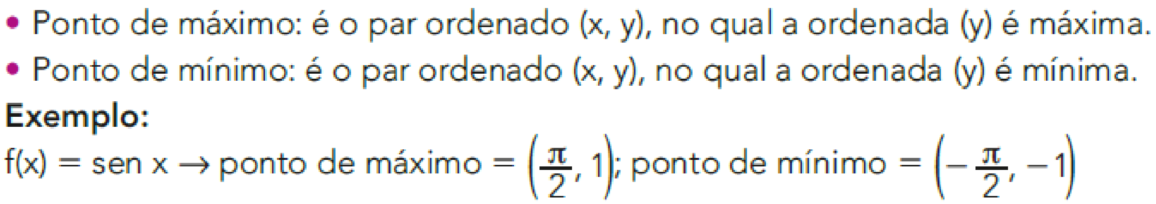
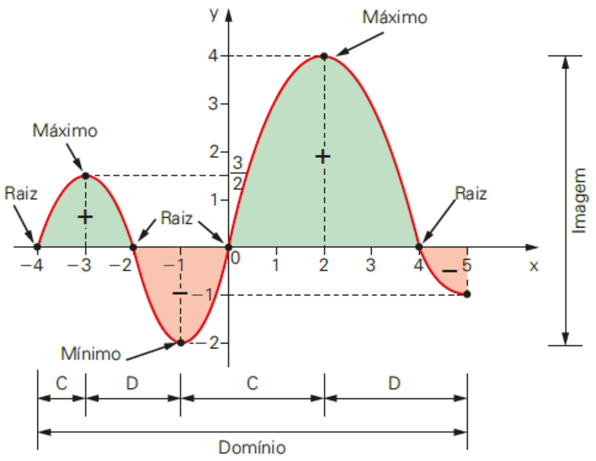
- se $x_1 < x_2$, então, $f(x_1) < f(x_2)$ e a função é crescente;
- se $x_1 < x_2$, então, $f(x_1) > f(x_2)$ e a função é decrescente.

Exemplo:

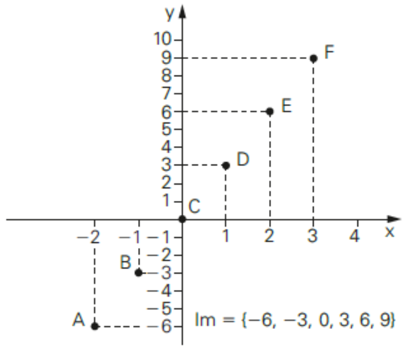
$f(x) = x^2$: a função é decrescente no intervalo $]-\infty, 0[$ e crescente no intervalo $]0, +\infty[$

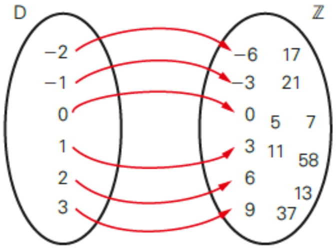
</td></tr>
</table>

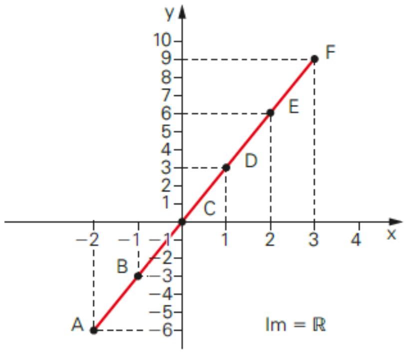
Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continuação).

Código	Núcleo
S.TC.051.047	 • Ponto de máximo: é o par ordenado (x, y), no qual a ordenada (y) é máxima. • Ponto de mínimo: é o par ordenado (x, y), no qual a ordenada (y) é mínima. **Exemplo:** f(x) = sen x → ponto de máximo = $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$; ponto de mínimo = $\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$
S.H.052.049	Reunindo todas essas informações no gráfico, temos:  Legenda: C: intervalo da função é crescente. D: intervalo da função é decrescente. Observamos que, mesmo sem conhecer a lei da função, de posse do gráfico desta, podemos obter todas essas informações.

Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continuação).

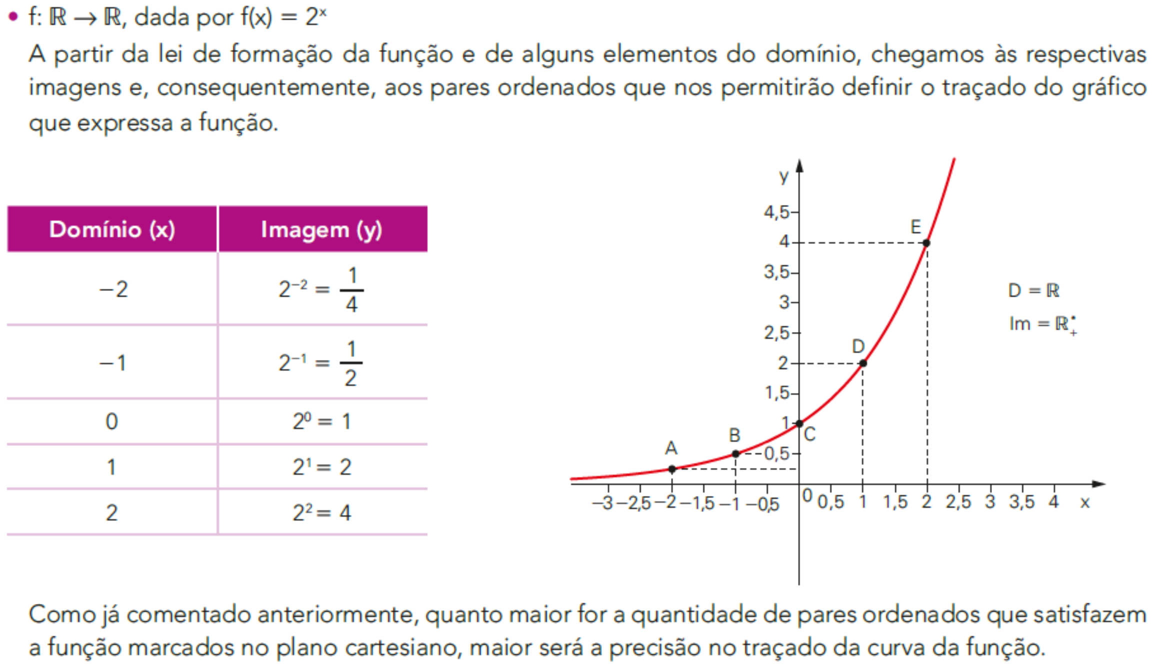
<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>S.H.053.051</td><td>
Veja, a seguir, exemplos de como utilizar conhecimentos de análise gráfica para construir gráficos.
• f: D → ℤ, dada por f(x) = 3x, cujo D = {−2, −1, 0, 1, 2, 3}
Sabendo que o conjunto D é o domínio da função, representado sempre no eixo Ox, podemos montar a tabela e o gráfico seguintes:
<table>
<tr><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td>−2</td><td>3 · (−2) = −6</td></tr>
<tr><td>−1</td><td>3 · (−1) = −3</td></tr>
<tr><td>0</td><td>3 · 0 = 0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3 · 1 = 3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3 · 2 = 6</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3 · 3 = 9</td></tr>
</table>


O domínio é composto exclusivamente pelos números indicados no eixo Ox e, por essa razão, não devemos ligar os pontos formados pelos pares ordenados indicados no gráfico, que, no caso, são seis no total.
O conjunto ℤ representa o contradomínio da função.
Essa função pode ser representada pelo seguinte diagrama:


</td></tr>
<tr><td>S.H.054.051</td><td>
• f: ℝ → ℝ, dada por f(x) = 3x


Observação: como o domínio pertence aos reais, devemos ligar os pontos através de uma reta e todo e qualquer ponto dela corresponderá a um par ordenado que atenderá a função, sendo impossível representar todos eles no gráfico, pois são infinitos pontos.
</td></tr>
</table>

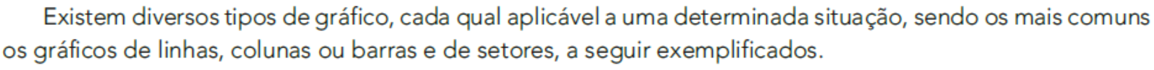
Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continuação).

<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>S.H.055.052</td><td>


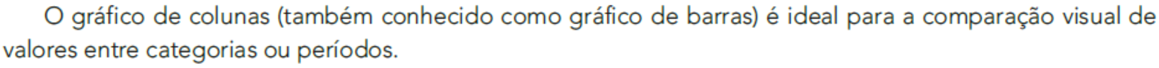
- f: ℝ → ℝ, dada por $f(x) = 2^x$

A partir da lei de formação da função e de alguns elementos do domínio, chegamos às respectivas imagens e, consequentemente, aos pares ordenados que nos permitirão definir o traçado do gráfico que expressa a função.

<table>
<tr><th>Domínio (x)</th><th>Imagem (y)</th></tr>
<tr><td>−2</td><td>$2^{-2} = \frac{1}{4}$</td></tr>
<tr><td>−1</td><td>$2^{-1} = \frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>$2^0 = 1$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$2^1 = 2$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$2^2 = 4$</td></tr>
</table>

Como já comentado anteriormente, quanto maior for a quantidade de pares ordenados que satisfazem a função marcados no plano cartesiano, maior será a precisão no traçado da curva da função.
</td></tr>
<tr><td>S.C.056.052</td><td>


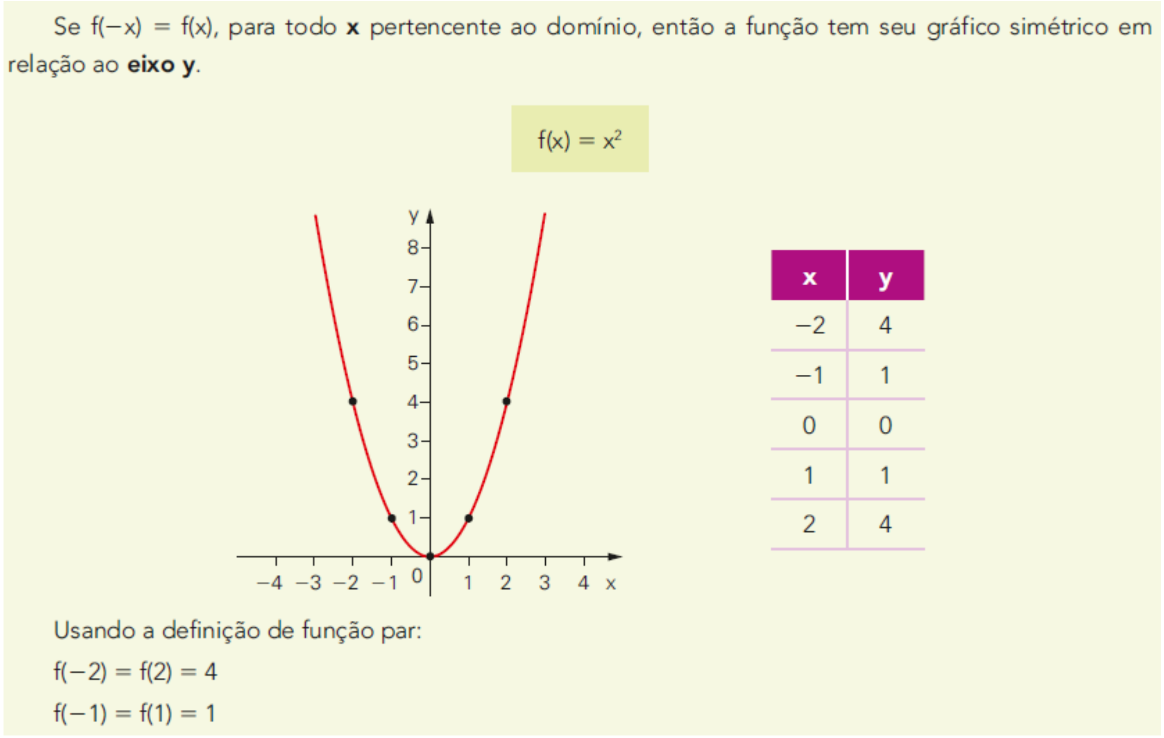
Existem diversos tipos de gráfico, cada qual aplicável a uma determinada situação, sendo os mais comuns os gráficos de linhas, colunas ou barras e de setores, a seguir exemplificados.
</td></tr>
<tr><td>S.C.057.052</td><td>


Gráfico de linhas: ideal para mostrar tendências
</td></tr>
<tr><td>S.C.058.053</td><td>


O gráfico de colunas (também conhecido como gráfico de barras) é ideal para a comparação visual de valores entre categorias ou períodos.
</td></tr>
<tr><td>S.C.059.053</td><td>


Gráfico de setores: ideal para mostrar proporções de um todo
</td></tr>
</table>

Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continuação).

<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>S.TC.060.068</td><td>


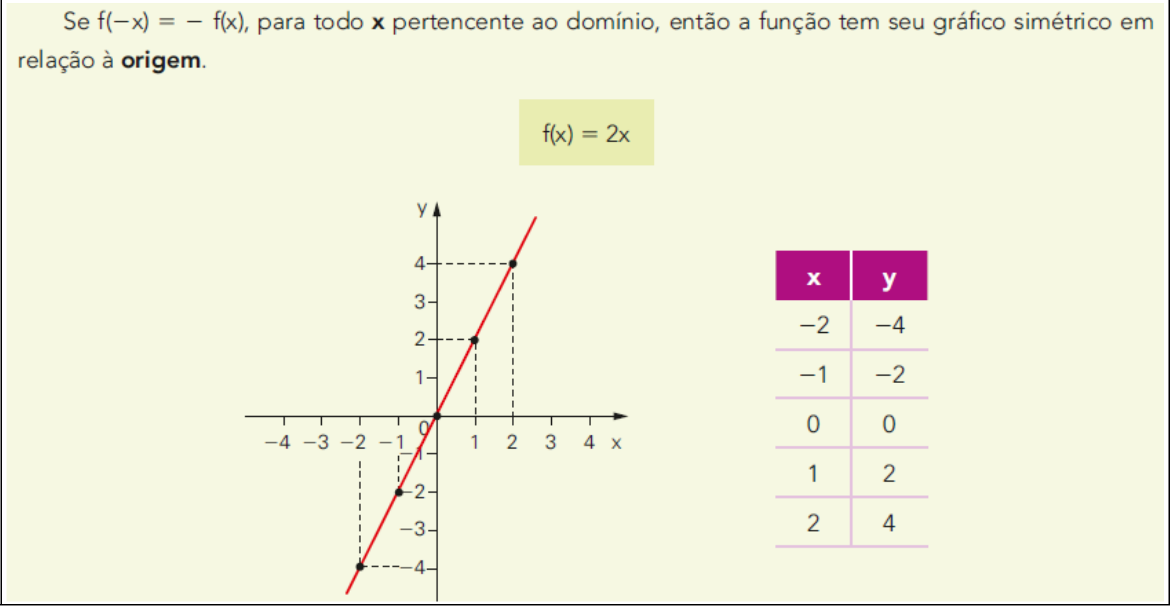
Se $f(-x) = f(x)$, para todo **x** pertencente ao domínio, então a função tem seu gráfico simétrico em relação ao **eixo y**.

$f(x) = x^2$

<table>
<tr><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td>−2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>−1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td></tr>
</table>

Usando a definição de função par:

$f(-2) = f(2) = 4$

$f(-1) = f(1) = 1$
</td></tr>
<tr><td>S.TC.061.068</td><td>


Se $f(-x) = -f(x)$, para todo **x** pertencente ao domínio, então a função tem seu gráfico simétrico em relação à **origem**.

$f(x) = 2x$

<table>
<tr><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td>−2</td><td>−4</td></tr>
<tr><td>−1</td><td>−2</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

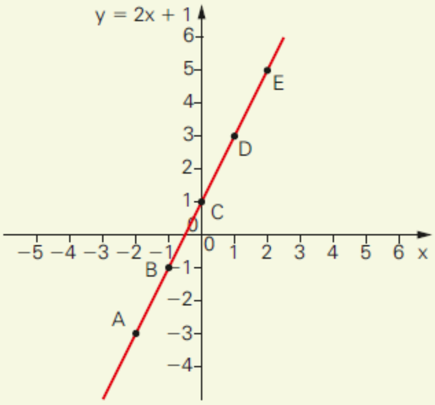
Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continuação).

<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>S.TH.062.069</td><td>

Observação: existem funções que não possuem paridade; isto é, não são pares nem ímpares. Seu gráfico não guarda simetria em relação ao eixo Oy ou relação à origem.

Exemplo:

f(x) = 2x + 1



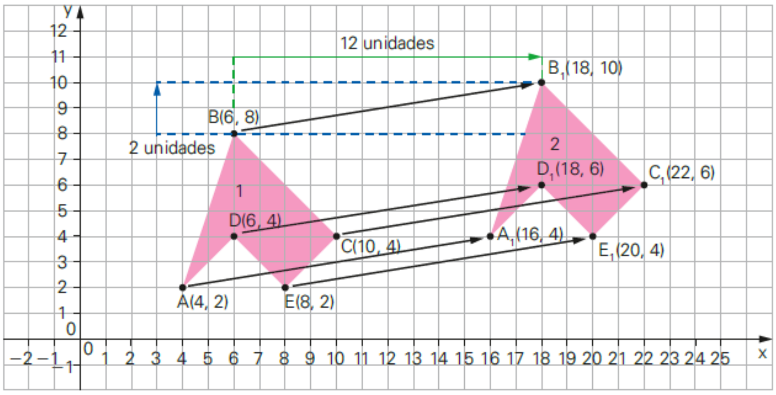
<table>
<tr><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td>−2</td><td>−3</td></tr>
<tr><td>−1</td><td>−1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>5</td></tr>
</table>

Como f(−1) ≠ f(1), a função não é par.

Na tabela: f(−1) = −1 e f(1) = 3

</td></tr>
<tr><td>S.TH.063.073</td><td>

Por definição, translação é a transformação por meio da qual todos os pontos de uma curva ou figura se deslocam individualmente no mesmo sentido, na mesma direção e com a mesma distância. Essa direção pode ser vertical, horizontal ou ambas, simultaneamente.

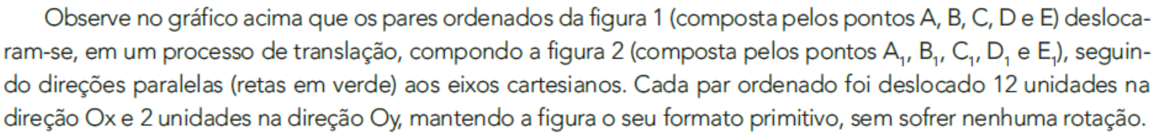
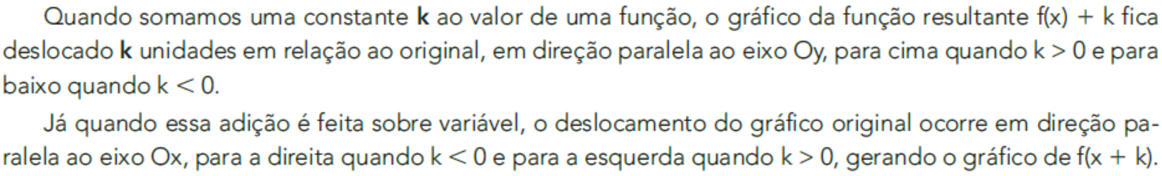
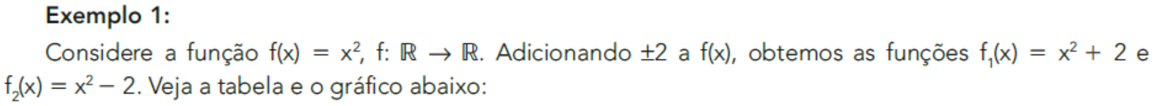
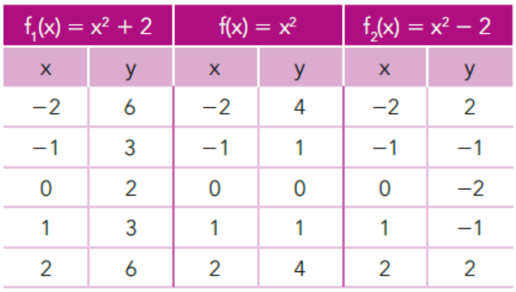
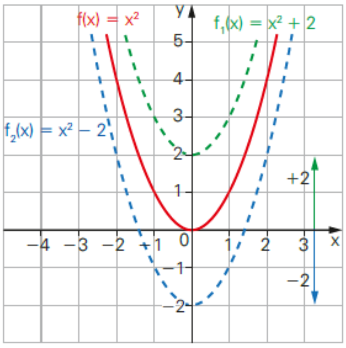


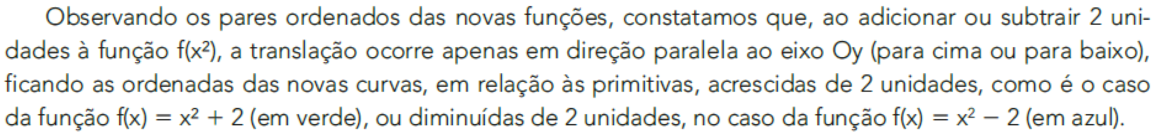
</td></tr>
<tr><td>S.T.064.073</td><td>

A translação de uma função f(x) é expressa, matematicamente, por outra função, cujo gráfico no plano cartesiano possui dimensões e forma idênticas ao da função que foi transladada.

</td></tr>
</table>

Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continuação).

<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>S.TH.065.073</td><td>

Observe no gráfico acima que os pares ordenados da figura 1 (composta pelos pontos A, B, C, D e E) deslocaram-se, em um processo de translação, compondo a figura 2 (composta pelos pontos A_1, B_1, C_1, D_1 e E_1), seguindo direções paralelas (retas em verde) aos eixos cartesianos. Cada par ordenado foi deslocado 12 unidades na direção Ox e 2 unidades na direção Oy, mantendo a figura o seu formato primitivo, sem sofrer nenhuma rotação.
</td></tr>
<tr><td>S.TC.066.073</td><td>

Quando somamos uma constante k ao valor de uma função, o gráfico da função resultante f(x) + k fica deslocado k unidades em relação ao original, em direção paralela ao eixo Oy, para cima quando $k > 0$ e para baixo quando $k < 0$.
Já quando essa adição é feita sobre variável, o deslocamento do gráfico original ocorre em direção paralela ao eixo Ox, para a direita quando $k < 0$ e para a esquerda quando $k > 0$, gerando o gráfico de f(x + k).
</td></tr>
<tr><td>S.H.067.073</td><td>

Exemplo 1:
Considere a função $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Adicionando ±2 a f(x), obtemos as funções $f_1(x) = x^2 + 2$ e $f_2(x) = x^2 - 2$. Veja a tabela e o gráfico abaixo:

<table>
<tr><th colspan="2">$f_1(x) = x^2 + 2$</th><th colspan="2">$f(x) = x^2$</th><th colspan="2">$f_2(x) = x^2 - 2$</th></tr>
<tr><th>x</th><th>y</th><th>x</th><th>y</th><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td>−2</td><td>6</td><td>−2</td><td>4</td><td>−2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>−1</td><td>3</td><td>−1</td><td>1</td><td>−1</td><td>−1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>−2</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>−1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>6</td><td>2</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td></tr>
</table>


</td></tr>
<tr><td>S.H.068.074</td><td>

Observando os pares ordenados das novas funções, constatamos que, ao adicionar ou subtrair 2 unidades à função $f(x^2)$, a translação ocorre apenas em direção paralela ao eixo Oy (para cima ou para baixo), ficando as ordenadas das novas curvas, em relação às primitivas, acrescidas de 2 unidades, como é o caso da função $f(x) = x^2 + 2$ (em verde), ou diminuídas de 2 unidades, no caso da função $f(x) = x^2 - 2$ (em azul).
</td></tr>
</table>

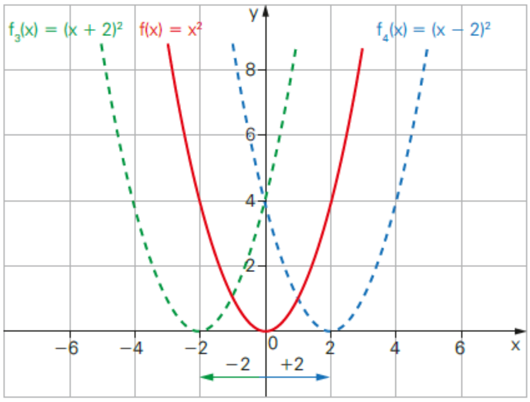
Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continuação).

<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>S.H.069.074</td><td>

Exemplo 2:

Adicionando, agora, ±2 à variável da função (e não mais à própria função), obtemos duas outras funções, $f_3(x) = (x + 2)^2$ e $f_4(x) = (x - 2)^2$, cujos gráficos estão representados a seguir:

<table>
<tr><th colspan="2">$f_3(x) = (x + 2)^2$</th><th colspan="2">$f(x) = x^2$</th><th colspan="2">$f_4(x) = (x - 2)^2$</th></tr>
<tr><td>x</td><td>y</td><td>x</td><td>y</td><td>x</td><td>y</td></tr>
<tr><td>−2</td><td>0</td><td>−2</td><td>4</td><td>−2</td><td>16</td></tr>
<tr><td>−1</td><td>1</td><td>−1</td><td>1</td><td>−1</td><td>9</td></tr>
<tr><td>0</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>4</td></tr>
<tr><td>1</td><td>9</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>16</td><td>2</td><td>4</td><td>2</td><td>0</td></tr>
</table>



</td></tr>
<tr><td>S.TH.070.074</td><td>

Observamos que, nesse caso, as translações ocorrem em direção paralela ao eixo Ox (para a direita ou para a esquerda), ficando as abscissas das novas curvas, em relação às primitivas, diminuídas de 2 unidades, no caso da função $f_3(x) = (x + 2)^2$ (em verde) ou aumentadas de 2 unidades, no caso da função $f_4(x) = (x - 2)^2$ (em azul).

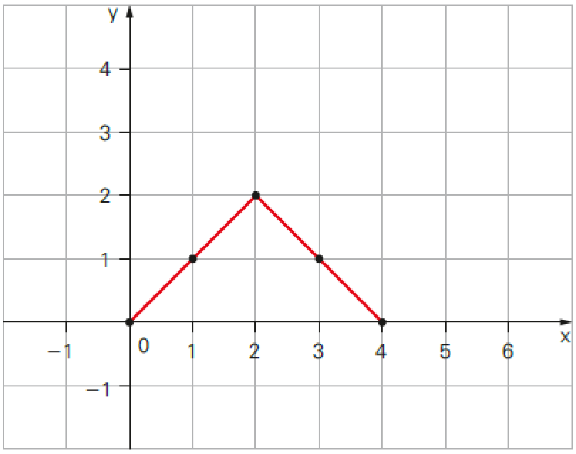
As translações podem ser unilaterais, quando o deslocamento se dá em direção paralela aos eixos **x** ou **y** (translações horizontais ou verticais), como são os dois casos anteriores, ou bilaterais, quando ocorrem as duas situações de forma simultânea.

O conceito apresentado é válido para todas as operações envolvendo translação de funções.

</td></tr>
<tr><td>S.R.071.075</td><td>

Exemplo:

Considere a função f(x) representada abaixo, tal que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

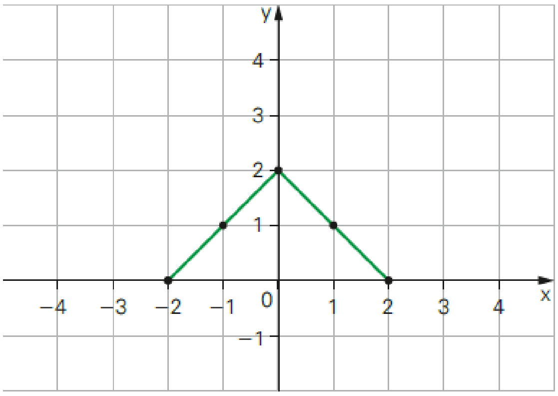
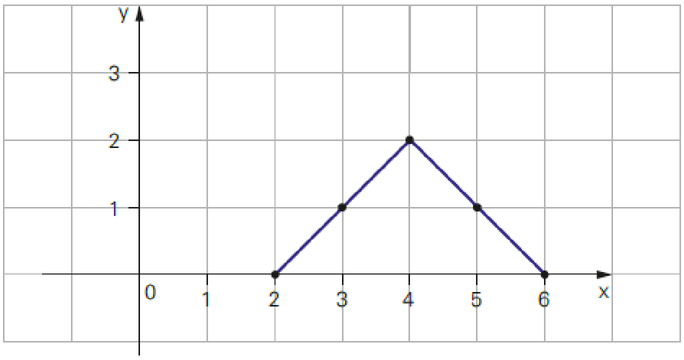


D(f): [0, 4]

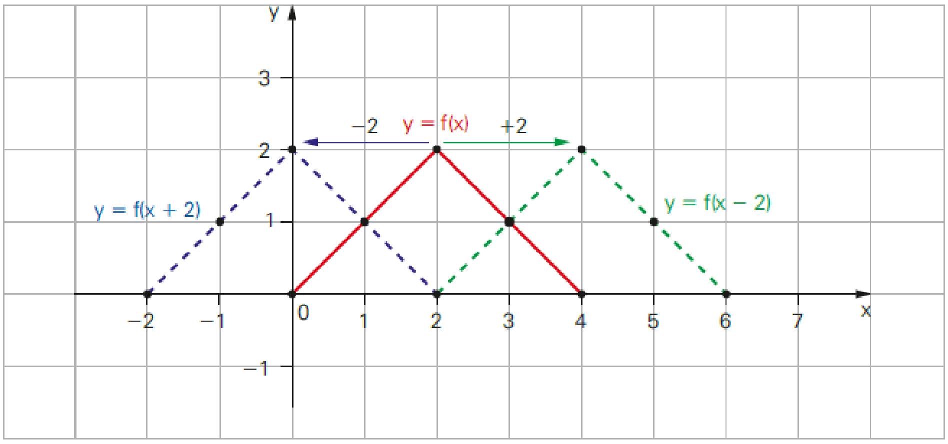
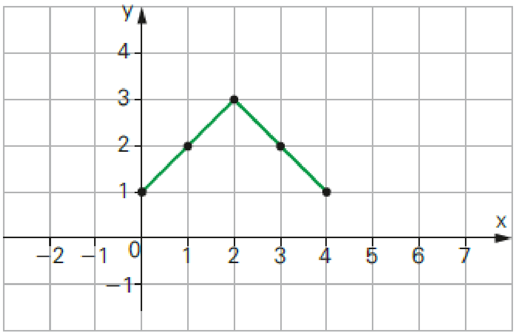
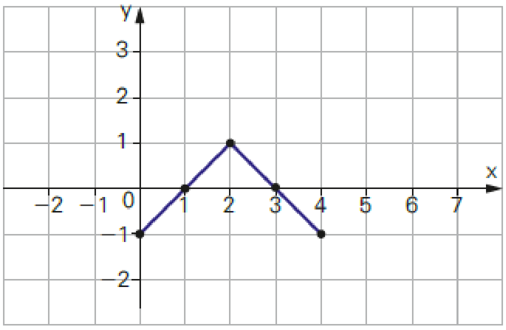
Im(f): [0, 2]

</td></tr>
</table>

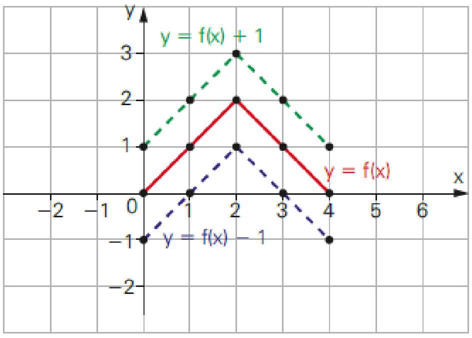
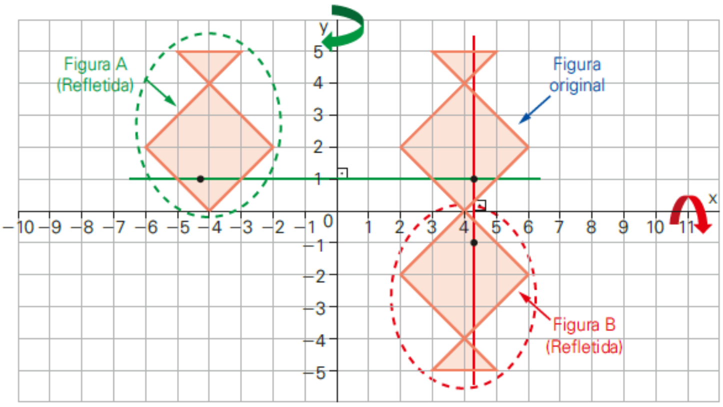
Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continuação).

Código	Núcleo
S.H.072.075	Fazendo $y = f(x \pm k)$ e tomando $k = 2$, temos: • $y = f(x + 2)$  D(f): [−2, 2] Im(f): [0, 2] • $y = f(x - 2)$  D(f): [2, 6] Im(f): [0, 2]
S.TH.073.075	Nesse caso de translação horizontal, o deslocamento ocorre apenas para a direita ou esquerda (direção paralela ao eixo Ox), isto é, somente mudam os elementos do domínio; a imagem não muda. Resumindo, podemos dizer que, adicionando uma constante positiva **k** à variável **x**, o gráfico da função sofrerá um deslocamento de **k** unidades para a esquerda, ao passo que, se a constante for negativa, haverá um deslocamento de **k** unidades para a direita.

Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continuação).

Código	Núcleo
S.H.074.075	O gráfico abaixo ilustra os três casos: $y = f(x)$, $y = f(x + 2)$ e $y = f(x - 2)$. 
S.H.075.076	Fazendo $y = f(x) \pm k$ e tomando $k = 1$, temos: • $y = f(x) + 1$  • $y = f(x) - 1$ 
S.TH.076.076	Nos casos de translação vertical, apenas existe o deslocamento paralelo ao eixo Oy; isto é, somente mudam os elementos da imagem e o domínio não é alterado. Resumindo, podemos dizer que, somando uma constante positiva **k** ($k > 0$) ao valor de uma função, seu gráfico sofrerá um deslocamento de **k** unidades para cima. Ao contrário, se a constante **k** for negativa ($k < 0$), haverá um deslocamento de **k** unidades para baixo.

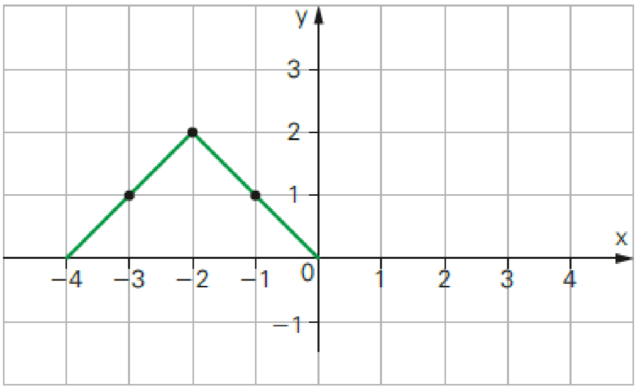
Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continuação).

Código	Núcleo
S.H.077.076	A figura abaixo apresenta as três situações: $y = f(x)$, $y = f(x) + 1$, e $y = f(x) - 1$. No caso, $k = 1$. 
S.T.078.077	Quando ocorre a reflexão de uma figura em relação a uma reta (chamada de eixo de reflexão), cada um de seus pontos e os seus correspondentes da figura refletida pertencem a uma mesma reta, perpendicular ao eixo de reflexão, e são equidistantes em relação ao eixo.
S.TH.079.077	 A ilustração acima nos mostra o princípio básico desse tipo de transformação, na qual a figura original é refletida em relação ao eixo Oy (figura A) e em relação ao eixo Ox (figura B). Em ambos os casos, as figuras refletidas são simétricas às originais, tendo sido espelhadas em relação a um dos eixos cartesianos. Perceba que os olhos dos peixes se rebatem em torno dos eixos de rotação, Ox e Oy, mantendo-se numa mesma ordenada (verde) ou abscissa (vermelha). No estudo de funções, esse tipo de movimentação ocorre com as mudanças de sinal, havendo reflexão em relação ao eixo Oy quando a troca é no sinal da variável e em relação ao eixo Ox quando o sinal trocado é o da própria função.

Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continuação).

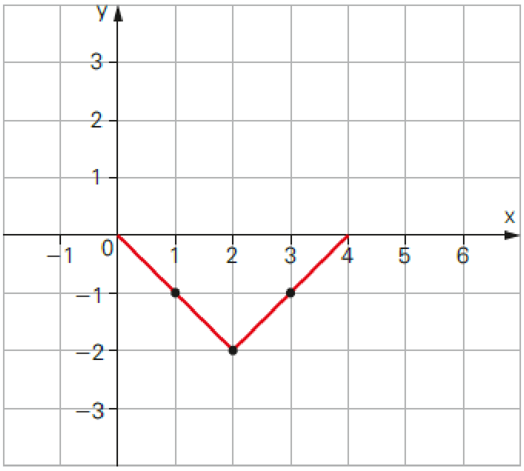
<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>S.TH.080.077</td><td>

- A função f(−x) é a reflexão da função f(x) em relação ao eixo Oy.

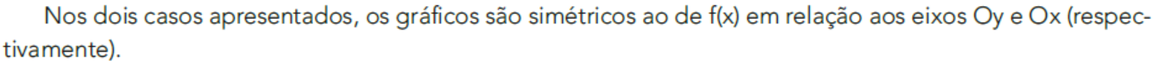


</td></tr>
<tr><td>S.TH.081.078</td><td>

- A função −f(x) é a reflexão da função f(x) em relação ao eixo Ox.

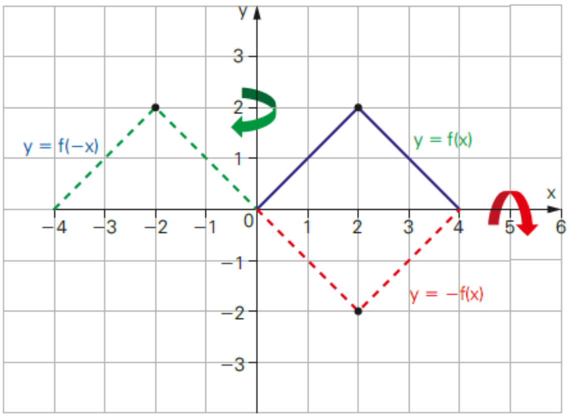


</td></tr>
<tr><td>S.H.082.078</td><td>

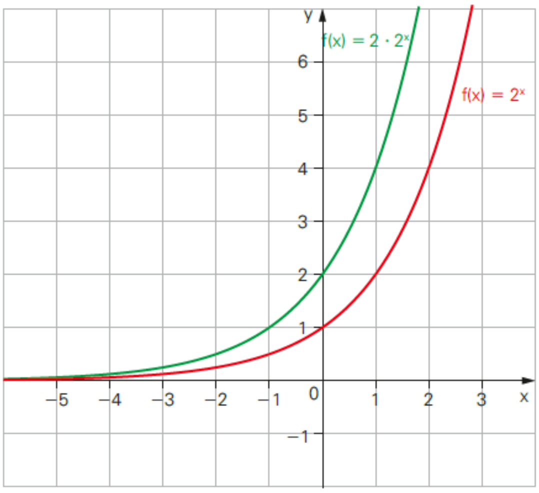
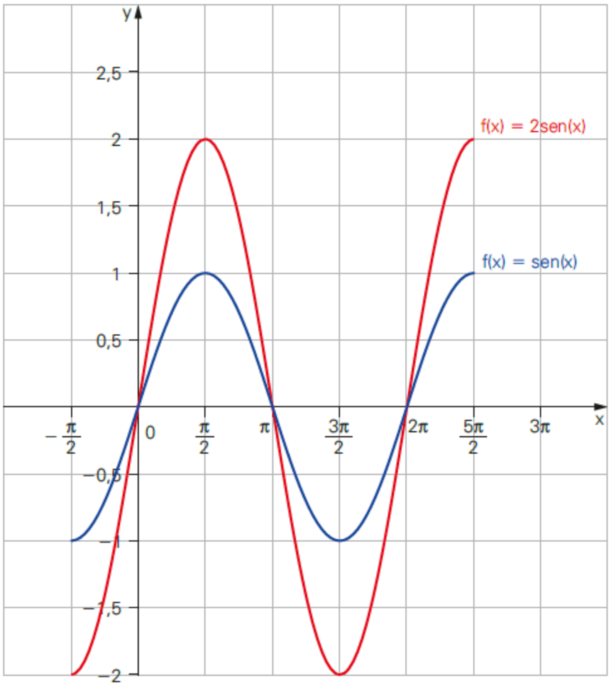


Nos dois casos apresentados, os gráficos são simétricos ao de f(x) em relação aos eixos Oy e Ox (respectivamente).
</td></tr>
</table>

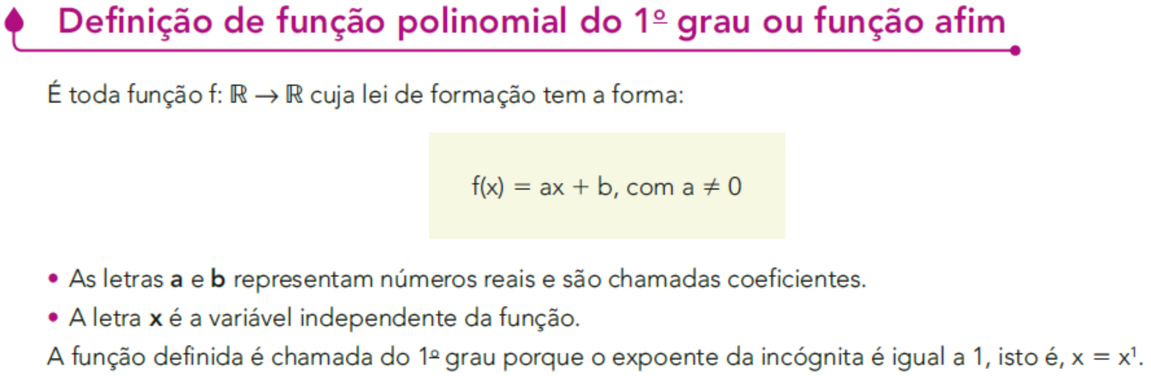
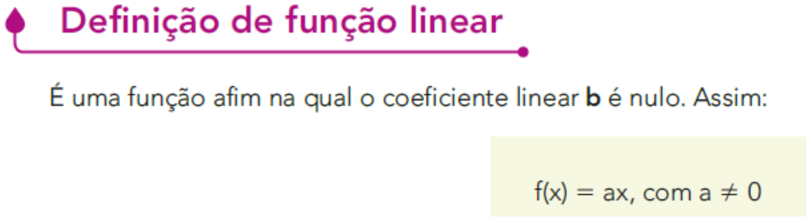
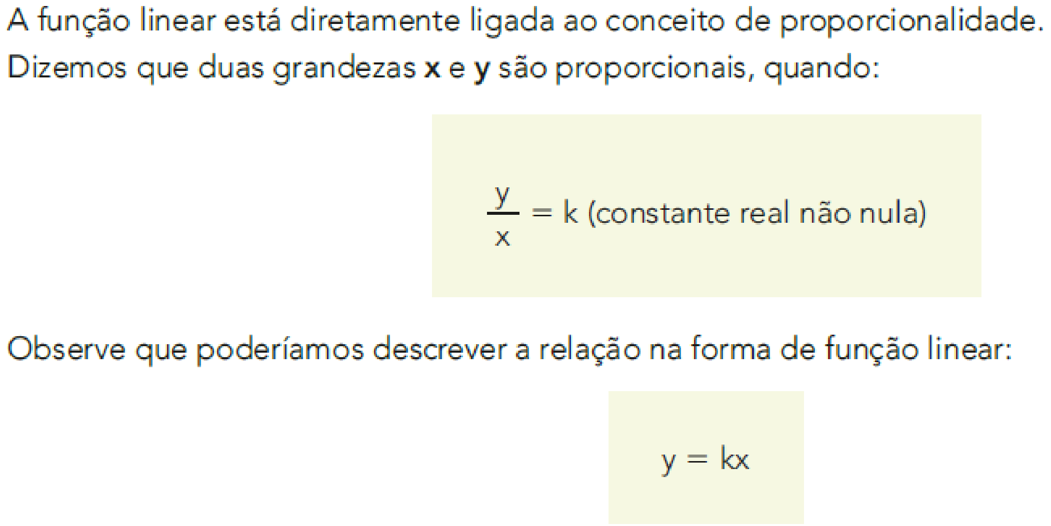
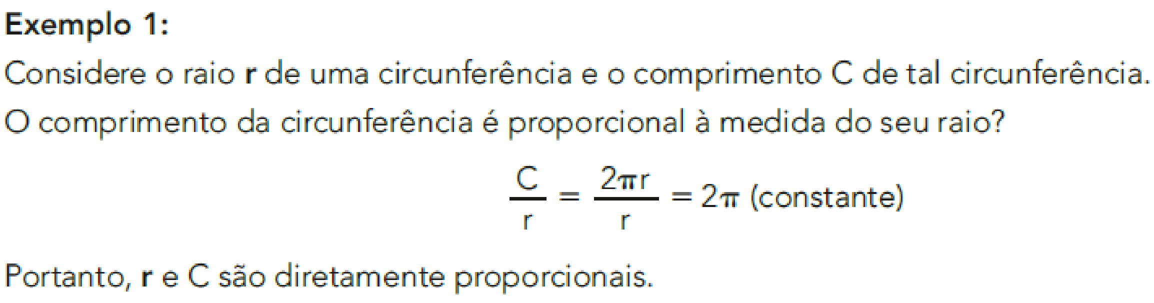
Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continuação).

<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>S.H.083.078</td><td>A figura abaixo ilustra as três situações: a função original, y = f(x), e as suas reflexões, y = f(−x) e y = −f(x).
 </td></tr>
<tr><td>S.T.084.078</td><td>Tal como as translações, as reflexões podem ocorrer de forma simultânea quando a função refletida tem a forma y = −f(−x).</td></tr>
<tr><td>S.A.085.078</td><td>O quadro abaixo esquematiza as movimentações causadas pelas reflexões:
<table>
<tr><td>y = f(x ± k)</td><td>←
→</td><td>Translação horizontal de k unidades na direção do eixo x (para a esquerda e para a direita)</td></tr>
<tr><td>y = f(x) ± k</td><td>↑ ↓</td><td>Translação vertical de k unidades na direção do eixo y (para cima e para baixo)</td></tr>
<tr><td>y = −f(x)</td><td>↷</td><td>Reflexão em relação ao eixo x</td></tr>
<tr><td>y = f(−x)</td><td>⤸</td><td>Reflexão em relação ao eixo y</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

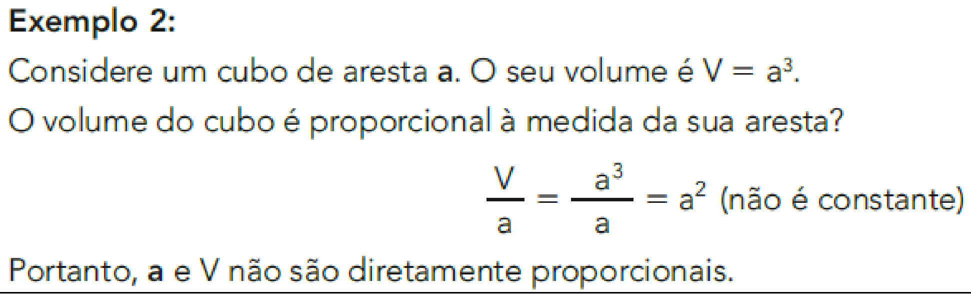
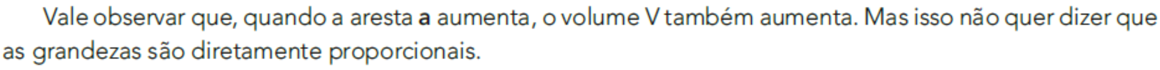
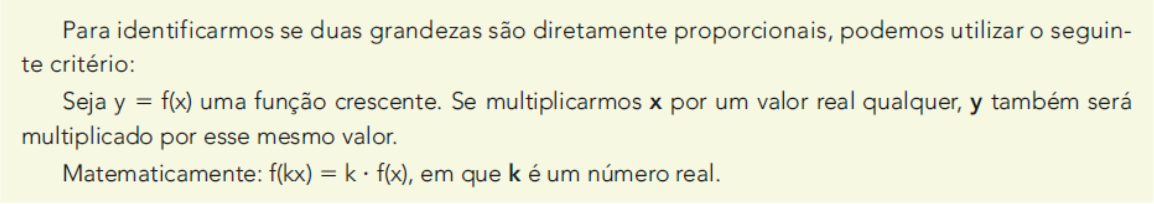
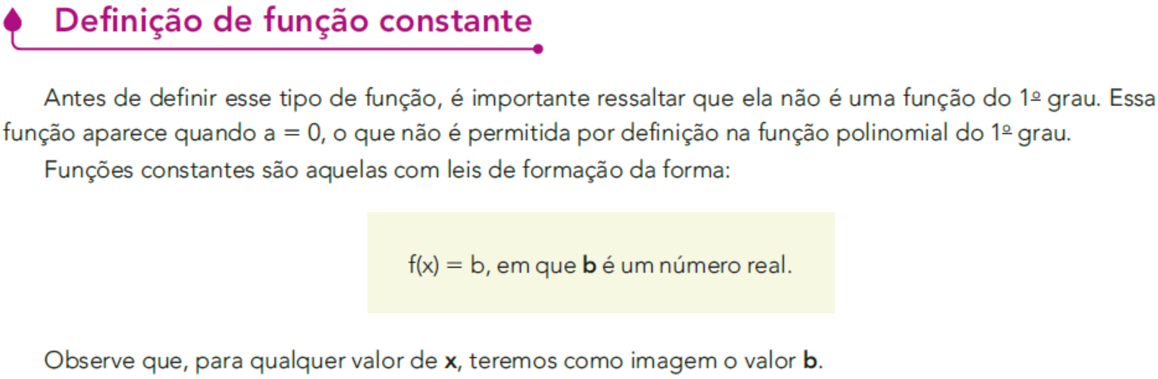
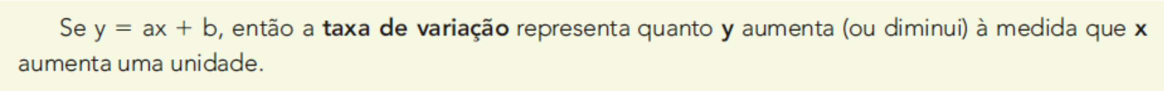
Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continuação).

Código	Núcleo
S.H.086.082	 Analisando os gráficos das duas funções, concluímos que, no caso da função exponencial em questão, quando a multiplicamos por um número real **k**, a imagem não muda, apenas os elementos dela ficam multiplicados por esse número. A imagem continua sendo $\mathbb{R}_+^*$. No caso da curva $f(x) = 2 \cdot 2^x$, ela não mantém a mesma forma da função $f(x) = 2^x$, nem mesmo os valores de **y**, já que se deforma, aproximando-se do eixo Oy (curva verde).
S.H.087.082	Vejamos o que ocorre na função $f(x) = sen(x)$:  Observa-se que o domínio se mantém inalterado nas duas funções, variando somente a imagem. $f(x) = sen(x) \Rightarrow Im = [-1, 1]$ $f(x) = 2 \cdot sen(x) \Rightarrow Im = [-2, 2]$

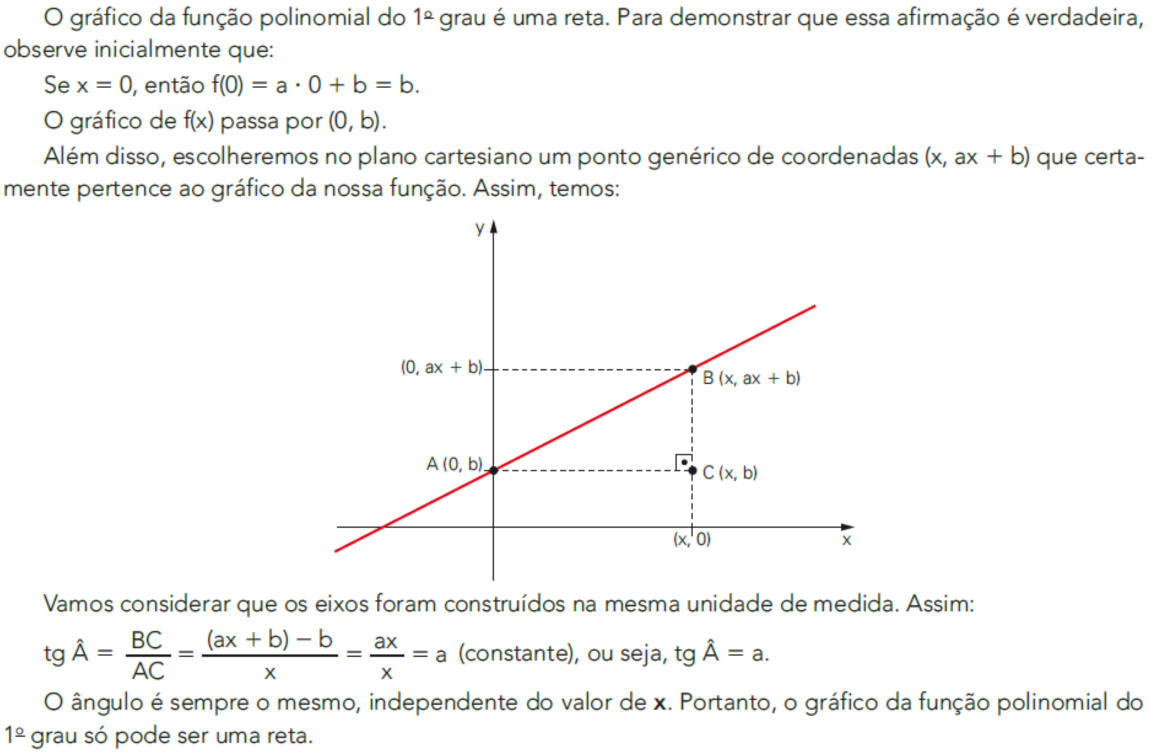
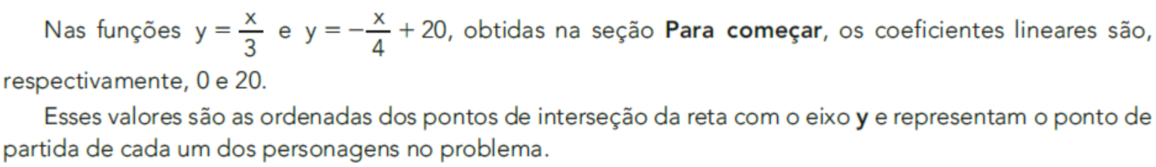
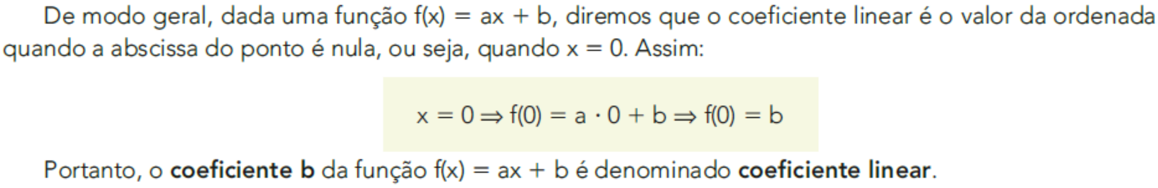
Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continuação).

Código	Núcleo
S.TC.088.094	 **Definição de função polinomial do 1º grau ou função afim** É toda função f: ℝ → ℝ cuja lei de formação tem a forma: $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$ • As letras **a** e **b** representam números reais e são chamadas coeficientes. • A letra **x** é a variável independente da função. A função definida é chamada do 1º grau porque o expoente da incógnita é igual a 1, isto é, $x = x^1$.
S.T.089.094	 **Definição de função linear** É uma função afim na qual o coeficiente linear **b** é nulo. Assim: $f(x) = ax$, com $a \neq 0$
S.T.090.094	 A função linear está diretamente ligada ao conceito de proporcionalidade. Dizemos que duas grandezas **x** e **y** são proporcionais, quando: $\frac{y}{x} = k$ (constante real não nula) Observe que poderíamos descrever a relação na forma de função linear: $y = kx$
S.H.091.095	 **Exemplo 1:** Considere o raio **r** de uma circunferência e o comprimento C de tal circunferência. O comprimento da circunferência é proporcional à medida do seu raio? $\frac{C}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ (constante) Portanto, **r** e C são diretamente proporcionais.

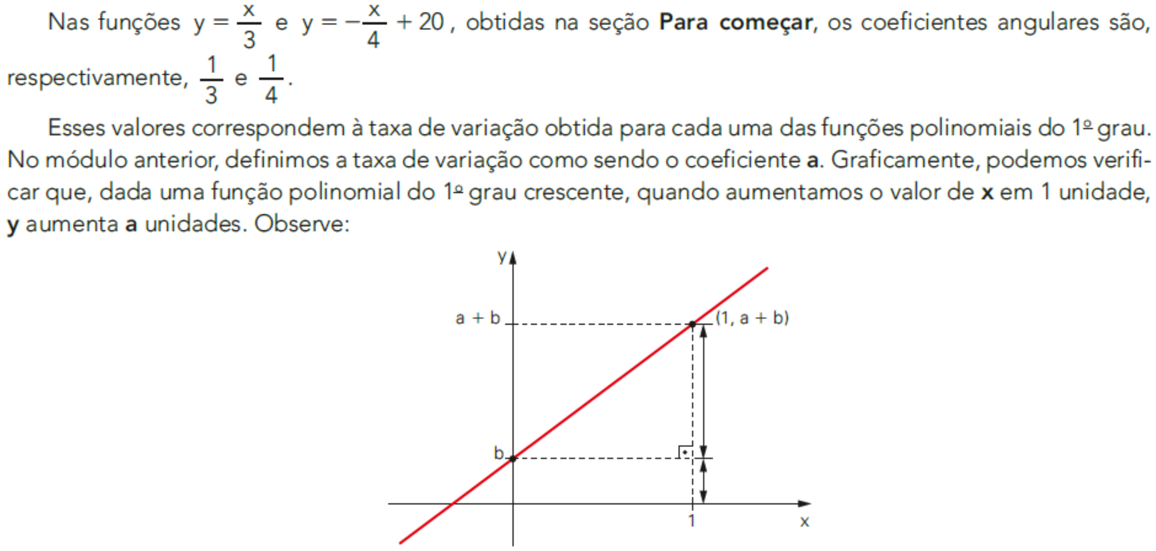
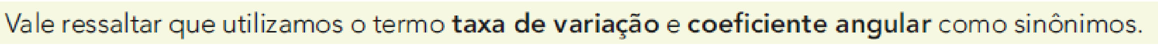
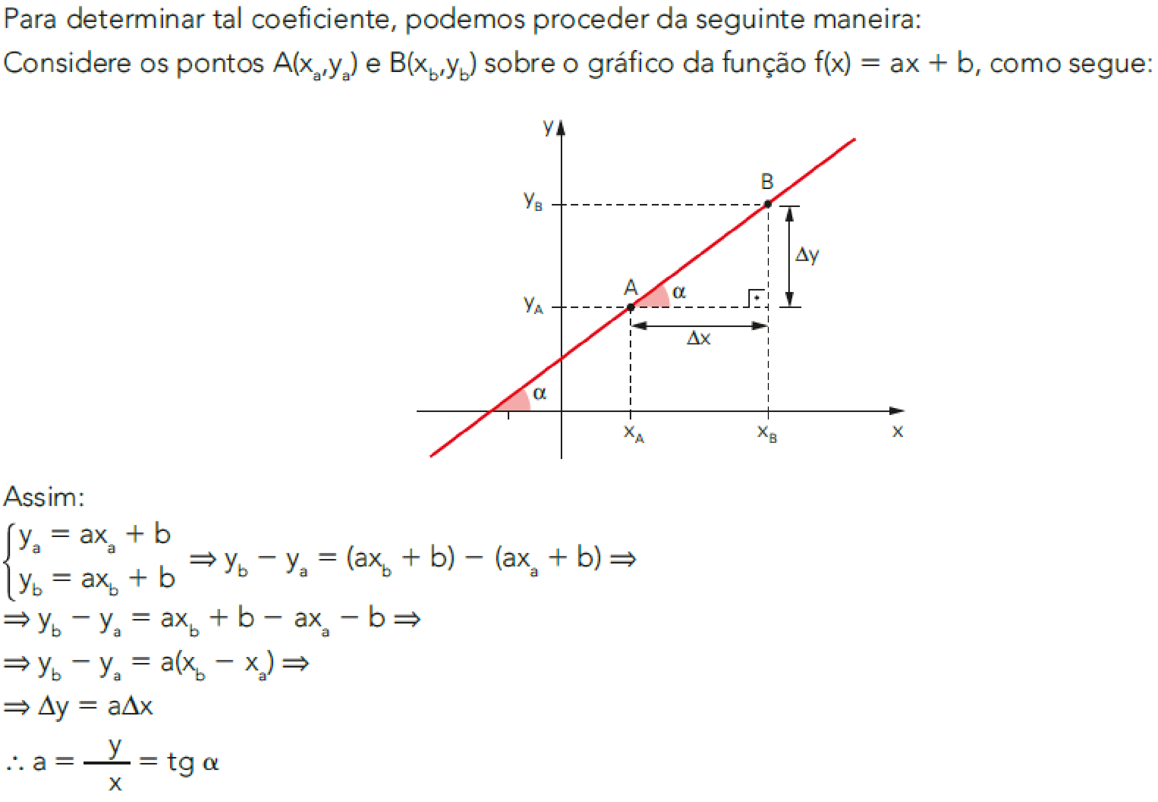
Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continuação).

Código	Núcleo
S.H.092.095	 **Exemplo 2:** Considere um cubo de aresta **a**. O seu volume é $V = a^3$. O volume do cubo é proporcional à medida da sua aresta? $\frac{V}{a} = \frac{a^3}{a} = a^2$ (não é constante) Portanto, **a** e V não são diretamente proporcionais.
S.H.093.096	 Vale observar que, quando a aresta **a** aumenta, o volume V também aumenta. Mas isso não quer dizer que as grandezas são diretamente proporcionais.
S.R.094.096	 Para identificarmos se duas grandezas são diretamente proporcionais, podemos utilizar o seguinte critério: Seja $y = f(x)$ uma função crescente. Se multiplicarmos **x** por um valor real qualquer, **y** também será multiplicado por esse mesmo valor. Matematicamente: $f(kx) = k \cdot f(x)$, em que **k** é um número real.
S.T.095.096	 **Definição de função constante** Antes de definir esse tipo de função, é importante ressaltar que ela não é uma função do 1º grau. Essa função aparece quando $a = 0$, o que não é permitida por definição na função polinomial do 1º grau. Funções constantes são aquelas com leis de formação da forma: $f(x) = b$, em que **b** é um número real. Observe que, para qualquer valor de **x**, teremos como imagem o valor **b**.
S.C.096.096	 A **taxa de variação** de uma função afim é o valor do **coeficiente a** da função.
S.H.097.097	 Se $y = ax + b$, então a **taxa de variação** representa quanto **y** aumenta (ou diminui) à medida que **x** aumenta uma unidade.

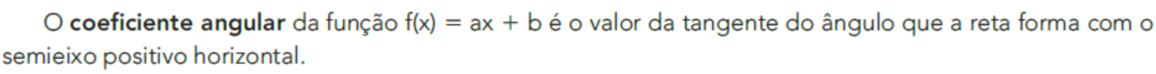
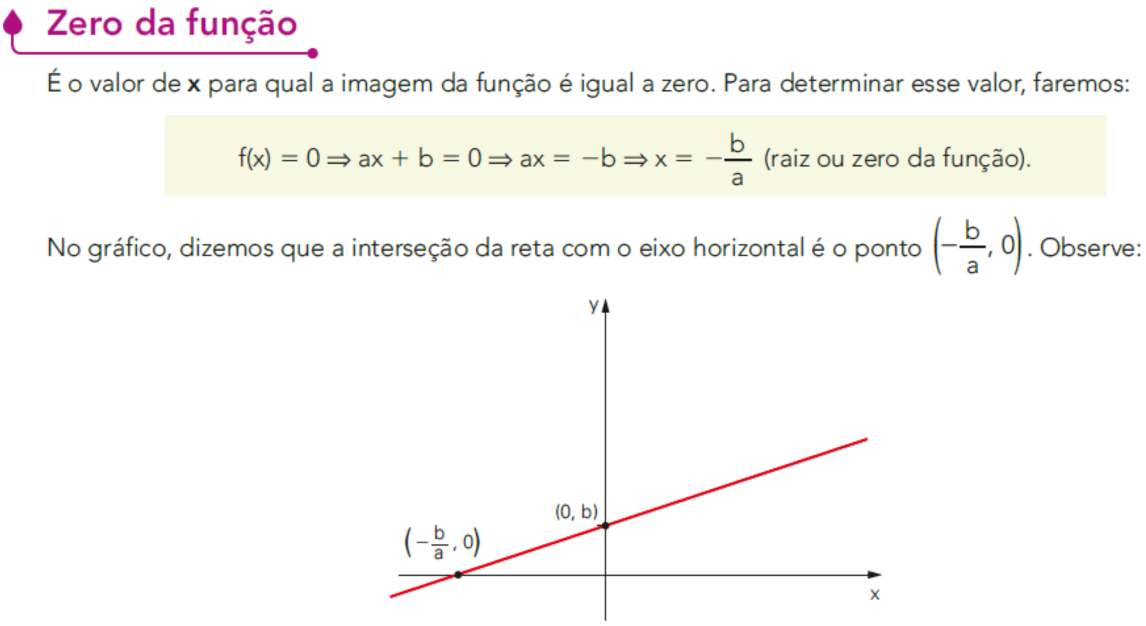
Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continuação).

Código	Núcleo
S.TH.098.109	 O gráfico da função polinomial do 1º grau é uma reta. Para demonstrar que essa afirmação é verdadeira, observe inicialmente que: Se $x = 0$, então $f(0) = a \cdot 0 + b = b$. O gráfico de $f(x)$ passa por $(0, b)$. Além disso, escolheremos no plano cartesiano um ponto genérico de coordenadas $(x, ax + b)$ que certamente pertence ao gráfico da nossa função. Assim, temos: Vamos considerar que os eixos foram construídos na mesma unidade de medida. Assim: $\text{tg}\,\hat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{(ax + b) - b}{x} = \frac{ax}{x} = a$ (constante), ou seja, $\text{tg}\,\hat{A} = a$. O ângulo é sempre o mesmo, independente do valor de **x**. Portanto, o gráfico da função polinomial do 1º grau só pode ser uma reta.
S.HC.099.110	 Nas funções $y = \frac{x}{3}$ e $y = -\frac{x}{4} + 20$, obtidas na seção **Para começar**, os coeficientes lineares são, respectivamente, 0 e 20. Esses valores são as ordenadas dos pontos de interseção da reta com o eixo **y** e representam o ponto de partida de cada um dos personagens no problema.
S.HC.100.110	 De modo geral, dada uma função $f(x) = ax + b$, diremos que o coeficiente linear é o valor da ordenada quando a abscissa do ponto é nula, ou seja, quando $x = 0$. Assim: $x = 0 \Rightarrow f(0) = a \cdot 0 + b \Rightarrow f(0) = b$ Portanto, o **coeficiente b** da função $f(x) = ax + b$ é denominado **coeficiente linear**.

Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continuação).

Código	Núcleo
S.HC.101.110	 Nas funções $y = \frac{x}{3}$ e $y = -\frac{x}{4} + 20$, obtidas na seção **Para começar**, os coeficientes angulares são, respectivamente, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$. Esses valores correspondem à taxa de variação obtida para cada uma das funções polinomiais do 1º grau. No módulo anterior, definimos a taxa de variação como sendo o coeficiente **a**. Graficamente, podemos verificar que, dada uma função polinomial do 1º grau crescente, quando aumentamos o valor de **x** em 1 unidade, **y** aumenta **a** unidades. Observe:
S.C.102.110	 Vale ressaltar que utilizamos o termo **taxa de variação** e **coeficiente angular** como sinônimos.
S.H.103.111	 Para determinar tal coeficiente, podemos proceder da seguinte maneira: Considere os pontos $A(x_a,y_a)$ e $B(x_b,y_b)$ sobre o gráfico da função $f(x) = ax + b$, como segue: Assim: $\begin{cases} y_a = ax_a + b \\ y_b = ax_b + b \end{cases} \Rightarrow y_b - y_a = (ax_b + b) - (ax_a + b) \Rightarrow$ $\Rightarrow y_b - y_a = ax_b + b - ax_a - b \Rightarrow$ $\Rightarrow y_b - y_a = a(x_b - x_a) \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta y = a\Delta x$ $\therefore a = \frac{y}{x} = tg\ \alpha$

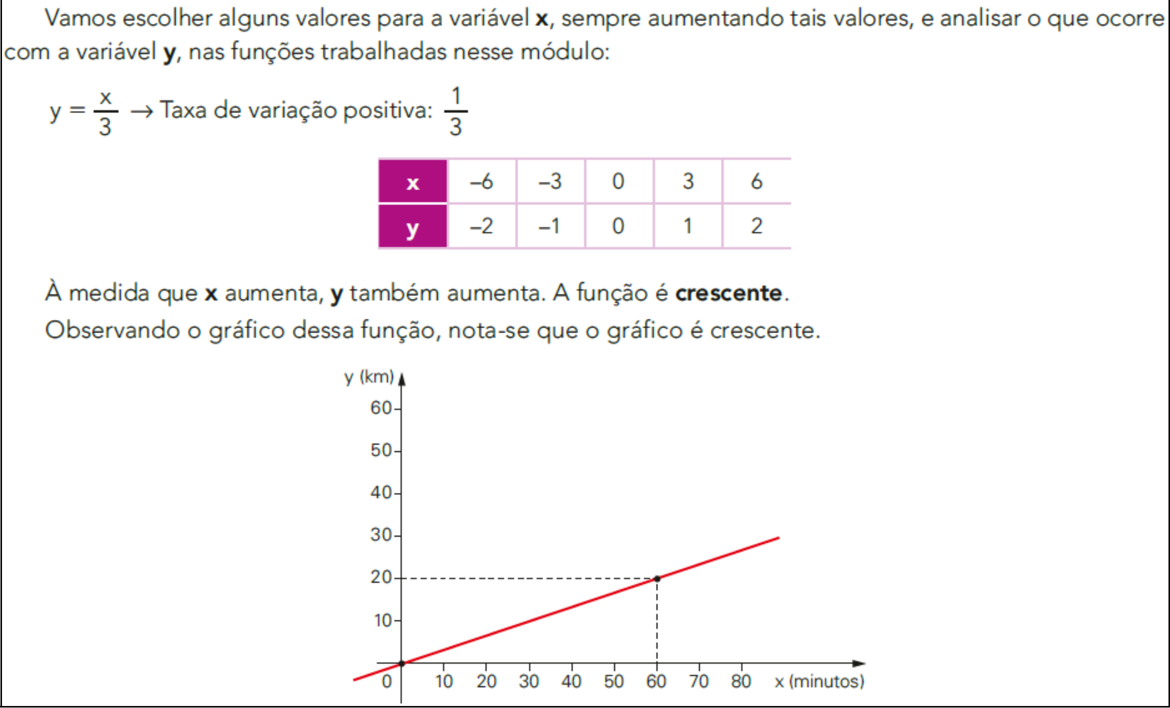
Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continuação).

<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>S.C.104.111</td><td>

O **coeficiente angular** da função f(x) = ax + b é o valor da tangente do ângulo que a reta forma com o semieixo positivo horizontal.
</td></tr>
<tr><td>S.TC.105.111</td><td>


Zero da função

É o valor de **x** para qual a imagem da função é igual a zero. Para determinar esse valor, faremos:

$f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$ (raiz ou zero da função).

No gráfico, dizemos que a interseção da reta com o eixo horizontal é o ponto $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$. Observe:
</td></tr>
<tr><td>S.HC.106.112</td><td>


Vamos escolher alguns valores para a variável **x**, sempre aumentando tais valores, e analisar o que ocorre com a variável **y**, nas funções trabalhadas nesse módulo:

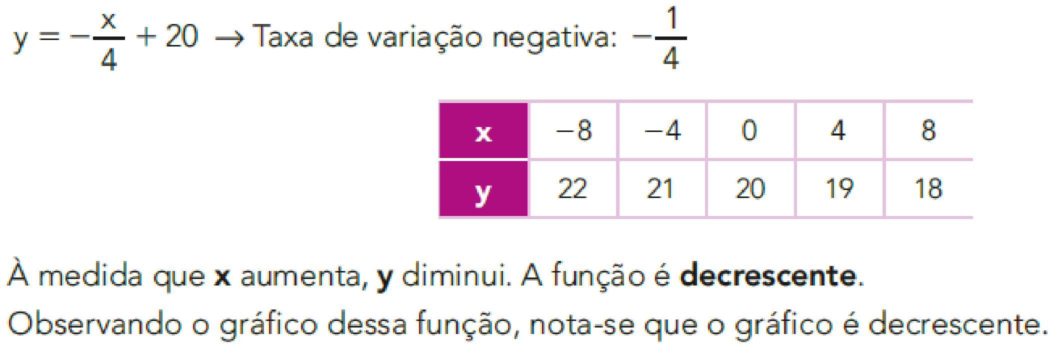
$y = \frac{x}{3}$ → Taxa de variação positiva: $\frac{1}{3}$

<table>
<tr><th>x</th><td>–6</td><td>–3</td><td>0</td><td>3</td><td>6</td></tr>
<tr><th>y</th><td>–2</td><td>–1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
</table>

À medida que **x** aumenta, **y** também aumenta. A função é **crescente**.

Observando o gráfico dessa função, nota-se que o gráfico é crescente.
</td></tr>
</table>

Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (continuação).

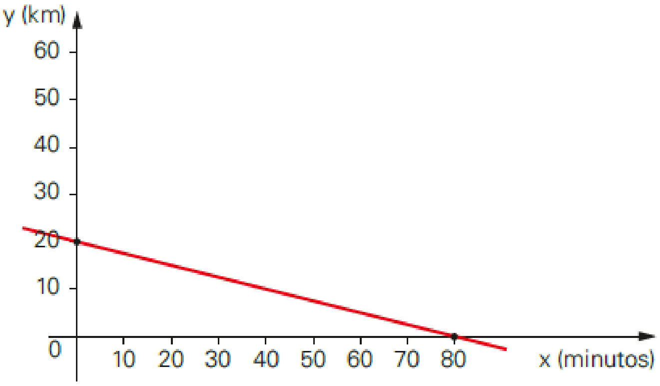
<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>S.HC.107.112</td><td>


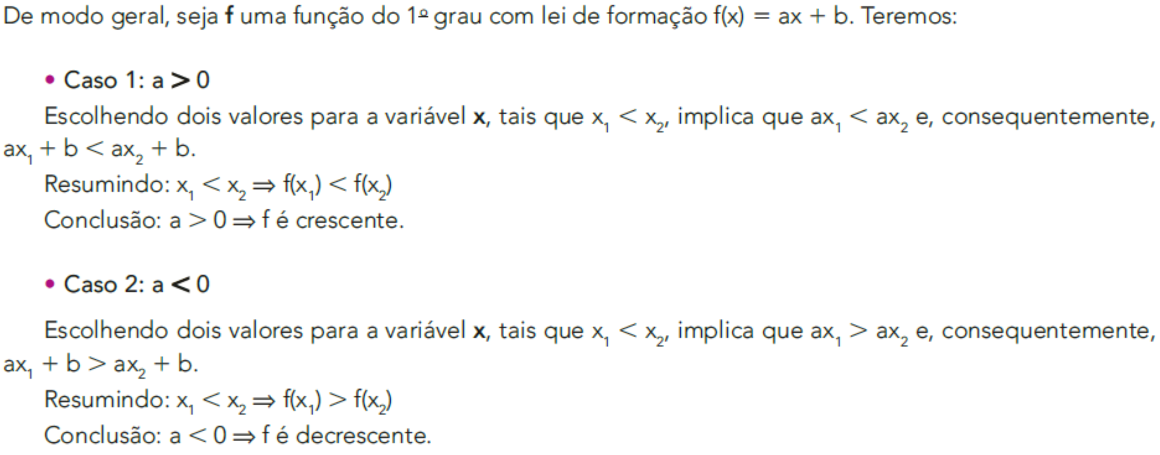
$y = -\frac{x}{4} + 20 \rightarrow$ Taxa de variação negativa: $-\frac{1}{4}$

<table>
<tr><td>x</td><td>−8</td><td>−4</td><td>0</td><td>4</td><td>8</td></tr>
<tr><td>y</td><td>22</td><td>21</td><td>20</td><td>19</td><td>18</td></tr>
</table>

À medida que x aumenta, y diminui. A função é decrescente.

Observando o gráfico dessa função, nota-se que o gráfico é decrescente.



</td></tr>
<tr><td>S.T.108.113</td><td>


De modo geral, seja f uma função do 1º grau com lei de formação $f(x) = ax + b$. Teremos:

- Caso 1: $a > 0$

Escolhendo dois valores para a variável x, tais que $x_1 < x_2$, implica que $ax_1 < ax_2$ e, consequentemente, $ax_1 + b < ax_2 + b$.

Resumindo: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Conclusão: $a > 0 \Rightarrow f$ é crescente.

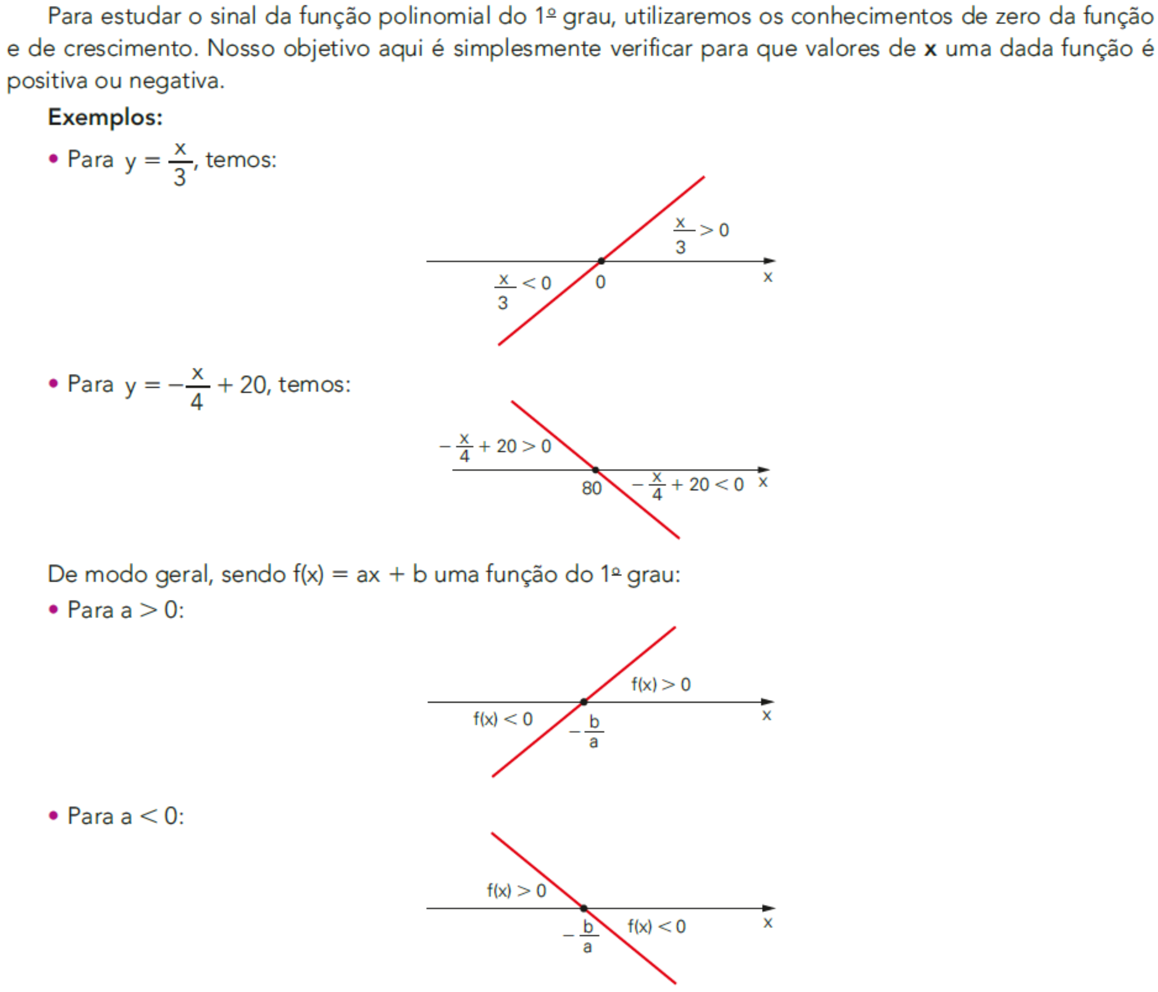
- Caso 2: $a < 0$

Escolhendo dois valores para a variável x, tais que $x_1 < x_2$, implica que $ax_1 > ax_2$ e, consequentemente, $ax_1 + b > ax_2 + b$.

Resumindo: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Conclusão: $a < 0 \Rightarrow f$ é decrescente.
</td></tr>
</table>

Quadro 4 – Núcleos do *Material S* (conclusão).

Código	Núcleo
S.H.109.113	 Para estudar o sinal da função polinomial do 1º grau, utilizaremos os conhecimentos de zero da função e de crescimento. Nosso objetivo aqui é simplesmente verificar para que valores de **x** uma dada função é positiva ou negativa. **Exemplos:** • Para $y = \frac{x}{3}$, temos: • Para $y = -\frac{x}{4} + 20$, temos: De modo geral, sendo f(x) = ax + b uma função do 1º grau: • Para a > 0: • Para a < 0:

4.3.1.1 Os núcleos teóricos

Os núcleos teóricos são responsáveis por conceituar objetos matemáticos se apropriando de algumas definições previamente introduzidas ao leitor ou não. Analisando a obra em questão, de forma bem menos frequente classificamos um núcleo como puramente teórico, pelo motivo de que em muitos casos a apresentação de uma nova notação ou nomenclatura para diferenciar o objeto mais recentemente exibido daqueles encontrados em outro período se faz necessária. De modo mais expressivo, o quantitativo de núcleos teórico-comunicativos supera em 140% o número total daqueles cujo aspecto é puramente teórico ou teórico-heurístico.

Por este motivo, é massivamente utilizada a linguagem relativa nestes núcleos, uma vez que há correlação entre os objetos mostrados em cada conceito sem subjetividades, como em S.T.030.028, ao mesmo tempo em que atua significativamente no condicionamento conceitual da obra, porque um núcleo teórico sozinho ou associado a outro aspecto, quando não entendido, impacta negativamente no entendimento de outro(s) núcleo(s) dependente(s), por exemplo, um algorítmico ou heurístico. É possível, então, visualizar que o núcleo S.T.041.036 possibilita a real associação com o os núcleos S.H.042.037 e S.H.043.037.

No total, foram encontrados quarenta e quatro núcleos com aspecto teórico, donde dez são puramente teóricos, dez são teórico-heurísticos e os outros vinte e quatro são teórico-comunicativos.

4.3.1.2 Os núcleos algorítmicos

Os núcleos algorítmicos são tais que descrevem os procedimentos necessários para a conclusão de um assunto anteriormente abordado, somente interessado em exibir o processo, não necessariamente inferindo qualquer reflexão acerca do que está sendo realizado. Desta maneira, o uso da linguagem exemplar em núcleos deste modelo é notório, inclusive devido à utilização de verbos descritivos e procedimentais, visível em S.A.014.025.

No que diz respeito ao condicionamento conceitual, é sempre empregado no fim das ramificações, por seu caráter mais operacional que reflexivo, conforme os núcleos S.TH.073.075, S.TH.076.076, S.TH.080.077 e S.TH.081.078 implicam na construção realizada pelo núcleo algorítmico S.A.085.078. No total, foram encontrados três núcleos com aspecto algorítmico, sendo nenhum deles reconhecido como um núcleo-conjunto.

4.3.1.3 Os núcleos heurísticos

Os núcleos heurísticos vão além do que propõem os núcleos algorítmicos, aprimorando o estudo com a adição de iniciativas reflexivas, isto é, apresentam indícios de associações entre objetos de maneira não tão explícita a fim de que o próprio leitor questione a veracidade de uma possível propriedade. É válido ressaltar que neste material, segundo as nossas classificações, a quantidade de núcleos heurísticos é igual a 18 vezes o quantitativo de núcleos algorítmicos.

Sendo assim, em muitos casos a linguagem exemplar se faz presente, como em S.H.042.037, em outra porção é a vez da linguagem relativa – S.H.093.096 – e em outros casos, a linguagem funcional, bem exemplificado por S.H.083.078. Os núcleos heurísticos têm expressiva importância no condicionamento conceitual do livro, pois possibilitam a construção de outro núcleo, como quando S.H.103.111 implica diretamente no núcleo comunicativo S.C.104.111, ou completam um núcleo de aspecto mais teórico, bem exemplificado em S.TC.036.035 seguido por S.H.037.035.

No total, foram encontrados cinquenta e quatro núcleos com aspecto heurístico, dos quais trinta e três são puramente heurísticos, dez são teórico-heurísticos, cinco são heurístico-restritivos e seis são heurístico-comunicativo.

4.3.1.4 Os núcleos restritivos

Os núcleos restritivos limitam o que pode e o que não pode ser aplicado em diferentes objetos matemáticos. Apresentam linguagem funcional, como a empregada em S.R.094.096, e sempre são consequentemente observados após um núcleo teórico, comunicativo ou teórico-comunicativo, visto, por exemplo, quando o núcleo S.C.023.027 reflete no estudo dos núcleos S.R.024.027, S.HR.026.028, S.HR.027.028, S.HR.028.028 e S.HR.029.028.

No total, foram encontrados oito núcleos com aspecto restritivo, dos quais três são puramente restritivos e os outros cinco são heurístico-restritivos.

4.3.1.5 Os núcleos comunicativos

Os núcleos comunicativos têm por objetivo apresentar nomenclaturas aos objetos novos e notações utilizadas a partir daquele instante pelos itens em questão. Logo, é válido destacar a facilidade com que um núcleo comunicativo participa de núcleos-conjuntos com quaisquer outros aspectos, mais frequentemente em união aos núcleos teóricos, superando em 60% a quantidade de núcleos puramente comunicativos nesta obra.

Utilizando-se da linguagem relativa, como, por exemplo, em S.C.044.045, e da linguagem funcional, principalmente quando em um núcleo teórico-comunicativo – vide S.TC.061.068 –, os núcleos desempenham um relevante papel ao longo de todo condicionamento conceitual iniciando uma observação, conforme visualizado na seção 4.3.1.4, intermediando ou até concluindo.

No total, foram encontrados quarenta e cinco núcleos com aspecto comunicativo, dos quais quinze são puramente comunicativos, vinte e quatro são teórico-comunicativos e seis são heurístico-comunicativos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nós, neste trabalho, concentramos nossos esforços na análise textual de Dormolen (1986), tal qual baseada na análise de conteúdo de Bardin (1977), para avaliar como dois materiais de ensino – um livro do PNLD e um de um sistema de ensino – com público-alvo e objetivos não necessariamente iguais entre eles – apresentam o estudo de funções e, mais especificamente, de funções polinomiais do primeiro grau.

A análise textual é fundamentada nos núcleos – elementos de um texto em que se adquire algum conhecimento – e suas classificações, escolhidas dentre teórico, algorítmico, heurístico, restritivo e comunicativo, podendo obter mais de uma denominação, sendo, por sua vez, definido como um núcleo-conjunto. Finda a parte classificatória dos núcleos, verificamos as linguagens utilizadas, sendo possíveis os títulos de exemplar, relativa e funcional, e o condicionamento conceitual, que é o sequenciamento de núcleos e o impacto positivo ou negativo gerado por eles no desenvolvimento teórico do leitor.

Em relação ao *Material P*, dos 95 núcleos encontrados e numericamente descritos no quadro 1, podemos destacar que: i) 30 núcleos são teóricos, dentre os quais 23 são teórico-comunicativos, mostrando que em poucas vezes um novo conceito não é separado dos demais por uma nova nomeação ou simbologia; ii) 8 núcleos algorítmicos em comparação aos 46 heurísticos significa para nós o destaque ao raciocínio lógico e a construção do pensamento, apesar da necessidade em alguns casos do procedimento mecânico; iii) a maior quantidade de núcleos está classificada como heurístico, talvez representando que os autores priorizam o desenvolvimento do assunto pelo próprio estudante e das ligações feitas previamente.

Observando o *Material S*, de todos os 109 núcleos categorizados no quadro 3, podemos evidenciar que: i) dos 44 núcleos teóricos, 24 são teórico-comunicativos, permitindo que em quase metade das vezes um novo elemento teórico surja sem necessariamente uma nova representação; ii) 54 núcleos, aproximadamente 50% do total, são heurísticos enquanto apenas 3 são algorítmicos, potencializando o pensamento crítico do estudante pelas conexões anteriores e formando futuras propriedades; iii) há 8 núcleos restritivos, onde mais da metade se encontra sequenciado no texto.

Em ambas as obras foi possível verificar o uso apropriado das linguagens, adequando-as para cada classificação e, não obstante, ao interesse específico daquele instante. Por exemplo, a alternância entre as linguagens relativas e funcionais quando as funções eram representadas por seu modelo analítico ou por diagramas torna contundente a exploração das inúmeras representações das funções, conforme exigido nos PCN.

Já na ordem de apresentação dos núcleos mostrada nas figuras 13 e 20, é nítida a diferença entre os dois materiais, visto que o Material P organiza seus núcleos em espécies de blocos, possivelmente descrevendo etapas de um processo a ser realizado não instantaneamente, enquanto o Material S costuma realizar quebras nestas sequências com uma frequência muito superior, talvez explicitando uma vontade de construir todos os objetos de modo mais veloz.

Vale ressaltar, no entanto, que o condicionamento conceitual pode não ser comprometido, mesmo que o modelo organizacional dos núcleos não esteja preocupado em agrupar núcleos com classificações próximas, visto que a caracterização de um núcleo, como discutido nos capítulos anteriores, varia de acordo com o analista e suas experiências pessoais. Logo, se as classificações podem ser alteradas de analista para analista, não há como determinar o funcionamento do condicionamento conceitual pelo agrupamento ou não dos núcleos que possuem denominações distintas.

Na parte histórica do desenvolvimento do conceito de função, entendendo que o grupo editorial de cada um impõe determinadas limitações quanto ao número de páginas, dentre outros itens, o livro do PNLD ainda reserva parte de uma página para tentar ilustrar o contexto brevemente, enquanto o material do sistema de ensino não se preocupa nem em citar quando foi formada a definição utilizada por eles e sequer quem a escreveu.

Segundo Sierpinska (1992), é importante aos atos de entendimento que tenhamos a identificação de um objeto em meio a outros, a discriminação entre dois objetos, a generalização e a síntese, não esquecendo de que deve haver um momento para aplicar o conhecimento. O Material P parece seguir os procedimentos como em uma receita de bolo por todos os capítulos analisados, mantendo um equilíbrio entre as partes. O Material S, contudo, propicia em todos os módulos analisados por nós um ambiente em que a generalização e a aplicação são demasiadamente exploradas, quando em comparação aos demais pontos de observação.

Apesar de verificarmos alguns erros conceituais no material do sistema de ensino, o que não aconteceu no livro do PNLD, entendemos que a participação ativa do professor é suficiente para que não haja deficiências na construção do conceito de função e, particularmente, no conceito de funções afim, visto que a cooperação entre o material utilizado e o docente que o utiliza é essencial para o desenvolvimento completo do grupo de discentes que participa do processo educacional.

Reforçando o rigor matemático exigido em publicações, inclusive as de cunho educacional, porém sem desmerecer o material do sistema de ensino, listaremos na sequência um conjunto de núcleos encontrados do Material S que causaram algum tipo de estranhamento em nós, seja por um erro, de fato, seja por um desconforto na leitura de uma definição, por exemplo. O único interesse neste índice é a melhora do material em uma edição futura, caso seja um desejo dos autores.

No material didático em questão, apontamos: i) erro de notação nos núcleos S.C.001.022, S.R.024.027, S.HR,026.028, S.HR.027.028, S.HR.028.028, S.HR.029.028 e S.R.071.075; ii) erro de definição nos núcleos S.TC.004.023, S.TC.005.023, S.TC.032.035, S.TC.038.036 e S.TC.051.047; iii) descrição confusa nos núcleos S.TC.012.025, S.TC.022.027 e S.T.030.028; iv) erro na linguagem utilizada nos núcleos S.C.023.027, S.H.069.074 e S.TH.079.077.

Sendo assim, pelos objetivos propostos por nós neste trabalho de utilizar a análise textual de Dormolen (1986) ao estudo de funções no ensino médio em dois materiais com propostas aparentemente diferentes, destacando os núcleos, classificando-os, avaliando as linguagens e o condicionamento conceitual, permitindo as comparações entre as obras, nos convencemos de termos alcançado aquilo que almejávamos, deixando a possibilidade de utilização destas informações em trabalhos futuros cujos interesses sejam de enriquecer e aprimorar o campo da Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1977.

BORBA, M. C. **A Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** In: Reunião anual da Anped, 27., 2004. Caxambu. *Anais*... Caxambu: Anped, 2004. p. 1-18. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/borba-minicurso_a-pesquisa-qualitativa-em-em.pdf>. Acesso em: 03/07/2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. v. 3. Brasília: MEC/SEF, 1997.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais**: ensino médio. Brasília: MEC/SEMTEC, 1999.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (Ensino Médio). Brasília: MEC, 2000.

______. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais +** (PCN+) – Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

______. Ministério da Educação. **PNLD 2018**: matemática – guia de livros didáticos – ensino médio. Brasília: MEC/SEB, 2017.

CARVALHO, J. B. P. F; LIMA, P. F. **Escolha e uso do livro didático**. In: CARVALHO, João Bosco Pitombeira Fernandes de (Org.). Matemática: Ensino fundamental. 17. ed. Brasília: Ministério da Educação, 2010. Cap. 1. p. 15-30. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=7842-2011-matematica-capa-pdf&category_slug=abril-2011-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 10 dez. 2017.

CLEMENT, L. L. **What do students really know about functions?** Mathematics Teacher, v. 94, n. 9, p. 745-748, 2001.

DORMOLEN, J. **Textual Analysis**. In: CHRISTIANSEN, B.; HOWSON, A. G.; OTTE, M. (eds.). Perspectives on Mathematics Education, p.141-171. Dordrecth, Holanda: Reidel Publishing Company, 1986.

DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. Tradução: MORETTI, M. T. Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, dez. 2012. Título original: Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266>. Acesso em: 20 nov. 2018.

HAMLEY, H. R. **The Function Concept in School Mathematics**. The Mathematical Gazette, v. 18, n. 229, p. 169-179, 1934.

JONES, M. **Demystifying Functions:** The Historical and Pedagogical Difficulties of the Concept of the Function. Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal: v. 7, Iss. 2 , Article 5, 2006. Disponível em: <https://scholar.rose-hulman.edu/rhumj/vol7/iss2/5>. Acesso em: 27 jul. 2018.

KLEINER, I. **Evolution of the Function Concept:** A Brief Survey. The College Mathematics Journal, v. 20, cap. 4, p. 282-300, 1989.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. 2. ed. Rio de Janeiro: E.P.U., 2017.

MINAYO, M. C. S. **Ciência, técnica e arte:** o desafio da pesquisa social. In: DESLANDES, S. F. CRUZ NETO, O. GOMES, R. MINAYO, M. C. S (Org.). Pesquisa social: teoria, método e criatividade. Petrópolis, RJ: Vozes, 1994.

MORAES, R. **Análise de conteúdo**. Revista Educação, Porto Alegre, v. 22, n. 37, p. 7-32, 1999. Disponível em: <http://cliente.argo.com.br/~mgos/analise_de_conteudo_moraes.html>. Acesso em: 20 jun. 2018.

PIRES, R. F. **O conceito de função:** Uma análise histórico epistemológica. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 12., 2016. São Paulo. *Anais*... São Paulo: SBEM, 2016. p. 1-12. Disponível em: < http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6006_2426_ID.pdf>. Acesso em: 22 mai. 2018.

PONTE, J. P. **The History of the Concept of Function and Some Educational Implications.** The Mathematics Educator, v. 3, n. 2, 1992.

RÜTHING, D. **Some Definitions of the concept of function from Joh. Bernoulli to N. Boubarki**. The Mathematical Intelligencer, v. 6, n. 4, p.72-77, 1984.

SANTANA FILHO, F. **Análise textual:** outro olhar sobre a análise de livros didáticos. 2017. 85 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2017.

SIERPINSKA, A. **On understanding the notion of function**. In: DUBINSKY, E; HAREL, G. (eds.). The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, M. A. A. Notes, v. 25, p. 25-58, 1992.

YOUSCHKEVITCH, A. P. **The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century**. Archive for history of exact sciences, 16 (1), p. 37-85, 1976.