



Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Matemática e Estatística

Alexandre Thiago Braga de Freitas

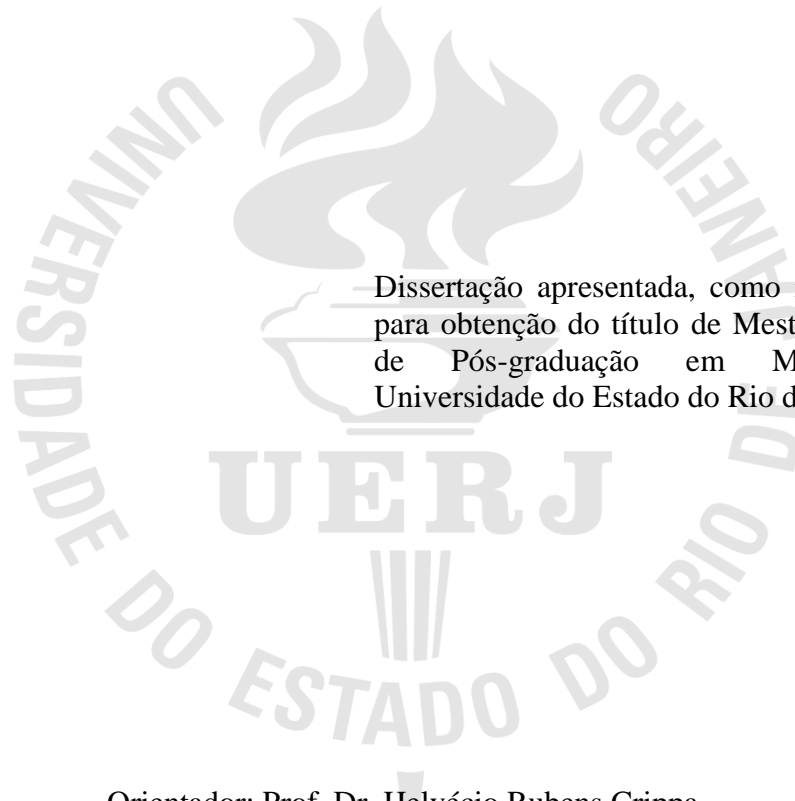
O problema isoperimétrico clássico: história e solução geométrica

Rio de Janeiro

2015

Alexandre Thiago Braga de Freitas

O Problema Isoperimétrico Clássico: História e Solução Geométrica



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-graduação em Matemática, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Helvécio Rubens Crippa

Rio de Janeiro

2015

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

F853 Freitas, Alexandre Thiago Braga de.
O problema isoperimétrico clássico: história e solução geométrica /
Alexandre Thiago Braga de Freitas. – 2015.
41 f. : il.

Orientador: Helvécio Rubens Crippa.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
- Profmat) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de
Matemática e Estatística.

1. Cálculo das variações - Teses. 2.Desigualdades (Matemática) -
Teses. I. Crippa, Helvécio Rubens. II. Universidade do Estado do Rio de
Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU 517.97

Autorizo para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta
dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Alexandre Thiago Braga de Freitas

O problema isoperimétrico clássico: história e solução geométrica

Dissertação apresentada, como requisito parcial, para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 28 de agosto de 2015.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Helvécio Rubens Crippa (Orientador)

Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Fernando Antonio de Araujo Carneiro

Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof.^a Dra. Marisa Beatriz Bezerra Leal

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro

2015

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, por ser essencial em minha vida, ao meu pai Eduardo Antonio Pereira de Freitas, minha mãe Sonia Braga de Freitas e a minha irmã e amigos pelo apoio, pelas ajudas e pelos incentivos ao longo da conclusão desta dissertação.

Ao orientador Helvécio Rubens Crippa e à Marisa Beatriz Bezerra Leal por me incentivarem a crescer pessoal e profissionalmente; e acreditarem em meu potencial.

À Lidiane da Silva Lourenço e Mariana Magalhães Neto por me apoiarem e incentivarem a conclusão desta dissertação.

AGRADECIMENTOS

Tenho a agradecer, primeiramente, à Deus por me tranquilizar nos diversos momentos de angústia e preocupação.

Às pessoas mais próximas de mim, por não medirem esforços em me dar as condições para a realização de meus estudos e a todos os professores que se fizeram presentes neste Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

Aos meus pais e irmã que me incentivaram para continuar e concluir este mestrado, mesmo diante de adversidades.

Às amigas Mariana Magalhães Neto e Luciana Gomes, sem as quais muito deste trabalho não poderia ter sido realizado.

Injustiça seria não mencionar o professor Helvécio que aceitou o convite para ser meu orientador; orientação essa, com bastante disposição, persistência e paciência para me ajudar na construção deste trabalho.

E a todas as outras pessoas que direta ou indiretamente colaboraram com o sucesso deste trabalho.

A mente que se abre para uma nova ideia jamais voltará ao tamanho original.

Albert Einstein

RESUMO

Freitas, Alexandre Thiago Braga de. *O Problema Isoperimétrico Clássico: História e Solução Geométrica*. 2015. 41f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

Neste trabalho conta-se de maneira sucinta e objetiva a história do Problema Isoperimétrico, um dos que mais influenciou o desenvolvimento da Matemática em todos os tempos, cuja origem remonta os antigos gregos. Ele foi diretamente responsável, por exemplo, pelo desenvolvimento da Geometria dos gregos, do Cálculo das Variações e dos Multiplicadores de Euler-Lagrange e a Teoria do Cálculo das Várias Variáveis de Weierstrass.

A história do Problema Isoperimétrico é contada a partir da Lenda da princesa Dido, passando pelos estudos dos antigos geômetras gregos, século III a.C. ao século IV d.C., e chegando as grandes contribuições dos matemáticos dos séculos XVIII a XX na solução completa do problema, com todo o rigor que a matemática exige.

São muitas as soluções conhecidas do Problema Isoperimétrico. Aqui apresenta-se uma solução geométrica do problema, cuja prova se fundamenta na Geometria Euclidiana, o que torna o trabalho acessível para os alunos do ensino médio.

Palavras-chave: Problema Isoperimétrico. Problema de Dido. História do Problema Isoperimétrico. Solução Geométrica do Problema Isoperimétrico.

ABSTRACT

Freitas, Alexandre Thiago Braga de. *The Classical Isoperimetric Problem: history and geometric solution*. 2015. 41 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

This paper work tells in a succinct and objective way the history of the Isoperimetric Problem, one of that most influenced the development of Mathematics at all times, which origin dates back to the ancient Greeks. It was directly responsible for, for example, the development of the Greeks' Geometry, the Calculation of Variations and the Euler-Lagrange Multipliers and the theory of the calculation of Several Variations of Weierstrass.

The history of the Isoperimetric Problem is told from the legend of princess Dido, going through studies of ancient Greek Geometers, 3rd century BC to 4th century AD, and getting to the great contributions of 18th to 20th century mathematicians at the complete solution of the problem, strictly like mathematics requires.

There are many solutions known of the Isoperimetric Problem. Here, we present a geometrical solution of the problem, in which the proof is based on Euclidean Geometry, which makes the work accessible to high school students.

Keywords: Isoperimetric Problem. Dido's Problem. History of the Isoperimetric Problem. Geometric Solution of the Isoperimetric Problem.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Ilustração do corte do couro em tiras.....	12
Figura 2 –	Triângulos de mesmo perímetro.....	16
Figura 3 –	Quadrilátero convexo.....	19
Figura 4 –	Quadrilátero inscrito na circunferência.....	23
Figura 5 –	Quadriláteros inscritível e não inscritível.....	24
Figura 6 –	Triângulos de mesmo perímetro.....	25
Figura 7 –	Transformando um polígono não convexo em convexo.....	27
Figura 8 –	Processo de busca dos vértices no polígono.....	28
Figura 9 –	Processo para tornar um polígono em regular.....	29
Figura 10 –	Processo de permutação dos lados do polígono.....	30
Figura 11 –	Congruência dos triângulos $A_iA_jA_k$ e $B_iB_jB_k$	31
Figura 12 –	Deformando o quadrilátero.....	32
Figura 13 –	Quadriláteros $ABCD$ e $ABC''D''$	32
Figura 14 –	Polígono regular de n lados.....	34
Figura 15 –	Polígono de n vértices.....	36
Figura 16 –	Transformando uma curva não convexa em curva convexa.....	37
Figura 17 –	Deformando o quadrilátero para torná-lo cocircular.....	38

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	10
1	A HISTÓRIA DO PROBLEMA	11
1.1	A lenda de Dido	11
1.2	Os gregos antigos	12
1.3	Século XVIII - XX	13
2	RESULTADOS PRELIMINARES	16
2.1	Fórmula de Heron	16
2.2	Fórmula de Bretschneider	18
3	O PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO	25
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	39
	REFERÊNCIAS	40
	ANEXO A – Parte do cântico I da “Eneida”	41

INTRODUÇÃO

Um dos problemas que mais contribuiu para o desenvolvimento da Matemática desde a época dos antigos gregos é o Problema Isoperimétrico. Estudados por centenas de matemáticos ao longo dos séculos, foi diretamente responsável, por exemplo, pelo desenvolvimento da Geometria dos gregos, do Cálculo das Variações e dos Multiplicadores de Euler-Lagrange e a Teoria do Cálculo das Várias Variáveis de Weierstrass.

Neste trabalho apresentamos um apanhado histórico do Problema Isoperimétrico, desde o seu nascimento na Grécia antiga até o século XX, tomando por base os artigos de Tapia [9], Siegel [8] e Blasjo [1]. No segundo capítulo, recordamos dois resultados clássicos, o cálculo da área de um triângulo qualquer (Fórmula de Heron) e de um quadrilátero convexo (Fórmula de Bretschneider).

O terceiro capítulo é dedicado a uma prova geométrica do Problema Isoperimétrico, seguindo o artigo de Moreira e Saldanha [6]. A ideia de apresentar esta prova, em detrimento de outras baseadas, por exemplo, na Teoria do Cálculo das Variações ou ainda no Cálculo Diferencial e Integral, é tornar o trabalho mais acessível e intelegível mesmo para alunos do ensino médio.

Nas considerações finais esclarecemos o uso deste material para que seja uma referência dos professores dos diferentes níveis de ensino, auxiliando-os em suas aulas e atividades complementares.

1 A HISTÓRIA DO PROBLEMA

Aqui contaremos uma breve história da extensa vida do problema isoperimétrico, sem ter a pretensão de esgotar o assunto, visto que, segundo Tapia [9], este é o problema que mais influenciou a Matemática em todos os tempos. O problema isoperimétrico remonta a literatura e a geometria antigas e estava relacionado com fenômenos da natureza, como o fato das abelhas construírem as colmeias com as células na forma hexagonal.

1.1 A lenda de Dido

Na literatura romana o problema é reconhecido como lenda de Dido, e faz parte do Cântico I da “Eneida”, obra em que Virgílio (70 a.C. – 19 a.C.) narra a epopeia de Enéas de Tróia. Ver em anexo A trecho do Cântico I, no qual se evidencia o problema, traduzida em verso por Manuel Odorico Mendes, no século XIX [10].

Dido (ou Elisa) era uma princesa fenícia do século IX a.C. da cidade de Tiro, às margens do Mediterrâneo, localizada onde hoje é o Líbano, e irmã do rei Pigmalião. Dido se casou com um grande sacerdote de nome Arquebas que possuía uma grande fortuna e era o segundo homem mais importante do Estado depois do rei. A fim de roubar a fortuna do cunhado, Pigmalião mandou assassinar Arquebas. Horrorizada e temendo por sua vida, Dido então fugiu em um navio acompanhada por nobres tírios descontentes e um grande número de seguidores dispostos a fundar uma nova cidade. Seguiram rumo ao norte da África, onde foram recebidos de forma amistosa pelos indígenas. Dido pediu ao chefe local um pedaço de terra para que pudesse se estabelecer e, em troca de sua fortuna, foi-lhe oferecido a terra que pudesse cercar com o couro de um boi. Dido mandou que o couro do boi fosse cortado em tiras tão finas quanto possível e depois unidas de forma a constituírem um longo fio (Figura 1).

Figura 1 – Ilustração do corte do couro do boi em tiras



Legenda: Dido vistoriando o corte do couro.

Fonte: MADEIRA, 2005, f. ii.

Com o fio ela mandou construir um semicírculo que, juntamente com a fronteira natural do mar, cercou uma quantidade de terra com uma área maior do que qualquer um poderia esperar. Assim, Dido ergueu a lendária cidade de “Qart Hadash” (Cartago).

Aparentemente a princesa conhecia a desigualdade isoperimétrica e sabia aplicar este conhecimento para obter a melhor solução possível para o seu problema, ou seja, a maior quantidade de terra. O Problema Isoperimétrico:

“ Entre todas as curvas fechadas no plano de comprimento dado L , qual é aquela que cerca a maior área ”,

é conhecido hoje em dia como o Problema de Dido, em sua homenagem.

1.2 Os gregos antigos

Isoperimétrico (o estudo de figuras geométricas de igual perímetro) foi um tópico abraçado pelos antigos gregos. Embora a origem do problema isoperimétrico fosse atribuído a eles, não é conhecido quem entre eles foi o primeiro a enunciar o problema, enunciar a solução ou tentar a solução. Alguns historiadores afirmam que foi Pitágoras (580 a.C. – 500 a.C.) com o princípio do máximo do círculo, mas Porter [7] afirma que o conhecimento de Pitágoras sobre o assunto não era nada mais que acreditar que entre todas as figuras planas

o círculo é a mais bela. A história das provas geométricas pelos antigos gregos foi registrada por Pappus de Alexandria (290 d.C. – 350 d.C.), o último dos grandes geômetras gregos. Em sua obra, ele creditou os resultados isoperimétricos a Zenodorus (200 a.C. – 140 a.C.), autor do livro “On Isoperimetric Figures”. Infelizmente este livro foi perdido, mas parte do trabalho foi preservada. O trabalho preservado inclui dois resultados e suas provas.

Resultado 1. Entre todos os polígonos de igual número de lados e igual perímetro, o polígono regular engloba a maior área.

Resultado 2. O círculo engloba uma área maior que qualquer polígono regular de mesmo perímetro.

Entretanto, na prova do primeiro resultado, Zenodorus assumiu a existência de uma solução antes de prová-lo e esta lacuna em sua prova só foi corrigida após dois mil anos por Weierstrass. Historiadores e matemáticos creditam a Zenodorus a primeira tentativa de provar que o círculo é a solução do problema isoperimétrico, afirmando, porém, que a prova ou tinha falha ou estava incompleta. Historiadores matemáticos tendem a concordar que Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.) estava consciente do problema isoperimétrico e de sua solução, entretanto não existe concordância se ele tentou, ou não, uma prova do problema, pois, infelizmente, o seu trabalho, assim como o de Zenodorus, foi perdido.

1.3 Século XVIII – XX

Jacob Steiner (1796 – 1867) foi um dos mais brilhantes e criativos geômetras da história. Suas investigações matemáticas foram confinadas à geometria com total exclusão da análise, que iniciava sua caminhada com base no cálculo diferencial. Mais do que isso, ele duvidava que alguma coisa que não pudesse ser provada com geometria, pudesse ser provada com ferramentas da análise. Steiner percebeu que os argumentos dos gregos estavam incompletos e em 1838 publicou a primeira das cinco provas equivalentes que o círculo resolvia o problema isoperimétrico. Historiadores matemáticos promovem a sua prova e chamam-na de modelo de engenhosidade matemática. Steiner vangloriou-se de ter feito com a geometria o que não tinha sido feito e nem poderia ser feito com a análise, isto é, resolver o problema isoperimétrico. Na sua prova, Steiner utilizou um procedimento geométrico que hoje é chamado de “simetrização de Steiner” e consistia em mostrar que qualquer curva que não fosse o círculo poderia ser transformada em uma nova curva de mesmo perímetro e área

maior. Ele então concluiu, como consequência, que o círculo seria a solução do problema isoperimétrico. Liderados por Peter Dirichlet, os analistas da época apontaram a Steiner que sua solução não podia ser considerada uma prova rigorosa, a menos que ele assumisse *a priori* que o problema isoperimétrico tinha solução, ou seja, assumindo a existência da solução ele provou que a solução é o círculo.

Coube a Weierstrass, 40 anos depois, a primeira prova rigorosa da solução do problema isoperimétrico como uma consequência de sua “Teoria de Cálculo de Várias Variáveis” de 1870. Devido à propaganda negativa que Steiner fazia da análise, Weierstrass, introduziu seu trabalho relativo ao problema isoperimétrico com o seguinte comentário:

“ Uma discussão detalhada desse problema é desejável, desde que Steiner era de opinião que os métodos de cálculo das variações não eram suficientes para dar uma prova completa, mas o cálculo das variações está em uma posição de provar tudo isto, como mostraremos mais tarde; além disso, ele pode mostrar o que Steiner não poderia – que tal máximo realmente existe. ”

Outra prova rigorosa do problema isoperimétrico fundamentada em cálculo e análise foi dada por F. Edler mais ou menos na mesma época que a prova de Weierstrass.

Euler, em 1744, construiu a teoria dos multiplicadores para resolver o problema isoperimétrico. Ele mostrou que a função do semicírculo satisfazia as equações de Euler-Lagrange e ele acreditava que tal demonstração resolvia o problema, isto é, o semicírculo era a solução procurada. Estudiosos logo perceberam que a prova era apenas um condição necessária para a solução do problema, mas não suficiente; em outras palavras, satisfazer as equações de Euler-Lagrange dava ao semicírculo apenas a condição de candidato a solução. Somente 135 anos mais tarde a suficiência da prova de Euler foi provada, pela primeira vez, novamente por Weierstrass, conhecido por muitos como o pai da análise, através de sua elegante e sofisticada teoria de suficiência para o mais simples problema do cálculo das variações.

Após a solução do problema isoperimétrico dado por Weierstrass em 1879, muitos artigos com demonstrações rigorosas apareceram na literatura. Entre elas faremos referência a Hurwitz (1902) e Lebesgue (1906) através do uso de séries de Fourier, Caratheodory (1909) que completou a prova de Steiner empregando um elegante e belo argumento de análise baseado na compacidade dos conjuntos da reta real. Para uma lista razoavelmente completa até o ano de 1931, pode-se consultar Porter [7].

Mais recentemente, citamos a prova de E. Schmidt (1939) baseada em cálculo e álgebra linear elementar, que pode ser encontrada em Hehl [3] e entre as provas que usam cálculo na demonstração a menor e uma das mais simples é dada por P.D.Lax [4] em 1995 e pode ser facilmente reproduzida num curso de cálculo elementar.

As principais referências utilizadas para o histórico apresentado acima foram os artigos de Tapia [9], Siegel [8] e Blasjo [1], nos quais se podem encontrar referências para todos os trabalhos citados.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

Dois resultados clássicos para o cálculo da área de um triângulo e de um quadrilátero serão lembrados aqui e utilizados nas secções seguintes.

2.1 Fórmula de Heron

Heron de Alexandria foi um grande matemático e inventor que viveu no século I d.C. e descobriu uma fórmula para obter a área de um triângulo a partir do comprimento dos seus lados. A fórmula faz parte da sua obra *Metrica*, um tratado sobre questões de geometria, que ficou desaparecida até 1896.

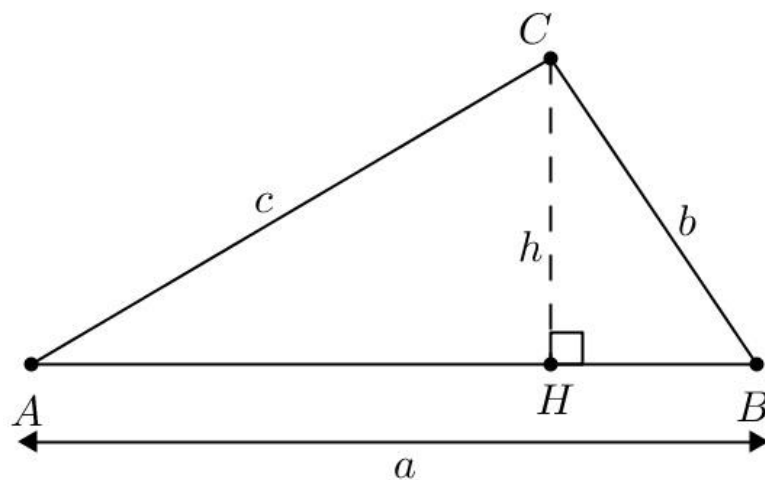
Fórmula de Heron: A área S de um triângulo ABC de lados $a = AB$, $b = BC$ e $c = CA$ e ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} é dada por

$$S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)},$$

na qual $2p = a + b + c$.

Prova: Seja ABC um triângulo qualquer de base AB fixa e perímetro dado $2p = a + b + c$.

Figura 2 – Triângulo qualquer



Legenda: Triângulo qualquer de altura h .
Fonte: O autor, 2015.

Traçamos a altura do triângulo, $h = CH$, onde H é um ponto sobre o segmento AB ou do prolongamento do segmento AB .

Primeiramente, utilizaremos a definição de cosseno do vértice A , para definirmos o tamanho de AH .

$$\cos \hat{A} = \frac{AH}{c} \Rightarrow AH = c \cdot \cos \hat{A} \quad [1]$$

Em seguida, utilizaremos o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AHC .

$$c^2 = AH^2 + h^2 \Rightarrow AH = \sqrt{c^2 - h^2} \quad [2]$$

Substituindo [1] em [2], obtemos:

$$c \cdot \cos \hat{A} = \sqrt{c^2 - h^2} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{\sqrt{c^2 - h^2}}{c} \quad [3]$$

Assim, definimos o cosseno do vértice A , não levando em conta o tamanho de AH .

Agora, utilizaremos o Teorema dos cossenos e isolaremos h^2 .

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{A} \quad [4]$$

Substituindo [3] em [4], obtemos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot \sqrt{c^2 - h^2}$$

Segue que:

$$\begin{aligned} 2 \cdot a \cdot \sqrt{c^2 - h^2} &= a^2 - b^2 + c^2 \Rightarrow \sqrt{c^2 - h^2} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2 \cdot a} \Rightarrow \\ \Rightarrow h^2 &= c^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2 \cdot a} \right)^2 \quad [5] \end{aligned}$$

Agora, podemos calcular a área S do triângulo ABC .

$$S = \frac{a \cdot h}{2} \Rightarrow 2 \cdot S = a \cdot h$$

Elevando os dois lados da equação ao quadrado, obtemos:

$$4 \cdot S^2 = a^2 \cdot h^2 \quad [6]$$

Substituindo [5] em [6], obtemos:

$$\begin{aligned} 4 \cdot S^2 &= a^2 \cdot \left[c^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2 \cdot a} \right)^2 \right] \\ 4 \cdot S^2 &= \frac{4 \cdot a^2 \cdot c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2}{4} \quad [7] \end{aligned}$$

Desenvolvendo $(a^2 - b^2 + c^2)^2$, obtemos:

$$\begin{aligned} (a^2 - b^2 + c^2)^2 &= (a^2 - b^2 + c^2) \cdot (a^2 - b^2 + c^2) \\ (a^2 - b^2 + c^2)^2 &= a^4 - a^2 \cdot b^2 + a^2 \cdot c^2 - a^2 \cdot b^2 + b^4 - b^2 \cdot c^2 + a^2 \cdot c^2 - b^2 \cdot c^2 + c^4 \end{aligned}$$

$$(a^2 - b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 - 2.a^2.b^2 + 2.a^2.c^2 - 2.b^2.c^2 \quad [8]$$

Substituindo [8] em [7], obtemos:

$$4.S^2 = \frac{4.a^2.c^2 - a^4 - b^4 - c^4 + 2.a^2.b^2 - 2.a^2.c^2 + 2.b^2.c^2}{4}$$

Segue que:

$$S^2 = \frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2.a^2.b^2 + 2.a^2.c^2 + 2.b^2.c^2}{16} \quad [9]$$

Considere $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Segue que:

$$p - a = \frac{1}{2}(-a + b + c), \quad p - b = \frac{1}{2}(a - b + c) \quad \text{e} \quad p - c = \frac{1}{2}(a + b - c).$$

Logo,

$$\begin{aligned} p.(p - a).(p - b).(p - c) &= \frac{1}{16}(a + b + c).(-a + b + c).(a - b + c).(a + b - c) = \\ &= \frac{1}{16}(-a^2 + a.b + a.c - a.b + b^2 + b.c - a.c + b.c + c^2).(a^2 + a.b - a.c - a.b - b^2 \\ &\quad + b.c + a.c + b.c - c^2) = \\ &= \frac{1}{16}(-a^2 + b^2 + c^2 + 2.b.c).(a^2 - b^2 - c^2 + 2.b.c) = \\ &= \frac{1}{16}(-a^4 + a^2.b^2 + a^2.c^2 - 2.a^2.b.c + 2.a^2.b^2 - b^4 - b^2.c^2 + 2.b^3.c + a^2.c^2 \\ &\quad - b^2.c^2 - c^4 + 2.b.c^3 + 2.a^2.b.c - 2.b^3.c - 2.b.c^3 + 4.b^2.c^2) \end{aligned}$$

Assim,

$$p.(p - a).(p - b).(p - c) = \frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2.a^2.b^2 + 2.a^2.c^2 + 2.b^2.c^2}{16} \quad [10]$$

Substituindo [10] em [9], obtemos:

$$S^2 = p.(p - a).(p - b).(p - c)$$

Portanto, obtemos a área (Fórmula de Heron),

$$S = \sqrt{p.(p - a).(p - b).(p - c)}.$$

2.2 Fórmula de Bretschneider

O matemático alemão Carl Anton Bretschneider descobriu em 1842 uma fórmula para calcular a área de um quadrilátero convexo em função dos seus lados e ângulos internos. Esta

fórmula generaliza uma outra, provada por Brahmagupta no século VII d.C. que se restringe a quadriláteros inscritos em uma circunferência.

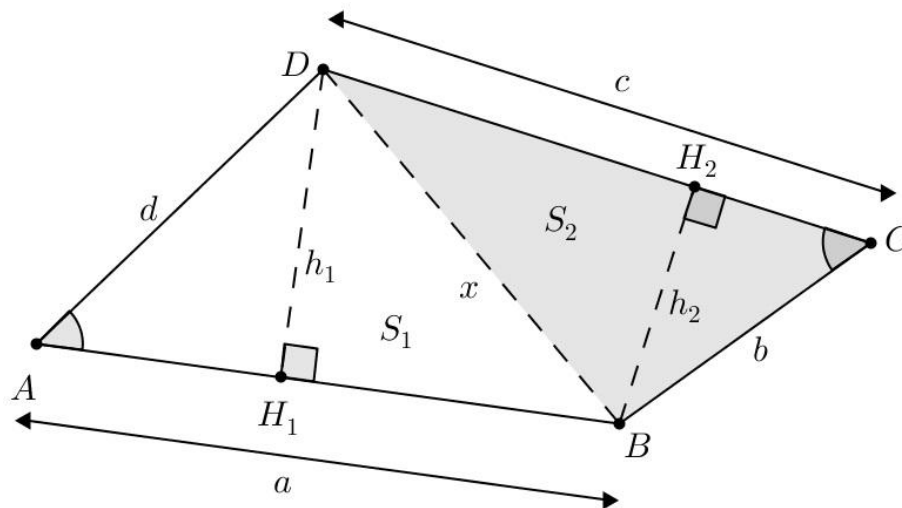
Fórmula de Bretschneider: A área S de um quadrilátero convexo $ABCD$ de lados $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$ e $d = DA$ e ângulos \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} e \hat{D} é dada por

$$S = \sqrt{(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c) \cdot (p-d) - \frac{1}{2}abcd[1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})]} ,$$

na qual $2p = a + b + c + d$.

Prova: Considere um quadrilátero de lados $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$ e $d = DA$, ângulos \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} e \hat{D} e perímetro dado $2p = a + b + c + d$.

Figura 3 – Quadrilátero convexo



Legenda: Quadrilátero convexo formado por dois triângulos.
Fonte: O autor, 2015.

Tracemos a diagonal BD e em seguida, tracemos as alturas dos triângulos DAB e BCD , $h_1 = DH_1$ e $h_2 = BH_2$, onde H_1 e H_2 são os pontos sobre os segmentos AB e CD ou do prolongamento do segmento AB e CD , respectivamente.

Primeiramente, utilizaremos a definição de seno do vértice A e do vértice C , para definirmos o comprimento de h_1 e h_2 . Assim,

$$h_1 = d \cdot \text{sen } \hat{A} , \quad \boxed{11}$$

$$h_2 = b \cdot \text{sen } \hat{C} . \quad \boxed{12}$$

Agora, calcularemos a área S do quadrilátero $ABCD$, sabendo que é a soma das áreas S_1 e S_2 dos triângulos DAB e BCD , respectivamente:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{a \cdot h_1}{2} + \frac{c \cdot h_2}{2} . \quad \boxed{13}$$

Substituindo [11] e [12] em [13], resulta que

$$S = \frac{a \cdot d \cdot \sen \hat{A}}{2} + \frac{b \cdot c \cdot \sen \hat{C}}{2}$$

Elevando os dois lados da equação ao quadrado, obtém-se

$$S^2 = \frac{a^2 \cdot d^2 \cdot \sen^2 \hat{A}}{4} + \frac{a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \sen \hat{A} \cdot \sen \hat{C}}{2} + \frac{b^2 \cdot c^2 \cdot \sen^2 \hat{C}}{4}$$

ou, de modo equivalente

$$16 \cdot S^2 = 4 \cdot a^2 \cdot d^2 \cdot \sen^2 \hat{A} + 8 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \sen \hat{A} \cdot \sen \hat{C} + 4 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot \sen^2 \hat{C}.$$

Segue que:

$$16 \cdot S^2 = 4 \cdot a^2 \cdot d^2 \cdot (1 - \cos^2 \hat{A}) + 8 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \sen \hat{A} \cdot \sen \hat{C} + 4 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot (1 - \cos^2 \hat{C}) \quad [14]$$

Sabendo que $\cos(\hat{A} + \hat{C}) = \cos \hat{A} \cdot \cos \hat{C} - \sen \hat{A} \cdot \sen \hat{C}$ obtém-se

$$\sen \hat{A} \cdot \sen \hat{C} = \cos \hat{A} \cdot \cos \hat{C} - \cos(\hat{A} + \hat{C}). \quad [15]$$

Substituindo [15] em [14], obtemos:

$$16 \cdot S^2 = 4 \cdot a^2 \cdot d^2 - 4 \cdot a^2 \cdot d^2 \cdot \cos^2 \hat{A} + 8 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot (\cos \hat{A} \cdot \cos \hat{C} - \cos(\hat{A} + \hat{C})) + 4 \cdot b^2 \cdot c^2 - 4 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot \cos^2 \hat{C}$$

ou

$$16 \cdot S^2 = 4 \cdot a^2 \cdot d^2 - 4 \cdot a^2 \cdot d^2 \cdot \cos^2 \hat{A} + 8 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \cos \hat{A} \cdot \cos \hat{C} - 8 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \cos(\hat{A} + \hat{C}) + 4 \cdot b^2 \cdot c^2 - 4 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot \cos^2 \hat{C}.$$

Observe que:

$$\begin{aligned} & -4 \cdot a^2 \cdot d^2 \cdot \cos^2 \hat{A} + 8 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \cos \hat{A} \cdot \cos \hat{C} - 4 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot \cos^2 \hat{C} = \\ & = -(2 \cdot a \cdot d \cdot \cos \hat{A} - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{C})^2 \end{aligned}$$

Substituindo na expressão acima, resulta que

$$16 \cdot S^2 = 4 \cdot a^2 \cdot d^2 - 8 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \cos(\hat{A} + \hat{C}) + 4 \cdot b^2 \cdot c^2 - (2 \cdot a \cdot d \cdot \cos \hat{A} - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{C})^2 \quad [16]$$

Agora, utilizaremos o Teorema dos cossenos, vemos que

$$x^2 = a^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos \hat{A} = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{C}$$

implica

$$a^2 - b^2 - c^2 + d^2 = 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos \hat{A} - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{C}. \quad [17]$$

Substituindo [17] em [16], obtemos:

$$16 \cdot S^2 = 4 \cdot a^2 \cdot d^2 - 8 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \cos(\hat{A} + \hat{C}) + 4 \cdot b^2 \cdot c^2 - (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2 \quad [18]$$

Desenvolvendo $(a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2$,

$$(a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2 = (a^2 - b^2 - c^2 + d^2) \cdot (a^2 - b^2 - c^2 + d^2) =$$

$$\begin{aligned}
&= a^4 - a^2 \cdot b^2 - a^2 \cdot c^2 + a^2 \cdot d^2 - a^2 \cdot b^2 + b^4 + b^2 \cdot c^2 - b^2 \cdot d^2 - a^2 \cdot c^2 + b^2 \cdot c^2 + c^4 \\
&\quad - c^2 \cdot d^2 + a^2 \cdot d^2 - b^2 \cdot d^2 - c^2 \cdot d^2 + d^4 = \\
&= a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 2 \cdot a^2 \cdot b^2 - 2 \cdot a^2 \cdot c^2 + 2 \cdot a^2 \cdot d^2 + 2 \cdot b^2 \cdot c^2 - 2 \cdot b^2 \cdot d^2 \\
&\quad - 2 \cdot c^2 \cdot d^2. \quad \boxed{19}
\end{aligned}$$

Substituindo $\boxed{19}$ em $\boxed{18}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
16 \cdot S^2 &= 4 \cdot a^2 \cdot d^2 - 8 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \cos(\hat{A} + \hat{C}) + 4 \cdot b^2 \cdot c^2 - a^4 - b^4 - c^4 - d^4 + 2 \cdot a^2 \cdot b^2 \\
&\quad + 2 \cdot a^2 \cdot c^2 - 2 \cdot a^2 \cdot d^2 - 2 \cdot b^2 \cdot c^2 + 2 \cdot b^2 \cdot d^2 + 2 \cdot c^2 \cdot d^2
\end{aligned}$$

de onde segue que:

$$\begin{aligned}
16 \cdot S^2 &= -a^4 - b^4 - c^4 - d^4 + 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + 2 \cdot a^2 \cdot c^2 + 2 \cdot a^2 \cdot d^2 + 2 \cdot b^2 \cdot c^2 + 2 \cdot b^2 \cdot d^2 \\
&\quad + 2 \cdot c^2 \cdot d^2 - 8 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \cos(\hat{A} + \hat{C}). \quad \boxed{20}
\end{aligned}$$

Note que:

$$\begin{aligned}
-8 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \cos(\hat{A} + \hat{C}) &= 8 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d - 8 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d - 8 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \cos(\hat{A} + \hat{C}) \\
&= 8 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d - 8 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot [1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})].
\end{aligned}$$

Assim, de $\boxed{20}$, resulta que

$$\begin{aligned}
16 \cdot S^2 &= -a^4 - b^4 - c^4 - d^4 + 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + 2 \cdot a^2 \cdot c^2 + 2 \cdot a^2 \cdot d^2 + 2 \cdot b^2 \cdot c^2 + 2 \cdot b^2 \cdot d^2 \\
&\quad + 2 \cdot c^2 \cdot d^2 + 8 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d - 8 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot [1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
16 \cdot S^2 + 8 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot [1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})] &= \\
&= -a^4 - b^4 - c^4 - d^4 + 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + 2 \cdot a^2 \cdot c^2 + 2 \cdot a^2 \cdot d^2 + 2 \cdot b^2 \cdot c^2 \\
&\quad + 2 \cdot b^2 \cdot d^2 + 2 \cdot c^2 \cdot d^2 + 8 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d.
\end{aligned}$$

Dividindo os dois lados da equação por 16, obtemos:

$$\begin{aligned}
S^2 + \frac{a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot [1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})]}{2} &= \\
&= \frac{-a^4 - b^4 - c^4 - d^4 + 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + 2 \cdot a^2 \cdot c^2}{16} \\
&\quad + \frac{2 \cdot a^2 \cdot d^2 + 2 \cdot b^2 \cdot c^2 + 2 \cdot b^2 \cdot d^2 + 2 \cdot c^2 \cdot d^2 + 8 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d}{16}. \quad \boxed{21}
\end{aligned}$$

Considere $p = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$. Segue que:

$$p - a = \frac{1}{2}(-a + b + c + d), \quad p - b = \frac{1}{2}(a - b + c + d), \quad p - c = \frac{1}{2}(a + b - c + d)$$

$$\text{e } p - d = \frac{1}{2}(a + b + c - d).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c) \cdot (p - d) &= \\
&= \frac{1}{16}(-a + b + c + d) \cdot (a - b + c + d) \cdot (a + b - c + d) \cdot (a + b + c - d) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{16}(-a^2 + a.b - a.c - a.d + a.b - b^2 + b.c + b.d + a.c - b.c + c^2 + c.d + a.d \\
&\quad - b.d + c.d + d^2). (a^2 + a.b + a.c - a.d + a.b + b^2 + b.c - b.d - a.c \\
&\quad - b.c - c^2 + c.d + a.d + b.d + c.d - d^2) = \\
&= \frac{1}{16}(-a^2 - b^2 + c^2 + d^2 + 2.a.b + 2.c.d). (a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2.a.b + 2.c.d) = \\
&= \frac{1}{16}(-a^4 - a^2.b^2 + a^2.c^2 + a^2.d^2 - 2.a^3.b - 2.a^2.c.d - 2.a^2.b^2 - b^4 + b^2.c^2 \\
&\quad + b^2.d^2 - 2.a.b^3 - 2.b^2.c.d + a^2.c^2 + b^2.c^2 - c^4 - c^2.d^2 + 2.a.b.c^2 \\
&\quad + 2.c^3.d + a^2.d^2 + b^2.d^2 - c^2.d^2 - d^4 + 2.a.b.d^2 + 2.c.d^3 + 2.a^3.b \\
&\quad + 2.a.b^3 - 2.a.b.c^2 - 2.a.b.d^2 + 4.a^2.b^2 + 4.a.b.c.d + 2.a^2.c.d \\
&\quad + 2.b^2.c.d - 2.c^3.d - 2.c.d^3 + 4.a.b.c.d + 4.c^2.d^2).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(p-a).(p-b).(p-c).(p-d) &= \\
&= \frac{-a^4 - b^4 - c^4 - d^4 + 2.a^2.b^2 + 2.a^2.c^2}{16} \\
&\quad + \frac{2.a^2.d^2 + 2.b^2.c^2 + 2.b^2.d^2 + 2.c^2.d^2 + 8.a.b.c.d}{16}. \quad \boxed{22}
\end{aligned}$$

Substituindo $\boxed{22}$ em $\boxed{21}$, obtemos:

$$S^2 + \frac{a.b.c.d.[1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})]}{2} = (p-a).(p-b).(p-c).(p-d).$$

Segue que:

$$S^2 = (p-a).(p-b).(p-c).(p-d) - \frac{a.b.c.d.[1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})]}{2}.$$

Portanto,

$$S = \sqrt{(p-a).(p-b).(p-c).(p-d) - \frac{a.b.c.d.[1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})]}{2}}$$

que é a fórmula procurada.

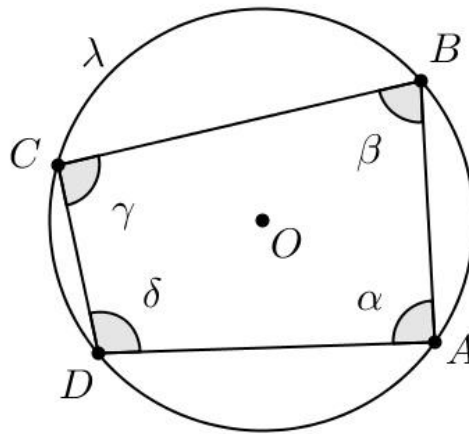
Uma propriedade dos quadriláteros que também usaremos no decorrer do trabalho é dada a seguir:

Lema 1: Um quadrilátero $ABCD$ convexo é inscrito se, e somente se, seus ângulos opostos são suplementares (em particular, $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$).

Demonstração:

a) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo inscrito em uma circunferência λ (Figura 4).

Figura 4 – Quadrilátero inscrito na circunferência



Legenda: Quadrilátero inscrito na circunferência.
Fonte: O autor, 2015.

Pelo teorema do ângulo inscrito, temos que o ângulo α é igual à metade do arco \widehat{BCD}

$$\alpha = \frac{\widehat{BCD}}{2}$$

e o ângulo γ é igual à metade do arco \widehat{DAB}

$$\gamma = \frac{\widehat{DAB}}{2}.$$

Logo:

$$\alpha + \gamma = \frac{\widehat{BCD}}{2} + \frac{\widehat{DAB}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$

Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360° , segue que $\beta + \delta = 180^\circ$.

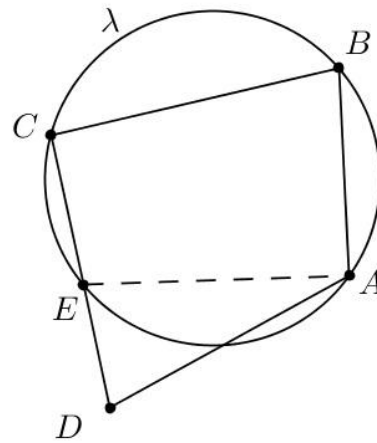
b) Suponha agora, por hipótese, que:

$$\alpha + \gamma = 180^\circ$$

$$\beta + \delta = 180^\circ$$

Se o quadrilátero $ABCD$ não for inscritível, toda circunferência passando pelos pontos A, B e C não passaria por D (Figura 5).

Figura 5 – Quadriláteros inscritível e não inscritível



Legenda: Tornando um quadrilátero não inscritível em inscritível numa circunferência formada pelos pontos A , B e C .

Fonte: O autor, 2015.

Sendo E o ponto de interseção da reta \overline{CD} com a circunferência λ , o quadrilátero $ABCE$ é inscrito. Segue que, pela parte (a), temos: $\hat{B} + \hat{E} = 180^\circ$.

Como, por hipótese, $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$, temos que $\hat{D} \equiv \hat{E}$, o que configura um absurdo em virtude do teorema do ângulo externo no triângulo ADE . Portanto, o quadrilátero $ABCD$ é inscritível.

■

3 O PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

O estudo que faremos a seguir da desigualdade isoperimétrica segue o artigo de Moreira e Saldanha [6] e será desenvolvido em partes, através de várias proposições, que serão utilizadas em cadeia para a prova do teorema principal desta seção.

Proposição 1: Dentre todos os triângulos ABC de base AB fixa e perímetro dado, aquele de maior área é o isósceles. Além disso, dados dois triângulos ABC e ABC' com mesmo perímetro e $|\overline{AC} - \overline{BC}| < |\overline{AC'} - \overline{BC'}|$, a área de ABC é maior que a área de ABC' .

Demonstração: Considere a , b e c os lados do triângulo ABC , sendo c e $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ números fixos. Pela fórmula de Heron, sua área S é dada por

$$S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}.$$

Denotando por k a constante $p - c = k$, na igualdade acima, obtém-se

$$S^2 = pk \cdot (p - a) \cdot (p - b)$$

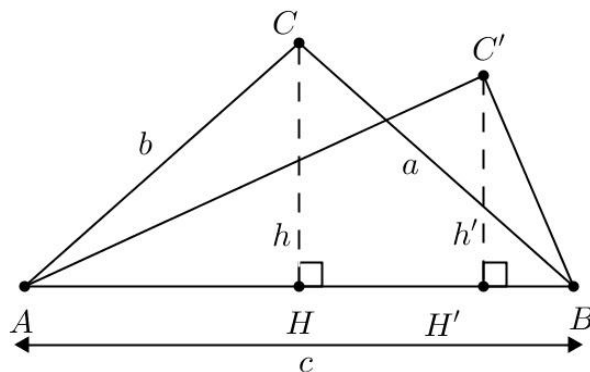
Observe que $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ implica que $b = 2p - a - c$. Assim:

$$\begin{aligned} S^2 &= pk \cdot (p - a) \cdot [p - (2p - a - c)] = pk \cdot (p - a) \cdot (-p + a + c) = \\ &= pk \cdot (p - a) \cdot (a - k) = pk \cdot [-a^2 + (p + k) \cdot a - pk] \end{aligned}$$

O máximo de S^2 , e conseqüentemente o de S , ocorrerá no ponto de máximo do polinômio $p(a) = -a^2 + (p + k) \cdot a - pk$ que é $a = \frac{p+k}{2} = \frac{2p-c}{2}$. Como $a + b = 2p - c$, conclui-se que o máximo de S ocorre quando $a = b$. Logo, ABC é isósceles.

Agora considere os triângulos ABC e ABC' de mesmo perímetro (Figura 6).

Figura 6 – Triângulos de mesmo perímetro



Legenda: Triângulos de mesmo perímetro, mas de áreas diferentes.

Fonte: O autor, 2015.

Pela primeira parte da demonstração sabemos que a maior área ocorre quando a diferença $\overline{AC} - \overline{BC} = 0$. Consequentemente, a área do triângulo aumenta quanto menor for a diferença entre os lados fixados. Logo, se

$$|\overline{AC} - \overline{BC}| < |\overline{AC'} - \overline{BC'}|$$

conclui-se que a área de ABC será maior que a área de ABC' .

■

Proposição 2: Dentre todos os quadriláteros com lados dados, aquele de maior área é o inscritível. Mais ainda, se consideramos dois quadriláteros $ABCD$ e $A'B'C'D'$ com lados correspondentes iguais, se $|\hat{A} + \hat{C} - \pi| < |\hat{A}' + \hat{C}' - \pi|$ então a área de $ABCD$ é maior que a área de $A'B'C'D'$.

Demonstração: Pela fórmula de Bretschneider, a área de um quadrilátero $ABCD$ de lados $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$ e $d = DA$, ângulos \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} e \hat{D} e perímetro $2p = a + b + c + d$, é dada por

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - \frac{1}{2}abcd[1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})]} .$$

Assim, a área S será máxima quando o cosseno de $\hat{A} + \hat{C}$ assumir o menor valor, ou seja, quando $\cos(\hat{A} + \hat{C}) = -1$. Mas, nesse caso, $\hat{A} + \hat{C} = \pi$ e pelo Lema 1, $ABCD$ é um quadrilátero inscritível.

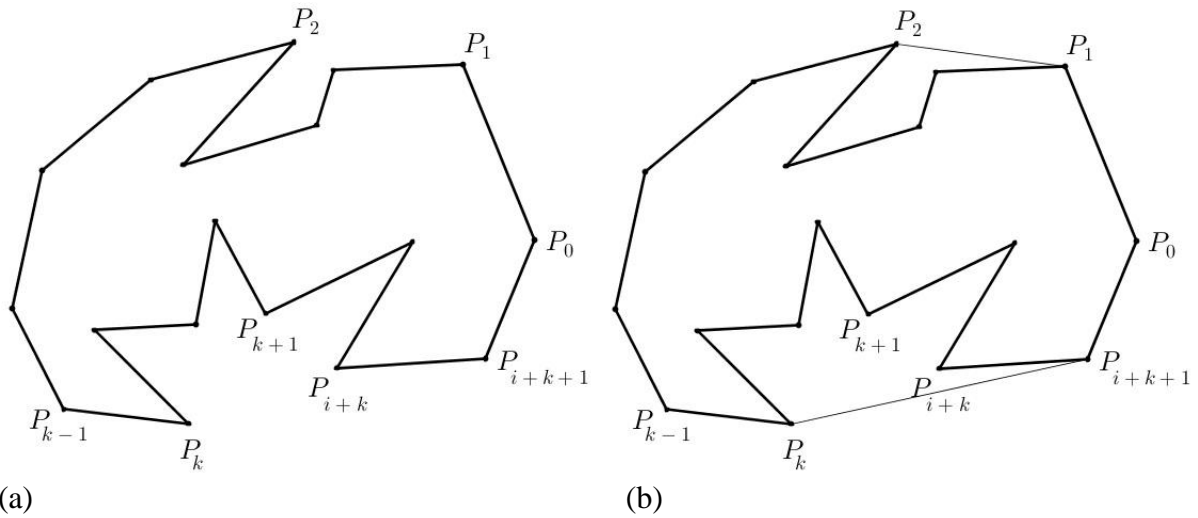
Pela expressão da fórmula, podemos concluir que S aumenta à medida que $\hat{A} + \hat{C}$ se aproxima de π e, consequentemente, $\cos(\hat{A} + \hat{C})$ tende para -1 , o que comprova a segunda parte desta afirmação.

■

Proposição 3: Dado um polígono não convexo, temos outro polígono com número de lados menor, perímetro menor e área maior.

Demonstração: A prova consiste em obter dois vértices não consecutivos de modo que a reta por eles determinada tenha o polígono inteiramente contido em um dos semiplanos que ela determina. O novo polígono é obtido substituindo a poligonal ligando os dois vértices pelo segmento que os une. A Figura 7 representa geometricamente o que foi descrito acima.

Figura 7 – Transformando um polígono não convexo em um convexo



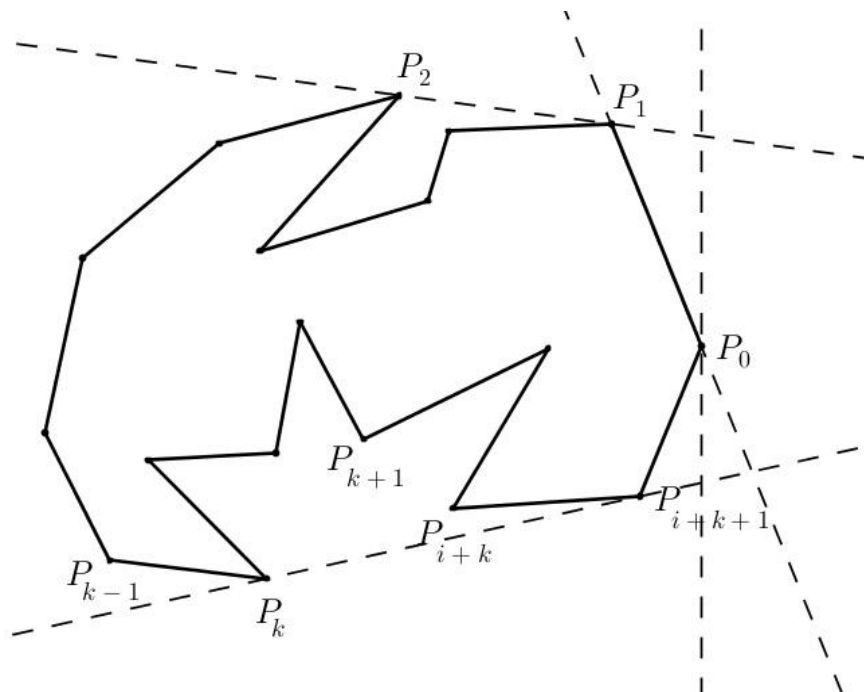
Legenda: (a) – polígono não convexo; (b) – polígono convexo de perímetro menor e área maior.
 Fonte: O autor, 2015.

Note que, como no novo polígono substitui-se uma poligonal por seu segmento de reta, ele tem um número menor de lados e um perímetro menor. Além disso, uma área maior.

A determinação de tais vértices do polígono é feita considerando no plano cartesiano o vértice $P_0(x_0, y_0)$ de maior abscissa entre todos os vértices. A reta vertical $x = x_0$, passando por P_0 , tem todo o polígono contido no semiplano $x \leq x_0$. A seguir, gira-se esta reta no sentido anti-horário ao redor de P_0 até encontrar-se o primeiro dos outros vértices do polígono, denotado por P_1 .

A reta r contendo o segmento $\overline{P_0P_1}$, ainda mantém todo o polígono de um lado. Se o segmento $\overline{P_0P_1}$ não for um dos lados do polígono, os vértices P_0 e P_1 serão os dois que buscamos. Se existir outro vértice sobre a mesma reta, tornamos o vértice inicial P_0 e o mais distante de P_0 (Figura 8).

Figura 8 – Processo de busca dos vértices no polígono



Legenda: a reta r no sentido anti-horário.
 Fonte: O autor, 2015.

Caso contrário, isto é, se $\overline{P_0P_1}$ for um lado do polígono, continua-se o processo de busca. Neste caso, o polígono está interiormente contido em um dos semiplanos determinado pela reta r que o contém $\overline{P_0P_1}$. A construção prossegue girando a reta r no sentido anti-horário, ao redor de P_1 até encontrarmos um novo vértice P_2 . Novamente, tem-se as duas possibilidades descritas inicialmente a partir de P_0 . Este processo deve parar em algum vértice do polígono distinto de P_0 , pois caso o contrário, volta-se ao vértice P_0 , e neste caso, o polígono seria convexo, o que contradiz a hipótese. Isto conclui a prova da afirmação. ■

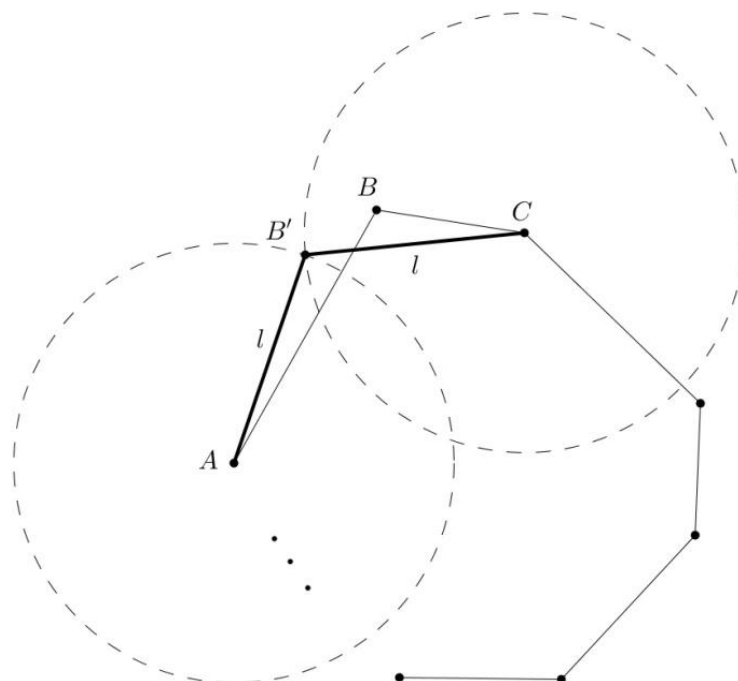
O novo polígono convexo obtido pelo processo anterior repetido um número suficiente de vezes é chamado “fecho convexo” do polígono original. Os vértices do fecho convexo é um subconjunto do conjunto de vértices do polígono original. Além disso, o fecho convexo tem um número menor de lados, perímetro menor e área maior que o polígono inicial.

Proposição 4: Dado qualquer polígono não regular¹, existe um polígono regular com número de lados menor ou igual, perímetro menor ou igual, e área maior.

Demonstração: A demonstração será feita por indução sobre o número de lados e consiste de dois passos. Primeiramente, a partir de um polígono qualquer se obtém um polígono equilátero e em seguida um polígono regular com o mesmo número de lados que o inicial, sempre aumentando a área a cada passo. Sem perda de generalidade, podemos considerar em todo o processo um polígono convexo, pois se em algum momento ele deixar de ser convexo, recorreremos a Proposição 3 que nos fornece um convexo, com menor número de lados, menor perímetro e área maior.

Para tornar o polígono dado em um equilátero, considera-se a medida de cada um dos seus lados do novo polígono igual a média aritmética l do comprimento de todos os lados do polígono dado. Suponha que dois lados vizinhos AB e BC tenham medidas diferentes, sendo um maior que l e outro menor que l . Pela Proposição 1, pode-se encontrar um ponto B' para substituir B , mantendo o perímetro fixo e aumentando a área, de modo que $\overline{AB'} = l$ (Figura 9).

Figura 9 – Processo para tornar um polígono em regular



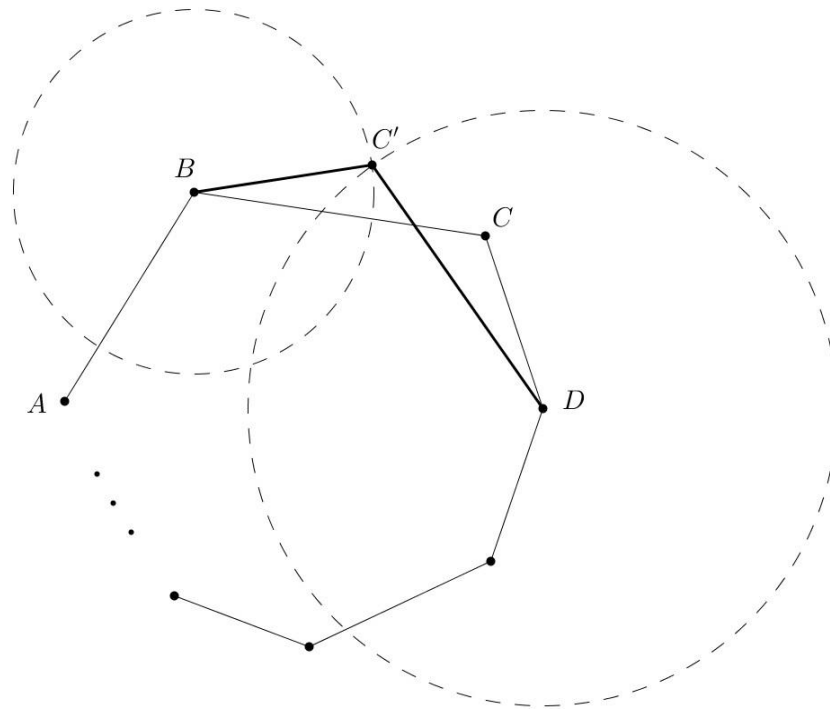
Legenda: Tornando o polígono regular de lado igual a média aritmética l do comprimento de todos os lados do polígono dado.

Fonte: O autor, 2015.

¹ **Definição:** Dizemos que um polígono é regular se for equilátero (todos os seus lados são congruentes) e equiângulo (todos os ângulos internos são congruentes).

Caso, no polígono dado, não existam dois tais lados vizinhos e o polígono não seja equilátero permuta-se os lados de forma que se chegue a essa situação. Note que esta permutação não altera o perímetro e nem a área. Para ilustrar este fato olhemos para o polígono da Figura 10.

Figura 10 – Processo de permutação dos lados do polígono



Legenda: Permutando os lados do polígono, observando que $\overline{BC'} = \overline{CD}$ e $\overline{C'D} = \overline{BC}$.

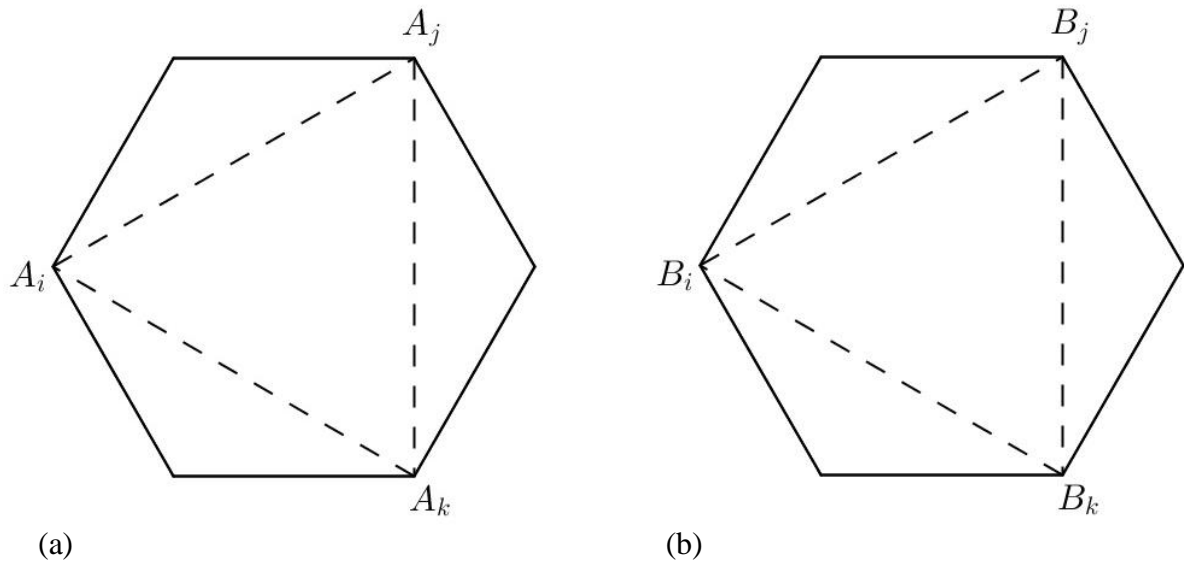
Fonte: O autor, 2015.

Para permutar o lado BC com o lado CD , podemos substituir o vértice C por C' de forma que $\overline{BC'} = \overline{CD}$ e $\overline{C'D} = \overline{BC}$, escolhendo C' do mesmo lado que C em relação à reta BD . Observe que o perímetro se mantém inalterado e, também, a área, pois $\Delta BCD = \Delta BC'D$. Após uma sequência finita apropriada de tais permutações, chega-se a situação descrita acima para transformar o polígono em outro equilátero. Repetindo-se o processo sucessivamente considerando-se sempre dois lados vizinhos, a cada passo aumenta-se um lado igual a l , até que o polígono se torne equilátero, sempre aumentando a área.

O próximo passo é transformar o polígono equilátero em um equiângulo (portanto regular), sempre aumentando a área. Os vértices do triângulo equilátero cujos ângulos internos são iguais ao ângulo interno do polígono regular são chamados “bons” e os demais “maus”.

Em primeiro lugar, note que não pode haver menos do que quatro vértices maus no polígono equilátero. De fato, suponha um polígono equilátero de lado l , $A_1A_2 \dots A_n$ com 3 vértices, A_i, A_j e A_k , maus e considere $B_1B_2 \dots B_n$ um polígono regular de mesmo lado l (Figura 11).

Figura 11 – Congruência dos triângulos $A_iA_jA_k$ e $B_iB_jB_k$



Legenda: (a) – Triângulo $A_iA_jA_k$; (b) – Triângulo $B_iB_jB_k$.

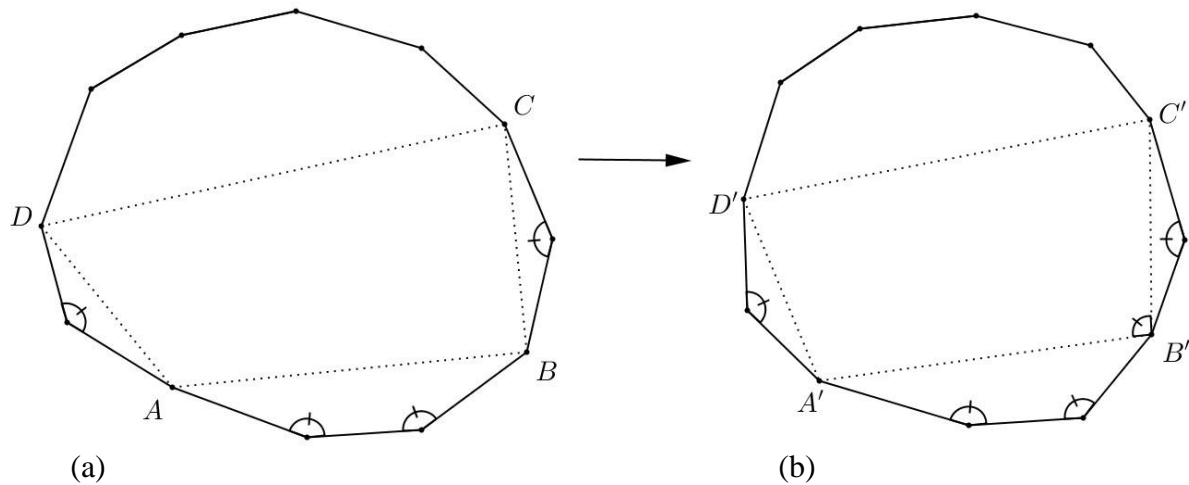
Fonte: O autor, 2015.

Note que os polígonos $A_iA_{i+1} \dots A_j$ e $B_iB_{i+1} \dots B_j$ são congruentes, assim como $A_jA_{j+1} \dots A_k$ é congruente a $B_jB_{j+1} \dots B_k$ e $A_kA_{k+1} \dots A_i$ é congruente a $B_kB_{k+1} \dots B_i$. Além disso, os triângulos $A_iA_jA_k$ e $B_iB_jB_k$ são congruentes. Todas essas congruências implicam que $A_1A_2 \dots A_n$ é um polígono regular, o que é uma contradição.

Assim, considere no polígono equilátero (mas não regular) o conjunto M , de no mínimo quatro elementos, formados pelos vértices maus. Neste conjunto, toma-se dois vértices maus, A e B , A um ângulo muito grande e B , muito pequeno, consecutivos em M .

Constrói-se agora o quadrilátero $ABCD$, onde C é consecutivo de B e A é consecutivo de D em M . Nosso objetivo é deformar este quadrilátero de modo que se diminua os ângulos \hat{A} e \hat{C} e aumente-se os ângulos \hat{B} e \hat{D} até que \hat{A} ou \hat{B} torne-se bom (Figura 12).

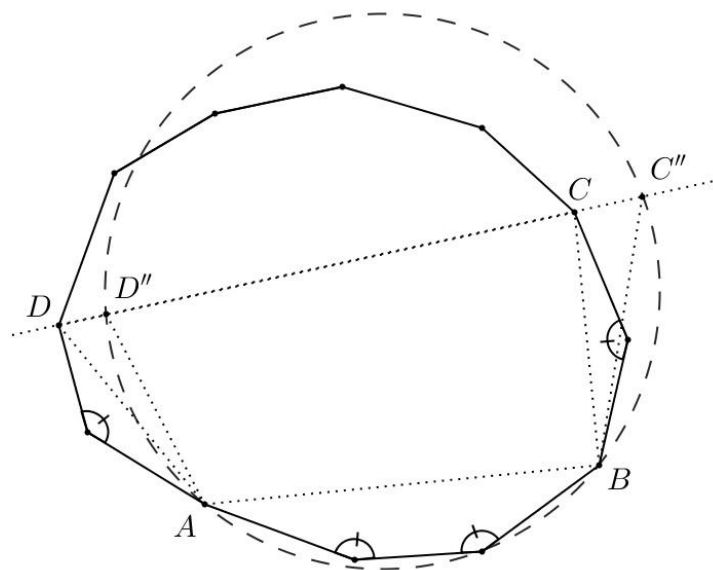
Figura 12 – Deformando o quadrilátero



Legenda: (a) – Quadrilátero $ABCD$ de ângulos maus; (b) – Quadrilátero $A'B'C'D'$ com o ângulo B' bom.
 Fonte: O autor, 2015.

Ao deformar o quadrilátero $ABCD$, deforma-se simultaneamente o polígono, mantendo rígidos os arcos entre dois vértices (maus) do quadrilátero. Após um número finito de passos, repetindo o raciocínio acima, obtém-se o polígono regular.

Resta verificar que em cada passo, a área do quadrilátero aumenta e, conseqüentemente, a área do polígono. Suponha que o quadrilátero $ABCD$ de ângulos maus é deformado no quadrilátero $A'B'C'D'$, onde B' é um ângulo bom. Em vista da Proposição 2, basta verificar que se \hat{A} for grande e \hat{B} for pequeno, têm-se $\hat{A} + \hat{C} > \pi$.

Figura 13 – Quadriláteros $ABCD$ e $ABC''D''$ 

Legenda: A área do quadrilátero $ABC''D''$ é maior do que a área do quadrilátero $ABCD$.

Fonte: O autor, 2015.

De fato, o círculo indicado na Figura 13, o raio é igual ao do círculo circunscrito ao polígono regular de lado l . Os pontos C'' e D'' são obtidos pela intersecção da reta passando por C e D , com a circunferência. Por construção, tem-se $B\hat{A}D > B\hat{A}D''$ e $B\hat{C}D > B\hat{C}''D$ o que implica $B\hat{A}D + B\hat{C}D > B\hat{A}D'' + B\hat{C}''D = \pi$. Note que o ângulo \widehat{B}'' é maior que o correspondente \widehat{B} , o que resulta, pelo processo de deformação, que $|\widehat{A}' + \widehat{B}' - \pi| < \widehat{A} + \widehat{C} - \pi$.

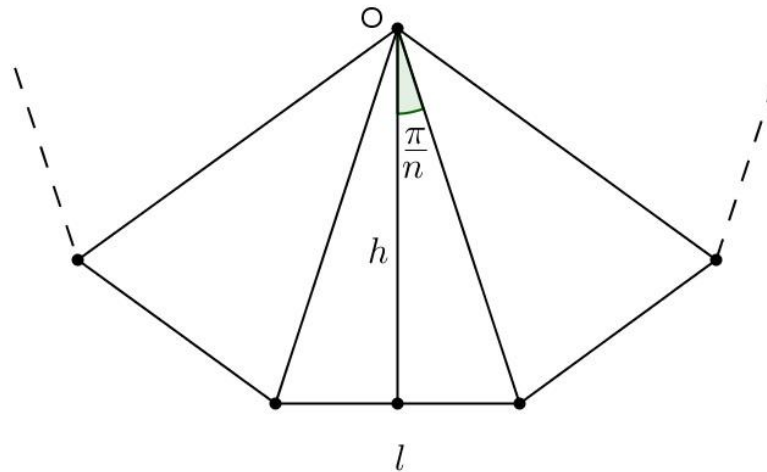
Assim, sempre se pode aumentar o número de vértices bons até obter-se o polígono regular. ■

Proposição 5: Se $n < m$ a área de um polígono regular de n lados é menor que a área de um polígono regular de m lados de mesmo perímetro. Além disso, a área do círculo é maior que a área de qualquer polígono regular de mesmo perímetro.

1ª Demonstração: Podemos supor como hipótese de indução que seja verdadeira a afirmação para $n < m \leq m_0$, então provaremos que a área de um polígono regular de $m_0 + 1$ lados é maior do que a área do polígono regular de m_0 lados e de mesmo perímetro. Tomamos um polígono regular de m_0 lados, mas o veremos como um polígono (não regular) de $m_0 + 1$ lados, sendo um de seus lados com medida igual a zero. Pela proposição 4, podemos encontrar um polígono regular de perímetro igual, área maior e número de lados menor do que ou igual a $m_0 + 1$. Na primeira etapa da construção, o lado de tamanho zero, será tornado positivo. Este número de lados só pode ser igual a $m_0 + 1$, pois senão estaríamos contradizendo a hipótese de indução.

Percebe-se que as áreas dos polígonos de n lados e perímetro dado tendem para a área do círculo, quando n cresce. De fato, o polígono regular de perímetro l tem lado maior do que o do polígono de mesmo tipo inscrito na circunferência de comprimento l e menor do que o do polígono circunscrito a esta circunferência.

2ª Demonstração: Primeiramente vamos expressar a área $A(n)$ de um n -polígono regular em função do perímetro P dado. Assim o lado l do polígono é $l = \frac{P}{n}$. O n -polígono regular é formado pela união de n triângulos isósceles iguais de base l e altura h (Figura 14).

Figura 14 – Polígono regular de n lados

Legenda: Polígono regular de n lados
 Fonte: O autor, 2015.

Portanto, $A(n) = n \frac{lh}{2}$.

Observando o triângulo isósceles, temos que

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = \frac{\frac{l}{2}}{h} = \frac{l}{2h} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{l}{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}$$

Substituindo em $A(n)$, obtém-se

$$A(n) = \frac{n l^2}{4 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}$$

Lembrando que $l = \frac{p}{n}$, conclui-se

$$A(n) = \frac{n \frac{p^2}{n^2}}{4 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}} = \frac{p^2}{4n} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}$$

Multiplicando o numerador e o denominador por $\frac{\pi}{n}$, reescrevemos $A(n)$, como:

$$A(n) = \frac{p^2}{4\pi} \cdot \frac{\frac{\pi}{n}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}$$

Para sabermos como $A(n)$ varia em termos de n , basta estudar a função $f(x) = \frac{x}{\operatorname{tg} x}$,

e analisar o seu comportamento quando $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e tomar $x = \frac{\pi}{n}$, $n \geq 3$. Observe que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 0.$$

Sabemos também, que f é contínua e que a sua derivada

$$f'(x) = \frac{\operatorname{tg}x - x \operatorname{sec}^2x}{\operatorname{tg}^2x} = \frac{1}{\operatorname{tg}x} - \frac{x}{\operatorname{sen}^2x} = \frac{\operatorname{cos}x}{\operatorname{sen}x} - \frac{x}{\operatorname{sen}^2x} = \frac{\operatorname{sen}2x - 2x}{2\operatorname{sen}^2x} < 0$$

pois para $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, temos $\operatorname{sen}2x < 2x$.

Assim f é estritamente decrescente em $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e conseqüentemente $A(n)$ é estritamente crescente. De fato, $n_1, n_2 > 2$ e $n_1 < n_2$, então $x_1 = \frac{\pi}{n_1} > x_2 = \frac{\pi}{n_2}$. Como f é estritamente decrescente, obtém-se $f\left(\frac{\pi}{n_1}\right) < f\left(\frac{\pi}{n_2}\right)$, implicando que $A(n_1) < A(n_2)$. Portanto, a área de um polígono regular de j lados será menor do que a área de um polígono regular de m lados se $j < m$. Além disso, como $A(n) = \frac{p^2}{4\pi} \cdot \frac{\pi}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$ é estritamente crescente e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(n) = \frac{p^2}{4\pi} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}} = \frac{p^2}{4\pi} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg}x} = \frac{p^2}{4\pi}$$

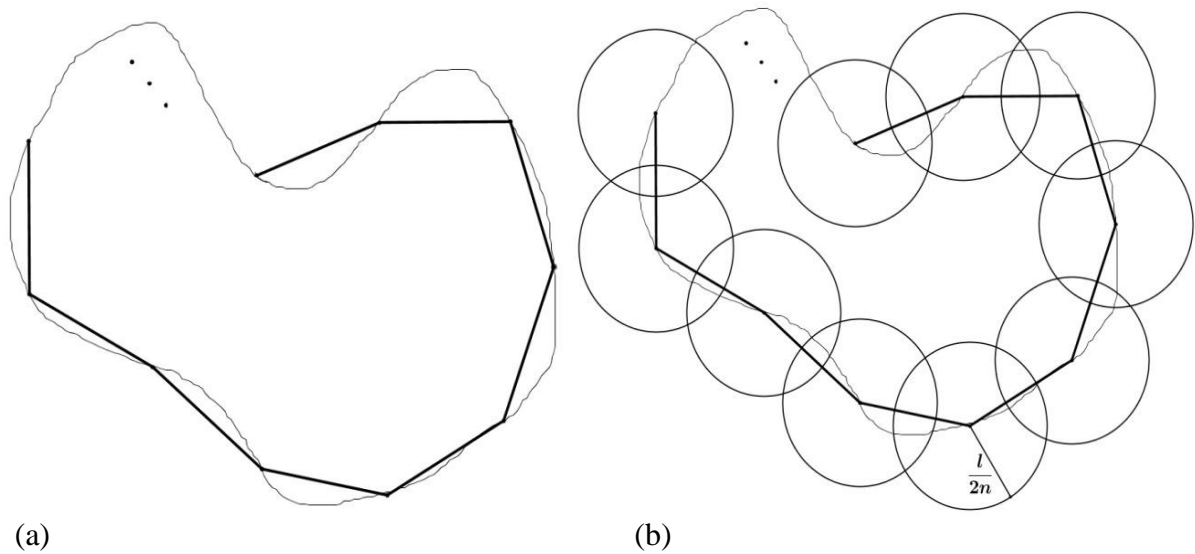
conclui-se que $A(n) < \frac{p^2}{4\pi}$.

Resta mostrar que a área de um círculo é maior que a área de qualquer polígono regular de mesmo perímetro. Para tal, considere um círculo de perímetro p . Portanto o seu raio será $r = \frac{p}{2\pi}$ e sua área $A = \frac{p^2}{4\pi}$, o que conclui a prova, pois como vimos acima a área de um polígono regular de perímetro p é estritamente menor que $\frac{p^2}{4\pi}$.

■

Teorema 1. (Problema Isoperimétrico) Toda curva fechada de comprimento l engloba uma área menor ou igual a $l^2/4\pi$. Além disso, este valor só é alcançado para o círculo de raio $l/2\pi$.

Demonstração: Considere uma curva de comprimento l que engloba a sua área S . Tomemos sobre esta curva n pontos equidistantes em termos do comprimento do arco de curva entre eles. Façamos a ligação destes pontos por segmentos de reta, obtendo um polígono de n lados e conseqüentemente perímetro menor do que l . Tomando o fecho convexo deste polígono, seu perímetro será menor do que l e, pelas Proposições 4 e 5, a sua área A será menor do que $\frac{l^2}{4\pi}$.

Figura 15 – Polígono de n vértices

Legenda: (a) – Polígono de n vértices; (b) – Observando que cada ponto dista menos do que $\frac{l}{2n}$ de seu ponto vizinho.

Fonte: O autor, 2015.

Consideremos a região R formada pelos pontos que pertencem ao fecho convexo e pelos pontos que estão a uma distância menor que $\frac{l}{2n}$ de algum dos n pontos marcados inicialmente sobre a curva dada (Figura 15). Temos, portanto, que a curva original estará totalmente contida nesta região, pois qualquer ponto da curva dista menos do que $\frac{l}{2n}$ de algum destes n pontos. Por outro lado, a área da região R será menor do que ou igual a

$$A + n\pi \left(\frac{l}{2n}\right)^2,$$

pois está contida na união do fecho convexo com n circunferências de raio $\frac{l}{2n}$ e centros nos n pontos. Consequentemente,

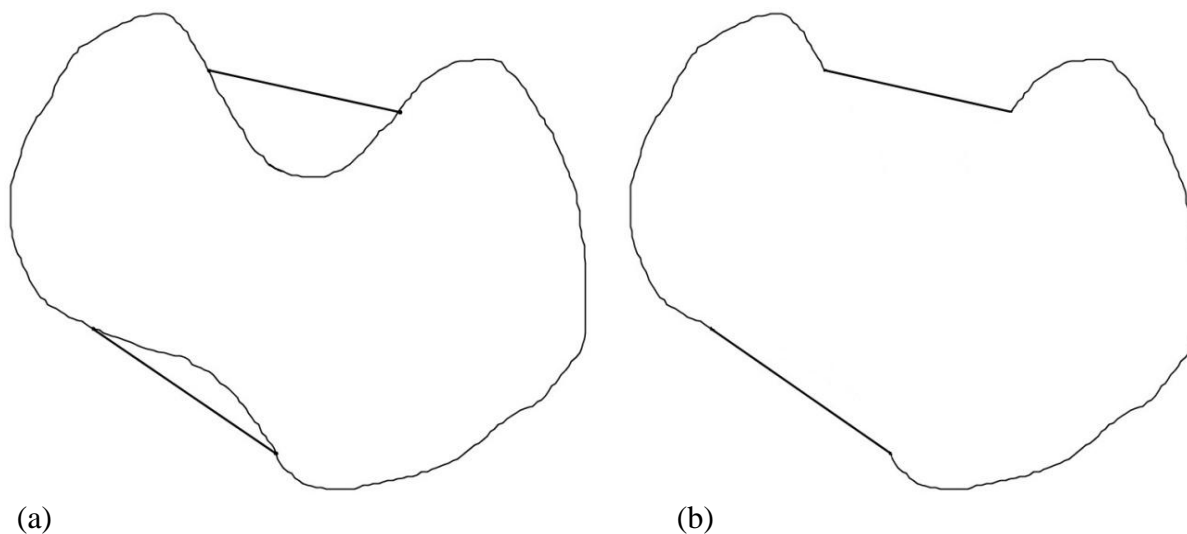
$$S \leq A + n\pi \left(\frac{l}{2n}\right)^2 \leq \frac{l^2}{4\pi} + \frac{\pi l^2}{4n}.$$

Como essa estimativa é válida para qualquer n , temos que

$$S \leq \frac{l^2}{4\pi}.$$

Para provar a segunda parte do teorema, consideramos uma curva de comprimento l englobando a área $\frac{l^2}{4\pi}$ e provemos que ela é necessariamente um círculo.

Figura 16 – Transformando uma curva não convexa em curva convexa



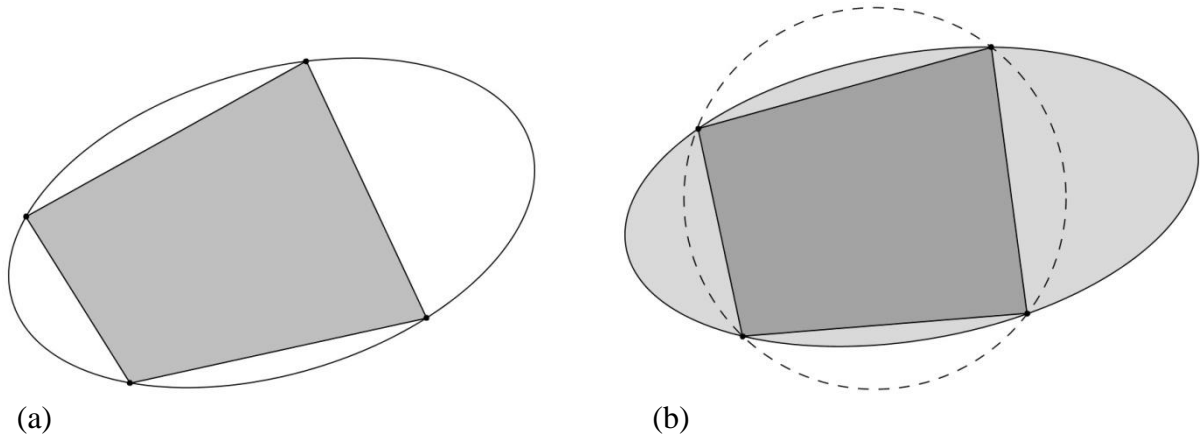
Legenda: (a) – Curva não convexa com segmentos de retas para transformá-la em convexa; (b) – Curva de perímetro menor e área maior que a curva original.

Fonte: O autor, 2015.

Inicialmente observemos que a curva é convexa. De fato, caso ela não seja convexa, existe um segmento de reta unindo dois pontos da curva e que está inteiramente contido no exterior da curva. Note que esse segmento divide a parte do plano exterior a curva em duas regiões, uma limitada e a outra não. Substituindo a porção da curva que toca a região limitada pelo segmento de reta, temos uma nova curva fechada, de perímetro menor e área maior que a curva original, contradizendo o que foi provado na primeira parte do teorema.

Suponhamos por absurdo que a curva convexa não seja um círculo. Então existem quatro pontos sobre a curva que são não cocirculares, isto é, o quadrilátero formado por estes pontos não é inscritível. Se esse quadrilátero for deformado mantendo rígidos os arcos de curva entre dois pontos até tornar-se inscritível, pela Proposição 2, conclui-se que a área da curva está sendo aumentada sem aumentar o seu comprimento, o que contradiz novamente a primeira parte já provada (Figura 17).

Figura 17 – Deformando o quadrilátero para torná-lo cocircular



Legenda: (a) – Quadrilátero não cocircular; (b) – Quadrilátero deformado mantendo rígidos os arcos de curva entre dois pontos até tornar-se inscritível.

Fonte: O autor, 2015.

Portanto, a curva é um círculo.



CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta dissertação demonstramos o Problema Isoperimétrico, um dos problemas que mais contribuiu para o desenvolvimento da Matemática, utilizando, em quase sua totalidade, a geometria euclidiana, que torna o conteúdo mais acessível e inteligível mesmo para alunos do ensino médio.

Professores de diversos níveis de ensino podem utilizar este material para que tenham um fácil entendimento do Problema Isoperimétrico e que possam utilizar como embasamento em suas aulas e atividades complementares, possibilitando a utilização de recursos didáticos, motivando e propiciando a incorporação de conceitos e a resolução de problemas do cotidiano.

As figuras neste trabalho foram elaboradas através do software de matemática dinâmica *GeoGebra*, pois é uma excelente ferramenta para criar ilustrações que podem ser usadas no Microsoft Word, no Open Office ou no LaTeX. A partir disso, propomos que seja desenvolvida uma atividade que utilize esse software matemático e os passos da demonstração do Problema Isoperimétrico. Saliento que esta atividade não fica restringida somente a este software.

Propomos que futuros trabalhos tenham esta dissertação como fundamento e que contenham, em sua elaboração, propostas de atividades direcionadas a alunos dos ensinos fundamental, médio e universitário, aplicações práticas e/ou contextualização em outras áreas de conhecimento.

REFERÊNCIAS

BLASJO, V. **The Evolution of the Isoperimetric Problem.** The American Mathematical Monthly, v. 112, 2005, pp.526-566.

FIGUEIREDO, Djairo G. de. **Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria Euclidiana,** Matemática Universitária, Rio de Janeiro: SBM, n. 9/10, artigo 2, dez.1989,.

HEHL, Andreas. **The Isoperimetric Inequality.** Eberhard Karls Universitaet Tuebingen. Fev.2013. Geometrie Werkstatt. Disponível em: <<https://www.math.uni-tuebingen.de/ab/GeometrieWerkstatt/IsoperimetricInequality.pdf>>. Acesso em: 29 maio 2015.

LAX, P. D. **A Short Path to the Shortest Path.** The American Mathematical Monthly, v. 102, n. 2, 1995, pp.158-159.

MADEIRA, Telma Morais. **O Problema Isoperimétrico Clássico.** Dissertação (Mestrado em Matemática para o Ensino) - Faculdade de Ciências e Tecnologia, Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, 2005. Disponível em: <<https://estudogeral.sib.uc.pt/bitstream/10316/20971/1/Tese%20Completa.pdf>>. Acesso em: 20 de maio de 2014.

MOREIRA, Carlos Gustavo T. de A.; SALDANHA, Nicolau Corção. **A desigualdade isoperimétrica.** Matemática Universitária, Rio de Janeiro: SBM, n.15, artigo 2, dez1993.

PORTER, T. I. **A History of the Classical Isoperimetric Problem.** Master Dissertation. Mathematics Department, University of Chicago, Ago.1931. The Mathematical Association of America. Disponível em: <<http://math.arizona.edu/~dido/porter1933.pdf>>. Acesso em: 20 de maio de 2015.

SIEGEL, Alan. **A Historical Review of the Isoperimetric Theorem in 2-D, and its Place in Elementary Plane Geometry.** Courant Institute of Mathematical Sciences New York University. Disponível em: <<http://www.cs.nyu.edu/faculty/siegel/SCIAM.pdf>>. Aceso em: 07 de fevereiro de 2015.

TAPIA, Richard. **The Isoperimetric Problem Revisited: Extracting a Short Proof of Sufficiency from Euler's 1744 Approach to Necessity.** Artigo, abr.2013. Richard Tapia. Disponível em: <http://www.caam.rice.edu/~rat/cv/tapia_euler.pdf>. Acesso em: 20 de maio de 2014.

VIRGÍLIO, P. **Eneida.** Tradução de Manuel Odorico Mendes. Disponível em: <<http://www.ebooksbrasil.org/eLibris/Eneida.html>>. Acesso em: 14 de janeiro de 2015.

ANEXO A – Parte do cântico I da “Eneida”, obra em que Virgílio (70-19 a.C.) narra a epopeia de Enéas de Tróia

“É longa a injúria, tem rodeios longos;
Mas traçarei seu curso em breve suma.

Siqueu, fenício em lavras opulento,
Foi da mísera esposa, e muito amado:
Com bom presságio o pai lhe dera intacta.
Pigmalião, façanhoso entre os malvados,
Bárbaro irmão, do estado se empossara.
Interveio o furor: de fome de ouro
Cego, e à paixão fraterna sem respeito,
Pérfido, ímpio, a Siqueu nas aras mata;
O fato encobre, e a crédula esperança
Da amante aflita largo espaço ilude
Com mil simulações. Mas do inumado
Consorte, com esgares espantosos,
Pálida em sonhos lhe aparece a imagem:
Da casa o crime e trama desenleia;
A ara homicida, os retalhos peitos
Desnuda, e à pátria intima-lhe que fuja:
Prata imensa e ouro velho, soterrados,
Para o exílio descobre. Ela, inquieta,
Apressa a fuga, e atrai os descontentes
Que ou rancor ao tirano ou medo instiga;
Acaso prestes naus, manda assaltá-las;
Dos tesouros do avaro carregadas
Empegam-se: a mulher conduz a empresa!
Chegam d’alta Cartago onde o castelo
Verás medrando agora e ingentes muros:
Mercam solo (do feito o alcunham Birsa)
Quanto um coiro taurino abranja em tiras.”