Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Josineia Mendes da Costa

Probabilidade: uma releitura do livro O Andar do Bêbado

Rio de Janeiro

2018

Josineia Mendes da Costa

Probabilidade: uma releitura do livro O Andar do Bêbado

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Helvécio Rubens Crippa

Coorientador: André Luiz Cordeiro dos Santos

Rio de Janeiro

2018

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

C837 Costa, Josineia Mendes da.
Probabilidade: uma releitura do livro O andar do Bêbado / Josineia Mendes da Costa – 2018.
81f. : il.

Orientador: Helvécio Rubens Crippa.
Coorientador: André Luiz Cordeiro dos Santos.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Probabilidade - Teses. I. Crippa, Helvécio Rubens.II. Santos, André Luiz Cordeiro dos. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU 519.21

Patricia Bello Meijinhos – CRB-7/5217 – Responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Josineia Mendes da Costa

Probabilidade: uma releitura do livro O Andar do Bêbado

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 31 de agosto de 2018.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Helvécio Rubens Crippa – Orientador
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. André Luiz Cordeiro dos Santos – Coorientador
Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca

Prof. Dr(a). Patrícia Nunes da Silva
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dr.Gladson Octaviano Antunes
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRIO

Rio de Janeiro

2018

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, por todo apoio e incentivo. Agradeço também ao meu orientador, professor Helvécio Rubens Crippa e à professora Patrícia Nunes da Silva, pelas orientações, sugestões e comentários. Ambos contribuíram de forma significativa para minha formação.

Aos demais professores dessa Instituição. É certo que o resultado final tem a contribuição de cada um deles.

Aos companheiros de curso, pela troca de informações, apoio e momentos de descontração.

Agradeço também aquele que participou dessa jornada e esteve ao meu lado durante todo o curso com sugestões e críticas relevantes, à meu esposo Isaque Damião Siqueira Costa, que sempre esteve disposto a ajudar e que dedicou parte do seu tempo para a elaboração do programa voltado para a aplicação lúdica do problema de Monty Hall. Sem você essa conquista não seria possível.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

A matemática não é uma caminhada cuidadosa através de uma estrada bem conhecida, é uma jornada por uma terra selvagem e estranha, onde os exploradores frequentemente se perdem. A exatidão deve ser um sinal aos historiadores de que os mapas já foram feitos e os exploradores se foram para outras terras.

W. S. Anglin

RESUMO

COSTA, Josineia Mendes da. *Probabilidade: uma releitura do livro O Andar do Bêbado*. 2018. 81f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – IME, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

O presente trabalho tem como objetivo fornecer ao professor da Educação Básica um apoio ao planejamento de suas aulas, com a apresentação de um resumo suscinto da teoria e problemas interessantes e que contrariam a intuição, como os problemas de Monty Hall (já clássico), e outros menos conhecidos como o dos aniversários (probabilidade condicional), do truelo (probabilidade da união de infinitos eventos), da loteria canadense (que envolve os números de Stirling). Foi tomado como base para esse texto o livro *O Andar do Bêbado*, best seller do mundialmente renomado divulgador científico Leonard Mlodinow. Muitos dos problemas aqui resolvidos foram tomados daquele texto, e os que foram acrescentados de outras fontes seguiram o mesmo espírito. Alguns problemas versam sobre situações práticas da vida cotidiana, como a interpretação das probabilidades de exames médicos, revelando erros cometidos pelos próprios profissionais de saúde. Ao fim, é apresentado um software que implementa um jogo que simula o problema de Monty Hall, com código fonte incluído no apêndice.

Palavras-chave: Probabilidade condicional. Esperança matemática. Números de Stirling. Problema de Monty Hall.

ABSTRACT

COSTA, Josineia Mendes da. *Probability: an inspection of the book The Drunkard's Walk*. 2018. 81f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – IME, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

The present work aims to provide the teacher of Basic Education with support for the planning of his classes, presenting a theory summary and interesting problems that counterintuitive, as the Monty Hall's problem, and others less known as birthdays' problem (conditional probability), truel's problem (probability of union of infinite events), Canadian lottery's problem (about Stirling numbers). This text was based on the book *The Drunkard's Walk*, the best seller of world-renowned science popularizer Leonard Mlodinow. Many of the problems solved here were taken from that text, and those added from other sources followed the same idea. Some problems deal with practical situations in daily life, such as the interpretation of the probabilities of medical examinations, revealing errors made by health professionals themselves. Finally, we present software that implements a game that simulates the Monty Hall's problem, with source code included in the appendix.

Keywords: Conditional probability. Mathematical expectation. Numbers of Stirling. Monty Hall problem.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

v.a.	Variável aleatória
v.a.c	Variável aleatória contínua
v.a.d	Variável aleatória discreta

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Esta dissertação visa desenvolver o estudo de probabilidade para espaços amostrais discretos com o objetivo de cobrir tanto quanto possível as técnicas existentes, presentes nos livros-textos, mas sem excesso de formalização. Sua principal motivação se deve aos equívocos que muitos cometem ao tentar compreender os eventos aleatórios apenas de modo intuitivo. A teoria das probabilidades é uma das áreas da matemática cuja importância está diretamente ligada não apenas a sua vasta aplicabilidade em diferentes áreas do conhecimento, mas também ao desenvolvimento do raciocínio lógico do indivíduo e a sua capacidade criativa, pois a maioria de seus problemas exigem reflexão e não a simples aplicação de fórmulas.

Uma parte dos problemas contidos no trabalho será acessível a alunos do ensino básico. Entretanto, não faz parte do trabalho pesquisar, muito menos propor uma metodologia de ensino do assunto. O texto compromete-se a fazer uma exposição ordenada logicamente, cobrindo os principais conceitos, ferramentas e uma boa quantidade de problemas. Partimos da leitura do livro *O andar do Bêbado*, e inspirando-se em sua estrutura, colhemos problemas de fácil compreensão, mas que muitas vezes resistem a uma abordagem intuitiva e informal de resolução.

No livro *O andar do bêbado* cujo subtítulo é "*como o acaso determina nossas vidas*", surgem diversas situações nas quais um acontecimento aleatório é capaz de mudar todo o curso de uma história. Assim acontece em nossas vidas, queiramos nós acreditar ou não. Isso porque a todo momento buscamos justificativas para nossas escolhas, seja na vida acadêmica, profissional ou pessoal. Precisamos acreditar que existe um motivo racional, uma explicação coerente que dê sentido as nossas escolhas, que muitas vezes, são simplesmente fruto do mero acaso. O big bang, a teoria da evolução, o processo de seleção natural que levou ao surgimento da vida inteligente, a fecundação de um óvulo, a família na qual você nasceu, o país onde vive, a cultura, a época, sobreviver ao atentado de 11 de setembro como foi o caso do Mlodinow, tudo isso são evidências do papel fundamental do acaso em nossas vidas.

É claro que em alguns acontecimentos parece ser mais fácil aceitar a interferência do acaso que em outros. Temos essa necessidade de acreditar que estamos no comando. É buscando quebrar esse paradigma que nos lançamos no estudo dessa teoria que tanta aplicação possui em nossa vida prática e que tanta confusão desperta na mente das pessoas que possuem apenas uma noção intuitiva do assunto. Para isso iremos mergulhar nas instigantes páginas de MLODINOW em sua obra *O andar do bêbado*.

No capítulo 1 iremos definir espaço amostral, evento e fazer o estudo de alguns problemas envolvendo apenas a escolha de um espaço amostral equiprovável adequado. Também iremos tratar da abordagem histórica da teoria das probabilidades com as idéias de Cardano, Galileu, Huygens, Pascal e Fermat. No capítulo 2, iremos demonstrar alguns teoremas e resolver problemas de probabilidade da união, intersecção e evento complementar. O capítulo 3 tem por objetivo expor o Teorema de Bayes, suas aplicações e os principais tipos de distribuição discreta. No capítulo 4, iremos usar a distribuição normal aplicada a problemas de probabilidade discreta juntamente com seu desenvolvimento histórico (De Moivre, Daniel Bernoulli e Gauss). O último capítulo tem por objetivo propor uma atividade a ser realizada pelos professores de matemática em suas turmas do ensino médio a fim de explorar os conceitos básicos de probabilidade com o uso de recursos tecnológicos.

1 **CONCEITOS PRELIMINARES**

De acordo com MATTHEWS (2017, p. 27), muitas pessoas se surpreendem quando são relatados casos de mortes de pacientes após ingerirem certo medicamento ou quando um certo número de ganhadores da loteria se concentra num mesmo estado e começam a surgir teorias conspiratórias a respeito desses assuntos. É claro que tais eventos são noticiados com destaque na mídia e muitas vezes levam a conclusões precipitadas. Isso porque as pessoas se concentram apenas nos números brutos relacionados a esses casos e não consideram suas frequências relativas. Assim, um evento que assuste aqueles que ingeriram o mesmo medicamento e estão agora pensando em quanto tempo de vida ainda lhes resta ou que faça com que as pessoas que vivem no mesmo estado dos ganhadores da loteria sintam-se mais sortudas podem simplesmente ser eventos raros e isolados e só descobrimos isso quando analisamos suas freqüências relativas, isto é, a freqüência com que ocorreram dividido pela freqüência com que teriam oportunidade de ocorrer.

A teoria das probabilidades consiste no estudo da chance que um evento aleatório tem de ocorrer. Um evento aleatório, por sua vez, nada mais é que um evento no qual não é possível determinar o resultado. Para estimar a chance que um evento tem de ocorrer ou não, precisamos primeiro definir seu espaço amostral.

1.1 **Espaço Amostral**

O espaço amostral é um conjunto que reúne todas as possibilidades de resultado de um experimento aleatório. Ele pode ser finito ou infinito. Em nosso estudo, abordaremos apenas problemas envolvendo o primeiro caso. Representamos o espaço amostral pela letra Ω e sua cardinalidade (quantidade de elementos) é denotada por: $\boxed{n(\Omega)}$

1.2 **Evento**

Um evento é um subconjunto do espaço amostral e sua cardinalidade será representada pelo símbolo: $\boxed{n(E)}$

1.3 **Conjunto das Partes**

O conjunto das partes $\wp(A)$ é aquele que reúne todos os possíveis subconjuntos de A. Em símbolos:

$$\wp(A) = \{X; X \subset A\}$$

1.4 **Probabilidade**

Definição 1.4.1:

A probabilidade é uma função P que associa a cada evento E de um espaço amostral Ω um número real $P(E)$ de modo que:

Axioma 1: Dado um evento E, $0 \leq P(E) \leq 1$.

Axioma 2: $P(\Omega) = 1$.

Axioma 3: Dados $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \subset \Omega$ disjuntos dois a dois, isto é, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$ e $i, j \in \mathbb{N}$, segue que

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

Observação:

O conjunto $\wp(\Omega)$ é o domínio da função de probabilidade P cujo espaço amostral é Ω.

Teorema 1.1: Se A e B são dois eventos, então:

T1) $\boxed{P(\emptyset) = 0}$

T2) $\boxed{P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)}$

T3) $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

T4) A probabilidade do evento $\bar{A}$ complementar do evento A é dada por:

$$\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$$

T5) Se $A \subset B$, então $P(B) \geq P(A)$.

Dem:

T1: Segue do axioma 3 que:

$P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = P(\Omega) - P(\Omega) = 0.$

T2:

$P(A) = P\big((A - B) \cup (A \cap B)\big) = P(A - B) + P(A \cap B) \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$

T3:

$P(A \cup B) = P((A - B) \cup B) = P(A - B) + P(B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$

T4:

$$P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A}) \Rightarrow P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

T5: Se $A \subset B$ então

$$P(B) = P\big(A \cup (B - A)\big) = P(A) + P(B - A)$$

Mas segue do axioma 1 que $P(B - A) \geq 0$, logo $P(A) + P(B - A) \geq P(A)$, donde concluímos que $P(B) \geq P(A)$.

■

Observação

T3 pode se estender para o caso em que temos mais de dois eventos, por exemplo, para três, a probabilidade será:

$$\boxed{P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - [P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)] + P(A \cap B \cap C)}$$

Para demonstrar esse fato basta aplicar o caso com dois eventos. Assim:

$$P(A \cup B \cup C) = P\big((A \cup B) \cup C\big) = P(A \cup B) + P(C) - P\big((A \cup B) \cap C\big) =$$
$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - \Big[P\big((A \cap C) \cup (B \cap C)\big)\Big] =$$
$$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Ou, de forma geral[1]:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots$$
$$+ (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

[1]Essa fórmula não é nada simpática, o que significa que não vale à pena dividir o espaço amostral em muitos conjuntos não disjuntos dois a dois. Na verdade, é raro trabalhar com mais de três conjuntos nessa situação.

Definição 1.4.2:

Um espaço amostral Ω finito tal que $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$ onde A_i é unitário e $A_i \cap A_j = \emptyset$ com $i \neq j$ é dito equiprovável quando $P(A_i) = P(A_j), \forall i \neq j$.

Em particular, quando Ω é finito e os eventos elementares são igualmente prováveis, vale o Teorema 1.2.

Teorema 1.2:

Seja E um evento, isto é, $E \subset \Omega$, com Ω finito e equiprovável. Então:

$$P(E) = \frac{n^{o}\ de\ resultados\ favoráveis\ para\ E}{n^{o}\ de\ resultados\ possíveis}$$

Dem:

Dados $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \subset \Omega$ disjuntos dois a dois e unitários, tais que:

$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$$

Segue do axioma 3 da definição 1.4.1. que:

$$P(\Omega) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

Por outro lado, aplicando o axioma 1 temos:

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = 1$$

Como os eventos são unitários e igualmente prováveis, concluímos que

$$n \times P(A_k) = 1$$

Portanto,

$$P(A_k) = \frac{1}{n}$$

Se tomarmos um conjunto E tal que $E \subset \Omega$ e $E = \bigcup_{k=1}^{m} A_k$, com $m < n$ então:

$$P(E) = \sum_{k=1}^{m} P(A_k) = P(A_1) + \cdots + P(A_m) = \frac{m}{n}$$

Onde m representa o número de casos favoráveis para E e n o número de casos possíveis.

■

1.5 **Contagem**

Iremos abordar agora alguns conceitos básicos da teoria de contagem, pois serão necessários para determinar o total de casos favoráveis de um evento E tal que E é subconjunto do espaço amostral Ω finito.

1.5.1 Princípio Multiplicativo

Segundo MORGADO (2006, p.18) o princípio multiplicativo pode ser enunciado da seguinte forma:

> Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é xy. (MORGADO, 2006, p.18)

1.5.2 Fatorial

O fatorial[2] de um número n natural será dado por:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

Ou de maneira recursiva:

$$n! = n \times (n-1)!$$

com $n \geq 1$.

[2] A notação $\boldsymbol{n}!$ é devida a Cristian Kramp (1760 - 1826)

1.5.3 Permutação Simples

Uma permutação simples consiste no total de possibilidades de se organizar n objetos distintos em n espaços. Denotamos por $P_n = n!$.

1.5.4 Permutação com repetição

Uma permutação de n objetos com $p_1, p_2, \ldots, p_n$ objetos repetidos é dada por:

$$P_n^{p_1, p_2, \ldots, p_n} = \frac{n!}{p_1!\, p_2! \ldots p_n!}$$

1.5.5 Combinação Simples

Uma combinação de n objetos distintos tomados p a p com $n > p$ é dada por:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

onde C_n^p representa o total de possibilidades de selecionar p objetos distintos de um total de n objetos onde a ordem dos objetos não é levada em conta.

1.5.6 Triângulo de Pascal

O triângulo de Pascal é dado por:

1			
1	1		
1	2	1	
1	3	3	1

....

Nessa sequência de números ordenados cada elemento é dado por C_n^p, onde n é o número da linha e p é o número da coluna.

Esse triângulo possui propriedades que facilitam a sua construção.

Propriedade 1: Toda linha começa e termina com 1:

Demonstração: $C_n^1 = C_n^n = \frac{n!}{n!} = 1$

Propriedade 2: Combinações complementares são iguais: $C_n^p = C_n^{n-p}$.

Demonstração: $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!\big(n-(n-p)\big)!} = C_n^{n-p}$

Propriedade 3 – Relação de Stifel: Cada elemento C_n^p é igual à soma do elemento C_{n-1}^p da linha anterior e da mesma coluna, com o elemento C_{n-1}^{p-1} que está na coluna e na linha anterior.

Demonstração:

$$C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = \frac{(n-1)!}{[p!\,(n-p-1)!]} + \frac{(n-1)!}{[(p-1)!\,(n-p)!]}$$

$$= \frac{(n-p)(n-1)!}{[p!\,(n-p)!]} + \frac{p(n-1)!}{[p!\,(n-p)!]} = \frac{[(n-p)(n-1)! + p(n-1)!]}{[p!\,(n-p)!]}$$

$$= \frac{(n-p+p)(n-1)!}{[p!\,(n-p)!]} = \frac{n(n-1)!}{[p!\,(n-p)!]} = \frac{n!}{[p!\,(n-p)!]} = C_n^p$$

O triângulo de Pascal nos permite resolver diversos problemas de teoria da contagem. Um deles consiste em determinar o total de elementos no conjunto $\wp(A)$.

Como o triângulo de Pascal começa na linha e coluna zero, sendo A um conjunto de cardinalidade n, temos que a cardinalidade de $\wp(A)$ é igual à soma dos valores da n-ésima linha do triângulo de Pascal.

Os resultados obtidos acima serão usados na resolução de problemas futuros. Agora iremos analisar o contexto histórico no qual a teoria das probabilidades se desenvolveu.

2 ABORDAGEM HISTÓRICA

A humanidade sempre se interessou por assuntos ligados ao acaso, embora esse interesse não fosse científico e sim relacionado a superstição e ao divino. A história registra a antiguidade desses problemas:

> Pinturas em tumbas egípcias feitas em 3500 a.C mostram pessoas jogando uma forma primitiva de dados feitos de um osso do calcanhar de nome astragalus. Dados de 6 faces datados de 3000 a.C foram encontrados no norte do Iraque. Durante as Cruzadas vários jogos de dados foram trazidos para o Ocidente (a palavra “azar” sendo derivada de alzahr, que significa “dado” em árabe). O baralho moderno surgiu na França no século XIV. (GADELHA, 2004)

Segundo MLODINOW (2009, p.57), o estudo da teoria das probabilidades teve como precursores Cardano, Galileu, Pascal e Fermat por volta do século XVI motivados pelo estudo dos jogos de azar. O matemático italiano Gerolamo Cardano (1501-1576) foi o pioneiro nesses estudos, ele usava sua inteligência, seu pensamento lógico e ordenado para ganhar dinheiro através dos jogos de azar e assim custear seus estudos em Medicina,

Não foi à toa que no século XVI o estudo da teoria das probabilidades ganhou força em diferentes lugares da Europa como Itália, França e Holanda. Isso ocorre porque nessa época a Europa sofre uma transformação cultural com a Revolução Científica e adota uma visão de mundo mais humanista valorizando o pensamento científico e o racionalismo. Esse movimento, porém, não significa rompimento com a religião, é apenas uma forma mais secularizada de ver o mundo.

O racionalismo defende que a razão é a ferramenta que nos conduz ao conhecimento da verdade, portanto, o homem deve procurar respostas racionais para os seus problemas, e não respostas irracionais, baseadas nos mitos e nas tradições religiosas. O homem deve ler o mundo e interpretá-lo à luz da razão.

Ainda assim, Cardano possuía vários obstáculos pela frente. Não só por contar com uma notação matemática ainda muito precária, mas também por viver numa época onde crenças e superstições tinham mais valor que cálculos matemáticos. Segundo MLODINOW (2009, p.69):

> Os mercadores de uma cidade roubavam as roupas de homens enforcados porque acreditavam que isso ampliaria suas vendas de cerveja. Os paroquianos de outra cidade acreditavam que poderiam curar doenças entoando sacrilégios enquanto marchavam nus ao redor do altar da igreja. (MLODINOW, 2009, p.69)

Nesse contexto fica evidente como as superstições e crenças exerciam grande influência na vida das pessoas. Diversas passagens bíblicas também mostram como as pessoas recorriam à sorte para guiar seus destinos. Na passagem de Jonas, que ao ouvir o chamado de Deus foge em um navio, todos os marinheiros são assolados por uma forte tempestade e recorrem à sorte para encontrar o culpado. Isso fica claro no seguinte trecho bíblico:

> E diziam cada um ao seu companheiro: Vinde, e lancemos sortes, para que saibamos por que causa nos sobreveio este mal. E lançaram sortes, e a sorte caiu sobre Jonas. (Jonas 1:7)

Cardano era também astrólogo e acreditava na sorte e no destino, o que mostra a dualidade entre alguém que usa a razão para obter sucesso nos jogos de azar enquanto a maioria conta simplesmente com a sorte, pois nesse caso ganhar ou perder consiste apenas no cumprimento da vontade divina. Um de seus manuscritos intitulado “O livro dos jogos de azar” foi o primeiro da história a tratar da teoria da probabilidade. Somente nessa época a matemática voltou a se desenvolver na Europa depois dos gregos, antes disso, essa responsabilidade coube aos hindus e árabes. (MLODINOW, 2009, p. 50).

A maioria dos problemas abordados por Cardano envolvia jogos de cartas, lançamento de dados, gamão e astrágalos. Em seu livro, ele apresenta seus primeiros esforços na tentativa de compreender o acaso e institui a chamada Lei do Espaço Amostral. Através dessa lei, é possível calcular a probabilidade de um experimento aleatório, ter sucesso ou fracasso. (MLODINOW, 2009, p. 58)

2.1 **Problemas Clássicos**

2.1.1 <u>Galileu e o problema dos dados</u>

Um problema clássico resolvido pelo famoso físico, matemático e astrônomo Galileu Galilei (1564 - 1642) foi proposto pelo Grão duque da Toscana e publicado em 1620 num artigo intitulado “Ideias sobre os jogos de dados”. O problema consiste em responder a seguinte pergunta: Quando lançamos três dados, por que o número 10 aparece com mais frequência que o número 9?

Para o grão-duque ambos os resultados deveriam ter mesma probabilidade, pois no lançamento de 3 dados tanto o 10 quanto o 9 poderiam ser obtidos de 6 maneiras distintas. Ele raciocinou da seguinte forma: É possível obter soma 9 nos casos (1,2,6), (2,3,4), (3,5,1), (2,2,5), (4,4,1), (3,3,3) e soma 10 nos casos (1,3,6), (1,4,5), (2,3,5), (2,4,4), (2,2,6), (3,3,4), o que resulta em 6 possibilidades favoráveis para cada evento. Mas não é o que acontece na prática. Isso porque as trincas acima não ocorrem com a mesma frequência, pois podem ser permutadas. Assim, ao lançarmos três dados temos um total de 6 resultados possíveis para cada lançamento, o que totaliza $6^3 = 216$ resultados possíveis. Destes,

- As trincas (1,2,6), (2,3,4) e (3,5,1) têm $3! = 6$ permutações cada;
- As trincas (2,2,5) e (4,4,1) têm 3 permutações cada; e
- A trinca (3,3,3) tem 1 permutação apenas.

Totalizando $6 \times 3 + 3 \times 2 + 1 = 18 + 6 + 1 = 25$ resultados favoráveis para soma 9.

- As trincas (1,3,6), (1,4,5), (2,3,5) têm $3! = 6$ permutações cada;
- As trincas (2,4,4), (2,2,6), (3,3,4) têm 3 permutações cada.

Totalizando $6 \times 3 + 3 \times 3 = 18 + 9 = 27$ casos favoráveis para soma 10.

Com isso, a probabilidade de obter soma 10 é de $\frac{27}{216}$ contra $\frac{25}{216}$ para soma 9 e, de fato, fica comprovado que a soma 10 aparece com mais freqüência. Sem dúvida, o grão duque tinha bastante tempo livre para perceber esse fato realizando o experimento na prática.

Com os recursos atuais não é difícil realizar o experimento e verificar que de fato a soma 10 possui 12,50% de chances de ocorrer contra 11,57% para a soma 9. Para verificar esse fato, observe a tabela abaixo com os valores coletados através de um programa de computador que simula o experimento:

Nº de experimentos realizados	Frequência absoluta para soma 9	Frequência absoluta para soma 10	Frequência relativa para soma 9	Frequência relativa para soma 10
1000	118	127	11,800%	12,700%
10000	1149	1256	11,490%	12,560%
100000	11481	12494	11,481%	12,494%
1000000	115633	125147	11,563%	12,514%
10000000	1157386	1251848	11,573%	12,518%
100000000	11572240	12500341	11,572%	12,500%

Tabela1. Lançamento de três dados
Fonte: A autora, 2017.

Vale ressaltar que à medida que a quantidade de experimentos aumenta, a freqüência relativa torna-se cada vez mais próxima da probabilidade real.

Além disso, o programa em questão pode ser utilizado para analisar as freqüências relativas referentes a outros resultados possíveis para a soma e casos em que o número de dados lançados é maior que 3. Por exemplo, para o lançamento de 4 dados as somas possíveis variam entre 4 e 24 e o resultado mais provável é obter soma 14 como mostra o programa:

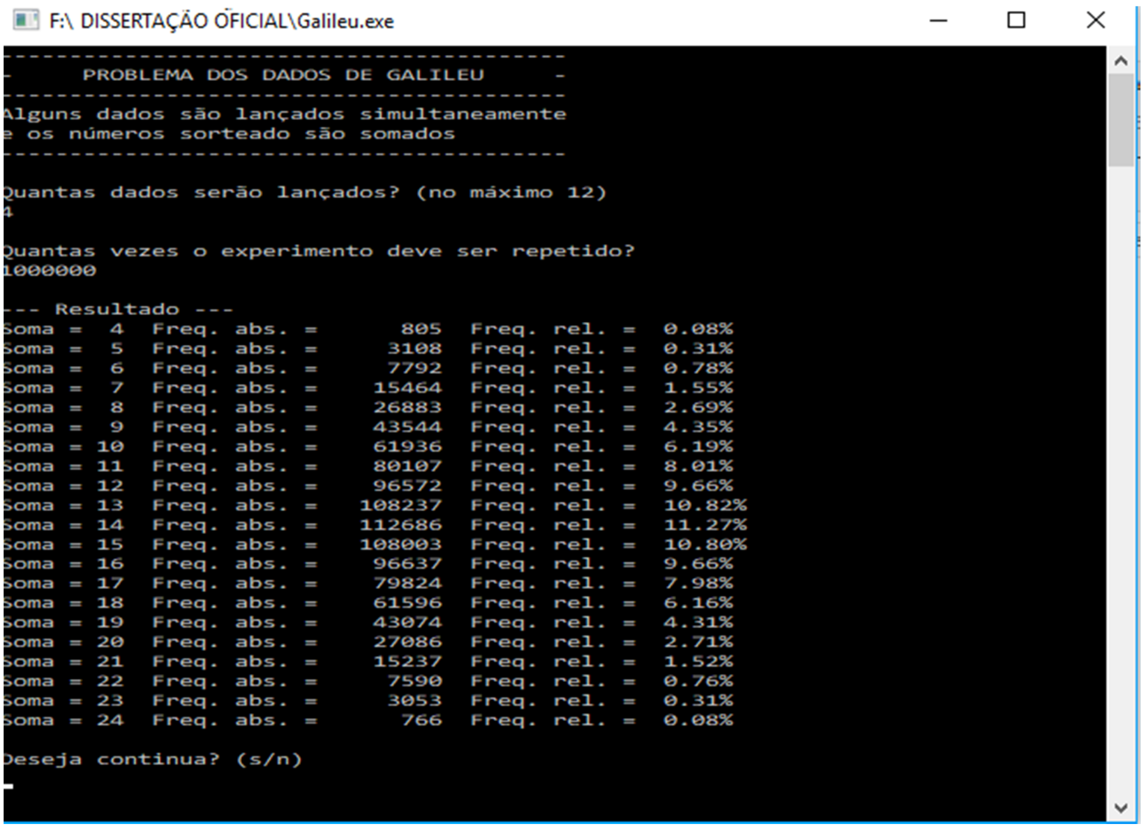

Figura 1. Lançamento de dados
Fonte: A autora, 2017.

Essas ideias seriam posteriormente aprofundadas e sistematizadas no trabalho dos franceses Pierre de Fermat (1601 – 1665) e Blaise Pascal (1623 – 1662), considerados os criadores da Teoria das Probabilidades.

2.1.2 Pascal, Fermat e o problema dos pontos

De acordo com MLODINOW (2009, p. 76):

> Em 1654 Antoine Gombaud, um nobre cujo título era Chevalier de Méré, propôs a Pascal o problema dos pontos: suponha que você e outro jogador estão participando de um jogo no qual ambos têm a mesma chance de vencer, e o vencedor será o primeiro que atingir um certo número de pontos. Em determinado momento, o jogo é interrompido quando um dos jogadores está na liderança. Qual é a maneira mais justa de dividir o dinheiro apostado? A solução, observou De Méré, deveria refletir a chance de vitória de cada jogador com base na pontuação existente no momento em que o jogo é interrompido. Mas como calcular essa probabilidade? (MLODINOW, 2009, p. 76)

Para solucionar o problema acima, Pascal escreveu a outro matemático, Fermat. Dessa correspondência nasceu a Teoria das Probabilidades. Fermat resolveu o problema descrevendo manualmente os casos, já Pascal usou o triângulo que leva seu nome. Entretanto, é preciso que nos acautelemos da visão histórica eurocêntrica, pois ela muitas vezes provoca injustiças, por exemplo, o que chamamos de Triângulo de Pascal já era conhecido dos chineses pelo matemático Chu Shih-Chieh (séc. XIII) e também dos hindus e árabes (MORGADO, 2006, p.3).

Retomando o problema dos pontos, para responder a essa questão iremos considerar o seguinte exemplo: Suponha que Brasil e Alemanha estão competindo pela vitória numa partida de vôlei, e ambos os times têm a mesma habilidade, ou seja, a mesma probabilidade a priori, de vencer. Nesse caso, ganha a seleção que obtiver vitória em 3 sets de um melhor de 5. Assim, caso o jogo seja interrompido após o Brasil ter ganhado os dois primeiros sets, como deve ser dividido o valor da aposta feita por dois torcedores?

Intuitivamente muitos responderiam que o valor da aposta deveria ser diretamente proporcional ao número de vitórias até então obtido por cada seleção, nesse caso, o torcedor do Brasil receberia 100% do valor da aposta e o torcedor da Alemanha não receberia nada. Outra possibilidade seria dividir o valor da aposta com base no número de sets que falta para cada apostador atingir a vitória, nesse caso, o apostador do Brasil necessita apenas de mais uma vitória enquanto o apostador da Alemanha precisa de três. Assim, o valor apostado deve ser dividido em 4 partes iguais, das quais 3 serão dadas ao torcedor do Brasil e 1 ao torcedor da Alemanha. Isso equivale a 75% para o torcedor do Brasil e 25% para o torcedor da Alemanha. Mas será que esse raciocínio está correto? Essa seria uma divisão justa? Veremos agora que não.

Usando os conceitos básicos de probabilidade, como os times possuem chances iguais de vitória (como supomos), analisaremos todos os casos possíveis onde B representa vitória para o Brasil e A representa vitória para a Alemanha. Assim, temos um total de 32 possibilidades, visto que cada time possui 2 resultados possíveis: vitória ou derrota em cada um dos sets. Portanto as possibilidades são:

BBBBB, AAAAA, BBBBA, BBBAB, BBABB, BABBB, ABBBB, BBBAA, BBABA, BABBA, ABBBA, AABBB, BBAAB, BAABB, ABABB, BABAB, ABBAB, BBAAA, AAABB, BABAA, BAABA, BAAAB, ABABA, AABAB, ABAAB, AABBA, ABBAA, BAAAA, ABAAA, AABAA, AAABA, AAAAB.

Entretanto, como já sabemos que o Brasil obteve vitória nas duas primeiras partidas, devemos então considerar apenas os casos: BBBAA, BBABA, BBAAB, BBBBA, BBBAB, BBABB, BBBBB, BBAAA. Isso reduz nosso espaço amostral a um total de 8 possibilidades. Destas, percebemos que para o apostador da Alemanha, o único caso de vitória é BBAAA. Já para o apostador do Brasil as chances de vitória são: BBBAA, BBABA, BBAAB, BBBBA, BBBAB, BBABB, BBBBB. Desse modo, a chance de vitória para o Brasil será de 7/8 e de vitória para a Alemanha de 1/8, ou seja, 87,5% para o apostador do Brasil e 12,5% para o apostador da Alemanha.

Outro raciocínio equivocado é o seguinte: Se é preciso ganhar apenas 3 sets para obter a vitória então basta observar os casos em que são necessários 3 sets, 4 sets e 5 sets. Portanto, não precisaríamos considerar o caso BBBBB, por exemplo, pois ele nunca aconteceria já que não seria necessário realizar 5 sets se o Brasil já venceu os três primeiros. Logo:

Para 3 sets teríamos: BBB
Para 4 sets: BBAB
Para 5 sets: BBAAB, BBAAA

Desse modo, teríamos 75% de casos de vitórias favoráveis para o Brasil e 25% para a Alemanha. Nessa segunda abordagem, as porcentagens obtidas foram diferentes daquelas que encontramos em nossa primeira solução. E agora? Qual raciocínio está correto?

O primeiro. Mas por quê? Qual foi o equívoco que cometemos na segunda abordagem? Esse erro é bastante comum, principalmente entre estudantes do Ensino Médio que estão iniciando seus estudos sobre Probabilidades. O erro foi considerar nosso espaço amostral com as possibilidades BBB, BBAB, BBAAB e BBAAA como sendo equiprováveis quando não o são. Os 3 sets podem ocorrer nos casos BBBAA, BBBAB, BBBBA e BBBBB. Já os 4 sets podem ocorrer nos casos BBABA, BBABB e os 5 sets podem ocorrer nos casos BBAAB e BBAAA. Embora o caso BBBBB nunca aconteça numa partida real, por exemplo, devemos considerá-lo a fim de obter um espaço amostral equiprovável.

Vejamos agora a solução de Pascal:

Como faltam 3 sets, basta olhar a 3ª linha do triângulo de Pascal:

Linha 0:	1			
Linha 1:	1	1		
Linha 2:	1	2	1	
Linha 3:	1	3	3	1

$$P(A = 0, B = 3) = \frac{1}{8}$$

$$P(A = 1, B = 2) = \frac{3}{8}$$

$$P(A = 2, B = 1) = \frac{3}{8}$$

$$P(A = 3, B = 0) = \frac{1}{8}$$

$$P(B\ ganhar) = \frac{7}{8}$$

$$P(A\ ganhar) = \frac{1}{8}$$

Portanto, uma divisão justa do valor da aposta seria:

$\frac{7}{8} \times (valor\ da\ aposta)$ para o torcedor do Brasil.

$\frac{1}{8} \times (valor\ da\ aposta)$ para o torcedor da Alemanha.

Já Fermat resolveu o problema usando o diagrama da árvore:

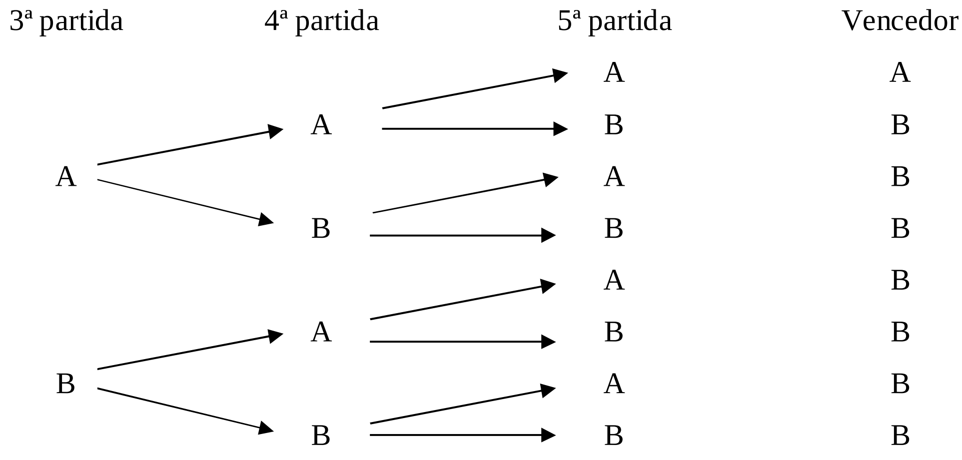

Figura 2. Problema dos pontos.
Fonte: A autora, 2017.

Assim, $P(A) = \frac{1}{8}$ e $P(B) = \frac{7}{8}$.

Na próxima seção veremos outros problemas, que também usam conceitos de espaço amostral equiprovável, probabilidade da união, interseção e evento complementar.

3 **PROBLEMAS CONTRAINTUITIVOS**

3.1 **Problema dos três tenistas**

Segundo MORGADO (2006, p.155), o tenista A precisa jogar 3 partidas contra os jogadores B e C alternadamente e vencer duas vezes consecutivas. Se B e C tem probabilidade $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ de vencer A respectivamente, qual é a sequência mais favorável ao jogador A, jogar contra BCB ou CBC?

Solução: Considere que P seja a probabilidade do jogador A perder e G a probabilidade do jogador A ganhar. Assim temos os seguintes casos:

Caso 1: Jogar contra BCB

Nesse caso os resultados possíveis para vitória são dados por GGP, GGG e PGG.

GGP: $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$

GGG: $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$

PGG: $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$

Total $= \frac{8}{27}$

Caso 2: Jogar contra CBC

GGP: $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$

GGG: $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$

PGG: $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$

Total = $\frac{10}{27}$

Portanto, ao jogar de acordo com a sequência CBC, o tenista A tem mais chance de vitória. O problema é contraintuitivo, visto que o tenista A tem mais chance de vitória se competir contra o jogador mais forte mais vezes, o que a princípio parece absurdo. Contudo isso deve-se ao fato de que a partida mais importante para sua vitória é a segunda, pois essa é a única partida que o tenista não pode perder. Ela é decisiva. A primeira ele poderá perder e a terceira pode nem acontecer. Agora a segunda ele deve ganhar. Por essa razão, é mais vantajoso competir contra o oponente mais fraco na segunda partida, isto é, o tenista B.

3.2 **Problema das gavetas**

De acordo com SALDANHA, (p 41), um móvel tem três gavetas iguais, na gaveta 1 há duas bolas brancas, na gaveta 2 há uma bola branca e outra preta, e na gaveta 3 há duas bolas pretas. Abrimos uma gaveta ao acaso e tiramos uma bola sem olhar a segunda bola que está na gaveta. A bola que tiramos é branca. Qual é a probabilidade de que a segunda bola que ficou sozinha na gaveta também seja branca?

No primeiro momento pensamos: $\frac{1}{2}$, não é óbvio? Considerando o fato de que a primeira sorteada é branca, com toda a certeza ela não foi retirada da gaveta 3. Restam, portanto, apenas duas opções, das quais apenas no caso da gaveta 1 teremos uma bola branca restante, ou seja, a chance de que isso aconteça é de $\frac{1}{2}$. Entretanto, esse raciocínio está errado. Vejamos o porquê.

A suposição de que as chances de escolha das gavetas 1 e 2 são iguais é verdadeira para o caso geral, mas falsa quando temos a informação de que o primeiro sorteio foi de uma bola branca. De fato, a probabilidade de que a primeira retirada tenha sido feita da gaveta 1 é o dobro da probabilidade de que tenha sido da gaveta 2, já que esta tem inicialmente o dobro de bolas brancas da segunda.

Gaveta1	**Gaveta2**	**Gaveta3**
B1B2	B3P1	P2P3
B2B1	P1B3	P3P2

Tabela 2. Problema das gavetas
Fonte: A autora, 2017.

Considere os resultados acima, todos equiprováveis com chances iguais a $\frac{1}{6}$ de ocorrer. Se a primeira já é branca, então basta considerar apenas os casos B1B2, B2B1, B3P1. Como a segunda deve ser branca, temos probabilidade igual a $\frac{2}{3}$.

4 PROBABILIDADE COMPLEMENTAR

Nem sempre o cálculo de uma probabilidade é algo simples de ser feito. Em algumas situações, é preciso dividir o problema em muitos casos, o que deixa a tarefa extremamente penosa. Para evitar isso, torna-se mais eficiente resolver esses problemas com o uso da probabilidade complementar.

Dado um evento $A \subset \Omega$, se A ocorre diremos que o resultado do experimento é favorável ao evento A, caso contrário, diremos que o resultado é favorável ao evento “não A”, isto é, o evento complementar $\overline{A}$.

4.1 Problema dos aniversários

De acordo com MLODINOW (2009, p. 73):

> Quantas pessoas deve ter um grupo para que haja uma probabilidade maior que 50% de que dois integrantes façam anos no mesmo dia[e mês] (presumindo que todas as datas de aniversário sejam igualmente prováveis)? A maior parte das pessoas acha que a resposta é igual à metade do número de dias no ano, ou cerca de 183. Mas essa é a resposta correta para uma pergunta diferente: quantas pessoas que façam anos em dias diferentes deve haver numa festa para que exista uma probabilidade maior que 50% de que uma delas faça anos no mesmo dia[e mês] que o aniversariante? Se não houver nenhuma restrição quanto a quais pessoas devem fazer anos no mesmo dia [e mês], a existência de muitos pares de pessoas que poderiam fazê-lo altera drasticamente o resultado. De fato, a resposta é surpreendentemente baixa: apenas 23. (MLODINOW, 2009, p. 73)

Primeiro vamos responder a seguinte pergunta: Qual é a probabilidade de que num grupo com r pessoas, todas façam aniversário em dias diferentes?

Solução: Seja r o número de pessoas. A primeira pessoa do grupo poderá fazer aniversário em qualquer um dos 365 dias do ano, já a segunda pessoa não poderá fazer aniversário no mesmo dia que a primeira e portanto terá um total de 364 possibilidades, para a terceira restam apenas 363 e assim sucessivamente até a r-ésima pessoa do grupo. Portanto, a probabilidade de que elas façam aniversário em dias diferentes será:

$$\frac{365 \times 364 \times \ldots \times (365 - r + 1)}{(365)^r}$$

Isso nos permite resolver o primeiro problema: Quantas pessoas deve ter num grupo para que haja uma probabilidade maior do que 50% de que dois integrantes façam aniversário no mesmo dia?

Usando a probabilidade complementar, a resposta para esse problema será dada por:

$$1 - \frac{365 \times 364 \times \ldots \times (365 - r + 1)}{(365)^r} > \frac{1}{2}$$

Na tabela abaixo podemos ver a variação nas probabilidades à medida que o número de pessoas no grupo aumenta.

r	Probabilidade
5	0,03
10	0,12
15	0,25
20	0,41
23	0,51
25	0,57
30	0,71
40	0,89
45	0,94
50	0,97

Tabela 3. Problema dos aniversários
Fonte: Lima, 2006 p.125.

Portanto 23 pessoas já são suficientes para que a probabilidade de que pelo menos duas façam aniversário no mesmo dia e mês seja maior que 50%. Verificamos também que para termos quase 100% de certeza, de que, num grupo existe pelo menos duas pessoas que façam aniversário no mesmo dia, é preciso que exista apenas 50 pessoas. E para termos 100% de certeza? Nesse caso são necessárias 366 pessoas, basta aplicarmos o princípio da casa dos pombos de Dirichlet[3].

[3] O princípio da casa dos pombos diz que se existem $\boldsymbol{m}$ casas e $\boldsymbol{n}$ pombos tal que $\boldsymbol{m} < \boldsymbol{n}$ então pelo menos uma casa terá mais de um pombo.

5 APOSTA DE PASCAL E ESPERANÇA MATEMÁTICA

Um dos problemas mais antigos da humanidade e que até hoje é alvo de discussões se concentra em responder a seguinte pergunta: vale a pena acreditar na existência de um Deus todo poderoso? Pascal atacou esse problema, e diferente do que muitos pensam a Aposta de Pascal não tenta provar a existência de Deus e sim verificar se é vantajoso ou não acreditar na existência de um. Não buscamos aqui iniciar um debate religioso ou filosófico a respeito do tema. Nosso interesse é puramente matemático. (MATTHEWS 2017, p. 121)

Segundo Pascal, para determinar qual a melhor opção é preciso analisar não somente as probabilidades de um evento, mas também suas conseqüências. Isso significa que, para tomar a melhor decisão devemos primeiro calcular sua esperança matemática, ou seja, multiplicar sua probabilidade de ocorrer pela sua conseqüência.

Mas como saber qual é a probabilidade da existência de Deus? De fato, não é uma pergunta fácil de responder. Para continuar sua análise, Pascal assumiu que a existência e a não-existência de um Deus eram igualmente prováveis, $\frac{1}{2}$ cada.

Se considerarmos apenas essas probabilidades, nos parece que tanto faz decidir entre acreditar ou não. Contudo, segundo Pascal, ao analisar as conseqüências da existência de um Deus, nos deparamos com os seguintes resultados:

Escolha	Deus existe	Deus não existe
Acreditar	Consequência positiva: eternidade no paraíso	Consequência negativa: perda de tempo e esforço em rituais
Não acreditar	Consequência negativa: castigo divino	Consequência positiva: economia de tempo e esforço em rituais

Tabela 4. Tomada de decisão 1
Fonte: Matthews, 2017, p.122.

Agora como decidir qual das alternativas é a mais vantajosa? Para Pascal, basta analisarmos as conseqüências positivas de cada decisão. Assim, não acreditar tem como conseqüência positiva a economia de tempo e esforço caso Deus não exista. Já acreditar implica a salvação eterna no paraíso caso Deus exista. Pascal declarou que acreditar na existência de Deus mostra-se mais vantajoso, pois as conseqüências não são apenas positivas, são também infinitas diante de todas as outras possibilidades que são meramente finitas. Logo, ao calcularmos a esperança matemática teremos como resultado $\frac{1}{2}$ multiplicado por algo que é infinito menos $\frac{1}{2}$ multiplicado por algo que é finito e obviamente a resposta a esse cálculo será $+\infty$. Já no caso de não acreditarmos, a esperança matemática será $\frac{1}{2}$ multiplicado por $-\infty$ somado a $\frac{1}{2}$ multiplicado por algo finito que resultará em $-\infty$. Portanto, Pascal concluiu que acreditar em Deus é a melhor decisão a seguir. Segundo MLODINOW (2009, p. 85):

> Tais ideias foram posteriormente publicadas num livro chamado Pensamentos [...] Nessas páginas, Pascal detalhou uma análise dos prós e contras de nossos deveres para com Deus como se estivesse calculando matematicamente a sabedoria de um apostador. Sua grande inovação foi o método de contrapesar esses prós e contras, um conceito chamado atualmente de esperança matemática. (MLODINOW, 2009, p. 85)

Vale ressaltar que os argumentos utilizados por Pascal não são irrefutáveis. Isso porque ele supôs que a probabilidade da existência ou não de um Deus fossem equiprováveis e iguais a $\frac{1}{2}$, contudo caso a probabilidade de existência fosse, por exemplo, igual a 0, nosso cálculo da esperança matemática resultaria numa indeterminação. Independente da conclusão de Pascal de considerar razoável que toda pessoa racional deve optar por acreditar na existência de um Deus, o que é realmente brilhante em seu raciocínio é o surgimento e aplicação do conceito de esperança matemática como ferramenta indispensável para a tomada de decisões.

A esperança matemática pode nos auxiliar frente a situações de incerteza. Passamos a análise de outro problema proposto por MATTHEWS (2017, p. 123):

> Suponha que uma fábrica está tentando resolver como reagir à noticia de que um produto químico que vinha sendo usado pode ser ruim para o ambiente. O problema é que a evidência não é muito convincente, e talvez não consiga passar pelo teste do tempo. Assim, a empresa se defronta com uma tomada de decisão em situação de incerteza. Logo, vamos criar uma tabela das várias consequências. (MATTHEWS, 2017, p. 123)

	O produto é tóxico	O produto não é tóxico
Decisão A: Continuar usando o produto químico	Consequência: prejudicial em termos ambientais; processos judiciais, má publicidade.	Consequências: os negócios continuam como sempre, mas a empresa pode parecer negligente.
Decisão B: Trocar por um substituto	Consequência: bom para o ambiente, bom para a imagem da empresa.	Consequências: mudanças desnecessárias, mas a empresa daria a impressão de responsabilidade.

Tabela 5. Tomada de decisão 2
Fonte: Matthews, 2017, p.124.

Quais medidas a empresa deve adotar? Como não conhecemos a probabilidade do produto ser tóxico, o melhor a ser feito é trocar por um substituto.

Passamos a outro exemplo, muito famoso na teoria de jogos que ficou conhecido como o dilema do prisioneiro. Segundo DAWKINS (2007, p. 346):

> Existe uma “banca” que adjudica e paga os prêmios aos dois jogadores. Suponhamos que eu esteja jogando contra o leitor. Cada um de nós tem apenas duas cartas nas mãos, COOPERAR e TRAIR. Para jogar, cada um escolhe uma das cartas da mão e a coloca, com a face escondida, sobre a mesa. As cartas são assim dispostas para que não possamos influenciar mutuamente nossas jogadas. Na realidade, nós jogamos ao mesmo tempo. Esperamos, em suspense, que a banca desvire as cartas. O suspense deve-se ao fato de que nossos ganhos dependem não somente da carta que jogamos (que cada um de nós sabe qual é), mas também da carta do outro jogador (que não sabemos qual é até que a banca revele). Uma vez que só existem 2×2 cartas, há quatro resultados possíveis. Para cada resultado, nossos ganhos são como segue (cotado em dólares, em deferência à origem norte-americana do jogo):
> Resultado I: Nós dois jogamos COOPERAR. A banca paga 300 dólares a cada um. Esta soma respeitável é chamada de Recompensa pela cooperação mútua.
> Resultado II: Nós dois jogamos TRAIR. A banca multa a nós dois, em 10 dólares cada um. Esta soma é a Punição pela Traição mútua.
> Resultado III: O leitor jogou COOPERAR e eu joguei TRAIR. A banca me paga 500 dólares (a tentação de trair) e cobra do leitor (o trouxa) uma multa de 100 dólares.
> Resultado IV: O leitor jogou TRAIR e eu joguei COOPERAR. A banca paga ao leitor os 500 dólares da tentação e multa a mim, o trouxa, em 100 dólares. (DAWKINS, 2007, p. 346)

Usando a tabela de decisões de Pascal, podemos resumir as possibilidades do seguinte modo:

	O QUE O LEITOR FAZ		
O QUE EU FAÇO		COOPERAR	TRAIR
	COOPERAR	Recompensa +300	Ganho do trouxa -100
	TRAIR	Tentação +500	Punição -10

Tabela 6. Tomada de decisão 3
Fonte: Dawkins, 2007, p.347.

Se aplicarmos o cálculo da esperança matemática para decidir qual é a melhor jogada, teremos que analisar as seguintes situações: O que acontece se eu TRAIR e o que acontece se eu COOPERAR?

Para responder a essas perguntas, seja p a probabilidade de trair e $(1-p)$ a probabilidade de cooperar.

Passemos agora ao cálculo da esperança matemática para o caso TRAIR. Temos:

$$p \times (-10) + (1-p) \times 500 = 500 - 510p$$

Já no caso COOPERAR, temos:

$$p \times (-100) + (1-p) \times 300 = 300 - 400p$$

Para que a escolha de cooperar seja mais vantajosa que a escolha de trair, devemos ter:

$$300 - 400p > 500 - 510p$$

$$110p > 200$$

$$p > \frac{20}{11}$$

Como $0 < p < 1$, concluímos que é melhor trair.

Você poderia ter chegado a essa conclusão sem realizar o cálculo da esperança, apenas analisando as situações possíveis. Se você trai e seu adversário não, isso te beneficia com o valor de 500 dólares e caso ambos traiam você será punido com uma multa de apenas 10 dólares, o que não é uma perda tão significativa diante do ganho que você poderá ter.

Contudo, apesar de os números legitimarem a traição do ponto de vista individual, se pesarmos de uma maneira mais global, é vantajoso para ambos cooperarem, uma vez que o lucro acumulado de ambos ao cooperar é de 600, enquanto o saldo de ambos quando um trai e outro coopera é de apenas 400. O que a principio deveria favorecer o surgimento de um acordo entre eles, se isso não gerasse um problema de confiança: será que posso confiar que o outro vai cumprir o combinado? É o que torna o problema relevante nos contextos de Economia, Política, Psicologia, Biologia, entre outros.

6 PROBABILIDADE CONDICIONAL

Definição 6.1: Se $A, B \subset \Omega$ e $P(B) > 0$, a probabilidade condicional de A dado B é definida por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Isto significa que para calcular a probabilidade de que A ocorra na certeza de que B ocorreu basta considerarmos a razão entre os casos em que A e B ocorrem simultaneamente e os casos existentes no evento B. Decorre da definição que:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Podemos ainda estender esse caso para três eventos. Assim, dados $A, B, C \subset \Omega$, segue que:

$$P(A \cap B \cap C) = P\big((A \cap B) \cap C\big) = P(A \cap B) \cdot P(C|A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$$

Regra geral da multiplicação: Seja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ uma sequência de eventos de um espaço amostral Ω. Então:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

6.1 Independência de Eventos

Definição 6.1.1: Dois eventos A e B do espaço amostral Ω são ditos independentes se

$$P(A|B) = P(A)$$

Isto significa que a probabilidade de A ocorrer não depende de B ter ocorrido. Decorre desta definição que:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

6.2 **Teorema da Probabilidade Total**

Se B é um evento contido numa união de eventos disjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ e $P(A_1) > 0$, $P(A_2) > 0$,..., $P(A_n) > 0$, então

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i).$$

Dem:

Como $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)$, segue que:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

■

6.3 **Teorema de Bayes**

Nas condições do teorema anterior, se $P(B) > 0$ então para $i = 1,2,3, \dots, n$,

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)}.$$

Dem: Temos que

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)}$$

■

Em MLODINOW (2009, p. 115):

> Um filme nos conta a história de um advogado que tem excelente emprego, uma mulher encantadora e uma família maravilhosa. Ele ama a mulher e a filha, mas ainda sente que falta algo em sua vida. Certa noite, ao voltar de trem para casa, vê uma mulher bonita parada ante a janela de uma escola de dança, olhando para fora com uma expressão pensativa. Ele a vê novamente na noite seguinte, e na outra também. O trem passa pela escola todas as noites, e ele se vê cada vez mais encantado pela moça. Numa noite, ele finalmente sai do trem, impulsivo, e se inscreve em aulas de dança, na esperança de conhecer a mulher. Ele descobre que, quando a imagem longínqua da mulher se transforma em encontros frente a frente, não se vê mais assolado pela atração que sentia por ela. Ainda assim, acaba por se apaixonar, não pela moça, e sim pela dança.
>
> Ele esconde sua nova obsessão da família e dos colegas, inventando desculpas para passar cada vez mais noites longe de casa. A mulher acaba por descobrir que o marido não está trabalhando até tão tarde, como afirma. Ela calcula que a chance de que ele esteja mentindo em relação às atividades que realiza após o trabalho é muito maior se ele estiver tendo um caso com outra mulher do que se não estiver, e assim conclui que ele está tendo um caso. (MLODINOW, 2009, p. 115)

Na situação descrita pelo autor, é possível observar como as pessoas fazem interpretações equivocadas do que seja a probabilidade condicional. A esposa calculou a probabilidade do advogado mentir na certeza de que ele está tendo um caso quando deveria calcular a probabilidade dele ter um caso na certeza de que mentiu. De fato, a $P(mentir|\, tem\ um\ caso)$ é muito maior que a $P(ter\ um\ caso|\, mentiu)$. Isso porque na certeza de que ele tenha um caso, a chance de mentir sobre isso é extremamente alta, contudo a probabilidade dele ter um caso dado que ele mentiu é baixa, pois ele pode estar mentindo por outros motivos.

Vamos analisar essa mesma situação agora com um problema de urnas e verificar que $P(A|B)$ e $P(B|A)$ não são necessariamente iguais.

6.4. **Problema das urnas**

Conforme LIMA (2006, p. 133), o problema das urnas nos mostra que $P(A|B)$ e $P(B|A)$ podem assumir valores distintos como veremos a seguir.

Uma urna contém 4 bolas brancas e 6 bolas pretas. Sorteamos duas bolas ao acaso sem reposição.

a) Se a segunda bola é branca, qual é a probabilidade de a primeira bola ser preta?

b) Se a primeira bola é preta, qual é a probabilidade de a segunda bola ser branca?

c) As probabilidades calculadas nos itens anteriores são iguais?

<u>*Solução:*</u>

No primeiro caso desejamos saber $P(1^{a}\ ser\ preta|\ 2^{a}\ foi\ branca)$ e no segundo caso desejamos saber $P(2^{a}\ ser\ branca|\ 1^{a}\ foi\ preta)$.

Será que $P(2^{a}\ ser\ branca|\ 1^{a}\ foi\ preta) = P(1^{a}\ ser\ preta|\ 2^{a}\ foi\ branca)$?

Não. De fato,

$$P(1^{a}\ ser\ preta|\ 2^{a}\ foi\ branca) = \frac{\left(\frac{6}{10} \times \frac{4}{9}\right)}{\left(\frac{6}{10} \times \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{9}\right)} = \frac{\frac{24}{90}}{\frac{36}{90}} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3} \cong 66\%$$

Já,

$$P(2^{a}\ ser\ branca|\ 1^{a}\ foi\ preta) = \frac{\left(\frac{6}{10} \times \frac{4}{9}\right)}{\left(\frac{6}{10} \times \frac{4}{9} + \frac{6}{10} \times \frac{5}{9}\right)} = \frac{\frac{24}{90}}{\frac{54}{90}} = \frac{24}{54} = \frac{4}{9} \cong 44\%$$

Portanto, $P(2^{a}\ ser\ branca|\ 1^{a}\ foi\ preta) \neq P(1^{a}\ ser\ preta|\ 2^{a}\ foi\ branca)$.

6.4.1 Probabilidade a posteriori

Vamos analisar como o conhecimento a posteriori, ou seja, o conhecimento de um resultado interfere na probabilidade de um evento anterior. Ainda considerando o problema do sorteio a partir de urna com 4 bolas brancas e 6 bolas pretas, sem reposição.

Situação 1: Probabilidade de que a primeira bola seja branca.

1) *Probabilidades a priori:* Não temos nenhuma informação sobre os resultados dos sorteios.

$$P(1^{a}\ \text{branca}) = 40\%$$

2) *Probabilidades a posteriori:* Sabemos o resultado do segundo sorteio.

- Sair ***preta*** na segunda ***aumenta*** a probabilidade de que tenha saído branca na primeira.

  De fato, é mais provável retirar bola branca na primeira extração quando a segunda foi preta. Se a segunda bola foi preta, isso aumenta a nossa crença de que a proporção de bolas pretas após a primeira extração ***aumentou*** e isso só pode ocorrer se a primeira foi branca.

P(1ª branca | 2ª preta) = 44%

- Sair ***branca*** na segunda ***diminui*** a probabilidade de que tenha saído branca na primeira.

  De fato, se a segunda foi branca, podemos supor que a proporção de brancas aumentou após a primeira extração, ou seja, isso ***diminui*** a nossa confiança no fato de que a primeira extração tenha sido branca.

P(1ª branca | 2ª branca) = 33%

Seguem os cálculos abaixo:

$$P(1^{a}\ ser\ branca\ |2^{a}\ foi\ preta) = \frac{\left(\frac{4}{10} \times \frac{6}{9}\right)}{\left(\frac{4}{10} \times \frac{6}{9} + \frac{6}{10} \times \frac{5}{9}\right)} = \frac{24}{54} = \frac{4}{9} = 44\%$$

$$P(1^{a}\ ser\ branca|2^{a}\ foi\ branca) = \frac{\left(\frac{4}{10} \times \frac{3}{9}\right)}{\left(\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{9}\right)} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} = 33\%$$

Situação 2: Probabilidade de que a primeira bola seja preta.

1) *Probabilidades a priori:* Não temos nenhuma informação sobre os resultados dos sorteios.

P(1ª preta) = 60%

2) *Probabilidades a posteriori:* Sabemos o resultado do segundo sorteio.

- Sair ***branca*** na segunda ***aumenta*** a probabilidade de que tenha saído preta na primeira.

  De fato, é mais provável retirar bola preta na primeira extração quando a segunda foi branca. Se a segunda bola foi branca, isso nos leva a crer que a proporção de bolas brancas após a primeira extração ***aumentou*** e isso só pode ocorrer se a primeira foi preta.

P(1ª preta | 2ª branca) = 66%

- Sair ***preta*** na segunda ***diminui*** a probabilidade de que tenha saído preta na primeira.

De fato, se a segunda foi preta, podemos supor que a proporção de pretas aumentou após a primeira extração, ou seja, isso ***diminui*** a nossa confiança no fato de que a primeira extração tenha sido preta.

P(1ª preta | 2ª preta) = 55%

Seguem os cálculos abaixo:

$$P(1^{a}\ ser\ preta|\ 2^{a}\ foi\ branca) = \frac{\left(\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}\right)}{\left(\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}+\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\right)} = \frac{\frac{24}{90}}{\frac{36}{90}} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3} \cong 66\%$$

$$P(1^{a}\ ser\ preta\ |2^{a}\ foi\ preta) = \frac{\left(\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\right)}{\left(\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}+\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}\right)} = \frac{30}{54} = \frac{5}{9} = 55\%$$

6.5 **Problema do truelo**

Segundo SINGH (2014, p. 263):

> Um truelo é semelhante a um duelo, exceto que existem três participantes no lugar de dois. Certa manhã o Sr. Black, o Sr. Gray e o Sr. White decidem resolver um conflito truelando com pistolas até que somente um deles fique vivo. O Sr. Black é o pior atirador, acertando seu alvo, em média, uma vez a cada três tentativas. O Sr. Gray é um atirador melhor e acerta no alvo em dois de cada três tiros. Já o Sr. White é um atirador exímio e nunca erra o alvo. Para tornar o truelo mais justo, o Sr. Black tem a permissão de atirar primeiro, seguido pelo Sr. Gray (se ele ainda estiver vivo) e depois pelo Sr. White (também se ele ainda estiver vivo). O processo se repete até que só reste um deles. A pergunta é: Contra quem deve o Sr. Black atirar primeiro? (SINGH, 2014, p. 263)

Solução:

Como o Sr. Black é o oponente mais fraco, ele inicia o truelo. Vamos analisar todos os casos possíveis:

1º cenário: Sr. Black acerta o alvo

1º situação: o Sr. Black acerta o Sr. Gray

Se ele atirar contra o Sr. Gray e acertar, na próxima rodada será a vez do Sr. White e nesse caso o Sr. Black será um homem morto.

Suponha então que todos os oponentes mirem no alvo mais forte.

2º situação: o Sr. Black acerta o Sr. White:

Agora ou vencerá o Sr. Black ou vencerá o Sr. Gray.

Vamos analisar o caso em que o Sr. Gray vence. Para isso, pode ocorrer: (Gray vence), (Gray perde, Black perde, Gray vence), (Gray perde, Black perde, Gray perde, Black perde, Gray vence) e assim sucessivamente, com Black e Gray perdendo sucessivas vezes e Gray vencendo a última partida. Portanto, a probabilidade de que Gray vença será:

$$P_1 = a_1 + a_2 + \cdots = \left[\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right] + \left[\frac{2}{9} \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right)\right] + \left[\frac{2}{9} \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right)^2\right] + \cdots = \frac{2}{9} + \frac{4}{81} + \frac{8}{729} + \cdots$$

$$= \left(\frac{\frac{2}{9}}{1 - \frac{2}{9}}\right) = \frac{2}{9} \times \frac{9}{7} = \frac{2}{7} = \frac{54}{189} \cong 0{,}2857 \cong 28{,}57\%$$

Agora vamos analisar o caso em que o Sr. Black vence. Para isso é preciso que o Sr. Gray erre a segunda partida. Assim, pode ocorrer: (Black vence), (Black perde, Gray perde, Black vence), (Black perde, Gray perde, Black perde, Gray perde, Black vence) e assim sucessivamente, com Black e Gray perdendo sucessivas vezes e Black vencendo a última partida. Portanto, a probabilidade de que Black vença será:

$$P_2 = a_1 + a_2 + \cdots = \left[\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{1}{27} \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right)\right] + \left[\frac{1}{27} \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right)^2\right] + \cdots$$

$$= \frac{1}{27} + \frac{1}{27} \times \left(\frac{2}{9}\right) + \frac{1}{27} \times \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \cdots = \left(\frac{\frac{1}{27}}{1 - \frac{2}{9}}\right) = \frac{1}{27} \times \frac{9}{7} = \frac{1}{21} = \frac{9}{189}$$

$$\cong 0{,}04761 \cong 47{,}61\%$$

<u>*2º cenário: Sr. Black erra o alvo*</u>

3º situação: o Sr. Black erra o alvo na primeira partida e o Sr. Gray acerta o alvo na segunda partida:

Novamente ou vencerá o Sr. Black ou vencerá o Sr. Gray.

Vamos analisar o caso em que o Sr. Gray vence. Para isso nas demais partidas pode ocorrer: (Black perde, Gray vence), (Black perde, Gray perde, Black perde, Gray vence), e assim sucessivamente, com Black e Gray perdendo sucessivas vezes e Gray vencendo a última partida. Portanto, a probabilidade de que Gray vença será:

$$P_3 = a_1 + a_2 + \cdots = \left[\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right] + \left[\frac{16}{81} \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right)\right] + \left[\frac{16}{81} \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right)^2\right] + \cdots$$

$$= \frac{16}{81} + \frac{16}{81} \times \left(\frac{2}{9}\right) + \frac{16}{81} \times \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \cdots = \left(\frac{\frac{16}{81}}{1 - \frac{2}{9}}\right) = \frac{16}{81} \times \frac{9}{7} = \frac{16}{63} = \frac{48}{189}$$

$$\cong 0{,}2539 \cong 25{,}39\%$$

Agora vamos analisar o caso em que o Sr. Black vence. Assim, nas demais partidas podem ocorrer: (Black vence), (Black perde, Gray perde, Black vence), (Black perde, Gray perde, Black perde, Gray perde, Black vence) e assim sucessivamente, com Black e Gray perdendo sucessivas vezes e Black vencendo a última partida. Portanto, a probabilidade de que Black vença será:

$$P_4 = a_1 + a_2 + \cdots = \left[\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{4}{27} \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right)\right] + \left[\frac{4}{27} \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right)^2\right] + \cdots$$

$$= \frac{4}{27} + \frac{4}{27} \times \left(\frac{2}{9}\right) + \frac{4}{27} \times \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \cdots = \left(\frac{\frac{4}{27}}{1 - \frac{2}{9}}\right) = \frac{4}{27} \times \frac{9}{7} = \frac{4}{21} = \frac{36}{189}$$

$$\cong 0{,}19047 \cong 19{,}05\%$$

4º situação: o Sr. Black erra o alvo na primeira partida, o Sr. Gray erra o alvo na segunda partida e o Sr. White acerta o alvo na terceira partida:
Portanto, nas demais partidas ou vencerá o Sr. Black ou o Sr. White.

Vamos determinar a probabilidade de que o Sr. Black vença. Efetuando os cálculos obtemos:

$$P_5 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27} = \frac{14}{189} \cong 0{,}074 \cong 7{,}4\%$$

Por outro lado, para que o Sr. White vença é preciso que o Sr. Black erre o alvo na quarta partida. Assim, a probabilidade de que o Sr. White vença será:

$$P_6 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{2}{3} \times 1 = \frac{4}{27} = \frac{28}{189} \cong 0{,}148 \cong 14{,}8\%$$

Resumindo temos:

		Probabilidade de vitória
Black acerta White	Gray ganha:	$\frac{2}{7} = \frac{54}{189}$
	Black ganha:	$\frac{1}{21} = \frac{9}{189}$
Black erra, Gray acerta	Gray ganha:	$\frac{16}{63} = \frac{48}{189}$
	Black ganha:	$\frac{4}{21} = \frac{36}{189}$
Black erra, Gray erra, White acerta	Black ganha:	$\frac{2}{27} = \frac{14}{189}$
	White ganha:	$\frac{4}{27} = \frac{28}{189}$

Assim, a probabilidade de vitória do Sr. Black será:

$$P(Black\ vença) = \frac{1}{21} + \frac{4}{21} + \frac{2}{27} = \frac{9 + 36 + 14}{189} = \frac{59}{189} \cong 0{,}3121 \cong 31{,}21\%$$

Por outro lado, a probabilidade de que o Sr. Black vença dado que ele errou o primeiro disparo será:

$$P(Black\ vença | erre\ o\ 1^o\ disparo) = \frac{P(Black\ vença\ \cap\ erre\ o\ 1^o\ disparo)}{P(erre\ o\ 1^o\ disparo)}$$

$$= \frac{\frac{36+14}{189}}{\frac{48+36+14+28}{189}} = \frac{50}{126} \cong 0{,}3968 \cong 39{,}68\%$$

Desse modo fica claro que a melhor alternativa para o Sr. Black é mirar no ar, garantindo assim que irá errar o primeiro disparo, pois desse modo ele aumenta as suas chances de vitória que antes eram de 31,21% e que agora passam a ser de 39,68%. Isso nos mostra também que, apesar de ser o oponente mais fraco, nesta situação o Sr. Black passa a ser o que tem mais chance de vitória, pois no início o Sr. Gray tinha probabilidade igual a $\frac{102}{189} = 54\%$ e após o erro do Sr. Black ele passa a ter $\frac{48}{48+36+14+28} = \frac{48}{126} = 38{,}09\%$ enquanto o Sr. White no início tinha $\frac{28}{189} = 14{,}8\%$ e após o erro do Sr. Black passa a ter $\frac{28}{48+36+14+28} = \frac{28}{126} = 22{,}22\%$.

6.6 **Problema das duas filhas**

Veremos agora a aplicação desse conceito no exemplo proposto por MLODINOW (2009, p.36):

> Numa família com duas crianças, qual é a probabilidade de que, se uma delas for menina, ambas sejam meninas? (MLODINOW, 2009, p.36)

Uma solução possível consiste em descrever o espaço amostral e analisar somente os casos que atendem as condições do problema.

Nesse caso, considere M para sexo masculino e F para feminino. Nosso espaço amostral é composto por {(M, M), (F, F), (M, F), (F, M)}. Como já temos conhecimento a respeito do sexo de um dos filhos, segue que o caso (M, M) nunca irá ocorrer, portanto nosso espaço amostral passa a ser constituído apenas dos casos {(F, F),(M, F), (F, M)} e com isso a probabilidade de que ambas sejam meninas será dada por $\frac{1}{3}$. Outro modo de resolver é aplicando o Teorema de Bayes:

Considere os eventos:

$$A \ = \{uma\ das\ filhas\ \text{é}\ do\ sexo\ feminino\}$$
$$B \ = \{as\ duas\ filhas\ s\text{ão}\ do\ sexo\ feminino\}$$

Desejamos determinar a probabilidade de ocorrer o evento B dado A, isto é:

$$P(B|A) \ = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Agora vamos analisar uma variação desse mesmo problema. Suponha que numa família com duas crianças, uma delas é uma menina chamada Flórida. Qual será a probabilidade de que ambas sejam meninas?

A princípio podemos acreditar que o nome não irá alterar nossa probabilidade de $\frac{1}{3}$. Mas não é isso que acontece. De fato, a informação adicional de que um dos filhos é uma menina chamada Flórida irá alterar nossa probabilidade de $\frac{1}{3}$ para $\frac{1}{2}$. Vejamos o porquê.

Considere os eventos A e B onde MF caracteriza menina Flórida, M menina e H para homem. Assim,

$$\begin{aligned} A \ &= \ \{um\ dos\ filhos\ \text{é}\ uma\ menina\ chamada\ Fl\text{ó}rida\} \\ &= \ \{(MF, M), (MF, H), (M, MF), (H, MF)\} \end{aligned}$$

$$B = \{os\ dois\ filhos\ são\ do\ sexo\ feminino\} = \{(MF, M), (M, MF)\}$$

Nosso objetivo é determinar:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{4}}{1} = \frac{1}{2}.$$

6.7 **Teste de mamografia**

Outro problema instigante consiste na aplicação do conceito de probabilidade condicional para o cálculo da probabilidade em testes médicos. Vejamos a aplicação desse conceito na resolução de um problema envolvendo um teste de mamografia.

Segundo MLODINOW (2009, p. 38):

> A TEORIA DE BAYES nos mostra que a probabilidade de que A ocorra se B ocorrer geralmente difere da probabilidade de que B ocorra se A ocorrer. Não levar esse fato em consideração é um erro comum na profissão médica. Por exemplo, em estudos feitos na Alemanha e nos Estados Unidos, pesquisadores pediram a médicos que estimassem a probabilidade de que uma mulher assintomática com idade entre 40 e 50 anos que apresentasse uma mamografia positiva realmente tivesse câncer, sabendo que 7% das mamografias mostram câncer quando ele não existe. Além disso, os médicos receberam a informação de que a incidência real da doença era de aproximadamente 0,8%, e que a taxa de falsos negativos era de aproximadamente 10%. Juntando todas as informações, podemos usar o método de Bayes para determinar que uma mamografia positiva representa a presença de câncer em apenas cerca de 9% dos casos. (MLODINOW, 2009, p. 38)

Para entender melhor esse problema, considere um grupo perfeito com 10000 pessoas, isto é, um grupo no qual a realidade condiz exatamente com as probabilidades esperadas. Considere ainda os seguintes eventos:

$$A = \{ter\ câncer\}$$

$$\overline{A} = \{não\ ter\ câncer\}$$

$$B = \{exame\ positivo\}$$

$$\overline{B} = \{exame\ negativo\}$$

Sabe-se que:

$$P(A) = 0{,}8\%$$

$$P(\overline{A} \cap B) = 7\%$$

$$P(A \cap \overline{B}) = 10\%$$

Desejamos saber qual é a probabilidade de que uma pessoa tenha câncer sabendo que seu exame deu positivo, isto é:

$$P(A|B) = ?$$

Em nosso grupo com 10000 pessoas, isso significa que:

80 pessoas possivelmente têm câncer e dessas $\begin{cases} 72 \; obtiveram \; exame \; positivo \\ 8 \; obtiveram \; exame \; negativo \end{cases}$

9920 pessoas não têm câncer e dessas $\begin{cases} 694 \; obtiveram \; exame \; positivo \\ 9226 \; obtiveram \; exame \; negativo \end{cases}$

Portanto, a probabilidade que desejamos obter será dada por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)} = \frac{72}{72 + 694} = \frac{72}{766} = 0{,}093 \cong 9\%$$

Assim, considerando o grupo de pessoas cujo resultado do teste foi positivo, 91% não apresentam a doença, são os chamados “falso positivos”. Isso nos permite duvidar da eficácia desse teste, já que ter a doença quando o exame é positivo é menos provável que obter resultado igual a 1 no lançamento de um dado. Por outro lado, para um paciente cujo resultado do teste foi negativo, esse exame é ótimo, pois a probabilidade de que uma pessoa não tenha a doença sabendo que seu exame deu negativo corresponde a:

$$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(A \cap \overline{B})} = \frac{9226}{9226+8} = \frac{9226}{9234} = 0{,}9991 \cong 99{,}91\%$$

Logo, uma pessoa cujo exame deu resultado negativo tende a dormir despreocupada.

É curioso pensar que a maioria dos médicos que participaram da pesquisa estimou que a chance de que uma pessoa tivesse a doença na certeza de que seu teste foi positivo fosse de 75%, um número bem distante da realidade. É claro que analisando os dados do problema esse valor é absurdo. Contudo, se pensarmos que os médicos analisaram o problema com base nas experiências médicas que possuem e não com base nos valores atribuídos pelo problema, talvez eles não estejam totalmente errados. Isso porque a eficiência do resultado de um teste depende do grupo no qual está sendo aplicado. No exemplo anterior encontramos o resultado de 9% aplicando o teste num grupo de pacientes escolhidos aleatoriamente. Se pensarmos que os médicos somente recomendam o teste para um grupo de pacientes com determinadas características, também chamado de grupo de alto risco, então é bem provável que os médicos estejam de fato corretos. Isso porque ao recomendar um teste dessa natureza para pacientes de alto risco, o médico já reduz de forma considerável o espaço amostral, aplicando o conceito de probabilidade condicional. Para entender melhor essa situação, vamos analisar mais um exemplo:

Um teste clínico tem 99,99% de eficiência e não existem falsos negativos. Isto quer dizer que, se 10 mil pessoas fizerem o teste, ele vai errar o diagnóstico em apenas um caso. Esse teste parece eficiente pra você?

Solução

Bem, depende. Imagine um teste de gravidez com essa eficiência. Suponha que uma em cada 20 mulheres que façam o teste, realmente estejam grávidas. Se o teste for usado numa amostra perfeita de 10 mil mulheres, o teste apontará 501 positivos, 500 verdadeiros e apenas 1 falso. Portanto, a probabilidade de uma pessoa estar grávida, dado que o resultado foi positivo é de $\frac{500}{501} = 99{,}8\%$. Parece razoável.

Agora imagine que o teste detecta uma doença rara que atinge uma em cada 20 mil pessoas. Neste caso, se o teste for aplicado numa amostra perfeita de 100 mil pessoas, ele apontará 15 positivos. Cinco verdadeiros e dez falsos. Logo, a probabilidade de que a pessoa tenha a doença, dado que o resultado seja positivo é de 33%.

A eficiência do teste, portanto, dependerá do grupo no qual está sendo aplicado, por isso é preciso considerar se o grupo é de alto risco ou se foi escolhido de forma aleatória. Os equívocos relacionados ao uso de probabilidade condicional não são exclusividade dos médicos. Muito erros judiciais também são cometidos com base em resultados de testes forenses nos quais o teorema de Bayes não foi devidamente aplicado. Há casos onde são considerados apenas os verdadeiros positivos quando na verdade é preciso considerar todas as possibilidades (falsos positivos, verdadeiros negativos e falsos negativos) a fim de evitar condenações injustas. Segundo MATTHEWS (2017, p. 172):

> Segundo o Innocence Project [criado em 1992 na Escola de Direito Cardozo de Nova Iork (sic) para reexaminar aparentes erros da justiça], quase metade dos trezentos e tantos casos de erros judiciais revelados envolve testes forenses mal interpretados, mal aplicados e nunca adequadamente validados. Mesmo técnicas conhecidas e amplamente usadas, como microscopia capilar, análise de solas de calçados e comparações de mordidas dentárias, jamais passaram pela peneira bayesiana para avaliar que peso de evidência – havendo algum – podem fornecer. (MATTHEWS, 2017, p. 172)

7 **PROBLEMA DA LOTERIA CANADENSE**

Segundo MLODINOW (2009, p. 73):

> Alguns anos atrás, os administradores da loteria canadense aprenderam, da pior maneira possível, [...]. Compraram 500 automóveis como prêmios especiais e programaram um computador para determinar os vencedores, selecionando aleatoriamente 500 números de uma lista de 2,4 milhões de participantes. A loteria publicou a lista dos 500 números vencedores, prometendo um automóvel para cada número listado. Para seu embaraço, uma pessoa alegou (corretamente) que havia ganhado dois carros. Os administradores da loteria ficaram embasbacados – sorteando números de uma lista de mais de 2 milhões de participantes, como o computador poderia ter sorteado duas vezes o mesmo número? Haveria uma falha no programa?[...]. A chance de repetição, de fato, é de aproximadamente 5%. (MLODINOW, 2009, p. 73)

Mlodinow resolve o problema de determinar a probabilidade de serem sorteados 500 números de um total de 2 milhões onde pelo menos um número seja sorteado mais de uma vez.

Vamos analisar uma variação do problema. Para isso, precisamos definir o conceito de repetição. Dizemos que houve uma repetição sempre que sorteamos um número já sorteado anteriormente.

Estamos interessados em analisar o caso em que houve repetição e quantas foram, isto é, desejamos saber: Qual é a probabilidade de que, num grupo com p prêmios a serem sorteados entre k pessoas, haja exatamente n repetições? (Nesse problema estamos considerando que cada pessoa será representada por um único bilhete que será sorteado com reposição).

Exemplo 7.1

Antes de generalizarmos, considere, em particular, um grupo com $k = 5$ pessoas e $p = 3$ prêmios. Seja n o número de repetições. Logo, a quantidade de repetições será um número entre 0 (os números sorteados são todos distintos) e 2 (o número sorteado foi o mesmo em todos os casos). Isso significa que serão sorteadas $p - n = (3 - n)$ pessoas. Vamos representar as 5 pessoas pelas letras ABCDE.

Para:

- $n = 0$ repetições, temos, por exemplo, ABC: $5 \times 4 \times 3 = 60$ possibilidades de selecionar 3 pessoas das 5 para ganhar os prêmios.

- $n = 1$ repetição, temos, por exemplo, AAB. Primeiro vamos selecionar a primeira pessoa para receber o prêmio, o que pode ser feito de 5 modos, a segunda já foi escolhida e para a terceira restaram 4 possibilidades. Como podemos permutá-las, segue que o total será de: $5 \times 1 \times 4 \times \frac{3!}{2!} = 60$ possibilidades.
- $n = 2$ repetições, por exemplo, AAA ou BBB: Primeiro vamos selecionar a primeira pessoa para receber o prêmio, o que pode ser feito de 5 modos distintos, a segunda já foi escolhida e a terceira também, temos assim: $5 \times 1 \times 1 = 5$ possibilidades.

Como o nosso espaço amostral é constituído de $k^p = 5^3 = 125$ possibilidades, temos:

$$P(n = 0) = \frac{60}{125} = 48\%$$

$$P(n = 1) = \frac{60}{125} = 48\%$$

$$P(n = 2) = \frac{5}{125} = 4\%$$

Observe que no exemplo acima, o problema foi dividido em três casos. Fica claro que o problema torna-se muito trabalhoso quando o número de repetições é alto, além de exigir um raciocínio mais detalhado para fazer a divisão em casos. Existe ainda o inconveniente de que este método não transparece uma generalização óbvia.

Com este objetivo, introduziremos os números de Stirling de segundo tipo.

7.1 **Números de Stirling de segundo tipo**

Os números de Stirling do segundo tipo nada mais são do que a solução para o seguinte problema: De quantos modos é possível colocar n objetos distintos em p gavetas idênticas, sem deixar nenhuma delas vazia?

Solução:

a) Vamos representar a solução por $\{n, p\}$. Para $n = p$ ou $p = 1$, existe apenas um modo. Assim, $\{n, 1\} = \{n, n\} = 1$.

b) Vamos considerar o problema no caso geral. Podemos:

- Dispor $n-1$ objetos em $p-1$ gavetas de $\{n-1, p-1\}$ modos, e o n-ésimo objeto sozinho na p-ésima gaveta.
- Dispor $n-1$ objetos em p gavetas de $\{n-1, p\}$ modos, e o n-ésimo objeto em qualquer uma das p gavetas, de p modos.

  Logo, $\{n, p\} = \{n-1, p-1\} + p\{n-1, p\}$.

Portanto, podemos representar a solução no triângulo abaixo (onde n é o número da linha e p é o número da coluna):

1						
1	1					
1	3	1				
1	7	6	1			
1	15	25	10	1		
1	31	90	65	15	1	
1	63	301	350	140	21	1

Esse triângulo pode ser facilmente construído e é uma boa alternativa ao uso da fórmula para n pequeno, já que a fórmula de $\{n, p\}$ não é das mais simples.

Weisstein define o número de Stirling de segundo tipo, denotado por $\{n, p\}$,a quantidade de partições (em $p$subconjuntos) de um conjunto com n elementos, dado pela fórmula abaixo:

$$\{n, p\} = \frac{1}{p!}\sum_{i=0}^{p}(-1)^{p-i}\binom{p}{i}i^n$$

7.2. Problema da loteria Canadense generalizado

Lembrando que k é o número de pessoas, p é o total de prêmios e n o número de repetições, primeiro vamos determinar a quantidade de casos favoráveis. Para isso, escolhemos as $(p-n)$ pessoas que serão sorteadas: existem $A(k, p-n)$ maneiras de fazer isso. Depois, fazemos a partição dos p prêmios (cada prêmio representa um sorteio) para as $(p-n)$ pessoas, isso pode ser feito de $\{k,(p-n)\}$ maneiras[4].

Veremos abaixo uma solução alternativa do Exemplo 6.1.

Exemplo 7.2

. Para $k=5$, $p=3$ e $n=0{,}1$ ou 2, os prêmios $P1$, $P2$ e $P3$ serão distribuídos considerando que as pessoas sorteadas são como gavetas idênticas e que nenhuma delas ficará sem receber prêmio. Portanto, para:

- $n=0$ suponha que foram sorteadas as pessoas ABC:
  Temos $\{k,(p-n)\}=\{3{,}3-0\}=\{3{,}3\}=1$ maneira de realizar a distribuição dos 3 prêmios.

- $n=1$ suponha que foram sorteadas as pessoas AB:
  Temos $\{k,(p-n)\}=\{3{,}3-1\}=\{3,2\}=3$ maneiras de realizar a distribuição dos 3 prêmios.

- $n=2$ suponha que foi sorteada a pessoa A:
  Temos $\{k,(p-n)\}=\{3{,}3-2\}=\{3{,}1\}=1$ maneira de realizar a distribuição dos 3 prêmios.

Acompanhe os cálculos:

Para $n=0$, temos $A(5{,}3)\cdot\{3{,}3\}=60\cdot 1=60$ possibilidades.

Para $n=1$, temos $A(5{,}2)\cdot\{3{,}2\}=20\cdot 3=60$ possibilidades.

Para $n=2$, temos $A(5{,}1)\cdot\{3{,}1\}=5\cdot 1=5$ possibilidades.

O que gera as probabilidades obtidas através do primeiro método de resolução:

$$P(n=0)=\frac{60}{125}=48\%$$

$$P(n=1)=\frac{60}{125}=48\%$$

$$P(n=2)=\frac{5}{125}=4\%$$

[4] $\{k,(p-n)\}$ é o número de Stirling de segundo tipo, que está ligado ao problema da partição de um conjunto finito.

Observe que o segundo método (Exemplo 6.2) pode ser facilmente generalizado para qualquer caso. Assim, a probabilidade de que, num grupo com p prêmios a serem sorteados entre k pessoas, haja exatamente n repetições será dada por:

$$P(n) = \frac{A\big(k,(p-n)\big)\cdot\{p,(p-n)\}}{k^p}$$

Assim,o cálculo da probabilidade fica definida da seguinte forma:

$$P(n) = \frac{A\big(k,(p-n)\big)\cdot\{p,(p-n)\}}{k^p}$$

$$= \frac{\frac{k!}{(k-p+n)!}\cdot\frac{1}{(p-n)!}\sum_{i=0}^{(p-n)}(-1)^{(p-n)-i}\binom{p-n}{i}i^p}{k^p}$$

Esse problema – distribuir p prêmios entre k pessoas – é equivalente ao problema dos aniversários – distribuir r pessoas em 365 dias – como vemos na tabela abaixo:

Problemas	**Distribuir**	**Em**
Stirling	Objetos	Gavetas
Loteria	Prêmios	Pessoas
Aniversário	Pessoas	Datas

Tabela 7. Problemas equivalentes
Fonte: A autora, 2017.

Quando o número de prêmios excede o número de pessoas fica óbvio pelo princípio da casa dos pombos que pelo menos uma pessoa receberá mais de um prêmio. Caso contrário, ele não permite nenhuma conclusão, é justamente nesse caso que o Stirling se aplica. O mesmo ocorre no problema dos aniversários.

8 A MEDIÇÃO E A LEI DOS ERROS

.

8.1 O mito do determinismo

O pensamento determinista surgiu com Newton (1642 – 1727) e segundo MLODINOW (2009, p.204):

> [...] o determinismo pressupõe um mundo no qual nossas qualidades pessoais e as propriedades de qualquer situação ou ambiente levam direta e inequivocadamente a consequências precisas. Trata-se de um mundo ordenado no qual tudo pode ser antecipado, computado, previsto. (MLODINOW, 2009, p. 204)

Seguindo essa filosofia, temos leis imutáveis que regem o mundo e que se aplicam em qualquer situação. Todos acreditavam que se existissem leis que regem o movimento dos planetas, então deveriam existir leis que regem a sociedade.

Um século mais tarde, Laplace (1749 – 1827) influenciado pelo pensamento mecanicista de Newton, embora fosse um dos pioneiros no estudo da teoria da aleatoriedade, propõe que se soubermos a posição de todas as partículas do universo num determinado momento e conhecermos as leis que regem o movimento dessas partículas, é possível prever o passado, presente e futuro. Essa ideia ficou conhecida como “demônio de Laplace”. (MLODINOW, 2009, p. 204).

Outro adepto desse pensamento foi Hilbert (1862 – 1943) que em 1900 propõe uma lista com 23 problemas e afirma que é apenas uma questão de tempo para que a comunidade matemática resolva toda a lista. Para ele, a matemática com suas bases sólidas não apresenta contradições e, além disso, possui todas as ferramentas para solucionar tais problemas. (SAUTOY, 2007, p. 1).

Mesmo na literatura e no imaginário popular da época vemos exemplos desse pensamento como na obra de Júlio Verne (1828 – 1905) em “A volta ao mundo em 80 dias”. Nela, o personagem principal faz uma aposta na qual afirma que conseguirá realizar a viagem de volta ao mundo em exatamente 80 dias, pois qualquer acontecimento pode ser previsto. Fica claro que o personagem não considera os eventos aleatórios aos quais estará exposto.

8.2 **Determinismo × Incerteza**

Vivemos num mundo tão complexo que o determinismo mostra-se um modelo fraco, pois depende da existência de um conjunto de leis da natureza que o tornam previsível.

É claro que todo instrumento de medição é suscetível a erros. De fato, a falta de precisão dos sistemas de medida tem a ver com o fato matemático da *incomensurabilidade*, ou seja, dados duas grandezas nem sempre existe uma unidade que meça ambas um número inteiro de vezes. Apesar de não ser possível determinar uma medida exata, sempre podemos tomar aproximações tão boas quanto quisermos. Contudo, jamais teremos o resultado exato como propôs o determinismo.

Outra evidência que põe em xeque esse pensamento consiste no princípio da incerteza de Heisenberg (1901 – 1976) na física. Esse princípio diz que, existem pares de grandezas para as quais à medida que aumenta a precisão da medida de uma, perdemos precisão na medida da outra. Ou seja, para aumentar nossa certeza sobre uma grandeza, temos de abrir mão da certeza sobre outra, e isso não é uma deficiência de nossos instrumentos e unidades de medida, mas uma *lei da natureza*, que restringe o conhecimento de mundo do demônio de Laplace, solapando o determinismo.

Com isso, o determinismo perde força em várias áreas do conhecimento. Outro exemplo encontra-se na matemática quando Godel (1906 – 1978) diz que é possível formular problemas impossíveis de resolver indo de encontro às ideias de Hilbert. Segundo SAUTOY (2007, p. 195):

> Isso foi chamado de teorema da incompletude de Godel – qualquer sistema axiomático consistente é necessariamente incompleto, pois sempre haverá afirmações verdadeiras que não poderão ser deduzidas a partir dos axiomas. (SAUTOY, 2007, p. 195)

Outro exemplo surge na física com a revisão de Einstein do movimento Browniano. Essas idéias levaram ao enfraquecimento do determinismo e com isso a aleatoriedade passa a ter cada vez mais importância na explicação dos fenômenos.

8.3 **Como diminuir a incerteza**

Quando realizamos a primeira medição e desconfiamos de seu resultado, não será uma segunda medição que tornará o resultado mais confiável que o primeiro. Para isso, é necessário realizar o experimento inúmeras vezes e observar os resultados a fim de estabelecer um resultado mais próximo da realidade quanto possível. É claro que também não sabemos, a priori, quantos experimentos são necessários para garantir um resultado satisfatório. Se observamos que na análise de uma amostra com 200 peças, 5 apresentam defeitos, nada podemos afirmar a respeito da próxima amostra com 200 peças. Nessas condições, vamos buscar compreender o papel da aleatoriedade e sua influência nas medições.

De acordo com MLODINOW (2009, p. 105), o matemático Jakob Bernoulli se ocupou desse problema por 20 anos e seus estudos revelaram o que o senso comum já dizia: quanto maior o número de experimentos, mais próximos da probabilidade real estaremos, mas nunca chegaremos ao nível de certeza absoluta. Assim, Bernoulli enunciou o chamado teorema áureo, cujo objetivo é determinar quantos experimentos são necessários para que tenhamos um certo grau de confiança e precisão nos resultados obtidos. Contudo, na prática, o teorema mostrou ser de pouca aplicabilidade. Isso porque Bernoulli desejava obter um grau de confiança de 99,9% e precisão de mais ou menos 2%. Um de seus experimentos trata-se de uma urna contendo 2000 pedras pretas e 3000 pedras brancas. Bernoulli desejava saber qual deveria ser a quantidade de pedras retiradas para determinar a probabilidade de se obter pedras brancas caso a quantidade de pedras de cada cor fosse desconhecida. Tamanha exigência no grau de confiança e precisão tornou o experimento inviável, pois o teorema áureo mostrou que seria necessária a retirada de mais de 25500 pedras, ou seja, seria mais simples contar a quantidade total de pedras na urna. Decepcionado com o resultado, Bernoulli não levou suas pesquisas adiante. Mas o teorema áureo não foi uma total perda de tempo. Somente muitas décadas depois, De Moive reduziria o nível de exigência quanto a confiança e precisão adotados por Bernoulli para que fosse possível aplicar o teorema. Isso reduziu drasticamente o número de pedras a serem retiradas da urna. De acordo com MATTHEWS (2017, p. 25):

> Hoje, 95% tornou-se o padrão de fato para os níveis de confiança numa profusão de disciplinas orientadas por dados, da economia à medicina. Organizações de pesquisa combinaram essa confiança com uma precisão de mais ou menos 3% para chegar ao tamanho-padrão da amostra de pesquisa, de aproximadamente mil. Todavia, embora possam ser bastante usados, nunca devemos esquecer que esses padrões baseiam-se no pragmatismo, e não em algum consenso grandioso do que constitui “uma prova científica”. (MATTHEWS, 2017, p. 25)

A fim de melhor entender a distribuição dos dados de uma amostra foi necessário o desenvolvimento da estatística. Nela, surge a ideia de que toda distribuição dos erros seguirá uma lei universal, a chamada Lei dos erros.

O primeiro matemático a tentar compreender essa Lei foi Daniel Bernoulli, sobrinho de Jakob Bernoulli, ao analisar a posição das flechas lançadas num mesmo alvo. Para ele, a forma com que elas se distribuíam em relação ao centro do alvo estava de acordo com a Lei dos erros. Assim, se não soubéssemos a localização do centro do alvo seria possível prevê-la a partir das observações das posições das flechas. (MLODINOW, 2009, p. 145)

O conceito de distribuição normal somente se solidificou com DeMoivre que se dedicou a interpretar os números do triângulo de Pascal por meio de um gráfico em forma de sino. Esse gráfico, por sua vez, depende de dois parâmetros: a média e o desvio padrão.

Portanto, toda vez que buscarmos compreender os dados de um experimento submetido a diversas observações, nosso primeiro passo será considerar o cálculo da média.

A média consiste na utilização de um único número para representar um conjunto de dados. Claro que esse número não é escolhido aleatoriamente.

Dado um conjunto $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$, a média será representada por:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

O gráfico da distribuição normal nos permite verificar o quanto um dado do conjunto se desvia da média. Mas para isso, precisamos definir o conceito de desvio padrão que depende da variação dos dados em relação à média, isto é, a variância, dada por:

$$VAR(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{n}$$

Essa variação nos fornece o valor do desvio padrão. É o desvio padrão que nos permite estabelecer um intervalo nos quais os dados de um experimento se encontram, mesmo sem conhecer seus valores desde que os dados tenham uma distribuição normal. O desvio padrão será:

$$DP(X) = \sigma = \sqrt{VAR(x)}$$

O mercado do comércio utiliza os processos de medição como forma de promover seus produtos. Mas, do mesmo modo que esse recurso pode desencadear um sucesso de vendas, também pode levar ao fracasso. Isso porque a maioria dos consumidores dá extrema importância à avaliação numérica dos produtos, pois considera o número como uma descrição do grau de qualidade e não uma medição dessa qualidade, que, como qualquer medição, está sujeita a lei dos erros.

Um exemplo disto está nas notas que são utilizadas nas classificações dos vinhos. As pessoas consomem os vinhos de acordo com a nota e o preço, mas esquecem que talvez um vinho com nota 89 seja tão bom ou até melhor que outro com nota 90, simplesmente porque não levam em conta o desvio padrão. (MLODINOW, 2009, p. 140).

Considere o exemplo extraído de MLODINOW (2009, p. 143), onde é solicitado para um grupo com 15 críticos de vinhos que avalie um certo vinho em dois dias diferentes.

No 1º dia todos atribuem nota 90 ao vinho e no 2º dia as notas são: 80, 81, 82, 87, 89, 89, 90, 90, 90, 91, 91, 94, 97, 99, 100.

Considere agora que $\overline{x}_1$ é a média no 1º dia e que $\overline{x}_2$ é a média no 2º dia.

Assim:

$$\mu_1 = \frac{90 \times 15}{15} = 90$$

e

$$\mu_2 = \frac{1350}{15} = 90$$

Observe que em ambos os casos a média é a mesma, contudo na primeira situação os dados não variam em relação à média, isto é:

$$DP(X) = \sigma = 0$$

Já na segunda situação temos:

$$VAR(X) = \frac{\sum_{i=1}^{15}(x_i - \overline{\mu})^2}{15} = \frac{(80-90)^2 + (81-90)^2 + \cdots + (100-90)^2}{15} = \frac{504}{15}$$

E consequentemente:

$$DP(X) = \sigma = \sqrt{33{,}6} = 5{,}79 \cong 6$$

Portanto com um desvio padrão de aproximadamente 6, isto significa que se considerarmos que os dados se concentram a um desvio padrão da média, o vinho em questão pode ter qualquer nota entre 84 e 96.

Como vimos, os parâmetros do gráfico da distribuição normal são a média e o desvio padrão. O primeiro determina seu pico e o segundo a sua largura. Essa distribuição será simétrica, unimodal e em forma de sino. Observe abaixo o gráfico da distribuição normal:

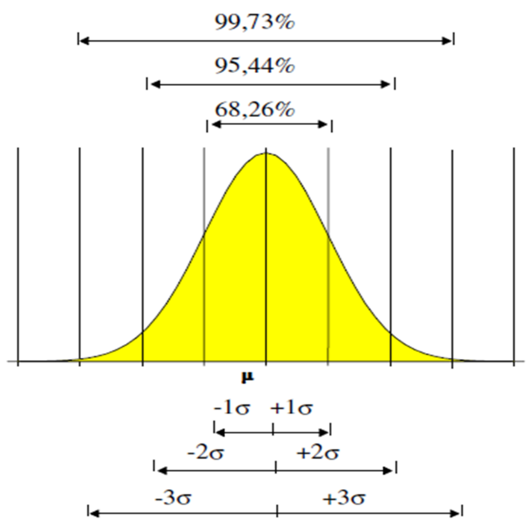

Figura 3. Distribuição normal 1
Fonte: Giacomello, p.52.

No caso das notas do vinho, o gráfico ficaria da seguinte forma:

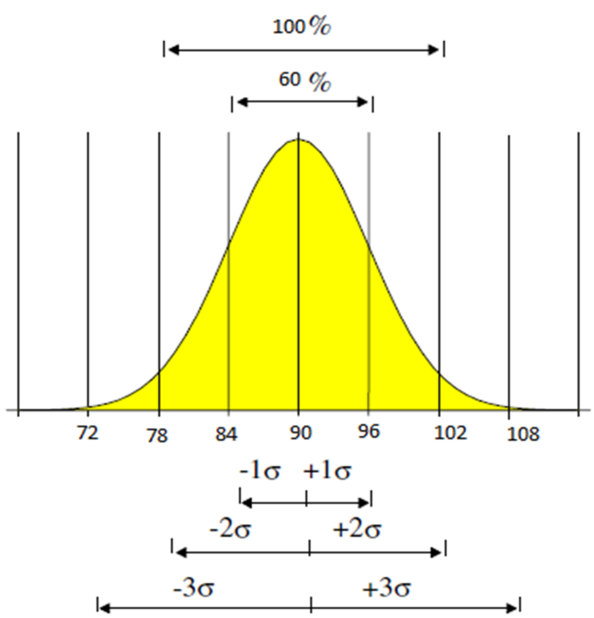

Figura 4. Notas dos vinhos
Fonte: A autora, 2017.

Portanto, 60% das notas atribuídas ao vinho localizam-se entre 84 e 96 a menos de um desvio padrão da média, quando a frequência esperada era de 68,26% e 100% das notas estão entre 78 e 102 a menos de 2 desvios padrão da média quando a frequência esperada era de 95,44% conforme dados da figura 3.

8.4 **Distribuição normal**

De acordo com FARIAS (2010, p.319), uma v.a.c. X tem distribuição normal se sua função de probabilidade é dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], -\infty < x < \infty$$

Indicaremos o fato de a v.a. X ter distribuição normal com média μ e variância σ^2 por $X \sim N(\mu; \sigma^2)$.

O cálculo da probabilidade associada a variável aleatória normal X será:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

Esse cálculo envolve métodos numéricos complexos, desse modo, para facilitar os cálculos de probabilidade faremos uso da tabela da distribuição normal padronizada. Entretanto essa tabela somente pode ser usada nos casos em que $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$, isto é, $X \sim N(0; 1)$. Portanto, para outros valores de μ e σ^2 usaremos a seguinte propriedade da distribuição normal: (FARIAS, 2010, p. 337)

Se $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, então

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

Tem distribuição normal $N(0; 1)$.

Desse modo, o cálculo da probabilidade será:

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

Portanto, segundo GIACOMELLO (p.53) para determinar $P(X > 950)$ onde $X \sim N(1000; 40^2)$, basta fazer:

$$P(X > 950) = P\left(Z > \frac{950 - 1000}{40}\right) = P(Z > -1{,}25)$$

Para determinar $P(Z > -1{,}25)$ é preciso analisar a tabela de distribuição normal padronizada. É importante fazer um esboço do gráfico da distribuição normal para saber como localizar esses valores. Assim, com um esboço do problema em questão, temos:

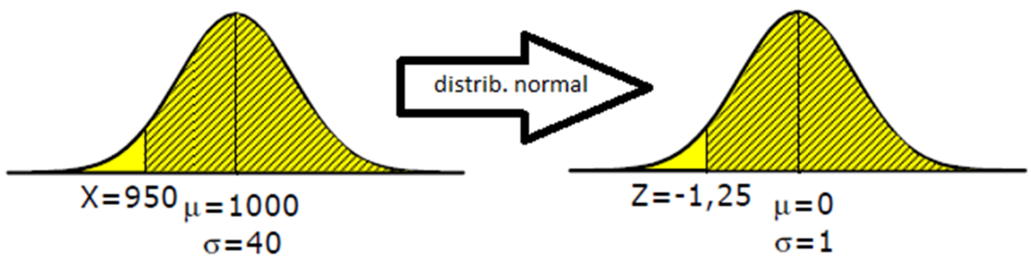

Figura 5. Distribuição normal 2
Fonte: Giacomello, p.53.

Na tabela, os valores inteiros que a v.a. normal Z pode assumir estão dispostos nas linhas, e nas colunas estão os valores com duas casas decimais. A tabela nos fornece a distância do valor desejado a média. Logo:

$$P(Z > -1{,}25) = tab(1{,}25) + 0{,}5 = tab\big(linha(1{,}00) + coluna(0{,}25)\big) + 0{,}5$$
$$= 0{,}3944 + 0{,}5 = 0{,}8944 = 89{,}44\%$$

A tabela encontra-se em anexo.

Segundo MLODINOW (2009, p.150), prever o resultado do lançamento de moedas é um evento tão aleatório quanto prever os resultados na bolsa de valores:

> Vamos analisar o gráfico a seguir. Nele, os dados marcados com quadrados referem-se aos palpites feitos por 300 estudantes que observaram, cada um, uma série de 10 lançamentos de uma moeda. No eixo horizontal foi disposto o número de palpites certos, de 0 a 10. No eixo vertical foi disposta a quantidade de estudantes que realizaram esse número de palpites certos. [...] O mesmo gráfico também apresenta outro conjunto de dados, marcado com círculos. Esse conjunto descreve o

> desempenho de 300 corretores de fundos mútuos de ações. Neste caso, o eixo horizontal não representa os palpites corretos no cara ou coroa, e sim o número de anos (de um total de 10) em que o desempenho do corretor foi melhor que a média do grupo. (MLODINOW, 2009, p.150)

Abaixo segue o gráfico com os palpites no cara ou coroa comparados com o sucesso dos corretores no mercado de ações:

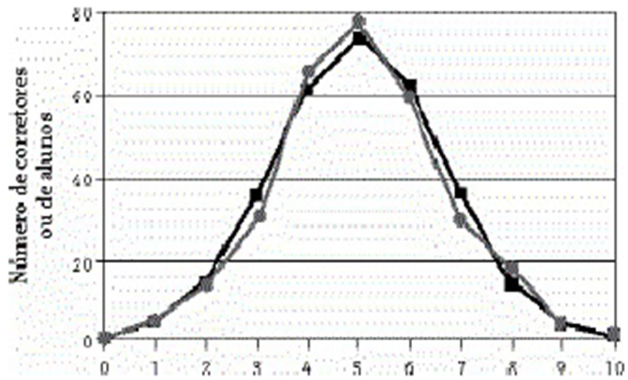

Figura 6. Cara ou coroa × Mercado de ações
Fonte: Mlodinow, 2009, p.150.

- Número de corretores entre os melhores 50%
- Número de palpites certos dos estudantes

No exemplo em questão, estamos trabalhando com uma variável aleatória discreta, portanto a probabilidade de que o número de palpites certos de um estudante selecionado ao acaso esteja entre 4 e 6 será de $P(4 \leq X \leq 6) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = \frac{60}{300} + \frac{80}{300} + \frac{60}{300} = \frac{200}{300} = \frac{2}{3} = 66\%$. Supondo que estivéssemos trabalhando com uma variável aleatória contínua $X \sim N(5; 1{,}5)$, poderíamos calcular $P(3{,}5 \leq X \leq 6{,}5) = P\left(\frac{3{,}5-5}{1{,}5} \leq Z \leq \frac{6{,}5-5}{1{,}5}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) = 0{,}3413 + 0{,}3413 = 0{,}6826 = 68\%$.

Vimos, portanto, que apesar de estarmos trabalhando com uma v.a.d. seu comportamento se aproxima do comportamento descrito pela distribuição normal. O mesmo acontece quando analisamos o sucesso de corretores no mercado de ações, que apesar de parecer algo determinístico, pois a tendência natural é acreditarmos que os corretores são especialistas no assunto, é um evento tão aleatório quanto o lançamento de uma moeda.

9. APLICAÇÃO DO PROBLEMA DE MONTY HALL NO FESTIVAL DA MATEMÁTICA 2017

O problema de Monty Hall foi apresentado no festival da matemática nos dias 28, 29 e 30 de abril de 2017 sob o título “Portas da Ilusão” no colégio Eleva, em Botafogo, Rio de Janeiro, sob responsabilidade dos professores Patrícia Nunes da Silva, Helvécio Rubens Crippa e André Luiz Cordeiro dos Santos e dos alunos Fábio Cordeiro Carvalho, Josineia Mendes da Costa, Marcelo Tobias Magalhães de Carvalho e Mônica Almeida Gama do curso de Mestrado Profissional Profmat da UERJ.

Este capítulo visa apresentar os recursos necessários para aplicação da atividade proposta, bem como os resultados obtidos.

O problema de Monty Hall é famoso por ser apresentado em programas de auditório e causar confusão entre seus participantes. Segundo MLODINOW (2009, p.52):

> Suponha que os participantes de um programa de auditório recebam a opção de escolher uma dentre três portas: atrás de uma delas há um carro; atrás das outras, há cabras. Depois que um dos participantes escolhe uma porta, o apresentador, que sabe o que há atrás de cada porta, abre uma das portas não escolhidas, revelando uma cabra. Ele diz então ao participante: “Você gostaria de mudar sua escolha para a outra porta fechada?” Para o participante, é vantajoso trocar sua escolha? (MLODINOW, 2009, p.52)

Numa primeira análise, a maioria dos participantes julga que não faz diferença trocar de porta, pois quando uma delas é revelada acreditam que a chance de conquistar o prêmio passa a 50%, visto que agora resta apenas uma porta com o prêmio e uma com a cabra. Assim, como a troca de portas poderia influenciar e alterar essa probabilidade? É o que veremos.

9.1. Público Alvo

A atividade destina-se a todos que possuem interesse pelo tema, pois o principal objetivo é despertar o interesse pelo estudo das probabilidades e fazer com que as pessoas percebam a importância da matemática no dia-a-dia.

9.2. Recursos necessários

Foi necessária a confecção de três portas de madeiras de cores diferentes (laranja, amarela e verde) com suporte para mantê-las de pé e uma mesa atrás das portas contendo o material necessário para o professor que irá aplicar a atividade. Além disso, nessas portas foi colocado um plástico transparente de PVC para funcionar como um envelope. Cada plástico conteria um papel com o prêmio ou com o bode e juntamente com o mesmo deveria ser colocado um papel colorido na mesma cor da porta com o objetivo de esconder o resultado. Assim, foram feitos três envelopes contendo as três possibilidades de resultados para cada cor (um com o prêmio na cor laranja, outro com o prêmio na cor amarela e outro com o prêmio na cor verde). Isso foi necessário, pois o resultado não seria o mesmo caso alguém que desejasse participar da atividade visse alguém escolher a porta correta e optasse por escolher a mesma porta. Além disso, é uma forma que o aplicador tem de garantir que ao revelar uma das portas que estão vazias ele não abrirá a porta com o prêmio, pois com o acesso à mesa que se encontra atrás das portas ele poderá organizar os envelopes restantes de modo que a cor da porta premiada seja sempre a primeira sobre a mesa.

9.3 Metodologia

Inicialmente, sem explorar qualquer conceito de probabilidade os alunos serão desafiados a escolher qual das portas contém o prêmio. Após sua escolha deverá ser perguntado qual é a sua chance de ganhar. Depois disso, é dito ao aluno que uma das portas que não contém o prêmio será revelada e se, após a abertura desta, ele deseja trocar de porta ou manter sua escolha inicial. Também será perguntado qual é a sua chance de ganhar agora e qual a justificativa. Em seguida, deve ser revelado ao aluno o resultado da porta escolhida, tenha ele realizado a troca ou não e explicar porque ao realizar a troca ele apresenta mais chance de ganhar.

9.4 Resultados Obtidos

Durante o festival, foram anotados os resultados obtidos por cada participante com o intuito de analisar a compreensão que a população em geral apresenta em relação ao conceito de probabilidade e se essa compreensão depende da faixa etária e grau de escolaridade. Participaram da atividade 163 pessoas. Seguem abaixo os resultados obtidos:

TROCOU	**FREQ. ABSOLUTA**	**FREQ. RELATIVA**	
GANHOU	52	71,23%	
PERDEU	21	28,77%	
TOTAL	73	100,00%	
NÃO TROCOU	**FREQ. ABSOLUTA**	**FREQ. RELATIVA**	
GANHOU	32	35,56%	
PERDEU	58	64,44%	
TOTAL	90	100,00%	
	TROCOU	**NÃO TROCOU**	**TOTAL**
INFANTIL	9	12	21
FUNDAMENTAL I	45	45	90
FUNDAMENTAL II	9	16	25
MÉDIO	4	3	7
ADULTO	6	14	20
	TROCOU	**NÃO TROCOU**	**TOTAL**
INFANTIL	42,86%	57,14%	100,00%
FUNDAMENTAL I	50,00%	50,00%	100,00%
FUNDAMENTAL II	36,00%	64,00%	100,00%
MÉDIO	57,14%	42,86%	100,00%
ADULTO	30,00%	70,00%	100,00%
	TROCOU	**NÃO TROCOU**	**TOTAL**
CRIANÇAS E ADOLESCENTES	67	76	143
ADULTOS	6	14	20
	TROCOU	**NÃO TROCOU**	**TOTAL**
CRIANÇAS E ADOLESCENTES	46,85%	53,15%	100,00%
ADULTOS	30,00%	70,00%	100,00%

Tabela 8. Resultados obtidos
Fonte: A autora, 2017.

A partir dos dados coletados verifica-se que, de fato, os que não trocaram e perderam correspondem a aproximadamente 2/3 daqueles que não trocaram e ganharam.

Além disso, é possível verificar que conforme aumenta a faixa etária dos participantes, aumenta também a resistência em relação à troca, com exceção do ensino médio que não estamos considerando nessa análise, pois o número de participantes foi muito baixo. Crianças e estudantes do ensino fundamental I tendem a não pensar muito a respeito das consequências que a troca pode trazer e optam por realizar uma escolha completamente aleatória. Já os estudantes do ensino fundamental II e adultos tendem a pensar mais no problema e, na maioria das vezes, não trocamde porta. Isso porque adultos e adolescentes tendem a cair na velha armadilha de achar que a probabilidade após a abertura de uma das portas passa a ser de 50% para cada escolha e optam por confiar na sorte. Contudo, esse tipo de problema é contra intuitivo,e assim, acaba beneficiando as crianças que são mais suscetíveis a troca. Segundo SINGH (2014, p. 54):

> Os problemas da probabilidade às vezes provocam controvérsias porque a resposta matemática, a verdadeira resposta, é frequentemente contrária ao que a intuição poderia sugerir. O fracasso da intuição é talvez surpreendente, porque a "sobrevivência do mais apto" deveria produzir uma forte pressão evolutiva a favor de um cérebro naturalmente capaz de analisar os problemas da probabilidade. [...] Um talento para analisar as probabilidades deveria ser parte de nossa estrutura genética, e no entanto, frequentemente, a intuição nos engana. (SINGH, 2014, p. 54)

Há quem pense que a dúvida gerada pelo problema das portas atinge apenas aos leigos. Entretanto, esse problema foi capaz de suscitar controvérsias e argumentos divergentes até mesmo entre professores de matemática, pessoas que possuem experiência e intimidade com o assunto. Segundo MORGADO, (RPM33), esse problema gerou os seguintes resultados em um curso de professores secundários de Matemática do Estado do Rio de Janeiro:

> I. Aproximadamente metade dos professores achava que tanto fazia, pois havia duas portas fechadas, atrás das quais havia um bode e um carro; portanto, era óbvio que a probabilidade de o carro estar atrás daporta escolhida era igual à probabilidade de o carro estar atrás da outra porta.
> II. Os outros professores achavam que, como no começo o candidato escolhera uma entre três portas, a probabilidade de o carro estar atrás da porta inicialmente escolhida era igual a 1/3. Portanto permanecer com a porta escolhida inicialmente dava ao candidato probabilidade 1/3 de ganhar o prêmio. Logo, trocando de porta, a probabilidade de ganhar seria de 2/3.
> Os que defendiam a tese do “tanto faz” diziam que 1/3 era a probabilidade antes do animador abrir a porta e o que estava em jogo era a probabilidade depois de o animador abrir a porta. Entre os que achavam que o candidato devia mudar, uns diziam que o candidato ganharia o prêmio mudando de porta se e somente se tivesse escolhido no início uma porta em que houvesse um bode e a probabilidade de isso ocorrer é igual a 2/3. (MORGADO, RPM33)

Isso mostra como um conhecimento superficial a respeito de um assunto pode atrapalhar ao invés de ajudar. Nesse problema o ideal é sempre trocar de porta, pois assim como num lançamento de cara ou coroa no qual a moeda não tem memória e nem senso de justiça, ou seja, ela não guarda o número de vezes que deu cara e, de repente, passa a dar coroa, o mesmo ocorre no problema das portas. Isso também se aplica aos sorteios da loteria em que alguns sites divulgam os números que ainda não foram sorteados como se isso aumentasse a chance destes serem premiados. Alguns jogadores podem achar que estão trocando e perdendo muitas vezese então deve ser melhor mudar a estratégia e não trocar. Contudo seja p a frequência relativa de trocas para obter o melhor desempenho e 2/3 a probabilidade da pessoa ganhar trocando sempre. Vamos adotar a seguinte estratégia: é possível melhorar essa probabilidade de 2/3? Só é possível melhorar esse desempenho trocando de porta nas vezes em que vale a pena mudar de porta. Entretanto, não sabemos que casos são esses. Então vamos verificar se é possível melhorar o índice de acertos mantendo a escolha inicial da porta num certo número de vezes. Assim:

$$(1-p).\frac{1}{3}+p.\frac{2}{3}\geq\frac{2}{3}$$

$$\frac{1+p}{3}\geq\frac{2}{3}$$

$$p\geq 1$$

Portanto, a frequência relativa de trocas deve ocorrer em 100% dos casos.

10. PROPOSTA DE ATIVIDADE EM SALA DE AULA

Outra possibilidade para a aplicação do problema de Monty Hall nas escolas é a confecção de um programa de computador com a interface proposta. Nesse caso, é imprescindível que a escola onde será realizada a atividade possua uma sala de informática com computadores (preferencialmente um para cada aluno) e que estes possuam um navegador para executar o programa. O programa foi feito em JavaScript justamente por possibilitar uma interface lúdica e de fácil execução em qualquer computador. Segue abaixo a imagem do programa:

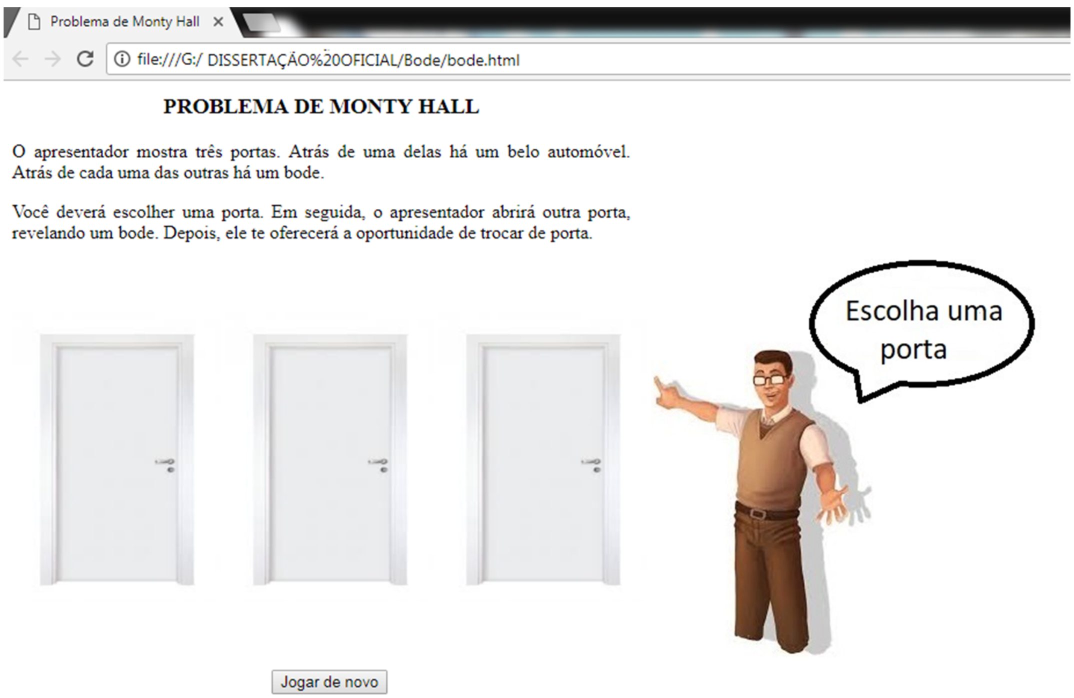

Figura 7. Tela inicial do jogo
Fonte: A autora, 2017.

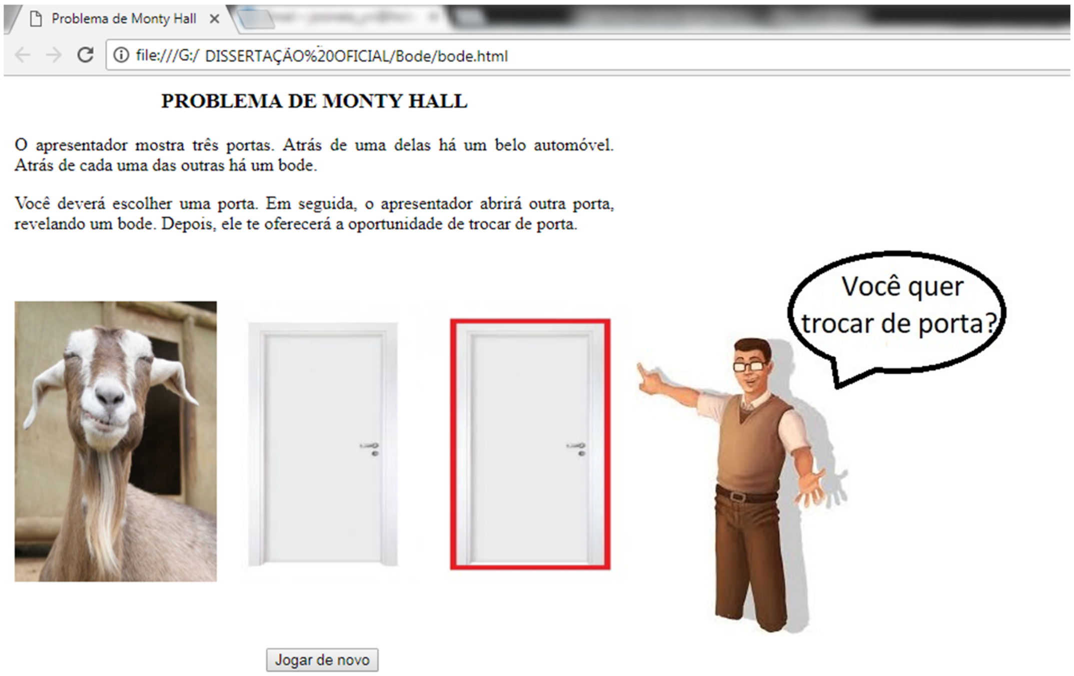

Figura 8. Apresentador abre uma das portas
Fonte: A autora, 2017.

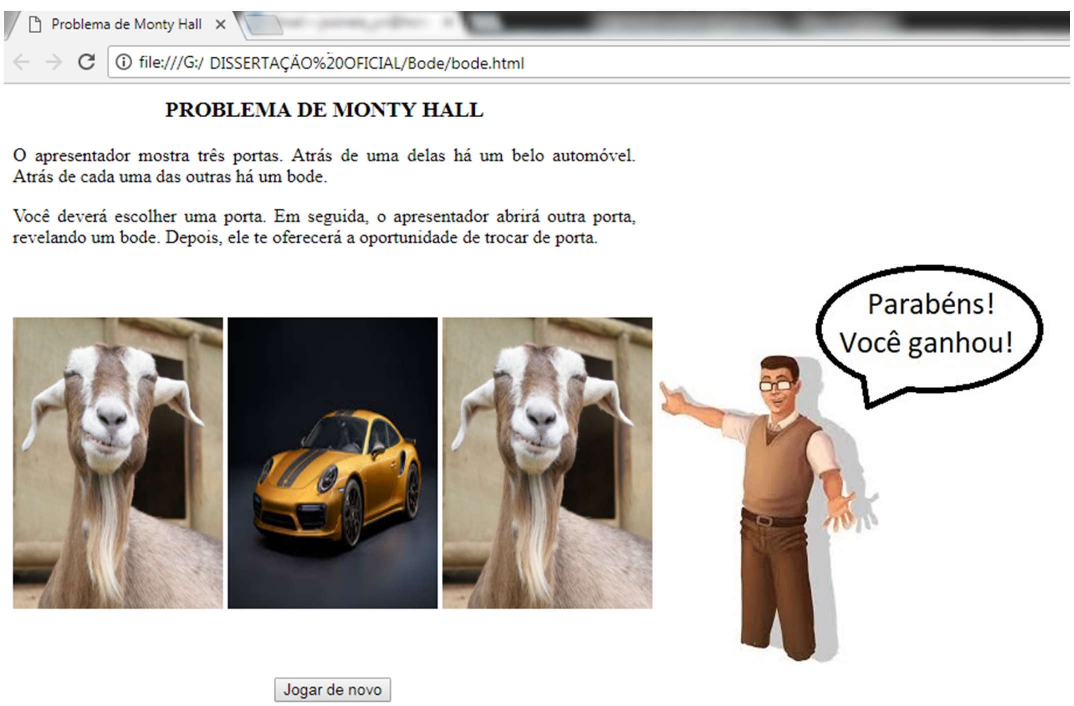

Figura 9. Feedback do apresentador
Fonte: A autora, 2017.

O código do programa encontra-se no apêndice.

Desse modo, os alunos têm a oportunidade de passar pela mesma experiência realizada no festival, além de ser um recurso que possibilita atender um número maior de alunos ao mesmo tempo. Outra vantagem deve-se ao fato de que o programa permite ao jogador realizar a atividade quantas vezes quiser, assim, caso o estudante esteja com dificuldades para compreender porque a troca de portas aumenta as chances de ganho, ele pode simplesmente realizar o experimento um certo número de vezes realizando a troca, repetir o processo mantendo a escolha inicial e registrar os resultados encontrados a fim de tirar suas próprias conclusões.

CONCLUSÃO

A apresentação da teoria de probabilidades no ensino médio é imprescindível para os alunos, tanto para aqueles que desejam dar prosseguimento aos seus estudos em cursos científicos (em exatas, humanas, biológicas...) quanto para aqueles que seguirão cursos na área empresarial (administração, marketing, contabilidade...), tendo em vista a grande aplicabilidade desse tema.

O aluno muitas vezes passa pelo ensino médio com a sensação de que os conceitos ali aprendidos jamais serão usados na prática. Justamente para quebrar esse paradigma, nos lançamos na resolução de diversos problemas interessantes que fogem do senso comum e visam despertar o interesse dos alunos que não possuem tanta simpatia pela disciplina e resgatar aqueles que possuem um bom raciocínio lógico, mas que sentem-se desmotivados diante do modelo atual de ensino.

Com essa finalidade, construímos o programa lúdico para aplicação do problema de Monty Hall, para dar ao aluno a oportunidade de refletir sobre o problema e chegar às suas próprias conclusões. Buscamos assim, valorizar o raciocínio dos alunos e o conhecimento que ele já possui em relação aos recursos tecnológicos, além de oferecer ao professor um suporte que vai além dos livros didáticos.

Neste trabalho realizamos a apresentação dos conceitos seguindo a ordem tradicional, antes da resolução dos problemas. Contudo, acreditamos que no ensino da teoria de probabilidades é possível também fazer o caminho inverso: partir da apresentação dos problemas para somente depois serem introduzidos os conceitos teóricos. Isso possibilita a independência do pensamento em relação às fórmulas, o que não quer dizer que condenamos seu uso. Apenas reforçamos o seu uso como ferramenta, com os únicos objetivos de simplificar os cálculos e possibilitar generalizações. Assim, o problema motiva o aluno no estudo dessa teoria.

Também nos empenhamos em fazer uma apresentação didática do conteúdo, seguindo uma postura de resolução que procura sempre dividir um problema em subproblemas, de forma a facilitar a solução. Esperamos com isso, ajudar o leitor a desenvolver sua habilidade na resolução de problemas probabilísticos.

REFERÊNCIAS

[1] BRASIL. *Coleção explorando o ensino: matemática*, ensino médio, vol.3, Brasília, 2004.

[2] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. *Métodos de Contagem e Probabilidade*. Rio de Janeiro: OBMEP, 2009. Disponível em www.obmep.org.br.

[3] DAWKINS, Richard. *O gene egoísta*. São Paulo, Companhia das Letras, 2007.

[4] FARIAS, Ana Maria Lima de. *Probabilidade e estatística*. v. único/ Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

[5] FIGUEIREDO, Luiz Manoel; SILVA, Mario Oliveroda; CUNHA, Marisa Ortegozada. *Matemática Discreta*: v. 1/ 3ªed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2009.

[6] GADELHA, Augusto. *Notas de Aula Teoria de Probabilidades I*. Rio: DME/IM/UFRJ, 2004.

[7] GIACOMELLO, C.P.; *Probabilidade e estatística*. Universidade de Caxias do Sul.

[8] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo C. P.; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto C.; *A matemática do ensino médio*. vol. 2 – 6ª ed. – Rio de Janeiro: SBM 2006.

[9] MATTHEWS, Robert. *As leis do acaso: como a probabilidade pode nos ajudar a compreender a incerteza*. Rio de Janeiro: Zahar, 2017.

[10] MLODINOW, Leonard. *O Andar do Bêbado: como o acaso determina nossas vidas*. Rio de Janeiro, Zahar, 2009.

[11] MORGADO, Augusto C.; CARVALHO, João B. P. de; CARVALHO, Paulo C. P.; FERNANDEZ, Pedro. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[12] MORGADO, Augusto C. O. *Os dois bodes*. RPM nº 33.

[13] SALDANHA, Nicolau C. *Como perder amigos e enganar pessoas*. Eureka! nº 1. pp 41.

[14] SINGH, Simon. *O último teorema de Fermat*. Rio de Janeiro, BestBolso, 2014.

[15]TENREIRO, Carlos. *Apontamentos de Teoria das Probabilidades*. Coimbra: Universidade de Coimbra, 2002. Disponível em http://www.mat.uc.pt/~tenreiro/

[16] WALPOLE, Ronald E.; MYERS, Raymond H.; MYERS, Sharon L.; YE, Keying. *Probabilidade e Estatística para engenharias e ciências*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009.

[17] WEISSTEIN, Eric W. *Stirling Number of the Second Kind*. In*MathWorld – A Wolfram Web Resource.*

Disponível em http://mathworld.wolfram.com/StirlingNumberoftheSecondKind.htmlm

APÊNDICE – Código fonte.

```
<html>
   <head>
      <title> Problema de Monty Hall </title>
   </head>

   <body onLoad="main()">
      <script type="text/javascript">
// <!--
function main() {
   mensagem('apresenta');
   premio = aleatorio(3); // sorteia número de 1 a 3
   clique = 1;

   revela(1, 'porta');
   revela(2, 'porta');
   revela(3, 'porta');

   X = 0; Y = 0; Z = 0;
}

function escolheu(porta) {
   if (clique == 1) {
      primeiroClique(porta);
       clique ++;
   } else {
      if ( (clique == 2) && (porta != Y) ) {
         segundoClique(porta);
           clique ++;
      }
   }
}
```

```
function primeiroClique(porta) {
   // participante escolhe a porta X
   // apresentador abre a porta Y (com bode)
   // e oferece a porta Z para troca

   X = porta;
   revela(X, 'destaque');

   if (X == premio) {
      do Y = aleatorio(3);
      while (Y == premio);
      Z = 6 - X - Y;
   } else {
      Z = premio;
      Y = 6 - X - Z;
   }

   revela(Y, 'bode');
   mensagem('oferta');
}

function segundoClique(porta) {
   // apresentador abre as portas X e Z

   if (premio == X) {
      revela(X, 'premio');
      revela(Z, 'bode');
   } else {
      revela(X, 'bode');
      revela(Z, 'premio');
   }

   porta == premio ? mensagem('ganhou') : mensagem('perdeu');
}
```

```
function mensagem(figura) {
   var posicao = document.getElementById("msg");
   switch (figura) {
       case "apresenta":
         posicao.src='msgApresenta.jpg';
           break;

      case "oferta":
         posicao.src='msgOferta.jpg';
           break;

       case "ganhou":
         posicao.src='msgGanhou.jpg';
           break;

      case "perdeu":
         posicao.src='msgPerdeu.jpg';
           break;
   }
}

function revela(num, figura) {
   var posicao = document.getElementById("p" + num);
   switch (figura) {
       case "porta":
         posicao.src='porta.jpg';
           cursor(num, 'pointer');
           break;

       case "destaque":
         posicao.src='portaDestaque.jpg';
           break;
```

```
      case "bode":
         posicao.src='bode.jpg';
           cursor(num, 'default');
           break;

       case "premio":
         posicao.src='premio.jpg';
           cursor(num, 'default');
           break;
   }
}

function cursor(num, valor) {
   document.getElementById("p" + num).style.cursor = valor;
}

function aleatorio(num) {
   return ((Math.floor(Math.random()*num)) + 1);
}
// -->

      </script>

      <table border=0 width=540>
         <tr>
             <td>
               <h3 align=center> PROBLEMA DE MONTY HALL </h3>
               <p align=justify> O apresentador mostra três
portas. Atrás de uma delas há um belo automóvel.
                   Atrás de cada uma das outras há um bode.
</p>

               <p align=justify> Você deverá escolher uma
porta. Em seguida, o apresentador abrirá outra
```

```
                      porta, revelando um bode. Depois, ele te
oferecerá a oportunidade de trocar de porta. </p>

              </td>
         </tr>
       </table>

      <table border=0>
          <tr>
             <td> <img name=p1 id=p1 height=250 width=180
onClick="escolheu(1)"> </td>
              <td> <img name=p2 id=p2 height=250 width=180
onClick="escolheu(2)"> </td>
             <td> <img name=p3 id=p3 height=250 width=180
onClick="escolheu(3)"> </td>
            <td align=center> <img name=msg id=msg> </td>

          </tr>

           <tr>
              <td width=180> </td>
            <td width=180 align=center><input type="button"
value="Jogar de novo" onClick="main()"></td>
               <td width=180> </td>
               <td width=180> </td>
          </tr>
       </table>
   </body>
</html>
```

ANEXO – Tabela de Distribuição Normal Padronizada (Tabela Z - normal)

Z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1 Ou mais	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993