Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Pedro Paulo Tavares de Andrade

O uso do GeoGebra para o ensino de geometria

Rio de Janeiro

2017

Pedro Paulo Tavares de Andrade

O uso do GeoGebra para o ensino de geometria

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Rogerio Luiz Quintino de Oliveira Junior

Rio de Janeiro

2017

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

A554 Andrade, Pedro Paulo Tavares de.
O uso do GeoGebra para o ensino de geometria / Pedro Paulo Tavares de Andrade. – 2017.
86 f.: il.
Orientador: Rogerio Luiz Quintino de Oliveira Junior.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.
1. Geometria – Estudo e ensino. 2. Ensino auxiliado por computador. I. Junior, Rogerio Luiz Quintino de Oliveira. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.
CDU 514.07

Pedro Paulo Tavares de Andrade

O uso do GeoGebra para o ensino de geometria

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 16 de maio de 2017.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Rogerio Luiz Quintino de Oliveira Junior (Orientador)

Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dra. Angela Cássia Biazutti

Instituto de Matemática - UFRJ

Prof. Dr. Augusto Cesar de Castro Barbosa

Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Rio de Janeiro

2017

DEDICATÓRIA

Em primeiro lugar, a Jesus Cristo, por sempre confortar meu coração e minha alma.

A minha mãe, Maria Magdalena Tavares, por deixar a melhor herança que um filho pode receber: a educação. Espero poder sempre cuidar de você e mostrar o meu amor nas coisas mais simples da vida.

A minha esposa, Amanda Andrade, por me consolar nos muitos momentos em que pensei em desistir. Amo você.

Ao meu irmão, Antônio Andrade, por acreditar no meu potencial e ser referência na profissão que escolhi.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que sobre seus ombros entrego todos os meus fardos.

Ao meu pai, Flávio Andrade pelos cuidados e carinho.

Ao meu orientador Rogerio Luiz Quintino de Oliveira Junior, pelas correções, orientações e incentivos.

A professora Rosimeri Ribeiro Cunha da Penha, pelos incentivos e por ceder as suas turmas do 9º ano para a aplicação das atividades presentes neste trabalho.

A todos os meus colegas do PROFMAT.

A alegria não chega apenas no encontro do achado, mas faz parte do processo de busca. E ensinar e aprender não pode dar-se fora da procura, fora da boniteza e da alegria.

Paulo Freire

RESUMO

ANDRADE, P. P. T. *O uso do GeoGebra no ensino de geometria, 2017,* 85 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

Este trabalho possui como meta apresentar a eficácia da utilização do *software* GeoGebra como ferramenta para auxiliar no ensino de geometria, mostrando o quanto um recurso tecnológico pode ser de grande valia para professores e alunos. Aborda a necessidade da escola e de professores estarem em contato com os recursos tecnológicos que podem ser implementados no ensino para melhorar a assimilação de determinados conceitos por parte dos alunos. Como forma de reforçar uma reflexão sobre o ensino de matemática nas escolas públicas, é apresentado os resultados do SAEB de 2015, usando esses resultados como forma de diagnosticar quais tópicos os alunos possuem dificuldades em geometria. Colaborando com a propagação do *software* e para coletar dados sobre sua utilização em sala de aula, foi selecionado o colégio Estadual Evangelina Porto da Mota, localizado no município de Duque de Caxias, Rio de Janeiro; onde foram aplicadas atividades com o GeoGebra para alunos do 9º ano do ensino fundamental. As atividades mostram que determinados conceitos podem ser melhor introduzidos quando auxiliados pelo *software* por sua possibilidade de movimentar objetos e ver em ângulos distintos.

Palavras-chaves: Avanços tecnológicos. Recursos tecnológicos. GeoGebra. SAEB. Geometria dinâmica.

ABSTRACT

ANDRADE, P. P. T. *The use of GeoGebra in the teaching of geometry*, 2017, 85 f. Dissertação - (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

This work has the objective to introduce the effectiveness of the application of GeoGebra software as a tool to help in the teaching of geometry, and a technological resource can be of great value to teachers and students. To address the need of the school and teachers, by contacting the technological resources that can be implemented in teaching and improve the assimilation of certain concepts for students. As a way of reinforcing a reflection on the teaching of mathematics in public schools, the results of the SAEB of 2015 are presented, using the results as a form to diagnose, in which topics the students have difficulties in geometry. Collaboration with the propagation of the software and to collect data about its use in the classroom, it was selected the Colégio Estadual Evangelina Porto da Mota, located in the city of Duque de Caxias, in Rio de Janeiro, where activities were applicated with the GeoGebra to students of the 9th year of elementary school. The activities show that certain concepts can be better introduced when aided by software because of their ability to move objects and see it at different angles.

Keywords: Technological advancement. Technological resources. GeoGebra. SAEB. Dynamic geometry.

.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A sociedade está sofrendo constantes mudanças e muitos desafios a cada dia que passa. A tecnologia está crescendo e mudando, fazendo com que a troca de conhecimento e de informações entre qualquer pessoa, até mesmo de países distantes, ocorra em segundos. Os alunos utilizam dentro da sala de aula celulares para assistir os vídeos de seus cantores prediletos, enviar mensagens para seus colegas, tirar fotos, gravar áudio e etc. Ao fazer uma comparação do comportamento dos alunos do século atual com aqueles de dois séculos atrás, há perceptíveis mudanças que podem levar a uma reflexão no modelo educacional vigente na maioria das escolas do Brasil.

Muito se debate sobre a educação no Brasil com o objetivo de criar uma educação inclusiva e de qualidade para os alunos. O uso de *softwares* para o ensino de geometria vem recebendo um destaque pela possibilidade de se trabalhar essa matéria de uma forma mais agradável, dinâmica e de reduzir os problemas no ensino da mesma. É destacado para esse trabalho o uso do *software* gratuito GeoGebra.

Os objetivos gerais desta dissertação são: (1) contribuir para a discussão sobre as mudanças que ocorrem no cenário atual; (2) chamar a atenção para a necessidade de que o professor deve estar atento as mudanças tecnológicas focando no que o aluno utiliza no seu cotidiano e usando assim a tecnologia como ferramenta para o ensino e aprendizagem; (3) mostrar a necessidade de uma reflexão para com o ensino de geometria nas escolas públicas do Estado do Rio de Janeiro através dos dados do Saeb de 2015.

Já os objetivos específicos são: (1) divulgar o *software* GeoGebra; (2) mostrar as contribuições que o programa GeoGebra pode oferecer ao ensino de geometria; (3) descrever algumas funções do *software*; (4) aplicar atividades para alunos da rede pública de ensino com o intuito de coletar dados sobre como os alunos interagem com o programa e como este favorece a assimilação dos conteúdos.

No capítulo 1, o presente trabalho apresenta uma visão panorâmica sobre as influências dos avanços tecnológicos na sociedade e os desafios que a escola enfrenta com as mudanças que ocorrem com esses avanços.

No capítulo 2, é feito uma apresentação dos Parâmetros Curriculares Nacionais e das Orientações Curriculares para o ensino médio, mostrando o que cada um deles afirma sobre a utilização de recursos tecnológicos.

No capítulo 3, inicialmente é feita uma apresentação do Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB e, no decorrer do capítulo, é utilizado o SAEB de 2015 para coletar dados sobre o ensino de geometria nas escolas públicas no estado do Rio de Janeiro, comparando a eficiência no ensino de geometria na rede estadual, municipal e federal.

No capítulo 4, é feito uma apresentação do *software* GeoGebra e apresentado as opiniões de especialistas em educação sobre a eficácia de um *software* de geometria dinâmica como uma ferramenta de ensino e aprendizagem.

No capítulo 5, com o objetivo de constatar a veracidade do que foi apresentado nos capítulos anteriores sobre o uso do *software* GeoGebra para o ensino de geometria e coletar dados para contribuir na melhoria do ensino no tema foram aplicadas 4 atividades no colégio estadual Evangelina Porto da Motta, juntamente com o motivo para a escolha da rede estadual, em vez da rede municipal ou federal.

No apêndice A, é mostrado como pode ser feito o *download* do programa e sua instalação.

No apêndice B, descreve-se as principais funções e ferramentas no GeoGebra 2D para o leitor e que serão utilizadas para a aplicação de atividades no capitulo 5.

Por fim, são apresentadas, nos anexos, as Escalas de proficiência de matemática do 9º ano do ensino fundamental e do 3º ano do ensino médio para que o leitor acompanhe o que é esperado que o aluno dentro de cada um dos níveis apresentados no capítulo 3 tenha, possivelmente, domínio nos temas referentes à geometria.

1 OS AVANÇOS NA TECNOLOGIA E OS DESAFIOS NA EDUCAÇÃO

Os avanços tecnológicos têm gerado muita atenção por parte dos professores sobre as inúmeras possibilidades para um ensino mais atraente e inovador possibilitando meios para diminuir o desinteresse e a evasão escolar em nosso país. Porém, junto com todos os avanços e possibilidades, surgem os seguintes questionamentos dentro do meio educacional: os currículos atuais atendem às mudanças tecnológicas? O que é necessário manter ou alterar nos currículos para acompanhar as mudanças? Perguntas que na verdade não são muito fáceis de serem respondidas, pois segundo Moran, Masetto e Behrens (2013) é muito difícil afirmar o rumo da educação diante de uma sociedade com tantas mudanças, possibilidades e desafios, onde o aumento do número de informações, tanto na área de educação produzidos por pesquisadores e professores, ou em qualquer outra área estão ocorrendo de forma rápida.

> A informação duplica a cada 18 meses e cada vez mais rapidamente, de acordo com os estudos da American Society of Training and Documentation (ASTD). Até 100 anos atrás, a informação que o ser humano utilizava na vida cotidiana permanecia, basicamente, a mesma por várias gerações (GÓMEZ, 2015, p.17)

A sociedade, no geral, enfrenta constantemente desafios e sofre mudanças. Para enfrentar essas barreiras, grandes empresas e até pequenos estabelecimentos estão cada vez mais informatizados, inovadores e conectados com as mudanças tecnológicas, onde estar atento é uma questão importantíssima para a sobrevivência dessas empresas, em um mundo altamente competitivo. É possível atualmente fazer compras de determinados produtos usando um computador (ou até o nosso celular) sem sair de casa e em poucos dias, ter o produto em mãos.

> [...] esses avanços tecnológicos que produzem a extensão e a universalização das redes telemáticas, das comunicações digitais, das plataformas virtuais e das redes sociais têm produzido uma mudança radical na forma de nos relacionarmos, quebrado as barreiras de espaço e de tempo e permitido que mantenhamos relações, diretas ou indiretas, presenciais ou virtuais, com um círculo cada vez mais vasto de indivíduos [...] (GÓMEZ, 2015, p.22)

Agora, comparando as mudanças que a sociedade vem enfrentando e os seus desafios constantes com o modelo de educação presente em grande parte das escolas do país não é possível observar o mesmo avanço na educação. Há ainda, mesmo no século 21, escolas que, segundo Moran, Masetto e Behrens (2013) estão estruturadas, em grande parte, de um modo burocrático, repetitivo e pouco atraente. Mesmo com pesquisas focadas em estudos de métodos alternativos para ensino, dentro das escolas, ainda persiste uma visão conservadora e que repete o que está estabelecido há anos, em oposição aos desafios complexos e as mudanças que a sociedade vem experimentando.

Consultando a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), que é a lei voltada à educação brasileira, no Título II, que trata dos princípios e fins da educação nacional, é possível encontrar dentro do artigo 3º, 12 princípios que o ensino deve ser ministrado e entre eles, destacam-se três deles: IX - garantia de padrão de qualidade, X – valorização da experiência extraescolar e XI – vinculação entre a educação escolar, o trabalho e as práticas sociais.

Moran, Masetto e Behrens (2013) apontam a necessidade de se ter em mente que a educação não é um processo somente da escola, mas um processo que envolve toda a sociedade, onde isso afeta todas as pessoas o tempo todo. Temos que a sociedade educa quando passa suas ideias, valores e conhecimentos, e também é educada quando busca novas ideias, valores e conhecimento.

> Família, escola, meios de comunicação, amigos, igrejas, empresas, internet, todos educam e, ao mesmo tempo, são educados, isto é, todos aprendem simultaneamente, sofrem influências, adaptam-se a novas situações. Aprendemos com todas as organizações e com todos os grupos e pessoas aos quais no vinculamos (MORAN; MASETTO; BEHRENS, 2013, p.12)

É possível observar, que as afirmações do parágrafo anterior, podem ser reafirmadas olhando a LDB, que aponta coerência no que foi observado, ao fazermos a leitura do artigo 1º e do artigo 2º.

> Art. 1º A educação abrange os processos formativos que se desenvolvem na vida familiar, na convivência humana, no trabalho, nas instituições de ensino e pesquisa, nos movimentos sociais e organizações da sociedade civil e nas manifestações culturais (BRASIL, 1996)
> Art. 2º A educação, dever da família e do Estado, inspirada nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho (BRASIL, 1996)

Existe por parte da sociedade uma grande insatisfação com relação à qualidade dos sistemas públicos de ensino atualmente no Brasil pelo fato de, em grande parte, não utilizar métodos voltados para a realidade que o aluno vivencia em sua casa e sua convivência diária, não atendendo o cenário atual. Isso está gerando por parte de pesquisadores e professores qualificados uma busca por métodos de ensino mais atrativos e sobretudo mais eficazes.

Segundo Gómez (2015), as escolas estão em grande parte acomodadas com as exigências do século XIX e não estão atentas aos desafios presentes no século XXI e, com isso, muitos alunos abandonam as escolas por desinteresse e entram no mercado de trabalho alternativo, não possuindo uma boa qualificação profissional. Para Moran, Masetto e Behrens (2013), há muitas escolas com uma pedagogia ultrapassada, currículos enormes para o professor abordar em uma determinada série e com pouca profundidade, para que o aluno aplique no seu dia a dia, ficando o professor preocupado em dar todo o conteúdo estipulado pela instituição, gerando um relacionamento muito superficial do aluno com o que está sendo trabalhado, levando somente a memorização de fórmulas e algoritmos que ele geralmente não aplicaria e experimentaria no seu cotidiano.

"Uma boa escola precisa de professores mediadores, motivados, criativos, experimentadores, presenciais e virtuais, de mestres menos 'falantes' e mais orientadores. De menos aulas informativas, e mais atividades de pesquisa e exploração. [...]" (MORAN; MASETTO; BEHRENS, 2013, p.26).

Existe uma grande necessidade de a escola estar mais atenta e integrada com os espaços que os alunos acham interessantes do cotidiano. Essa atenção, por parte de toda a comunidade escolar, pode despertar mais o interesse do aluno e evitar a evasão escolar. A ligação correta entre o que ele aprende com os conteúdos propostos pela escola, com as situações reais e suas experiências cria condições para que o ensino se torne para o aluno mais significativo, vivo, enriquecedor, muito mais agradável e experimental.

Observa-se que, hoje em dia, quando o aluno necessita de alguma informação, ele busca essa informação não somente com o seu professor, mas também através da *internet*, fazendo uma breve pesquisa em sites de busca. Excluir essas observações da sala de aula não é um bom caminho e muito menos deve-se fechar os olhos para essas mudanças.

Nas aulas convencionais, o professor em sala de aula é o que detém o conhecimento, enquanto que o aluno está somente sentado recebendo o que lhe é ensinado, não trocando experiências de vivência, não realizando experimentos para confirmar o seu aprendizado e não debatendo com o professor e os outros alunos dentro da sala de aula.

Freire (2015) critica esse típico modelo de educação na qual ele chama de educação "bancária". Na concepção de educação "bancária", temos que o educador é o que possui o conhecimento, transmite e pensa, enquanto que o educando recebe apenas o que lhe é transmitido e segue rigorosamente o que lhe foi passado. Observa-se neste modelo que o educador realiza "depósitos" de informações em seus alunos que, por sua vez, recebem-nas de forma passiva. Freire (2015) defende um tipo de educação, onde o educando e o educador aprendem entre si e trocam experiências, não existindo uma separação entre os dois. Esse tipo de educação é chamado por Freire (2015) de educação libertadora. Neste tipo temos um espaço aberto para o questionamento, reflexão, o diálogo, observação, transformação e aprimoramento.

2 O QUE DIZEM OS PARÂMETROS CURRICULARES E AS ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO SOBRE A UTILIZAÇÃO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS

2.1 Os parâmetros curriculares nacionais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) são consequência de um grande debate entre vários educadores do nosso país, professores e alunos da rede pública. Eles foram elaborados com o objetivo de orientar a prática escolar no país, criando meios para que os alunos matriculados nas escolas tenham acesso a um conjunto de conhecimentos socialmente elaborados e reconhecidos como necessários, para que eles exerçam a sua cidadania e fornecer ferramentas para ampliar o debate em todo território nacional sobre o ensino em todas as áreas do conhecimento. Por M. Educ. (1998), os PCN's afirmam que a sociedade está dentro de um ambiente de grandes evoluções científicas e grandes avanços tecnológicos e esses elementos citados criam exigências para os alunos que estão sendo preparados nas escolas para entrarem no mercado de trabalho. Todos esses argumentos geram a necessidade de se propor uma revisão dos currículos que orientam o trabalho realizado por professores e especialistas em educação.

Os PCN´s do ensino fundamental, M. Educ. (1998), apontam que não existe um caminho único para o ensino e, muito menos, o melhor para o ensino e aprendizagem de Matemática ou em qualquer disciplina. Porém, é necessário que os professores tenham conhecimento das diversas possibilidades de trabalho em sala de aula para ajudar em suas atividades, destacando para a Matemática como recursos o uso de jogos, a implementação da história da matemática e as tecnologias de comunicação.

Os PCN´s do ensino fundamental destacam que os alunos possuem calculadora, computadores e vários outros elementos tecnológicos que, em grande maioria, estão presentes no dia a dia deles. Com atividades de investigação e de exploração, esses recursos tecnológicos podem ser uma grande ferramenta para o ensino e aprendizagem na Matemática.

> Em matemática existem recursos que funcionam como ferramentas de visualização, ou seja, imagens que por si mesmas permitem compreensão ou demonstração de uma relação, regularidade ou propriedade. Um exemplo bastante conhecido é a representação do teorema de Pitágoras, mediante figuras que permitem “ver” a relação entre o quadrado da hipotenusa e a soma dos quadrados dos catetos (M. Educ, 1998, p.45)

Para um professor preparado e atento com o uso de tecnologias, um bom *software* pode ser uma grande ferramenta para a realização de atividades que proporcionam o pensar e o refletir, mas ele deve estar em constante pesquisa para estar apto para usar essas tecnologias que estão em constante aprimoramento. Apesar desses pontos positivos, ainda é possível constatar alguns problemas nas escolas públicas no Brasil como: escolas com computadores desatualizados ou apresentando defeitos[1] e professores que não possuem conhecimentos para utilizar um projetor ou outros recursos tecnológicos[2].

> As experiências escolares com o computador também têm mostrado que seu uso efetivo pode levar ao estabelecimento de uma nova relação professor-aluno, marcada por uma maior proximidade, interação e colaboração. Isso define uma nova visão do professor, que longe de considerar-se um profissional pronto, ao final de sua produção acadêmica, tem de continuar em formação permanente ao longo de sua vida profissional (M. Educ., 1998, p.44)

Nos PCN´s do Ensino Médio, M. Educ. (2000), nota-se também uma preocupação sobre o efeito que a tecnologia pode causar na vida de um indivíduo mostrando que esse impacto exige competências que estão não só no simples saber utilizar uma determinada máquina, pois a velocidade das transformações dos saberes e em todo o tipo de atividades tornam ultrapassadas a maior parte dos saberes adquiridos, levando sempre a uma reciclagem da pessoa para estar sempre atualizada. Dentro das competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática temos que os PCN´s do ensino médio defendem a utilização de forma correta dos recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação.

> Esse impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento. (M. Educ., 2000, p.41)

M. Educ. (2000) apresenta a defesa de que o professor deve ficar atento na utilização de outros recursos didáticos e pensar em outras estratégias para o ensino da Matemática, não

---

1 – Informações contidas em: < http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/23914/18245> Acesso: 12/04/2016.
2 – Informações contidas em < http://www.br-ie.org/pub/index.php/sbie/article/view/1148/1051> Acesso: 12/04/2016

devendo somente acreditar que as aulas convencionais e os livros didáticos resumem de forma exclusiva a enorme diversidade de recursos didáticos. A utilização de determinados recursos didáticos pode facilitar o processo de entendimento de um determinado tópico trabalhado.

> Determinados aspectos exigem imagens e, mais vantajosamente, imagens dinâmicas; outros necessitam de cálculos ou de tabelas de gráfico; outros podem demandar expressões analíticas, sendo sempre vantajosa a redundância de meios para garantir confiabilidade de registro e/ou reforço no aprendizado. (M. Educ., 2000, p. 53)

2.2 As orientações Curriculares do ensino médio

As orientações curriculares do ensino médio, M. Educ. (2006), foram criadas com o objetivo de mostrar uma coleção de reflexões que alimente a prática docente. Conforme é apontado em M. Educ. (2006), elas foram preparadas baseadas na grande discussão entre professores, alunos da rede pública, equipes técnicas dos Sistemas Educacionais de Educação e até de representantes da comunidade acadêmica.

Dentro da orientação curricular para o ensino de Matemática, afirma-se que não é possível negar o impacto da tecnologia exigindo mais pessoas com capacitação para a sua utilização, sendo necessária uma formação adequada para que o aluno entre no mercado de trabalho apto para usar tais ferramentas tecnológicas e aponta que toda essa tecnologia também pode ser uma grande ferramenta para o processo de aprendizagem da Matemática, M. Educ.(2006) aponta a necessidade de se abordar uma formação escolar focada em utilizar a Matemática como uma ferramenta para se entender a tecnologia, mas também usar a tecnologia para o aluno aprender a Matemática.

M. Educ. (2006) cita como exemplo que o conhecimento sobre funções faz com que o aluno entenda o porquê de quando ele digita sin (30) na calculadora aparece como resultado - 0,988031624092862 no visor. O conhecimento adequado da Matemática, possibilita constatar que o número 30 está em radianos, tendo assim meios para poder questionar o resultado que a calculadora informa.

Já observando a tecnologia como ferramenta para aprender a Matemática, M. Educ. (2006) afirma que há vários programas de computadores que permitem aos alunos fazerem a exploração e a construção de diversos conceitos da Matemática. Através desses programas, há disponíveis várias possibilidades para que os alunos façam experimentos, testem determinadas hipóteses e criem suas estratégias para a resolução de problemas. As orientações curriculares do ensino médio afirmam que esses tipos de programas permitem a manipulação dos objetos na tela do computador oferecendo para o aluno mais de uma representação de um objeto matemático, enriquecendo as imagens mentais associadas às propriedades geométricas, por exemplo, a utilização de um programa de geometria dinâmica para fixar algumas propriedades geométricas.

3 A CONTRIBUIÇÃO DO SISTEMA DE AVALIAÇÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA PARA O DIAGNÓSTICO DO ENSINO DA GEOMETRIA NAS ESCOLAS PÚBLICAS

3.1 Sobre o Sistema de Avaliação da Educação Básica – Saeb[3]

O Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep) está vinculado ao ministério da Educação (MEC). Seu objetivo é produzir estudos, avaliações e pesquisas sobre o sistema educacional no Brasil auxiliando na produção e aplicação de políticas públicas para a educação, criando informações para pesquisadores, educadores, gestores e para o público em geral. Para criar seus dados e estudos educacionais, o Inep faz levantamentos avaliativos e estatísticos em todas as modalidades e níveis de ensino, será aprofundado no capítulo o Saeb.

O Saeb foi fundando no ano de 1990 e seu principal objetivo era fazer o diagnóstico da educação básica brasileira produzindo as informações necessárias para melhorar as políticas públicas educacionais nas esferas municipal, estadual e federal, contribuindo para a qualidade, igualdade e eficiência no ensino.

No ano de 2005, o Saeb passou por algumas mudanças, sendo composto por duas avaliações: a Avaliação Nacional da Educação Básica (Aneb), mantendo as características, procedimentos da avaliação até aquele momento feita pelo Saeb, e a Avaliação Nacional do Rendimento Escolar (Anresc), também conhecida como Prova Brasil.

3– As informações contidas neste item foram retiradas do *site* do INEP.

Em 2013, foi adicionado ao Saeb a Avaliação Nacional da Alfabetização (ANA) com a finalidade de examinar os níveis de letramento e alfabetização dos alunos do 3º ano do ensino fundamental nas escolas públicas em Língua Portuguesa e Matemática, ocorrendo esta anualmente.

Figura 1 - Estrutura do Saeb.

Fonte: http://portal.inep.gov.br/web/sae 1.

A Aneb é uma avaliação que acontece de dois em dois anos e abrange, de forma amostral, alunos e escolas da rede privada e pública do Brasil, em áreas rurais e urbanas, matriculados no 5º e 9º ano do ensino fundamental regular e no 3ª ano do ensino médio regular. Seu objetivo é avaliar a qualidade, eficiência e igualdade da educação básica do país. Apresenta os resultados do país como um todo, das regiões geográficas e das unidades da federação. São avaliadas as habilidades em matemática (focando a resolução de problemas) e língua portuguesa (focando a leitura).

A Anresc, também conhecida como Prova Brasil, é uma avaliação cencitária que ocorre a cada dois anos e envolvem alunos do 5º e 9º ano do ensino fundamental regular das escolas públicas das redes municipais, estaduais e federais que têm no mínimo 20 alunos. Possui como objetivo principal avaliar a qualidade do ensino nas escolas das redes públicas de ensino, fornecendo resultados para as unidades escolares participantes, bem como para as redes de ensino municipal, estadual e federal. São também avaliadas como na Aneb as habilidades em matemática (focando a resolução de problemas), língua portuguesa (focando a leitura).

Para a realização das avaliações do SAEB, é feito uma seleção do currículo de modo a se definir o que se quer avaliar em cada área. Isso gerou a construção das matrizes de referência, que possuem o conjunto de conteúdos e habilidades avaliados em cada área do conhecimento representando o que se espera que os alunos tenham desenvolvido ao final de cada série analizada. As matrizes possuem como referencial os PCN’s, mas também foram criadas a partir da consulta nacional aos curriculos oferecidos pelas Secretarias Estaduais de Educação e por algumas redes municipais. Também são consultados professores e examinados os livros didáticos mais utilizados em cada área.

Os resultados que os alunos obtêm nas provas do SAEB são expressos por meio de um valor numérico posicionado em uma escala de habilidades. Essa escala é chamada de escala de proficiência[4] e construída com informações previamente estabelecidas sobre as questões aplicadas nos testes, tendo como base o uso do modelo da Teoria da Resposta ao Item (TRI)[5], o mesmo utlizado na avaliação do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

As escalas de proficiência são divididas em intervalos, que são chamados de níveis de proficiência. Em cada nível, existe um conjunto de habilidades que os alunos posicionados nelas possivelmente dominam.

Os níveis de proficiência das escalas são progressivos e acumulativos. Quando uma porcentagem de alunos está posicionada em um determinado nível, é possível supor que os alunos são capazes de dominar as habilidades no nível que estão e também de dominar as habilidades dos níveis anteriores. No Anexo B, estão disponíveis os níveis de proficiência em Matemática do 9º ano do ensino fundamental regular e do 3º ano do ensino médio regular para consulta.

Através do Saeb, é possível identificar os problemas e as diferenças nas dependências administrativas de ensino: municipal, estadual e federal, como será abordado no item 3.2. O Saeb também fornece dados para o calculo do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB).

Os resultados da Aneb e da Anresc são comparáveis ao longo dos anos. Com isso pode ser um bom meio para se avaliar o caminho que a educação está percorrendo no decorrer dos anos[6].

3.2 O SAEB 2015 (ANRESC e ANEB)

Segundo o Inep[7], no período de 03 a 13 de novembro de 2015 foi realizado pelo Inep o Saeb 2015 em todos os estados e no Distrito Federal. Participaram das avaliações todas as escolas públicas do Brasil, com no mínimo 20 estudantes matriculados no 5º ano ou 9º ano do

---

4– Nos anexos é possível consultar as escalas de proficiência do 9ºano do ensino fundamental e 3º ano do ensino médio em matemática

5 – Maiores informações sobre o modelo TRI: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/nota_tecnica/2011/nota_tecnica_tri_enem_18012012.pdf >Acesso em: 06/08/2016

6–Idem.

7 - Informações contidas em: <http://pesquisa.in.gov.br/imprensa/jsp/visualiza/index.jsp?jornal=1&pagina=16&data=14/05/2015> Acesso em: 06/10/2016.

ensino fundamental regular, conforme o Censo da Educação Básica de 2015. Em torno de 4.000.000 de estudantes participaram dos testes. Teve a participação também de uma amostra de escolas publicas com 10 a 19 estudantes matriculados no 5º ou 9º ano do ensino fundamental regular e 3º ano do ensino médio regular com mais de 10 alunos matriculados e uma amostra de alunos da rede particular com 10 ou mais estudantes matriculados no 5º ou 9º ano do ensino fundamental regular e 3º ano do ensino médio regular[8].

3.3 Resultados do Saeb 2015 (ANRESC e ANEB) no estado do Rio de Janeiro, focando nas escolas públicas

Coletando as porcentagens presentes na planilha de resuldados disponibilizado pelo SAEB 2015, é possível observar como ficou a distribuição percentual dos alunos nos níveis de proficiência em Matemática para os alunos das dependências administrativas municipal, estadual e federal no 9º ano do ensino fundamental, nas áreas urbanas, juntamente com as rurais[9]. A dependência administrativa “total” contempla todos os alunos da rede pública, sem separá-los por suas dependências administrativas (Tabela 1).

Tabela 1 – Distribuição percentual por nível de proficiência em Matemática no 9º ano do ensino fundamental nas escolas públicas no estado do Rio de Janeiro.

Dependência administrativa	Distribuição percentual dos alunos por nível de proficiência – anos iniciais – 9° ano									
	Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 4	Nível 5	Nível 6	Nível 7	Nível 8	Nível 9
Municipal	11,94	16,58	20,10	20,26	16,04	9,19	4,06	1,37	0,36	0,11
Estadual	17,05	20,55	21,73	17,87	12,65	6,36	2,67	0,86	0,18	0,08
Federal	1,75	2,36	4,23	7,77	13,04	17,38	21,92	18,81	9,07	3,66
Total	13,85	17,99	20,56	19,16	14,65	8,16	3,72	1,37	0,39	0,14

Fonte: Inep.

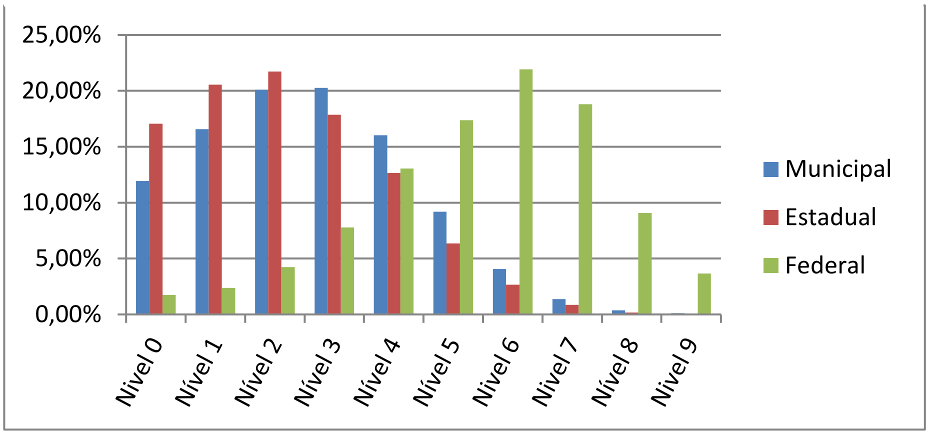
Com os dados da tabela 1, é possível montar o gráfico 1 e comparar cada instituição pública no estado do Rio de Janeiro, verificando quais as habilidades em geometria eles

8 –Informações contidas em: <http://pesquisa.in.gov.br/imprensa/jsp/visualiza/index.jsp?jornal=1&pagina=16&data=14/05/2015> Acesso em: 06/10/2016.

9 – Disponível em:< http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/inep-apresenta-resultados-do-saeb-prova-brasil-2015/21206 >Acesso em: 07/08/2016.

possuem mais dificuldades em assimilar e fazer uma comparação entre cada uma delas, verificando onde o ensino está sendo mais eficiente e onde é necessária maior atenção para melhorar os seus resultados.

Gráfico 1 – Distribuição por nível de proficiência das escolas públicas do 9º ano do ensino regular no estado do Rio de Janeiro.



Fonte: Inep.

De acordo com a escala de proficiência de Matemática - 9º ano (Anexo A), os alunos dentro dos níveis 6, 7, 8 e 9, possuem provavelmente as habilidades de:

a) reconhecer a relação entre as medidas do raio e diâmetro de uma circunferência com o apoio de uma figura;
b) resolver problemas usando o Teorema de Pitágoras no cálculo da medida da hipotenusa possuindo as medidas dos catetos;
c) reconhecer a corda de uma circunferência, as faces opostas de um cubo, a partir de uma de suas planificações;
d) comparar as medidas dos lados de um triângulo a partir das medidas de seus respectivos ângulos opostos;
e) resolver problema usando semelhança de triângulo.

Além das que foram citadas, os alunos possuem provavelmente as outras habilidades presentes nos níveis anteriores ao nível 6 e as outras presentes no próprio nível 6.

Já os alunos dentro dos níveis 7,8 e 9, provavelmente possuem as habilidades de:

a) determinar a área de regiões poligonais desenhadas em malhas quadriculadas;
b) reconhecer a relação entre as áreas de figuras semelhantes;
c) determinar o volume de um cubo ou de um paralelepípedo retângulo sem o apoio da figura;

d) resolver problema utilizando o Teorema de Pitágoras no cálculo da medida de um dos catetos, dadas as medidas da hipotenusa e de um dos seus catetos;
e) resolver problemas envolvendo as propriedades de ângulos internos e externos de triângulos e quadriláteros, com ou sem justaposição ou sobreposição de figuras.

Além das que foram citadas, os alunos possuem provavelmente as outras habilidades presentes nos níveis anteriores ao nível 7 e no próprio nível 7.

Os alunos dentro dos níveis 8 e 9 podem resolver problemas usando propriedades das cevianas (bissetriz, medianas e altura) de um triângulo isósceles com a ajuda da figura, todas as habilidades dos níveis anteriores e todas as outras habilidades presentes no nível 8.

Por último, a porcentagem presente no nível 9 é capaz de resolver problemas utilizando a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono, juntamente com todas as outras habilidades presentes nesse nível e nos níveis anteriores a ele.

É possível observar que os alunos das instituições federais possuem, no geral, um domínio maior nas habilidades citadas do que os alunos da rede municipal e estadual. O caso mais grave está na rede estadual com poucos alunos dominando as habilidades mencionadas e uma porcentagem de alunos no nível 0 mais elevada. Os alunos dentro do nível 0 não mostram habilidades muito elementares.

Também analisando os dados na planilha disponível pelo Saeb 2015, é possível montar a tabela 2, com as escolas públicas que participaram da amostra para o 3º ano do ensino médio regular e assim, fazer a mesma análise que foi feita para os alunos do 9º ano do ensino fundamental regular, verificando alguns problemas em cada dependência administrativa[10].

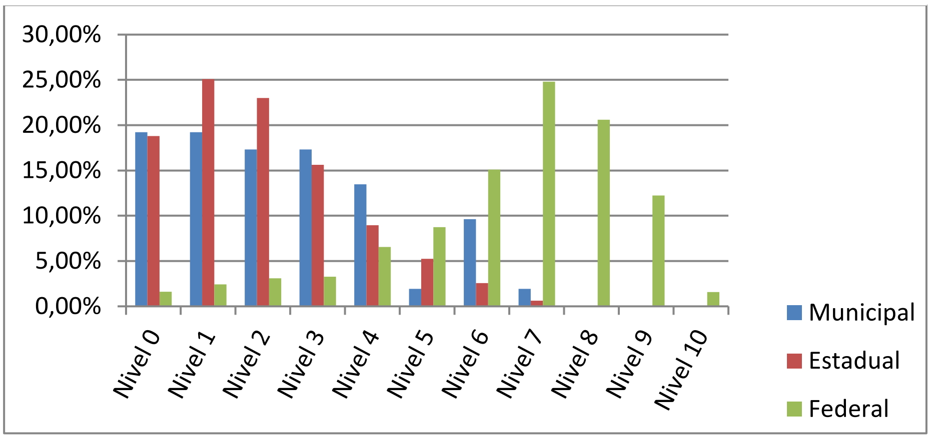
Tabela 2 - Distribuição percentual por nível de proficiência em Matemática nas escolas públicas do 3º ano pertencentes a amostra da pesquisa no estado do Rio de Janeiro.

Dependência administrativa	Distribuição percentual dos alunos da amostra por nível de proficiência – 3º ano										
	Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 4	Nível 5	Nível 6	Nível 7	Nível 8	Nível 9	Nível 10
Municipal	19,23	19,23	17,31	17,31	13,46	1,92	9,62	1,92	0	0	0
Estadual	18,79	25,07	23,02	15,61	8,96	5,26	2,56	0,64	0,07	0,03	0
Federal	1,63	2,42	3,09	3,27	6,55	8,76	15,08	24,81	20,60	12,24	1,57
Total	18,41	24,47	22,48	15,36	8,98	5,29	2,95	1,2	0,53	0,31	0,04

Fonte: Inep.

10 - Disponível em:< http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/inep-apresenta-resultados-do-saeb-prova-brasil-2015/21206 >Acesso em: 07/08/2016.

Gráfico 2 – Distribuição por nível de proficiência das escolas públicas pertencentes a amostra do 3º ano do ensino médio regular no estado do Rio de Janeiro.



Fonte: Inep.

Consultando a escala de proficiência de matemática, 3º no do ensino médio (Anexo B), é possível constatar que os alunos dentro dos níveis 7, 8, 9 e 10 provavelmente, possuem as seguintes habilidades:

a) determinar a medida de um dos lados de um triângulo retângulo, por meio de razões trigonométricas, fornecendo ou não fórmulas;
b) determinar com o uso do teorema de Pitágoras, a medida de um dos catetos de um triângulo retângulo não pitagórico;
c) resolver problemas por meio de semelhança de triângulos sem apoio de figura;
d) resolver problemas envolvendo perímetros de triângulos equiláteros que compõem uma figura.

Fora as habilidades anteriormente citadas, os alunos dominam provavelmente as habilidades presentes nos níveis anteriores ao nível 7 e as outras presentes no próprio nível 7.

Os alunos dentro dos níveis 8, 9 e 10 possivelmente, possuem a capacidade de:

a) determinar a equação de uma circunferência, dados o centro e raio;
b) determinar uma das medidas de uma figura tridimensional, utilizando Teorema de Pitágoras;
c) resolver problema envolvendo razões trigonométricas no triângulo retângulo, com o apoio de figura;
d) associar um prisma a sua planificação dada;

e) determinar a quantidade de faces, vértices e arestas de um poliedro por meio da relação de Euler.

Os alunos dentro dos níveis 8, 9 e 10 dominam provavelmente as habilidades presentes nos níveis anteriores ao nível 8 e as outras habilidades não citadas, presentes no nível 8.

Ao observarmos os alunos nos níveis 9 e 10, constatamos que eles possuem possivelmente as seguintes habilidades:

a) resolver problemas envolvendo a área de círculos e polígonos;
b) resolver problemas envolvendo semelhança de triângulos com o apoio de figura na qual os dois triângulos apresentam ângulos opostos pelo vértice;
c) resolver problemas envolvendo cálculo de volumes de cilindro.

Os alunos dentro dos níveis 9 e 10 dominam, provavelmente, as habilidades presentes nos níveis anteriores ao nível 9 e as outras habilidades não citadas, presentes no nível 9.

Observa-se também que os alunos das instituições federais são os que possuem o maior número de habilidades, sendo os alunos das escolas de administração municipal e estadual com as piores habilidades, possuindo também uma quantidade considerável de alunos presentes no nível 0, demonstrando não possuir as habilidades elementares em matemática.

As análises feitas para cada série geram uma preocupação para com o ensino dos tópicos trabalhados com os alunos nas escolas públicas. Poucos alunos conseguem usar as habilidades citadas, levando a uma reflexão sobre como é trabalhado o ensino de geometria nas escolas públicas no Estado do Rio de Janeiro e a uma atenção maior para métodos alternativos para abordarmos os tópicos mais problemáticos. Entre as infinidades de possibilidades que podem surtir efeito, está o uso de *softwares* de geometria dinâmica com os alunos, como será demonstrado.

4 O *SOFTWARE* GEOGEBRA

4.1 Um pouco sobre o GeoGebra

O nome GeoGebra é formado pela ligação de duas palavras: Geometria e Álgebra. Ele foi criado por Markus Hohenwarter, e trata-se de um *software* de geometria dinâmica, ou seja, com ele é possível movimentar as construções geométricas na tela do computador. O GeoGebra é um *software* gratuito e ele está disponível para *download* em 62 idiomas, dentre eles o português. Ele está escrito em linguagem Java e é multiplataforma, o que significa que pode ser instalado em computadores com Linux, Windows ou Mac Os. O programa possui a capacidade de trabalhar conceitos da matemática que estão presentes em todos os níveis de ensino, combinando a geometria, álgebra, gráficos, tabelas, estatísticas e cálculo simbólicos, sendo assim uma boa ferramenta para possibilitar a assimilação e compreensão do usuário do programa de vários conceitos matemáticos. A sua importância para o ensino da matemática pode ser contemplada pela quantidade de prêmios que o *software* conquistou em alguns países (Tabela 3).

Tabela 3 – Prêmios que o *software* GeoGebra recebeu.

- EASA 2002 - European Academic Software Award (Ronneby, Suécia).
- Learnie Award 2003 - Austrian Educational Software Award (Viena, Áustria).
- Digita 2004 - German Educational Software Award (Colônia, Alemanha).
- Comenius 2004 - German Educational Media Award (Berlim, Alemanha).
- Learnie Award 2005 - Austrian Educational Software Award for "Spezielle Relativitätstheorie milt GeoGebra" (Viena, Áustria).
- Trophées du Libre 2005 - Prêmio Internacional de Software Livre, categoria Educação (Soissons, França).
- Twinning Award 2006 - 1º Prêmio no "Desafio dos Círculos" com GeoGebra (Linz, Áustria).
- Learnie Award 2006 - Prêmio Austríaco de Software Educacional (Viena, Áustria).

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/GeoGebra.

Hoje existem diversas organizações sem fins lucrativos espalhadas em todos os continentes que trocam as experiências sobre o *software* fornecendo apoio para professores e estudantes no desenvolvimento de materiais para aprimorar a educação Matemática. Essas organizações são conhecidas como *International* GeoGebra *Institutes* (IGI)[11]. Na Universidade Federal Fluminense (UFF) e na Pontifica Universidade Católica de São Paulo (PUC –SP) encontramos dois institutos que disponibilizam oficinas, vídeos e tutoriais para o aprimoramento no uso do GeoGebra.

4.2 O GeoGebra e suas contribuições para o ensino de geometria

O ensino da geometria está baseado, em sua maioria, na apresentação de desenhos no quadro sempre na mesma posição. São apresentadas ao aluno algumas fórmulas prontas para resolver uma lista de exercícios e assim memorizá-las, estando ele de forma passiva recebendo tudo o que lhe é transmitido.

Para Gravina e Santarosa (1998), a aprendizagem eficiente da matemática depende muito nas ações do indivíduo em experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e enfim, demonstrar. Dessa forma o aluno se comporta de uma forma diferente do método tradicional do ensino, sendo ele participante das construções que dão sentido ao conhecimento matemático.

> O processo de pesquisa vivenciado pelo matemático profissional evidencia a inadequabilidade de tal abordagem. Na pesquisa matemática, o conhecimento é construído a partir de muita investigação e exploração, e a formalização é simplesmente o coroamento deste trabalho, que culmina na escrita formal e organização dos resultados obtidos! O processo de aprendizagem deveria ser similar a este, diferindo essencialmente quanto ao grau de conhecimento adquirido. (GRAVINA; SANTAROSA, 1998, p.2)

Segundo Gravina (1996), entre as opções tecnológicas disponíveis para se trabalhar os tópicos da geometria estão os *softwares* de geometria dinâmica que permitem aos alunos

---

11–Disponível em:< http://www.geogebra.im-uff.mat.br/> e < http://www.pucsp.br/geogebrasp/ >Acesso em: 12/04/2016.

realizarem as investigações sobre as propriedades geométricas de várias figuras que são dificilmente analisadas no quadro tradicional.

> E este é o recurso didático importante oferecido: a variedade de desenhos estabelece a harmonia entre os aspectos conceituais e figuras; configurações geométricas clássicas passam a ter multiplicidade de representações; propriedades geométricas são descobertas a partir dos invariantes no movimento (GRAVINA, 1996)

Para Nascimento (2012), a utilização no ensino e aprendizagem em geometria de *softwares* de geometria dinâmica pode ser um grande contribuinte na visualização geométrica.

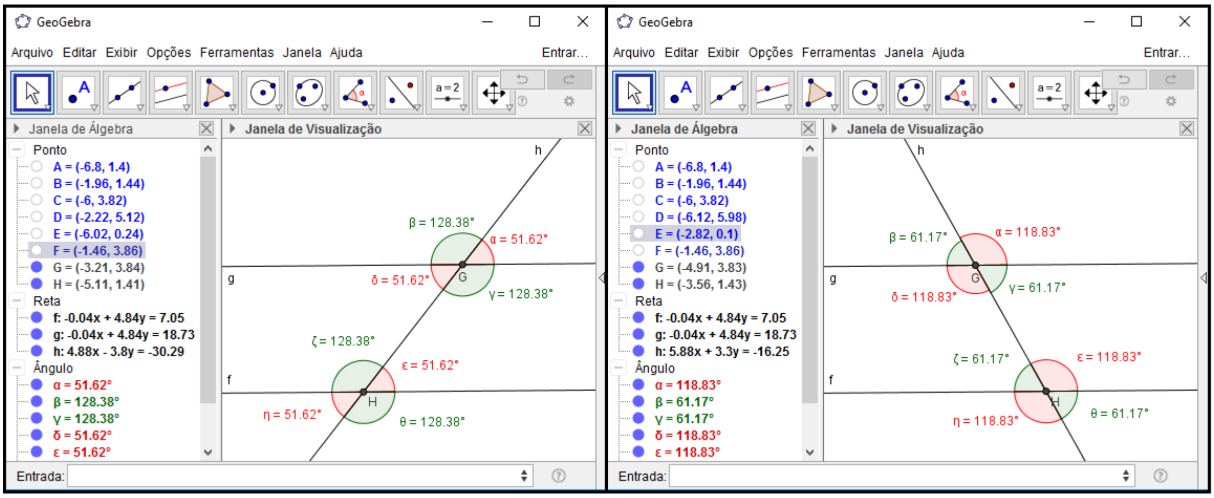
O *software* GeoGebra, quando bem utilizado pelo professor, pode criar um ambiente que permite ao usuário de conhecer as condições similares vivenciadas por um matemático, condição de investigação e exploração. O GeoGebra pode ser utilizado pelo professor na aplicação de dois tipos de atividades: a atividade de exploração e expressão.

Segundo Gravina e Santarosa (1998), atividade de expressão é o tipo de atividade onde o próprio aluno cria os seus modelos e neste pode experimentar e fazer uma reflexão sobre suas construções, modificando e ajustando suas ideias. Na atividade de exploração, o aluno já tem um modelo pronto, não sendo suas ideias ali apresentadas, aonde ele deve fazer a exploração, entender e analisar.

Existem muitas atividades no GeoGebra que podem contribuir no ensino da geometria. Através desse *software*, o aluno pode manipular os seus objetos de investigação (retas, triângulos, quadriláteros, etc.) e com isso identificar regularidades que se mantém mesmo ao modificar a posição dos elementos que compõem o objeto. Depois desse momento de investigação, o professor pode introduzir a definição e uma demonstração formal sobre o caso analisado.

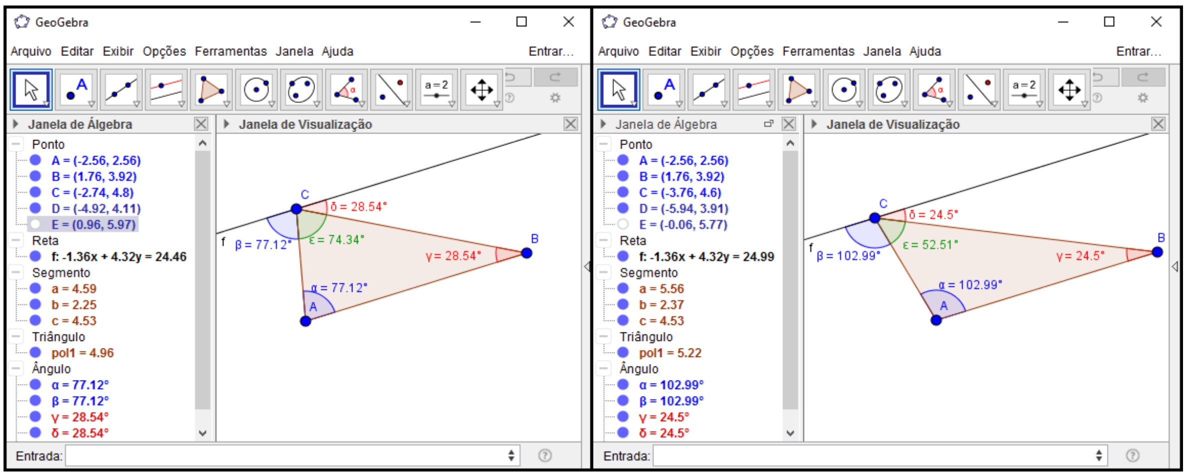
Ao abordar retas paralelas cortadas por uma transversal, por exemplo, o GeoGebra pode ser uma boa ferramenta para a introdução desse assunto. O professor pode criar uma atividade de exploração ou de expressão, onde o aluno pode movimentar a reta transversal e as retas paralelas criando um ambiente de coleta de dados e investigação. Com uma orientação do professor ou por si só, o aluno vai identificando quais ângulos são congruentes, complementares, suplementares e replementares. Depois o professor pode apresentar a definição sobre os ângulos alternos internos, alternos externos, etc. Na figura 2 existe um exemplo da janela de visualização no GeoGebra de uma das possíveis atividades envolvendo tal assunto.

Figura 2 - Exemplo de atividade para trabalhar retas paralelas cortadas por uma transversal.



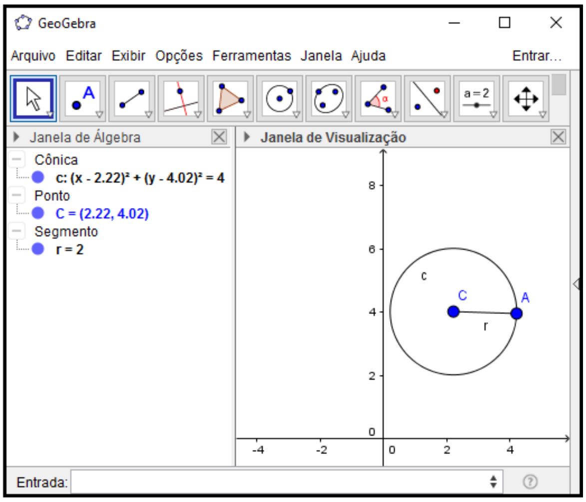
Outro exemplo de utilização é que ele pode ajudar a trabalhar com os alunos a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer. Ao movimentar o ponto A sobre a reta paralela ao segmento BC, o ponto B, o ponto C (Figura 3) e usando os conhecimentos sobre retas paralelas cortadas por uma transversal, o aluno poderá através de atividades conjecturar que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180º. Depois da atividade de investigação, o professor pode entrar com a demonstração.

Figura 3 – Exemplo de atividade para trabalhar a soma dos ângulos internos de um triângulo



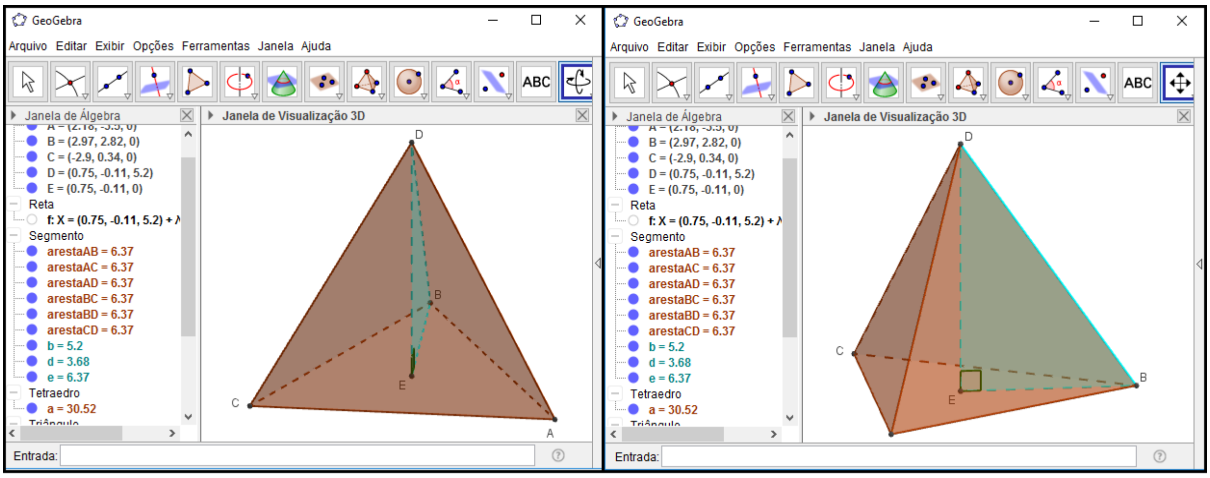
Ao abordar geometria analítica, é possível mostrar que através da equação reduzida da circunferência que aparece no canto esquerdo (janela algébrica) há a possibilidade de retirar as coordenadas do centro da circunferência e a medida do raio da circunferência. O aluno, ao movimentar o centro da circunferência (Figura 4), observará as coordenadas do centro da circunferência, o raio da circunferência e a equação reduzida da circunferência variando quando ele realiza o movimento do centro, assim com a orientação do professor ou por seus próprios meios concluir que a equação reduzida de uma circunferência de raio R e com coordenadas do centro C = (a,b) é determinada pela relação (x – a) ² + (y – b)² = R². Ao término da atividade, o professor pode provar usando os conhecimentos sobre distância entre dois pontos a equação reduzida da circunferência.

Figura 4 – Exemplo de atividade para trabalhar equação reduzida de uma circunferência.



Com relação à geometria espacial, o GeoGebra também pode contribuir para construção e visualização de figuras espaciais em várias posições, sendo assim um *software* com a capacidade de simular materiais concretos e sólidos geométricos que geralmente são difíceis de serem desenhados pelos alunos (Figura 5).

Figura 5 – Visualização da altura de uma das faces do tetraedro regular em posições diferentes no GeoGebra.



5 EXPERIMENTANDO O *SOFTWARE* GEOGEBRA EM UMA ESCOLA PÚBLICA

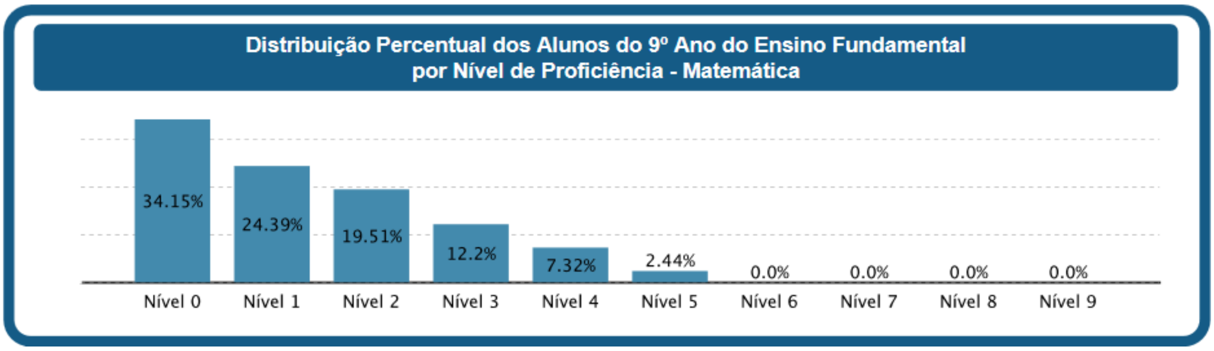
5.1 Escolhendo a escola para a aplicação das atividades

Com o objetivo de verificar a contribuição do *software* GeoGebra para o ensino da geometria, divulgar o seu uso para os professores e coletar dados sobre como os alunos estão assimilando o ensino de geometria, foi planejada a aplicação de algumas atividades voltadas para alunos do 9º ano do ensino regular em uma escola pública do estado do Rio de Janeiro.

Para escolher em qual dependência administrativa a escola deveria pertencer, foi levada em conta a pesquisa feita pelo Inep no Saeb 2015, onde foi possível constatar que as escolas da rede estadual possuíram o pior desempenho nos anos finais do ensino fundamental no estado do Rio de Janeiro.

Assim, foi selecionado o Colégio estadual Evangelina Porto da Motta, localizado no município de Duque de Caxias, onde é possível notar através do gráfico 3, a distribuição dos alunos do 9º ano nos níveis de proficiência na Prova Brasil de 2015.

Gráfico 3 – Distribuição dos alunos do 9º ano do ensino fundamental do colégio estadual Evangelina Porto da Motta no Saeb/Prova Brasil 2015.



Fonte: Inep.

É possível observar, através do gráfico 3, que em 2015 não foi constatado alunos que tivessem as habilidades nos níveis 6, 7, 8 e 9, citados no capítulo 3 e grande quantidade de alunos no nível 0. Com essas informações foram elaboradas 4 atividades envolvendo Teorema de Pitágoras, Circunferência e Área.

5.2 O preparo para a aplicação das atividades

Inicialmente, foi procurada a direção do colégio para pedir a autorização do laboratório de informática para aplicação das atividades. Ao expor os objetivos das atividades, a direção mostrou-se interessada em ajudar, pois um ensino diferenciado usando o computador poderia ser uma boa ferramenta para despertar o interesse dos alunos na Matemática.

Com autorização dada pela direção, foi procurada a professora de matemática que trabalha com o 9º ano do ensino fundamental na escola. Ao comentar o interesse em aplicar as atividades que reforçassem os conteúdos do currículo mínimo que é trabalhado com os alunos do 9º ano, a professora foi solícita na aplicação das atividades.

Foi planejada a utilização de todos os 8 computadores presentes na sala de informática e o projetor do colégio. Ao ligar os computadores, foi constatado que eles possuíam o Linux educacional 3.0, não possuíam acesso à *internet* e não tinham disponíveis o GeoGebra instalado. Somente o computador acoplado ao retroprojetor possuía o *software* instalado.

O processo para se tentar a instalação do *software* foi feito inicialmente usando um dispositivo portátil de armazenamento para levar o programa baixado em outro computador e possibilitar a instalação nos computadores. Não houve êxito, pois, era necessária a senha do administrador responsável pelos computadores para a instalação de qualquer programa nos computadores, o que não foi possível por conta da greve dos professores no momento em questão. Sendo assim, foi necessário fazer uma pesquisa em como disponibilizar o *software* de outra forma. Com êxito na pesquisa, foi utilizado o tutorial para instalação do GeoGebra em computadores com Linux 3.0 feito por JOSÉ (JÓSE, N. *Instalando o GeoGebra no Linux Educacional 3.0*), sendo possível disponibilizar o programa em todos os computadores da sala de informática (Figura 6).

Figura 6 - Sala de informática preparada para a realização das atividades

Fonte: O autor, 2016.

Como a sala de informática da escola possui um espaço reduzido e poucos computadores, foi decidido aplicar as atividades no contra turno para os alunos que mostrassem interesse em participar. A professora regente das turmas do 9º ano divulgou para todos os alunos da série as atividades que seriam aplicadas e perguntou quais alunos estariam interessados em participar. Das turmas do 9º ano, 25 alunos pediram para participar, sendo um número muito significativo, pois era esperada uma quantidade menor de alunos participantes.

Mesmo assim, foi estimada uma quantidade menor de alunos presentes no dia, pois seria aplicado em um horário diferente da entrada deles no colégio, mas por conta da quantidade de alunos interessados e pela pouca quantidade de computadores disponíveis, foi decidido aplicar as atividades em dupla.

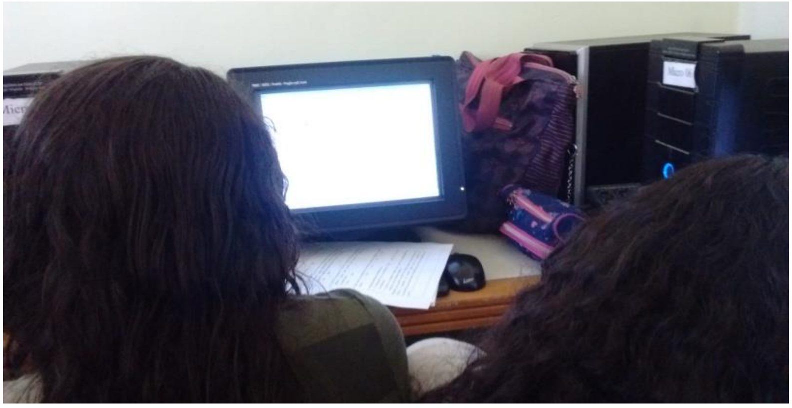
As atividades foram aplicadas no dia 25/07/2016, com o apoio da professora regente de turma, tendo uma quantidade de 15 alunos presentes, sendo aplicada para apenas um dos alunos a atividade de forma individual.

5.3 Interação dos alunos com o programa

Antes do início das atividades, foram realizados comentários sobre o *software*, quem o criou, sobre a janela de visualização, a janela de álgebra, as funções na barra de ferramentas, na barra de menus e no campo de entrada. Depois, foi orientado para os participantes que clicassem no ícone do programa presente na área de trabalho de cada um dos computadores e utilizassem a ferramentas do programa de forma livre, principalmente as que se encontram na barra de ferramentas (Figura 7). Foi constatada muita facilidade dos alunos em utilizar o *mouse*, não sendo isso um empecilho para a interação com o programa. Foi solicitado para que eles, com a ferramenta mover acionada, pressionassem a seta sobre nos objetos que eles construíram e movimentassem tais objetos dentro da janela de visualização. Isso gerou admiração por parte deles, pois a possibilidade de animar os objetos foi uma novidade para eles.

Foi observada a construção de retas, círculos, segmentos de reta, pontos, semirretas todas na janela de visualização. Foi orientado aos alunos observarem que a cada vez que as figuras se movimentavam, existiam pontos em comuns entre eles ou não. A constatação de que eles estavam se divertindo de alguma forma com as construções feitas por eles era evidente.

Figura 7 – Alunos reconhecendo as ferramentas do programa.



Fonte: O autor, 2016.

5.4 Aplicação das atividades

Depois do reconhecimento do programa, foi pedido para que na área de trabalho fosse localizado a pasta contendo as 4 atividades elaboradas previamente para o início das atividades. Todas as atividades abordadas foram do tipo de exploração, ou seja, os alunos já possuíam um modelo de atividade pronto, e nesse modelo o aluno deveria explorar, entender e analisar cada uma delas.

No início de cada atividade, foram disponibilizados para o leitor os passos de cada uma das atividades elaboradas previamente pelo autor[12], para o caso do leitor que tivesse interesse em aplicar as atividades ou realizar as construções.

5.4.1 Atividade 1 : Movimentando o vértice do triângulo sobre a reta paralela a um dos lados

Objetivo: Mostrar que existem infinitos triângulos com a mesma área, quando movimentamos um dos vértices sobre a reta paralela ao lado oposto.

Construção:

1º passo: Na 3ª janela, use a ferramenta "Segmento" para construir o segmento de reta AB na janela de visualização.

12- A atividade 2 foi elaborada baseada no modelo presente em Mota et al. (2013) para oficina do Teorema de Pitágoras.

2º passo: Na 4ª janela, acione a ferramenta “Reta Paralela”. Clique no segmento AB e depois em um ponto qualquer no semiplano acima do segmento AB para construir uma reta paralela ao segmento AB.

3º passo: Na 2ª janela, use a ferramenta “Ponto” para construir o ponto D sobre a reta construída no passo anterior.

4º passo: Acione a ferramenta “Polígono” na 5ª janela e construa o triângulo ABD.

Perguntas:

1ª pergunta: Selecione a ferramenta “Mover” na 1ª janela e movimente o ponto D sobre a reta. O que podemos afirmar sobre a área dos triângulos?

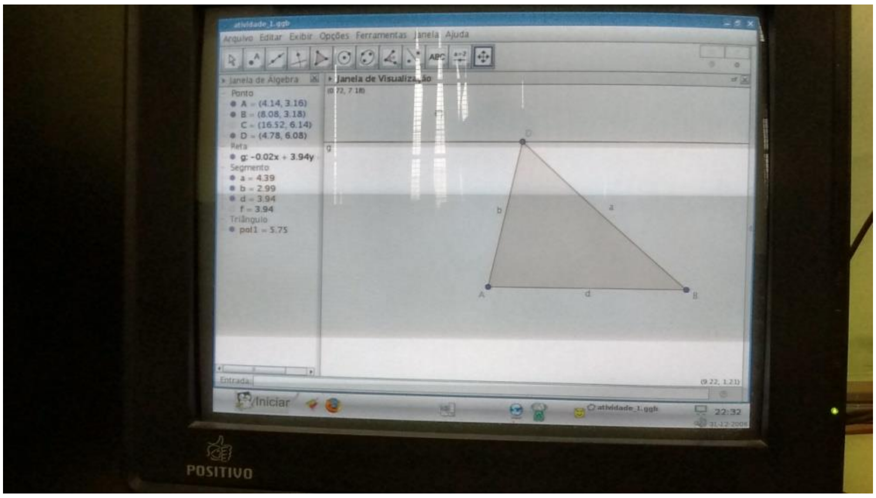
( )São diferentes ( )São iguais

2ª pergunta: Acionando a ferramenta “Área” na 8ª janela, clique no triângulo ABD e movimente o ponto D sobre a reta novamente. O valor que o programa informa sobre a área do triângulo ABD está mudando?

( )Sim ( )Não

3ª pergunta: Você consegue usar os seus conhecimentos sobre o cálculo da área de um triângulo para justificar o que você respondeu na segunda pergunta?

Figura 8 – Visualização da atividade 1 no computador da escola.



Fonte: O autor, 2016.

Quando foi solicitado que os alunos lessem a primeira pergunta e fizessem o que estava sendo pedido, todos os alunos responderam que a área do triângulo era diferente. Foi pedido para que eles me justificassem o porquê da resposta. Alguns disseram que os lados AD e BD estão mudando, logo a área está mudando. Outros disseram que como o triângulo estava sendo esticado, a área estava aumentando.

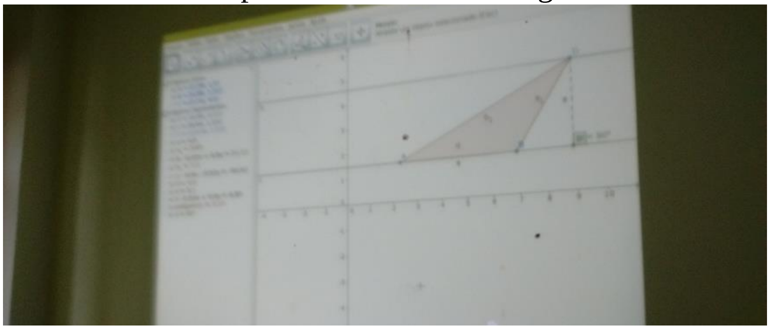
Depois de receber as respostas da 1ª pergunta, foi orientada a leitura da 2ª pergunta e a realização do que estava sendo pedido. Os alunos ficaram sem entender o porquê de a área continuar sendo a mesma. Foi perguntado para os alunos como podemos calcular a área de um triângulo e a maioria respondeu que era a multiplicação da base pela altura e o resultado dividido por 2. Com resposta que foi recebida, fez-se a seguinte pergunta: quantas alturas possui um triângulo? Todos responderam 1 altura.

Foi solicitado aos alunos que entrassem na 5ª janela e clicassem na ferramenta "Polígono Rígido" e construíssem dentro da janela de visualização um triângulo qualquer e movimentassem um dos vértices para enxergar o triângulo em várias posições. Fez-se novamente a pergunta e eles não responderam mais 1 altura e sim 3 alturas, cada altura relacionada a um dos lados.

Com esse imprevisto de perceber que os alunos achavam que o triângulo teria somente 1 altura, foi lembrado da pesquisa que Gravina (1996) fez quanto a visualização da altura de um dos lados do triângulo, assim foi feita a seguinte pergunta: Quando movimentamos o vértice D sobre a reta, a altura relativa ao lado AB está fora do triângulo? Foi percebido que isso gerou muita dúvida nos alunos, sendo que foi recebida a resposta da maioria de que a altura estava sempre dentro do triângulo e ela estava mudando. Com essa afirmação foi constatado o que Gravina (1996) descreveu em seu artigo.

Para mostrar aos alunos que a resposta estava errada, foi usado o projetor para construir a altura relativa ao lado AB e mostrar que a altura relativa a tal lado poderia estar fora do triângulo, que ela possuía sempre o mesmo tamanho e formava sempre 90º com a reta suporte do lado AB. (Figura 9)

Figura 9 – Mostrando que a altura relativa o lado AB é sempre a mesma e que existem casos onde a altura pode estar fora do triângulo.



Fonte: O autor, 2016.

Depois de concluírem que a altura relativa ao lado AB era sempre a mesma, a maioria conseguiu observar que o valor da área poderia ser calculado multiplicando a medida do lado AB pela medida da altura relativa ao lado AB e o resultado dividindo por 2, respondendo assim a 3ª pergunta.

5.4.2 Atividade 2: O Teorema de Pitágoras

Objetivo: Verificar através do *software* que o quadrado formado sobre o lado da hipotenusa possui área igual à soma da área dos quadrados formados sobre cada lado dos catetos.

Construção:

1º passo: Na 3ª janela, escolha a ferramenta "Segmento" e construa na janela de visualização o segmento AB.

2º passo: Na 4ª janela, selecione a ferramenta "Reta Perpendicular". Clique no ponto A e depois no segmento AB para construir a reta perpendicular ao segmento AB, passando por A.

3º passo: Sobre a reta construída no 2º passo, use a ferramenta "Ponto" que está na 2ª janela para construir o ponto C, acima do ponto A. Na 3ª janela, selecione a ferramenta "Segmento" e construa os segmentos AC e CB.

4º passo: Na 5ª janela, acione a ferramenta "Polígono Regular" e clique no ponto A e depois no ponto C. Digite 4 na caixa de texto que irá aparecer para construir o quadrado sobre o lado AC.

5º passo: Repita a mesma orientação do 4º passo para construir os quadrados sobre os lados CB e AB. É necessário clicar no sentido horário para que os quadrados fiquem sobre a parte externa do triângulo retângulo.

Perguntas:

1ª pergunta: Na figura temos um triângulo retângulo. Vá até a 8ª janela e acione a ferramenta "Área" e clique nos três quadrados presentes na janela de visualização e aparecerá a medida da área de cada um deles. Ao somar a área dos dois quadrados menores encontramos o mesmo valor para a área do quadrado maior?

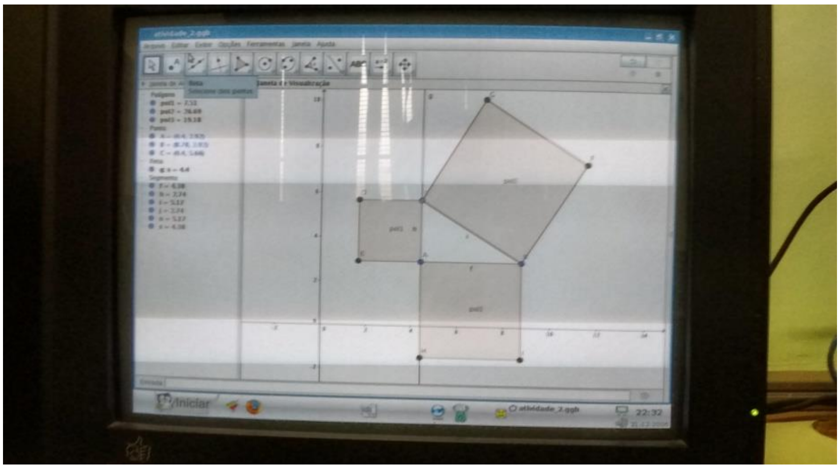
( )Sim ( )Não

2ª pergunta: Quando movimentamos um dos pontos: A, B ou C, ainda temos o que foi encontrado na primeira pergunta?

( )Sim ( )Não

3ºpergunta: Qual relação existe entre o resultado encontrado com o Teorema de Pitágoras?

Figura 10 – Visualização da atividade 2 no computador da escola.



Fonte: O autor, 2016.

Pela experiência em já ter trabalhado no colégio, é sabido que os alunos possuem dificuldades em aplicar o teorema de Pitágoras, pois eles não sabem que ao selecionar a medida de um dos catetos e elevar ao quadrado, o resultado deve ser somado com resultado do quadrado do outro cateto e o resultado da soma, igualar com o quadrado da hipotenusa.

Geralmente, os alunos trocam todos os termos de posição. A atividade no *software* abre a possibilidade de se criar uma referência visual para os alunos, sabendo assim que o quadrado maior possui a área igual à soma das áreas dos quadrados menores.

Foi pedido para que os alunos fizessem a leitura da 1ª pergunta. Alguns alunos tentaram fazer as contas de cabeça, o que gerou alguns erros. Para contornar isso, foi dito para os alunos usarem a calculadora que o celular possui. Todos responderam corretamente a primeira pergunta.

Ao passarmos para a 2ª atividade, observei que os alunos ficaram surpresos, pois ao movimentar os vértices e somar a medida das áreas dos quadrados menores, a área do quadrado maior era igual o resultado dessa soma. Foi feito o mesmo no projetor, movimentando os três vértices do triângulo retângulo e mostrando utilizando o Campo de

Entrada, que o resultado da soma da área dos quadrados menores era sempre igual à área do quadrado maior (Figura 11).

Figura 11 – Usando o projetor na atividade 2.

Fonte: O autor, 2016.

Passando para a 3ª pergunta, foi observado que os alunos não se lembravam do Teorema de Pitágoras. Para relembrá-los, foi usada a caneta pilot para mostrar como era o Teorema de Pitágoras. Como os alunos não sabiam o que era hipotenusa e cateto, foi usado o projetor para mostrar que a hipotenusa é o lado maior e está sempre oposto ao ângulo de 90° no triângulo retângulo e os catetos são os outros lados do triângulo retângulo. Com as explicações acima, não foram obtidas respostas para a 3ª pergunta. Somente quando foi lembrado aos alunos que a área do quadrado era calculada elevando o lado ao quadrado é que eles conseguiram responder.

Um dos alunos afirmou que a figura o fez entender mais o teorema de Pitágoras, pois na sala de aula não era explicado usando quadrados. Fiz a observação de que o teorema de Pitágoras vale para todos os triângulos retângulos, como foi abordado dentro da sala de aula.

5.4.3 Atividade 3: Comprimento da circunferência

Objetivos:

a) Mostrar que a razão entre o comprimento da circunferência e o dobro do raio é sempre igual a π;

b) Mostrar que o comprimento da circunferência é $2\pi R$;

Construção

1º passo: Digite no campo de entrada a letra R no modelo da atividade para aparecer o controle deslizante na janela de visualização.

2º passo: Na 6ª janela, acione a ferramenta "Círculo dados Centro e Raio" e clique num ponto qualquer da janela de visualização. Irá aparecer uma caixa de texto pedindo para informar o raio. Digite na caixa de texto a letra R e irá aparecer uma circunferência de nome **c** com raio dependendo do controle deslizante.

Perguntas:

Na 8ª janela, acione a ferramenta "Distância, Comprimento ou Perímetro" e clique na circunferência para determinar o comprimento da circunferência.

Digite no campo de entrada "Perímetro[c]/(2*R)" para determinar a razão entre o comprimento da circunferência e o dobro do raio. A letra **a** que aparece na janela algébrica informa o valor dessa razão.

1ª pergunta: Ao observar o valor encontrado de **a** na janela algébrica, que número está aparecendo?

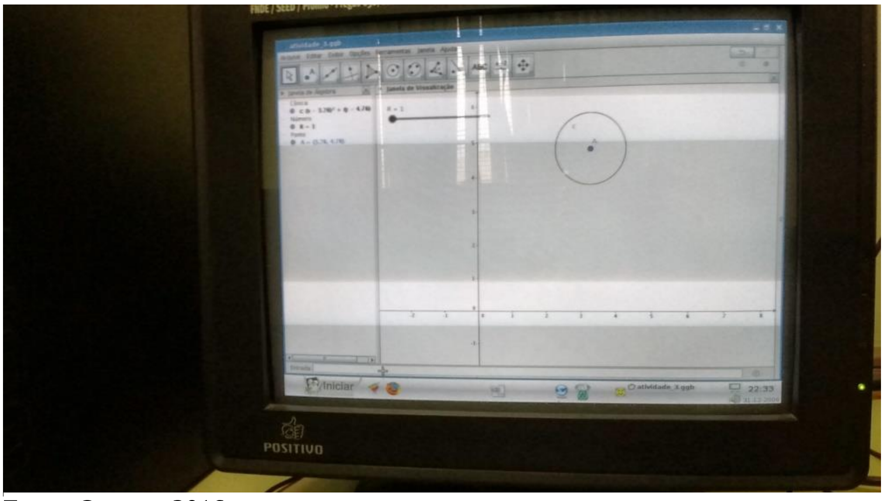
( )1,23 ( )Nenhum ( )2,453 ( ) π

2ª pergunta: Ao movimentar o ponto sobre o controle deslizante, sempre com valores de R maior que zero, o que acontece com a razão apresentada em **a**?

( )Muda ( )Permanece sempre o mesmo valor

3ª pergunta: Utilize o que você marcou nas duas perguntas anteriores para, junto com o professor, determinar uma fórmula para calcular o comprimento de uma circunferência qualquer.

Figura 12 – Visualização da atividade 3 no computador da escola.



Fonte: O autor, 2016.

Inicialmente os alunos foram orientados a movimentar o controle deslizante com o objetivo de alterar o raio da circunferência e observar a circunferência aumentando e diminuindo de tamanho. Era perceptível a admiração em realizar essa variação do raio.

Logo após a leitura da 1ª pergunta, foi verificado que eles não sabiam o que significava a palavra razão dentro da pergunta. Foi dito que razão é o resultado da divisão de um número pelo outro, sendo no caso em questão o resultado da divisão do número que representa o comprimento da circunferência pelo número que representa a medida do dobro do raio. Os alunos também tiveram muita dificuldade em usar o campo de entrada para digitar o comando dado na pergunta, sendo assim, o professor passou em cada computador e realizou a digitação do comando para a maioria dos alunos. Para reforçar, foi feito também usando o projetor (Figura 13).

Figura13 – Movimentando o controle deslizante e indicando como digitar no campo de entrada o comando.

Fonte: O autor, 2016.

Foi pedido para que os alunos respondessem a 1ª pergunta sem realizar o movimento no controle deslizante. A maioria respondeu que a razão era π, mas um aluno afirmou que a pergunta não tinha resposta, pois estava aparecendo no computador que ele estava usando o número 3,14. Foi explicado que o programa estava exibindo o número decimal que representa a aproximação do número π com duas casas decimais.

Ao passarmos para a 2ª pergunta, que permitia a movimentação do controle deslizante, alguns alunos afirmaram que mudava o número e outros afirmaram que permanecia o mesmo valor da razão. O professor foi a cada computador e orientou como fazer a alteração do arredondamento no programa para 15 casas decimais. Foi utilizado o projetor para intervir e retirar a dúvida mudando também a aproximação dos números da mesma maneira. Ao realizar os movimentos com essa aproximação, nos casos onde não aparecia o π, aparecia o mesmo número com as casas decimais. Afirmou-se que esse número era a aproximação do número irracional π com 15 casas decimais, assim todos concluíram que a resposta para a 2ª pergunta era que a razão permanecia sempre a mesma.

Na 3ª pergunta, os alunos não conseguiram respondê-la sozinhos. Teve-se que usar o pilot para mostrar que se fizermos a divisão do comprimento de qualquer circunferência por 2.R sempre encontramos π, logo se realizarmos a operação inversa, multiplicando o π por 2.R iremos encontrar o comprimento da circunferência, chegando a conclusão de que: $C = 2\pi R$.

Perguntou-se para os alunos se a atividade foi interessante e a maioria respondeu que sim, pois ela deu um sentido maior para as fórmulas trabalhadas em sala de aula.

Ao término de todas as atividades, pensou-se sobre a questão de aparecer na razão o número decimal 3,14 e não o π. A resposta pode estar ligada a forma com que foi feita a programação do *software*. Como o GeoGebra utiliza números decimais para representar qualquer número, ele deve associar um número decimal ao número irracional π. Dessa forma, quando aparece o π o programa usou um determinado decimal para reconhecer que o resultado da divisão é π, mas quando o resultado da divisão fica um pouco fora desse decimal, por conta dos arredondamentos dos números que compõem a divisão, ele não coloca π e sim o 3,14.

5.4.4 Atividade 4: Área do circulo

Objetivo: Mostrar que a área do círculo é πR^2

Construção:

1º passo: Digite no campo de entrada a letra R no modelo da atividade para fazer aparecer o controle deslizante na janela de visualização.

2º passo: Na 6ª janela, acione a ferramenta "Círculo dados centro e raio" e clique no ponto de intercessão dos eixos na janela de visualização. Irá aparecer uma caixa de texto pedindo para digitar o raio, digite R. O ponto A aparecerá sendo o centro do círculo.

3º passo: Digite no campo de entrada L. Irá aparecer outro controle deslizante na janela de visualização. Clique com o botão direito sobre o ponto L e entre em propriedades. Ao abrir a janela, altere o valor mínimo para 3, o incremento para 1 e o valor máximo para 20 (caso queira, pode ser um número maior)

4º passo: Na 4ª janela, acione a ferramenta "Reta Perpendicular" para construir a reta tangente à circunferência e perpendicular ao eixo y no ponto abaixo do eixo x. Aparecerá na janela de visualização o ponto B.

5º passo: Na 8ª janela, acione a ferramenta "Ângulo Com Amplitude Fixa", clique no ponto B e depois no ponto A. Na janela que irá aparecer digite "360º/(2*L)". Aparecerá automaticamente o ponto B' sobre o círculo.

6º passo: Na 3ª janela, use a ferramenta "Semirreta" para determinar a semirreta que passa pelos pontos A e B'.

7º passo: Na 2ª janela, use a ferramenta "Ponto" para construir o ponto C que é o ponto comum da semirreta $\overrightarrow{AB'}$ e a reta tangente ao círculo.

8º passo: Na 9ª janela, acione a ferramenta "Reflexão em Relação a um Ponto". Clique no ponto C e depois no ponto B. Irá aparecer o ponto C' na tela.

9º passo: Acione na 5ª janela a ferramenta "Polígono Regular". Clique no ponto C' e depois no ponto C. Irá aparecer uma janela para informar o número de lados do polígono. Digite L.

Perguntas:

1ª pergunta: Na janela de visualização temos um triângulo equilátero tangente externamente ao círculo. A área do triângulo é o que em relação à área do círculo?

( )Menor ( )Maior ( )Igual

2ª pergunta: Movimente o ponto L sobre o controle deslizante para aumentar os lados do polígono. Quando aumentamos o número de lados temos que a área do polígono regular está ficando mais próxima da área do círculo?

( )Sim ( )Não

3ª pergunta: Quando aumentamos o número de lados temos que o perímetro do polígono regular está ficando mais próximo do perímetro do círculo?

( )Sim ( )Não

4ª pergunta: Para todos os polígonos, a medida do apótema é sempre igual a:

( )2R ( )R^2 ( )R ( )R/2

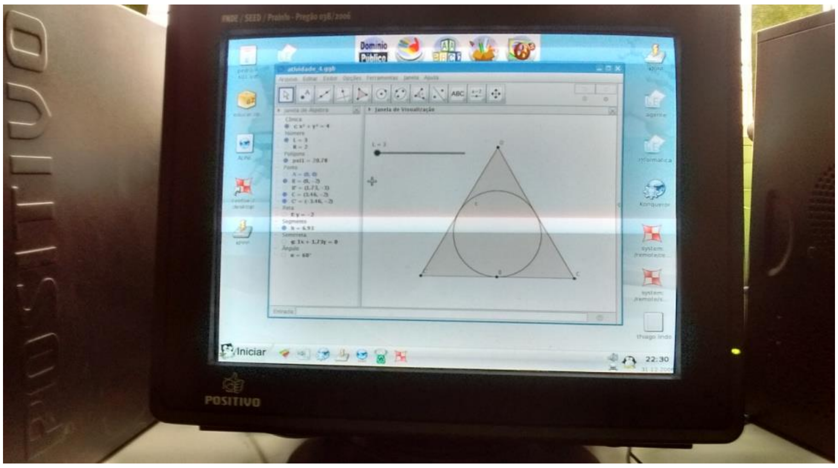
5ª pergunta: Nas aulas realizadas com o seu professor em sala de aula você aprendeu que:

a) O perímetro do círculo é $\boldsymbol{2\pi R}$, onde **R** é o raio do círculo.

b) A área de um polígono regular é **p.A** onde p é o semiperímetro do polígono e **A** é a medida do apótema

Sabendo que quando os lados do polígono regular tendem ao infinito o perímetro do polígono regular tende ao comprimento do círculo, você seria capaz de determinar uma expressão que representa a área de um círculo de raio R?

Figura 14 – Visualização da atividade 4 no computador da escola



Fonte: O autor, 2016.

Foi solicitado aos alunos que movimentassem o controle deslizante L para observar que cada número no controle deslizante representa o número de lados do polígono regular. A variação dos polígonos regulares circunscritos ao círculo fez com que os alunos ficassem admirados com o movimento da figura. Depois, foi pedido para que eles voltassem à posição inicial, deixando o polígono regular circunscrito como sendo um triângulo

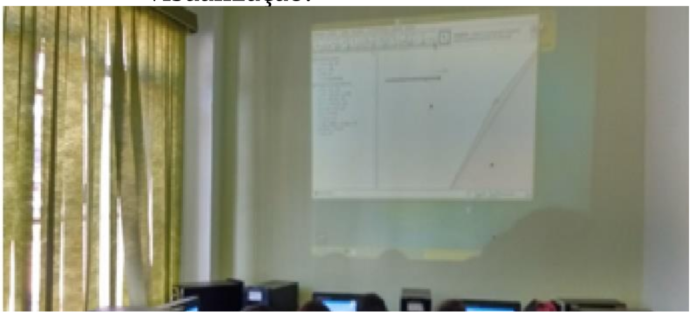
Ao responder a 1ª pergunta, os alunos não tiveram dificuldades em marcar a resposta correta. Justificaram que o círculo estava dentro do triângulo, logo a área do triângulo era maior que a área do círculo. Na segunda pergunta, dois alunos contestaram as opções, afirmando que a área do polígono ficava igual à área do círculo quando aumentávamos o número de lados, pois segundo eles, o polígono sumia quando colocávamos o número de lados igual a 20.

Figura 15 – Usando o projetor para aumentar o número de lados do polígono.

Fonte: O autor, 2016.

Afirmou-se que há situações onde a figura pode nos enganar, pois se ampliássemos a figura, poderíamos observar que a área do polígono não era igual à área do círculo quando colocávamos o controle deslizante em 20. Para que eles verificassem isso, foi pedido para que eles entrassem na 11ª janela e selecionassem a ferramenta “Ampliar” e depois clicassem com o botão esquerdo do *mouse* várias vezes sobre a figura. Para comentar o que ocorre, foi feito a mesma coisa no projetor (Figura 16).

Figura 16 – Ampliação dos objetos dentro da janela de visualização.



Fonte: O autor, 2016.

Os alunos ficaram admirados com a possibilidade da ampliação das figuras. Depois de usar a ferramenta, todos afirmaram que a área do polígono ficava mais próxima do círculo.

Decidiu-se fugir um pouco do cronograma da atividade e foi pedido para que os alunos clicassem na ferramenta "Área" presente na 8ª janela para comparar o valor da área do polígono e o valor da área do círculo, assim criando mais um meio para eles constatarem que o valor da área do polígono ficava mais próximo da área do círculo quando o número de lados era aumentado.

Na 3ª pergunta, os alunos não apresentaram dificuldades em responder de forma correta o que era solicitado.

Na 4ª pergunta, percebeu-se que os alunos não lembraram o significado do apótema. Foi explicado que o apótema, nesse caso, era a distância do círculo inscrito a um dos lados do polígono regular. Com a explicação dada, tentou-se sem êxito que os alunos respondessem qual era o valor do apótema para dado um dos polígonos. Logo, usou-se o projetor para mostrar que a medida do apótema era sempre igual à medida do raio quando o polígono está circunscrito ao círculo.

Na 5ª pergunta, usou-se o processo de limite. Debatendo com os alunos eles chegaram à conclusão de que quanto mais aumentávamos o número de lados do polígono, mais próximo o perímetro do polígono ficava do comprimento do círculo. Então, afirmou-se que quando o número de lados tende ao infinito temos o perímetro do polígono tendendo a comprimento do círculo.

Assim, concluiu-se a atividade usando a caneta pilot para mostrar que:

Área do círculo = $\underbrace{(\pi R)}_{p} . \underbrace{R}_{A} = \pi . R^2$.

Perguntou-se para os alunos se sem a utilização do programa seria possível que eles concluíssem que quando o número de lados tende ao infinito, o perímetro do polígono e a área do polígono tendem respectivamente ao comprimento do círculo e a área do círculo. Eles disseram que seria impossível, pois a variação dos polígonos na janela de visualização foi importante para chegar a essa conclusão.

Ao término das atividades, conversou-se com a professora regente da turma sobre a constatação no decorrer da atividade 4 de que os alunos não estavam muito familiarizados com a área do círculo e a área dos polígonos regulares. Ela afirmou que gostou muito da atividade 4, pois possibilitava aumentar e diminuir a figura e observar de forma muito mais rápida propriedades que não poderiam ser trabalhadas usando o quadro convencional. Então, ela pediu para aplicar a atividade 4 novamente em sala de aula, com todos os alunos do 9º ano da turma, reforçar a área do círculo e a área de um polígono usando o semiperímetro e o apótema. Concordou-se com a proposta da professora e foi feito o que ela pediu.

Ao realizar a atividade novamente, agora com o projetor voltado para o quadro, possibilitou-se a utilização da caneta pilot sobre o desenho projetado. Com isso, teve-se a oportunidade de reforçar a área do polígono regular usando o semiperímetro e o apótema de uma forma mais rápida e clara para os alunos, pois se criava vários polígonos regulares somente variando o controle deslizante.

5.5 Sobre os resultados obtidos nas atividades

A curiosidade em mexer em um programa novo, que os alunos nunca tiveram contato foi perceptível e ajudou muito para a transmissão do conhecimento. Mesmo o programa tendo muitas ferramentas disponíveis, foi observado que, os alunos não muito familiarizados com o uso de recursos tecnológicos, puderam usar a barra de ferramentas sem muitas dificuldades para acioná-las. Quando eles tinham alguma dificuldade, faziam perguntas e interagiam muito com o seu par para realizar o que era pedido. A grande dificuldade, como mencionado, foi a utilização do campo de entrada, pois a maioria dos alunos não sabia acionar os símbolos no teclado ou por dificuldades em escrever.

O movimento dos objetos gerou muita admiração e interesse dos alunos. Foi constatado que eles não só estavam aprendendo e reforçando o conteúdo que aprenderam em sala de aula, mas estavam também brincando e interagindo com um objeto que eles usam frequentemente: o computador.

Durante as atividades no laboratório, o *software* gerou um ambiente de investigação, de debate e cooperação com todos os alunos. Foi notável isso quando iniciada a atividade 4 dentro do laboratório, pois dois computadores travaram a tela, impossibilitando as alunas de movimentarem os controles deslizantes presentes na atividade. Ao ser chamado o professor para resolver o problema, ele não soube como resolver, pois pensou que os computadores não tinham capacidade para ler o programa. Foi uma surpresa a participação de um aluno que sem ser pedida a sua ajuda, entrou no meio da conversa e falou para fechar a janela e a abrir novamente a atividade 4. As alunas fizeram rapidamente isso e, sem a ajuda do professor, tiveram meios para voltar a realizar novamente a atividade.

O olhar de atenção, tanto no laboratório como na apresentação da atividade 4 dentro da sala de aula foi notável em muitos alunos. A rapidez em desenhar os objetos dentro da sala de aula, sem a preocupação em fazer o desenho direito no quadro, a mudança em segundos de vários polígonos circunscritos na circunferência deu a oportunidade de se ter mais tempo para interagir com os alunos e eles mesmo comentaram que ficava mais claro o desenho no programa, percebendo muito mais as propriedades das figuras.

Foi percebido o quanto é prejudicial para o aluno fazermos um desenho de um objeto matemático no quadro sempre da mesma maneira, pois o aluno pode associar as particularidades da figura para os casos gerais, pensando que vale para outras figuras. Por exemplo, ao desenhar sempre o triângulo sendo acutângulo, o aluno poderá interpretar que a altura relativa a um dos lados estará sempre dentro do triângulo e para esse caso, o programa colabora para evitar essas interpretações por parte dos alunos, como ocorreu na atividade 1.

A satisfação em entender o que estava sendo trabalhado foi muito clara com as perguntas feitas pelos alunos no final da aplicação de cada uma das atividades na sala do laboratório e depois dentro da sala de aula. Muitos perguntavam por que nunca foi usado o laboratório para trabalhar geometria e por que nunca foi usado o projetor na sala com o objetivo de usar o programa com eles, se teriam mais aulas como essa na aula de matemática e quando seria utilizada novamente a sala de laboratório. Foi explicado que o objetivo da atividade também era esse: disponibilizar o programa para eles dentro do colégio e apresentar para os professores, juntamente com a professora deles o grande valor que o programa tem para o ensino.

Deve-se observar que imprevistos em uma atividade usando o GeoGebra podem ocorrer, como foi o caso da atividade 3 e 4. É necessário que o professor conheça muito bem o programa e suas ferramentas para poder sanar todas as dúvidas e imprevistos que possam ocorrer com a sua utilização na sala de aula ou no laboratório.

CONCLUSÃO

É possível constatar, com o decorrer da leitura dos capítulos, a grande contribuição que a utilização da tecnologia pode gerar para os alunos na assimilação dos conteúdos de geometria e em especial da contribuição do *software* GeoGebra. Como professor, é preciso estar atento às mudanças tecnológicas que ocorrem fora da sala de aula, pois os alunos estão atentos e interessados nessas mudanças. Para isso é necessário buscar um aperfeiçoamento como profissional e sempre estar aberto para os novos métodos de ensino. O SAEB de 2015 mostrou a necessidade da realização de reflexões sobre o ensino de matemática nas escolas públicas no estado do Rio de Janeiro. Isso é justificável pelas grandes desigualdades nessas escolas públicas, sendo dever do profissional refletir sobre como atender aos alunos que não estão assimilando os conteúdos propostos.

A aplicação das quatro atividades em uma escola da rede estadual, que possui uma porcentagem elevada de alunos abaixo do nível 1 e com maiores problemas no ensino do que nos níveis municipais e federais no estado do Rio de Janeiro mostrou que, apesar do que foi refletido pelo SAEB 2015, existe uma grande quantidade de alunos interessados em novas propostas para o ensino e o conhecimento da utilização de recursos tecnológicos, conforme foi possível constatar com a utilização do GeoGebra no ambiente escolar.

Os próprios alunos conseguiram identificar os pontos positivos na utilização do *software*. Eu, como professor, confesso que não tinha percebido o quanto um desenho feito de apenas uma maneira no quadro poderia gerar grandes problemas. Muitos alunos, que geralmente apresentavam desinteresse nas aulas convencionais, mostraram interesse no programa e nas atividades apresentadas, demostrando que atividades utilizando o *software* em questão geraram maior interesse em geometria do que o método tradicional.

É notório que o GeoGebra ajuda na assimilação do ensino de geometria e facilita a vida do professor, porém, ele por si só, não faz milagres. Não se pode esquecer que o professor deve estar muito atento em não utilizar o programa somente para que os alunos brinquem com as ferramentas do mesmo. São necessárias atividades que gerem uma reflexão, abram portas para o questionamento por parte do aluno e que gerem realmente uma contribuição efetiva para o aprendizado.

REFERÊNCIAS

Conheça o Inep. Disponível em: < http://portal.inep.gov.br/conheca-o-inep> Acesso em (20/08/2016).

D. Ofic. Portaria Nº 174, de 13 de maio de 2015. *Diário Oficial [da] República federativa do Brasil*, Brasília, DF. n. 90, 14 de maio.2015.Seção I, p. 16. Disponível em: <http://pesquisa.in.gov.br/imprensa/jsp/visualiza/index.jsp?jornal=1&pagina=16&data=14/05/2015> Acesso em (23/08/2016).

FREIRE, P. *Pedagogia do oprimido*. 59 ed. rev. e atual. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2015.

GeoGebra. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/GeoGebra> Acesso em (12/04/2016).

GÓMEZ, Á.I.P. *Educação na era digital*: a escola educativa. Tradução de Marisa Guedes. Revisão técnica de Bartira Costa. Porto Alegre: Penso, 2015.

GRAVINA, M. A. *Geometria dinâmica uma nova abordagem para o aprendizado da geometria*. VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, p.1-13, Belo Horizonte, Brasil,. No 1996.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. *A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados*. IV Congresso RIBIE, Brasília, 1998.

HOHENWARTER, M.; HOHENWARTER, J. *Ajuda GeoGebra*: Manual Oficial da Versão3.2. Tradução e adaptação para português de Portugal de Antônio Ribeiro,2009 Disponível em: <https://app.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf> Acesso em (11/04/2016).

Instituto GeoGebra UFF. Disponível em: <http://www.geogebra.im-uff.mat.br/> Acesso em (12/04/2016).

JÓSE, N. *Instalando o GeoGebra no Linux Educacional 3.0*. Disponível em: <hvttps://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0ahUKEwjPzJnr2KvPAhWCIJAKHaoyCKkQFggcMAA&url=http%3A%2F%2Flinuxeducacional.com%2Fpluginfile.php%2F68%2Fmod_forum%2Fattachment%2F5800%2FGEogebra_LE.pdf&usg=AFQjCNHK9Ik1ZyRMXwMx7bVL0m6JpGFMGg&bvm=bv.133700528,d.Y2I&cad=rja> Acesso em (10/07/2016).

Matrizes de referência. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/matrizes-de-referencia > Acesso em (22/08/2016).

*Matrizes de referência do Saeb***.** Disponível em:
< http://portal.inep.gov.br/web/guest/saeb-matrizes-de-referencia > Acesso em (23/08/2016).

M. Educ. Ministério da Educação. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. LDB 9.394, de 20 de dezembro de 2006, 2006b. Brasília, DF.

_______. Ministério da Educação. *Orientações Curriculares para o ensino médio*: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. MEC/SEB, 2006.

_______. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*: MEC/SEF, 2000.

_______. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

MORAN, J.M.; MASETTO, M.T.; BEHRENS, M.A. *Novas Tecnologias e mediação Pedagógica*. 21 ed. rev. e atual. Campinas, SP: Papirus, 2013.

MOTA, E. F. B; et al. *Geometria Dinâmica/PIBID/Unimontes:* Contribuições do GeoGebra para a Matemática na Educação Básica. 1 ed. Curitiba: Prismas, 2013.

NASCIMENTO, E. G. A. *Avaliação do uso do software GeoGebra no ensino de geometria: reflexão da prática na escola*. Actas de La Conferencia Latino americana de GeoGebra. Uruguay, 2012.

Níveis de proficiência do ensino fundamental. Disponível em:
<http://download.inep.gov.br/educacao_basica/prova_brasil_saeb/escala/escala_proficiencia/2013/escalas_ensino_fundamental_2013.pdf > Acesso em (23/08/2016).

Níveis de proficiência do ensino médio. Disponível em:
<http://download.inep.gov.br/educacao_basica/prova_brasil_saeb/escala/escala_proficiencia/2013/escala_ensino_medio_2013.pdf > Acesso em (23/08/2016).

Nota Explicativa Prova Brasil 2013. Disponível em:
<http://download.inep.gov.br/mailing/2014/nota_explicativa_prova_brasil_2013.pdf >Acesso em (22/08/2016).

Resultados SAEB 2015.Disponível em :<http://portal.inep.gov.br/web/saeb/resultados-2015> Acesso em (22/08/2016).

Saeb. Disponível em: < http://portal.inep.gov.br/web/guest/saeb > Acesso em (22/08/2016).

Senso escolar 2015. Disponível em: < http://portal.inep.gov.br/resultados-e-resumos> Acesso em (23/08/2016)

*Sobre o instituto GeoGebra PUC-SP***.** Disponível em**:** **<**http://www.pucsp.br/geogebrasp/sobre_instituto.html >Acesso em (12/04/2016).

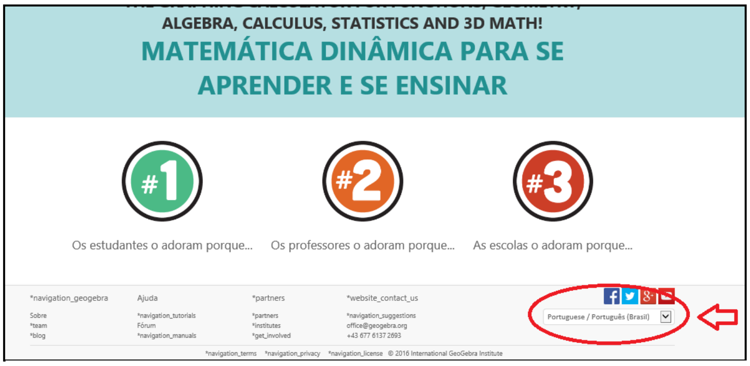
APÊNDICE A - Como realizar o *download* do GeoGebra

Para realizar o *download* da última versão do GeoGebra, é necessário realizar os seguintes passos abaixo:

a) Entre no seguinte *link*: https://www.geogebra.org/ ;

b) No final da página, existe um pequeno retângulo que possibilita alterar o idioma da página. Altere para o português clicando em "Portuguese/Português (Brasil)". Na Figura 17, está indicado de vermelho o retângulo que possibilita a mudança do idioma;

Figura 17 - Alterando o idioma da página.



Fonte: htpps://www.geogebra.org/

c) No canto superior direto, clique em *downloads*. Na figura 18, está destacado de vermelho o local aonde se deve clicar;

Figura 18 – Local para *download*.

Fonte: htpps://www.geogebra.org/

d) Após clicar em *downloads*, irá aparecer uma janela disponibilizando várias opções de *download* para: *Tablets*, *Desktops* e *Phones*. Clique na sua preferência. Caso a escolha seja *Desktops*, selecione o sistema operacional que está presente no computador. (Figura 19)

Figura 19 – Indicando aonde fazer o *download* para *Desktops*

Fonte: https://www.geogebra.org/download

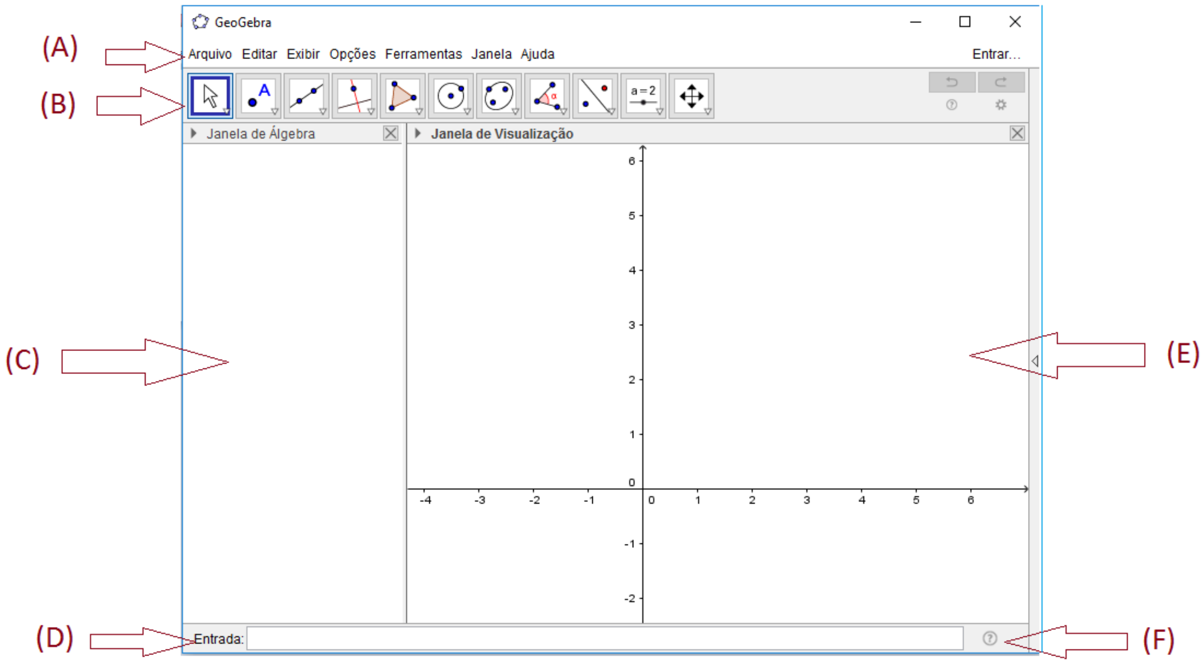
Depois de realizar os passos necessários para a instalação na opção de *download* escolhida, execute o programa para a sua utilização.

APÊNDICE B - Algumas funções do GeoGebra.

Abaixo serão realizadas explicações sobre algumas das ferramentas presentes no programa. Para fazer isso, será utilizado como referencial o software instalado em um *Desktop*, usado para aplicação de atividades presentes no capítulo 5.

Na figura 20, temos a *interface* (janela inicial de visualização) do GeoGebra. Dentro dela, existem duas janelas destacadas: a Janela de Álgebra e a Janela de Visualização. Abaixo das duas janelas, é possível observar destacado o campo de entrada e acima das duas janelas está destacada a Barra de ferramentas.

Figura 20 – *Interface* (janela inicial de visualização) do GeoGebra



Legendas: (A) - Barra de Menus; (B) - Barra de Ferramentas; (C) - Janela de Álgebra; (D) – Campo de Entrada; (E) - Janela de Visualização; (F) – Ajuda.

Na janela de Visualização existe um sistema de coordenadas onde o usuário do *software* pode fazer as construções usando o *mouse* ou utilizando o campo de entrada. Ao mesmo tempo em que é possível fazer as construções na janela de visualização, é possível verificar a lei de formações das funções correspondentes, coordenadas de pontos e equações feitas na janela algébrica.

Na barra de menus, que se localiza acima da barra de ferramentas, temos funções que permitem salvar uma determinada construção feita no programa e controlar as configurações gerais do *software*. Podemos citar, por exemplo: mudar o tamanho da fonte, mudar os critérios de arredondamento, abrir uma construção já feita e salva no computador, imprimir, mudar o idioma, etc.

O campo de entrada é usado pelo usuário para digitar equações, comandos específicos do programa, coordenadas e lei de formação de funções. Deve-se fazer a digitação do que se deseja e apertar *Enter* para que o programa leia o comando.

Caso o usuário não tenha domínio sobre os comandos, para serem digitados no campo de Entrada, existe uma lista de comandos prontos. Esses comandos podem ser acessados em: Ajuda.

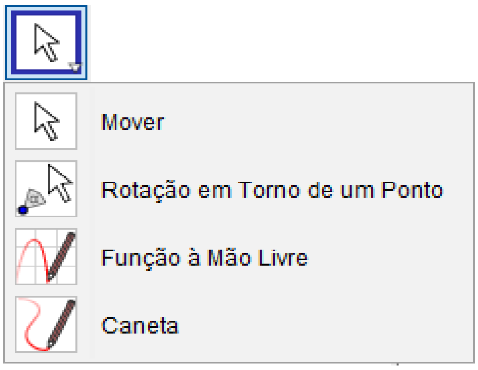
A barra de ferramentas possui 11 pequenas janelas. Em cada uma das janelas, temos ferramentas disponíveis para a construção no GeoGebra. Para poder ter acesso a cada uma das ferramentas presentes na janela, é necessário clicar com o botão esquerdo na seta que está localizada no canto direito inferior.

Essas ferramentas de construção são fáceis de serem utilizadas, pois na maioria delas requer somente que se clique nos objetos construídos dentro da janela de visualização ou em regiões na área da janela de visualização.

Usando como base o tutorial de Hohenwarter (2009) e Mota et al. (2013), pode-se descrever as ferramentas que estão presentes nas 11 janelas que compõem a barra de ferramentas.

1ª Janela - Apresenta quatro ferramentas de construção: Mover, Rotação em Torno de um Ponto, Função à Mão Livre e Caneta (Figura 21).

Figura 21 – Ferramentas na 1ª janela



a) <u>Mover</u>: Permite manipular e selecionar objetos. Com essa ferramenta, é possível clicar com o botão direito do mouse na janela de visualização e ter acesso a outros comandos.

b) Rotação em torno de um ponto: possibilita girar objetos em torno de um determinado ponto na janela de visualização. Selecione primeiramente o centro de rotação e depois com o botão pressionado sobre o objeto, o arraste.

c) Função a mão livre: Desenha qualquer função na janela de visualização a mão livre.

d) Caneta: Desenha ou escreve o que desejar na janela de visualização.

2ª Janela - Apresenta oito ferramentas: Ponto, Ponto em Objeto, Vincular/Desvincular Ponto, Interseção de Dois Objetos, Ponto Médio ou Centro, Número Complexo, Otimização e Raízes (Figura 22)

Figura 22 – Ferramentas na 2ª janela

a) Ponto: Selecione a ferramenta e depois clique na janela de visualização com o botão esquerdo do mouse para aparecer um ponto.

b) Ponto em objeto: Clique na fronteira do objeto ou no interior do objeto para fazer aparecer o ponto.

c) Vincular/Desvincular Ponto: Clique em um ponto e em um objeto para vincular (ou desvincular).

d) Interseção de dois objetos: Possibilita determinar a interseção de dois objetos de duas maneiras: selecionando os dois objetos ou clicando diretamente na interseção.

e) Ponto médio ou centro: clicando em dois pontos, um segmento, um círculo ou cônica serão mostrados na janela algébrica e na janela de visualização o que deseja ser determinado.

f) Número Complexo: Clique com o botão esquerdo do *mouse* na janela de visualização para criar o afixo do número complexo[13]. Irá aparecer a forma algébrica do afixo na janela algébrica.

g) Otimização: Selecione a função para determinar os pontos extremos que a função possui. Caso não existam extremos para a função selecionada, aparecerá um aviso dentro da janela algébrica escrito: "indefinido".

h) Raízes: Selecione a função que você deseja visualizar as raízes presentes na janela de visualização. Caso não existam raízes para função em questão, aparecerá escrito na janela algébrica "indefinido".

3ª Janela – Apresenta sete ferramentas: Reta, Segmento, Segmento com Comprimento Fixo, Semirreta, Caminho Poligonal, Vetor e Vetor a Partir de um Ponto. (Figura 23)

Figura 23 – Ferramentas na 3ª janela

a) Reta: Selecione dois pontos distintos na janela de visualização para determinar uma reta.

b) Segmento: Escolha dois pontos distintos quaisquer na janela de visualização para determinar o segmento de reta.

13 - O afixo de um número complexo $z = a + b.i$, com $a, b \in \mathbb{R}$, é o ponto do plano cartesiano cujas coordenadas são (a, b).

c) Segmento com comprimento Fixo: Selecione um ponto na janela de visualização. Depois, aparecerá uma janela para você digitar o comprimento do segmento desejado.

d) Semirreta: Escolha dois pontos distintos quaisquer na janela de visualização. O primeiro ponto selecionado é sempre a origem da semirreta.

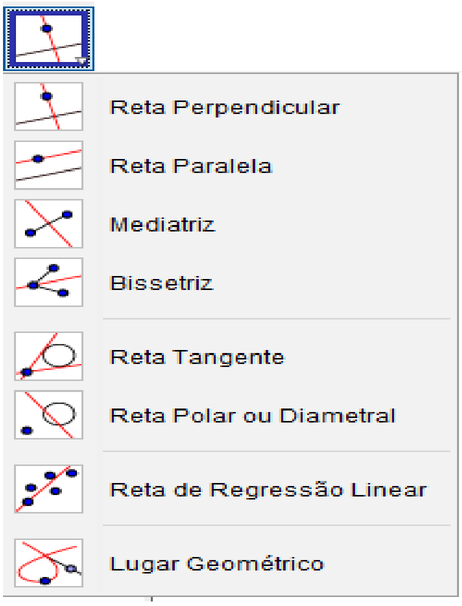
e) Caminho Poligonal: Selecione todos os vértices e depois clique no vértice que você clicou primeiro.

f) Vetor: Selecione na janela de visualização o ponto que irá representar a origem do vetor e depois o ponto que irá representar o extremo.

g) Vetor a Partir de um Ponto: Selecione um ponto e depois um vetor já construído.

4ª Janela – Apresenta oito ferramentas: Reta perpendicular, Reta Paralela, Mediatriz, Bissetriz, Reta Tangente, Reta Polar ou Diametral, Reta de Regressão Linear, Lugar Geométrico. (Figura 24)

Figura 24 – Ferramentas na 4ª janela



a) Reta Perpendicular: selecione um ponto qualquer na janela de visualização e depois selecione uma reta, segmento ou semirreta.

b) Reta Paralela: Selecione um ponto na janela de visualização e depois selecione uma reta, segmento ou semirreta.

c) Mediatriz: Selecione dois pontos ou um segmento de reta.

d) Bissetriz: Selecione dois segmentos, duas retas, duas semirretas ou três pontos.

e) Reta Tangente: Selecione primeiro um ponto e depois uma função, círculo ou cônica.

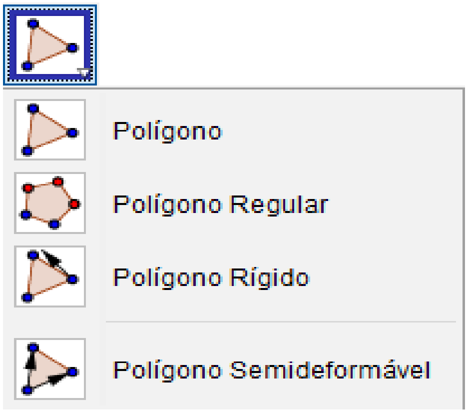
f) Reta polar ou Diametral: Ao marcar um ponto e uma cônica você obtém a reta polar. Ao marcar uma reta e uma cônica você obtém a reta diametral

g) Reta de Regressão Linear: Com o botão direito do *mouse* pressionado, selecione todos os pontos construídos na janela de visualização para determinar a reta de regressão linear correspondente aos pontos.

h) Lugar Geométrico: Selecione o ponto do lugar geométrico e depois o ponto sobre o objeto ou controle deslizante. O ponto do lugar geométrico deve ser dependente do ponto sobre o objeto ou do controle deslizante. Sem essa dependência, o programa não constrói o lugar geométrico.

5ª Janela – Possui quatro ferramentas: Polígono, Polígono Regular, Polígono Rígido e Polígono Semideformável (Figura 25)

Figura 25 – Ferramentas na 5ª janela



a) Polígono: Selecione na janela de visualização a quantidade de pontos que representam os vértices que você necessita e depois clique no primeiro ponto selecionado.

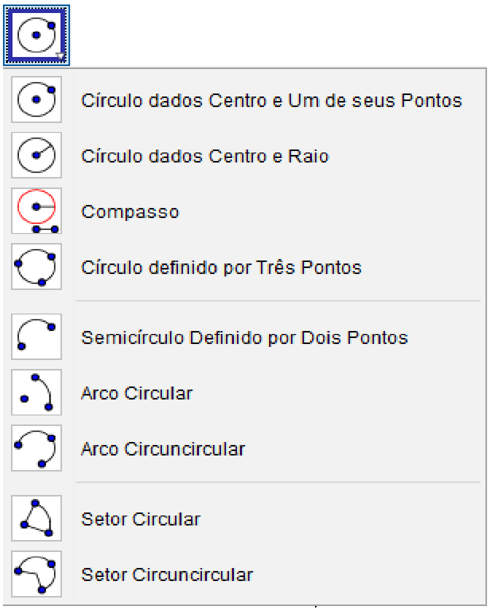
b) Polígono Regular: Selecione dois pontos distintos na janela de visualização. Irá aparecer uma janela aonde você deverá digitar a quantidade de vértices do polígono regular que você deseja construir.

c) Polígono Rígido: Selecione todos os vértices do polígono e depois clique no primeiro vértice selecionado. Você também pode clicar em um polígono já construído para criar um polígono semelhante a ele.

d) Polígono Semideformável: Selecione todos os vértices na janela de visualização e depois clique novamente no primeiro vértice que você escolheu. Você poderá deformar o polígono usando qualquer vértice menos o vértice inicial.

6ª Janela – Possui nove ferramentas: Círculo dados Centro e Um de seus Pontos, Círculo dados Centro e Raio, Compasso, Círculo definido por Três Pontos, Semicírculo Definido por Dois Pontos, Arco Circular, Arco Circuncircular, Setor Circular e Setor Circuncircular.

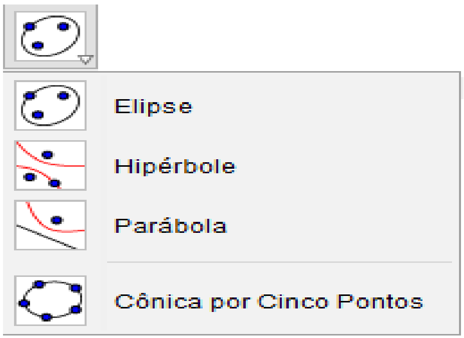
Figura 26 – Ferramentas da 6ª janela



a) Círculo dados centro e um de seus pontos: Selecione um ponto qualquer na janela de visualização para ser o centro e depois outro ponto distinto ao primeiro.
b) Círculo dados Centro e Raio: Selecione um ponto na janela de visualização para ser o centro. Aparecerá uma janela para ser informado o raio do círculo.
c) Compasso: Selecione dois pontos ou um segmento para determinar o raio. Escolha um ponto para ser o centro.
d) Círculo definido por três pontos: Selecione três pontos distintos.
e) Semicírculo definido por dois pontos: Selecione dois pontos distintos.
f) Arco circular: Selecione o centro da circunferência onde o arco está contido e depois dois pontos distintos ao primeiro.
g) Arco circuncircular: Selecione três pontos para determinar o arco.
h) Setor circular: Selecione o centro e depois dois pontos distintos.
i) Setor circuncircular: Selecione três pontos distintos.

7ª Janela – Possui quatro ferramentas: Elipse, Hipérbole, Parábola e Cônica por Cinco Pontos (Figura 27).

Figura 27 – Ferramentas da 7ª janela.



a) <u>Elipse</u>: Selecione dois pontos na janela de visualização para determinar os dois focos da elipse e depois um ponto qualquer que estará sobre a elipse.
b) <u>Hipérbole</u>: Selecione dois pontos na janela de visualização para determinar os dois focos da hipérbole e depois um ponto qualquer que estará sobre a hipérbole.
c) <u>Parábola</u>: Clique no foco e depois clique na reta diretriz.
d) <u>Cônica por cinco pontos</u>: Selecione quatro pontos quaisquer na janela de visualização e depois selecione outro ponto para determinar a cônica desejada.

8ª Janela – Possui oito ferramentas: Ângulo; Ângulo com Amplitude Fixa; Distância, Comprimento ou Perímetro; Área; Inclinação, Lista, Relação e Inspetor de Funções (Figura 28).

Figura 28 – Ferramentas da 8ª janela

a) <u>Ângulo</u>: Pode determinar a medida do ângulo formado entre duas retas, segmentos de retas ou semirretas. Determina também a medida do ângulo formado por três pontos distintos.

b) <u>Ângulo com amplitude fixa</u>: Selecione dois pontos na janela de visualização. O segundo ponto selecionado será o vértice do ângulo. Ao selecionar o segundo ponto, irá aparecer uma janela para determinar a amplitude desejada e o sentido do ângulo.

c) <u>Distância, comprimento ou perímetro</u>: Selecione dois segmentos na janela algébrica para determinar a distância entre eles. Selecione também uma circunferência, elipse ou um polígono para determinar o seu perímetro.

d) <u>Área</u>: Selecione um polígono, círculo ou elipse para determinar a sua área.

e) <u>Inclinação</u>: Selecione uma reta, semirreta ou segmento de reta para determinar o coeficiente angular da reta implícita ou explícita.

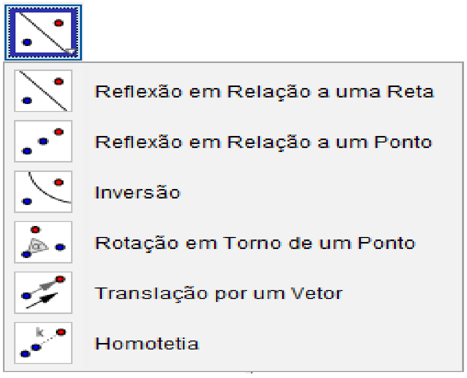
f) <u>Lista</u>: Selecione as células que você deseja e depois clique na ferramenta.

g) <u>Relação:</u> Mostra a relação que dois objetos geométricos possuem.

h) <u>Inspetor de funções</u>: Com a ferramenta selecionada, clique na função que você deseja analisar. Aparecerá uma janela aonde para um intervalo dentro do domínio da função será possível analisar algumas propriedades.

9ª Janela – Possui seis ferramentas disponíveis: Reflexão em Relação a uma Reta, Reflexão em Relação a um Ponto, Inversão, Rotação em Torno de um Ponto, Translação por um Vetor e Homotetia (Figura 29).

Figura 29 – Ferramentas na 9ª janela.

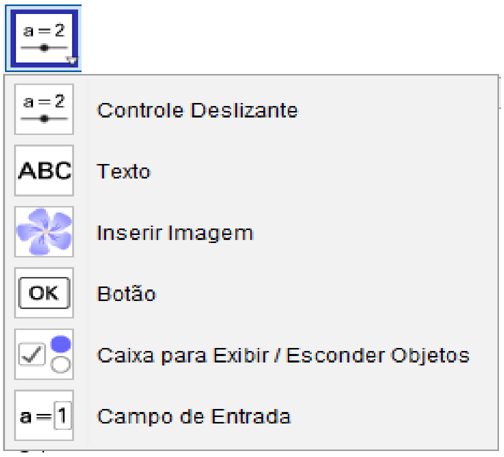


a) <u>Reflexão em relação a uma reta:</u> Selecione o objeto para depois selecionar a reta que fará a reflexão.

b) Reflexão em relação a um ponto: Selecione o objeto e depois o ponto que será o centro de reflexão.
c) Inversão: Selecione primeiro o objeto para depois selecionar o círculo.
d) Rotação em torno de um ponto: Selecione primeiro o objeto e depois o centro de rotação. Aparecerá uma janela para digitar o ângulo de rotação e escolher o sentido de rotação.
e) Translação por um vetor: Selecione primeiro o objeto que será transladado e depois no vetor base.
f) Homotetia: Clique no objeto e depois no centro da homotetia. Vai aparecer uma janela para ser digitada a razão da homotetia.

10ª Janela– Possui seis ferramentas: Controle Deslizante, Texto, Inserir Imagem, Botão, Caixa para Exibir/ Esconder Objetos e Campo de Entrada. (Figura 30).

Figura 30 – Ferramentas na 10ª janela



a) Controle deslizante: Clique na janela de visualização para escolher a região onde o controle deslizante estará posicionado. Irá aparecer uma janela onde você deverá preencher as opções necessárias para criar controle deslizante.
b) Texto: Clique na janela de visualização. Irá aparecer uma janela para ser digitado o texto. Após digitar, clique OK para o texto aparecer nas duas janelas: de visualização e algébrica.
c) Inserir Imagem: Clique na janela de visualização para colocar qualquer imagem que você possui em seu computador dentro da janela de visualização.
d) Botão: Clique na janela de visualização. Irá aparecer uma pequena janela para você criar uma legenda e digitar códigos para o botão que você irá construir na

janela de visualização. Cada vez que você clicar no botão, você usará os códigos escolhidos.

e) Caixa para exibir/Esconder objetos: Clique na janela de visualização. Irá aparecer uma pequena janela para selecionar os objetos. Com o “V” acionado, todos os objetos que você escolheu estarão visíveis na janela de visualização, já sem acionar o “V” não estarão visíveis na janela de visualização

f) Campo de entrada: Clique na janela de visualização. Irá aparecer uma pequena janela aonde possibilitará vincular o campo de entrada criado a um objeto previamente construído e criar uma legenda de identificação do campo de entrada criado.

11ª Janela – Possui sete ferramentas: Mover Janela de Visualização, Ampliar, Reduzir, Exibir/ Esconder Objeto, Exibir/ Esconder Rótulo, Copiar Estilo Visual e Apagar (Figura 31)

Figura 31 – Ferramentas da 11ª janela

a) Mover janela de visualização: Arraste a janela de visualização movimentando o *mouse* com o botão esquerdo pressionado.

b) Ampliar: Clique com o botão esquerdo do *mouse* para ampliar a janela de visualização.

c) Reduzir: Clique com o botão esquerdo do mouse para reduzir a janela de visualização.

d) Exibir/Esconder objeto: Selecione o objeto e depois outra ferramenta.

e) Exibir/Esconder rotulo: Clique no objeto para esconder ou exibir o seu rótulo.

f) Copiar estilo visual: Selecione um objeto e depois outro. O primeiro objeto servirá de modelo para o segundo.

g) Apagar: Selecione o objeto que pretende apagar.

ANEXO A – Escala de proficiência de matemática – 9º ano do ensino fundamental.

MATEMÁTICA – 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	
Nível*	Descrição do nível – O estudante provavelmente é capaz de:
Nível 1: 200 - 225	**Números e operações; álgebra e funções** • Reconhecer o maior ou o menor número em uma coleção de números racionais, representados na forma decimal. **Tratamento de informações** • Interpretar dados apresentados em tabela e gráfico de colunas.
Nível 2: 225- 250	**Números e operações; álgebra e funções** • Reconhecer a fração que corresponde à relação parte-todo entre uma figura e suas partes hachuradas. • Associar um número racional que representa uma quantia monetária, escrito por extenso, à sua representação decimal. • Determinar uma fração irredutível, equivalente a uma fração dada, a partir da simplificação por três. **Tratamento de informações** • Interpretar dados apresentados em um gráfico de linha simples. • Associar dados apresentados em gráfico de colunas a uma tabela.
Nível 3: 250- 275	**Espaço e forma** • Reconhecer o ângulo de giro que representa a mudança de direção na movimentação de pessoas/objetos. • Reconhecer a planificação de um sólido simples, dado através de um desenho em perspectiva. • Localizar um objeto em representação gráfica do tipo planta baixa, utilizando dois critérios: estar mais longe de um referencial e mais perto de outro. **Números e operações; álgebra e funções** • Determinar uma fração irredutível, equivalente a uma fração dada, a partir da simplificação por sete. • Determinar a soma, a diferença, o produto ou o quociente de números inteiros em situações-problema.

(Continuação)

<table>
<tr><th>Nível*</th><th>Descrição do nível – O estudante provavelmente é capaz de:</th></tr>
<tr><td>Nível 3:
250- 275
(cont.)</td><td>Localizar o valor que representa um número inteiro positivo associado a um ponto indicado em uma reta numérica.
Resolver problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais, representadas por números inteiros.
Tratamento de informações
Associar dados apresentados em tabela a gráfico de setores.
Analisar dados dispostos em uma tabela simples.
Analisar dados apresentados em um gráfico de linha com mais de uma grandeza representada.</td></tr>
<tr><td>Nível 4:
275- 300</td><td>Espaço e forma
Localizar um ponto em um plano cartesiano com o apoio de malha quadriculada, a partir de suas coordenadas.
Reconhecer as coordenadas de um ponto dado em um plano cartesiano com o apoio de malha quadriculada.
Interpretar a movimentação de um objeto utilizando um referencial diferente do seu.
Grandezas e medidas
Converter unidades de medidas de comprimento, de metros para centímetros, na resolução de situação-problema.
Reconhecer que a medida do perímetro de um retângulo, em uma malha quadriculada, dobra ou se reduz à metade quando os lados dobram ou são reduzidos à metade.
Números e operações; algébricas e funções
Determinar a soma de números racionais em contextos de sistema monetário.
Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica de 1º grau envolvendo números naturais, em situação-problema.
Localizar números inteiros negativos na reta numérica.
Localizar números racionais em sua representação decimal.</td></tr>
</table>

(Continuação)

Nível*	Descrição do nível – O estudante provavelmente é capaz de:
Nível 4: 275- 300 (Cont.)	**Tratamento de informações** • Analisar dados dispostos em uma tabela de dupla entrada.
Nível 5: 300- 325	**Espaço e forma** • Reconhecer que o ângulo não se altera em figuras obtidas por ampliação/redução. • Localizar dois ou mais pontos em um sistema de coordenadas. **Grandezas e medidas** • Determinar o perímetro de uma região retangular, com o apoio de figura, na resolução de uma situação-problema. • Determinar o volume através da contagem de blocos. **Números e operações; álgebra e funções** • Associar uma fração com denominador 10 à sua representação decimal. • Associar uma situação - problema à sua linguagem algébrica, por meio de equações do 1º grau ou sistemas lineares. • Determinar, em situação-problema, a adição e a multiplicação entre números racionais, envolvendo divisão por números inteiros. • Determinar a porcentagem envolvendo números inteiros. • Resolver problema envolvendo grandezas diretamente proporcionais, representadas por números racionais na forma decimal.
Nível 6: 325- 350	**Espaço e forma** • Reconhecer a medida do ângulo determinado entre dois deslocamentos, descritos por meio de orientações dadas por pontos cardeais. • Reconhecer as coordenadas de pontos representados no primeiro quadrante de um plano cartesiano. • Reconhecer a relação entre as medidas de raio e diâmetro de uma circunferência com o apoio de figura. • Reconhecer a corda de uma circunferência, as faces opostas de um cubo, a partir de uma de suas planificações. • Comparar as medidas dos lados de um triângulo a partir das medidas de

(Continuação)

Nível*	Descrição do nível – O estudante provavelmente é capaz de:
Nível 6: 325- 350 (Cont.)	seus respectivos ângulos opostos • Resolver problema utilizando o Teorema de Pitágoras no cálculo da medida da hipotenusa, dadas as medidas dos catetos. **Grandezas e medidas** • Converter unidades de medida de massa, de quilograma para grama, na resolução de situação-problema. • Resolver problema fazendo uso de semelhança de triângulos. **Números e operações; álgebra e funções** • Reconhecer frações equivalentes. • Associar um número racional, escrito por extenso, à sua representação decimal, e vice-versa. • Estimar o valor da raiz quadrada de um número inteiro aproximando-o de um número racional em sua representação decimal. • Resolver problema envolvendo grandezas diretamente proporcionais com constante de proporcionalidade não inteira. • Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica que contenha parênteses, envolvendo números naturais. • Determinar um valor monetário obtido por meio de um desconto ou acréscimo percentual. • Determinar o valor de uma expressão numérica, com números irracionais, fazendo uso de uma aproximação racional fornecida. **Tratamento de informações** • Resolver problemas que requerem a comparação de dois gráficos de colunas.
Nível 7: 350- 375	**Espaço e forma** • Reconhecer ângulos agudos, retos ou obtusos de acordo com sua medida em graus. • Reconhecer as coordenadas de pontos representados num plano cartesiano localizados em quadrantes diferentes do primeiro. • Determinar a posição final de um objeto, após a realização de rotações

(Continuação)

Nível*	Descrição do nível – O estudante provavelmente é capaz de:
Nível 7: 350- 375 (Cont.)	em torno de um ponto, de diferentes ângulos, em sentidos horário e anti-horário. • Resolver problemas envolvendo ângulos, inclusive utilizando a Lei Angular de Tales sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo. • Resolver problemas envolvendo as propriedades de ângulos internos e externos de triângulos e quadriláteros, com ou sem justaposição ou sobreposição de figuras. • Resolver problema utilizando o Teorema de Pitágoras no cálculo da medida de um dos catetos, dadas as medidas da hipotenusa e de um de seus catetos. **Grandezas e medidas** • Determinar o perímetro de uma região retangular, obtida pela justaposição de dois retângulos, descritos sem o apoio de figuras. • Determinar a área de um retângulo em situações-problema. • Determinar a área de regiões poligonais desenhadas em malhas quadriculadas. • Determinar o volume de um cubo ou de um paralelepípedo retângulo sem o apoio de figura. • Converter unidades de medida de volume, de m^3 para litro, em situações - problema. • Reconhecer a relação entre as áreas de figuras semelhantes. **Números e operações; álgebra e funções** • Determinar o quociente entre números racionais, representados na forma decimal ou fracionária, em situações- problema. • Determinar a soma de números racionais dados na forma fracionária e com denominadores diferentes. • Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica do 2º grau, com coeficientes naturais, envolvendo números inteiros. • Determinar o valor de uma expressão numérica envolvendo adição, subtração, multiplicação e/ou potenciação entre números inteiros. • Determinar o valor de uma expressão numérica com números inteiros

(Continuação)

Nível*	Descrição do nível – O estudante provavelmente é capaz de:
Nível 7: 350- 375 (Cont.)	positivos e negativos. • Determinar o valor de uma expressão numérica com números racionais. • Comparar números racionais com diferentes números de casas decimais, usando arredondamento. • Localizar na reta numérica um número racional, representado na forma de uma fração imprópria. • Associar uma fração à sua representação na forma decimal. • Associar uma situação-problema à sua linguagem algébrica, por meio de inequações do 1º grau. • Associar a representação gráfica de duas retas no plano cartesiano a um sistema de duas equações lineares, e vice-versa. • Resolver problemas envolvendo equação do 2º grau. **Tratamento de informações** • Determinar a média aritmética de um conjunto de valores. • Estimar quantidades em gráficos de setores. • Analisar dados dispostos em uma tabela de três ou mais entradas. • Interpretar dados fornecidos em gráficos envolvendo regiões do plano cartesiano. • Interpretar gráficos de linhas com duas sequências de valores.
Nível 8: 375-400	**Espaço e forma** • Resolver problemas utilizando as propriedades das cevianas (altura, mediana e bissetriz) de um triângulo isósceles com o apoio da figura. **Grandezas e medidas** • Converter unidades de medida de capacidade, de mililitro para litro, em situações-problema. • Reconhecer que a área de um retângulo quadruplica quando seus lados dobram. • Determinar a área de figuras simples (triângulo, paralelogramo, trapézio), inclusive utilizando composição/decomposição.

(Conclusão)

Nível*	Descrição do nível – O estudante provavelmente é capaz de:
Nível 8: 375- 400 (Cont.)	**Números e operações; álgebra e funções** • Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica do 1º grau, com coeficientes racionais, representados na forma decimal. • Determinar o valor de uma expressão numérica envolvendo adição, subtração e potenciação entre números racionais, representados na forma decimal. • Resolver problemas envolvendo grandezas inversamente proporcionais.
Nível 9: 400-425	**Espaço e forma** • Resolver problemas utilizando a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono. **Números e operações; álgebra e funções** • Reconhecer a expressão algébrica que expressa uma regularidade existente em uma sequência de números ou de figuras geométricas.

*O intervalo do nível inclui o primeiro ponto e exclui o último.

ANEXO B – Escala de proficiência de matemática – 3º ano do ensino médio

MATEMÁTICA – 3º ANO DO ENSINO MÉDIO		
Nível		Descrição do nível
1	225 -250	**Espaço e forma** Não existem itens âncora para esse nível. **Grandezas e medidas** Não existem itens âncora para esse nível. **Números e operações; álgebra e funções** Não existem itens âncora para esse nível. **Tratamento de informações** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de associar uma tabela de até duas entradas a informações apresentadas textualmente ou em gráfico de barras ou de linhas.
2	250-275	**Espaço e forma** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de reconhecer as coordenadas de pontos representados em um plano cartesiano localizados no primeiro quadrante. **Grandezas e medidas** Não existem itens âncora para esse nível. **Números e operações; álgebra e funções** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de reconhecer os zeros de uma função dada graficamente. Também é bem provável que os alunos determinem: o valor de uma função afim, dada sua lei de formação; um resultado utilizando o conceito de progressão aritmética.

(Continuação)

Nível		Descrição do nível
2	250-275	**Tratamento de informações** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de associar um gráfico de setores a dados percentuais apresentados textualmente ou em uma tabela.
3	275-300	**Espaço e forma** Não existem itens âncora para esse nível. **Grandezas e medidas** Não existem itens âncora para esse nível. **Números e operações; álgebra e funções** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de reconhecer: o valor máximo de uma função quadrática representada graficamente; em um gráfico, o intervalo no qual a função assume valor máximo. Também podem ser capazes de determinar: por meio de proporcionalidade o gráfico de setores que representa uma situação com dados fornecidos textualmente; o quarto valor em uma relação de proporcionalidade direta a partir de três valores fornecidos em uma situação do cotidiano; um valor reajustado de uma quantia a partir de seu valor inicial e do percentual de reajuste. Além disso, é provável que resolvam problemas utilizando operações fundamentais com números naturais. **Tratamento de informações** Não existem itens âncora para esse nível.
4	300-325	**Espaço e forma** Não existem itens âncora para esse nível. **Grandezas e medidas** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de resolver problemas envolvendo área de uma região composta por retângulos a partir de medidas fornecidas em texto e figura.

(Continuação)

MATEMÁTICA – 3º ANO DO ENSINO MÉDIO		
Nível		Descrição do nível
4	300-325	**Números e operações; álgebra e funções** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de reconhecer o gráfico de função a partir de valores fornecidos em um texto. Além disso, pode ser capaz de determinar: a lei de formação de uma função linear a partir de dados fornecidos em uma tabela; a solução de um sistema de duas equações lineares; um termo de progressão aritmética, dada sua forma geral; a probabilidade da ocorrência de um evento simples. Também é provável que resolvam: problemas utilizando proporcionalidade direta ou inversa, cujos valores devem ser obtidos a partir de operações simples; problemas de contagem usando o princípio multiplicativo. **Tratamento de informações** Não existem itens âncora para esse nível.
5	325-350	**Espaço e forma** Não existem itens âncora para esse nível. **Grandezas e medidas** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de determinar medidas de segmentos por meio da semelhança entre dois polígonos. **Números e operações; álgebra e funções** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de determinar: o valor de variável dependente ou independente de uma função exponencial dada; o percentual que representa um valor em relação ao outro; o valor de uma expressão algébrica; a solução de um sistema de três equações sendo uma com uma incógnita, outra com duas e a terceira com três incógnitas. Também é provável que sejam capazes de resolver problema envolvendo: divisão proporcional do lucro em relação a dois investimentos iniciais diferentes; operações, além das fundamentais, com números naturais; a relação linear entre duas variáveis para a determinação de uma delas; probabilidade de

(Continuação)

Nível		Descrição do nível
5	325-350	união de dois eventos. Além disso, é provável que os alunos sejam capazes de avaliar o comportamento de uma função representada graficamente, quanto ao seu crescimento. **Tratamento de informações** Não existem itens âncora para esse nível.
6	350-375	**Espaço e forma** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de reconhecer as coordenadas de pontos representados em um plano cartesiano e localizados em quadrantes diferentes do primeiro. É provável também que consigam associar um sólido geométrico simples a uma planificação usual dada. Além disso, há uma grande probabilidade de que resolvam problemas envolvendo Teorema de Pitágoras, para calcular a medida da hipotenusa de um triângulo pitagórico, a partir de informações apresentadas textualmente e em uma figura. **Grandezas e medidas** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de determinar: a razão de semelhança entre as imagens de um mesmo objeto em escalas diferentes; o volume de um paralelepípedo retângulo, dada a sua representação espacial. **Números e operações; álgebra e funções** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de determinar os zeros de uma função quadrática, a partir de sua expressão algébrica. Além disso, é provável que resolvam problemas de porcentagem envolvendo números racionais não inteiros. **Tratamento de informações** Não existem itens âncora para esse nível.
7	375-400	**Espaço e forma** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de determinar: a medida de um dos lados de um triângulo retângulo, por meio de razões trigonométricas,

(Continuação)

Nível		Descrição do nível
7	375-400	fornecendo ou não as fórmulas; com o uso do teorema de Pitágoras, a medida de um dos catetos de um triângulo retângulo não pitagórico. **Grandezas e medidas** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de determinar a área de um polígono não convexo composto por retângulos e triângulos, a partir de informações fornecidas na figura. Além disso, é provável que consigam resolver problemas: por meio de semelhança de triângulos sem apoio de figura; envolvendo perímetros de triângulos equiláteros que compõem uma figura. **Números e operações; álgebra e funções** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de reconhecer gráfico de função a partir de informações sobre sua variação descrita em um texto; os zeros de uma função quadrática em sua forma fatorada; gráfico de função afim a partir de sua representação algébrica; a equação de uma reta a partir de dois de seus pontos; as raízes de um polinômio apresentado na sua forma fatorada. Além disso, é provável também que os alunos sejam capazes de determinar os pontos de máximo ou de mínimo a partir do gráfico de uma função; o valor de uma expressão algébrica envolvendo módulo; o ponto de interseção de duas retas; a expressão algébrica que relaciona duas variáveis com valores dados em tabela ou gráfico; a maior raiz de um polinômio de 2º grau. Também é provável que os alunos sejam capazes de resolver problemas: para obter valor de variável dependente ou independente de uma função exponencial dada; que envolvam uma equação de 1º grau que requeira manipulação algébrica; envolvendo um sistema linear, dadas duas equações a duas incógnitas; usando permutação; utilizando probabilidade, envolvendo eventos independentes. **Tratamento de informações** Não existem itens âncora para esse nível.

(Continuação)

Nível		Descrição do nível
8	400-425	**Espaço e forma** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de reconhecer a proporcionalidade dos elementos lineares de figuras semelhantes. Também é provável que sejam capazes de determinar: uma das medidas de uma figura tridimensional, utilizando o Teorema de Pitágoras; a equação de uma circunferência, dados o centro e o raio; a quantidade de faces, vértices e arestas de um poliedro por meio da relação de Euler. É provável também que os alunos sejam capazes de resolver problema envolvendo razões trigonométricas no triângulo retângulo, com o apoio de figura. Podem também ser capazes de associar um prisma a uma planificação usual dada. **Grandezas e medidas** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de determinar a área da superfície de uma pirâmide regular; o volume de um paralelepípedo, dadas suas dimensões em unidades diferentes; o volume de cilindros. **Números e operações; álgebra e funções** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de reconhecer: o gráfico de uma função trigonométrica da forma y=sen(x); um sistema de equações associado a uma matriz. Também é provável que sejam capazes determinar: a expressão algébrica associada a um dos trechos do gráfico de uma função definida por partes; o valor máximo de uma função quadrática a partir de sua expressão algébrica e das expressões que determinam as coordenadas do vértice; a distância entre dois pontos no plano cartesiano. É provável também que os alunos sejam capazes de resolver problema: usando arranjo; envolvendo a resolução de uma equação do 2º grau sendo dados seus coeficientes. Além disso, existe uma grande possibilidade de que sejam capazes de interpretar o significado dos coeficientes da equação de uma reta, a partir de sua forma reduzida.

(Continuação)

Nível		Descrição do nível
8	400-425	**Tratamento de informações** Não existem itens âncora para esse nível.
9	425-450	**Espaço e forma** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de reconhecer a equação que representa uma circunferência, dentre diversas equações dadas. Também é provável que sejam capazes de determinar o centro e o raio de uma circunferência a partir de sua equação geral. É provável também que os alunos sejam capazes de resolver problemas envolvendo relações métricas em um triângulo retângulo que é parte de uma figura plana dada. **Grandezas e medidas** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de determinar o volume de pirâmides regulares. É provável também que os alunos sejam capazes de resolver problema envolvendo: áreas de círculos e polígonos; semelhança de triângulos com o apoio de figura na qual os dois triângulos apresentam ângulos opostos pelos vértices; envolvendo cálculo de volume de cilindro**.** **Números e operações; álgebra e funções** Nesse nível, o estudante pode ser capaz de reconhecer o gráfico de uma função exponencial do tipo f (x) = 10x + 1; o gráfico de uma função logarítmica dada a expressão algébrica da sua função inversa e seu gráfico. Também é provável que sejam capazes de determinar a expressão algébrica correspondente a uma função exponencial, a partir de dados fornecidos em texto ou gráfico; a inversa de uma função exponencial dada, representativa de uma situação do cotidiano; inclinação ou coeficiente angular de retas a partir de suas equações; um polinômio na forma fatorada, dadas suas raízes. **Tratamento de informações** Não existem itens âncora para esse nível.

(Conclusão)

<table>
<tr><th colspan="2">Nível</th><th>Descrição do nível</th></tr>
<tr><td>10</td><td>450-475</td><td>Espaço e forma
Não existem itens âncora para esse nível.

Grandezas e medidas
Não existem itens âncora para esse nível.

Números e operações; álgebra e funções
Nesse nível, o estudante pode ser capaz de determinar a solução de um sistema de três equações lineares, a três incógnitas, apresentado na forma matricial escalonada.
Tratamento de informações
Não existem itens âncora para esse nível.</td></tr>
</table>