Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciência
Instituto de Matemática e Estatística

Gabriel Cheregatti Bosquilha Ramos

Funções Contínuas em Intervalos Fechados e Limitados

Rio de Janeiro
2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

R175 Ramos, Gabriel Cheregatti Bosquilha.
Funções contínuas em intervalos fechados e limitados / Gabriel Cheregatti Bosquilha Ramos. - 2020.
50f. : il.

Orientadora: Cláudia Ferreira Reis Concordido.
Coorientador: Dinamérico Pereira Pombo Júnior
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística.

1. Análise matemática - Teses. I. Concordido, Cláudia Ferreira Reis. II. Pombo Júnior, Dinamérico Pereira. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.

CDU 517

Patricia Bello Meijinhos CRB7/5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Gabriel Cheregatti Bosquilha Ramos

Funções Contínuas em Intervalos Fechados e Limitados

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 07 de Janeiro de 2020.
Banca Examinadora:

Profª. Drª. Cláudia Ferreira Reis Concordido (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dr. Dinamérico Pereira Pombo Júnior (Coorientador)
Instituto de Matemática e Estatística – UFF

Prof. Dr. Augusto Cesar de Castro Barbosa
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Ronaldo da Silva Busse
Escola de Matemática - UNIRIO

Rio de Janeiro

2020

DEDICATÓRIA

Dedico essa dissertação aos meus orientadores, mãe, irmã e esposa, por terem me dado todo o apoio necessário para que eu chegasse até aqui.

AGRADECIMENTOS

A presente dissertação de mestrado não poderia chegar a bom porto sem o precioso apoio de várias pessoas.

Em primeiro lugar, não posso deixar de agradecer aos meus orientadores, Professora Doutora Claúdia Ferreira Reis Concordido e Professor Doutor Dinamérico Pereira Pombo Júnior, por toda a paciência, empenho e sentido prático com que sempre me orientaram neste trabalho. Muito obrigada por me corrigirem quando necessário sem nunca me desmotivar.

Desejo igualmente agradecer a todos os meus colegas do Mestrado e a todos os professores que se fizeram presentes nas matérias cursadas até aqui.

Por último, quero agradecer à minha família e amigos pelo apoio incondicional, especialmente a minha mãe Ivanete Cheregatti Monteiro Ramos e esposa Marcella Candido Cheregatti Bosquila Ramos.

RESUMO

RAMOS, G. C. B.*Funções Contínuas em Intervalos Fechados e Limitados*. 2020. 50 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

O objetivo principal deste trabalho é estabelecer três resultados fundamentais de Análise Real sobre funções reais contínuas em intervalos fechados e limitados, a saber, o teorema do valor intermediário, o teorema de Weierstrass e a continuidade uniforme de tais funções. Os papéis importantes desempenhados pela propriedade do supremo e pelo teorema de Bolzano-Weierstrass são enfatizados.

Palavras-chave: Teorema de Bolzano-Weierstrass. Teorema do valor intermediário. Teorema de Weierstrass. Continuidade uniforme.

ABSTRACT

RAMOS, G. C. B.*Continuous Functions on Closed and Bounded Intervals.* 2020. 50 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

The main purpose of this work is to establish three fundamental results of Real Analysis concerning real-valued continuous functions on closed and bounded intervals, namely, the intermediate value theorem, the Weierstrass theorem, and the uniform continuity of such functions. The important roles played by the supremum property and the Bolzano-Weierstrass theorem are emphasized.

Keywords: Bolzano-Weierstrass theorem. Intermediate value theorem. Weierstrass theorem. Uniform continuity.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

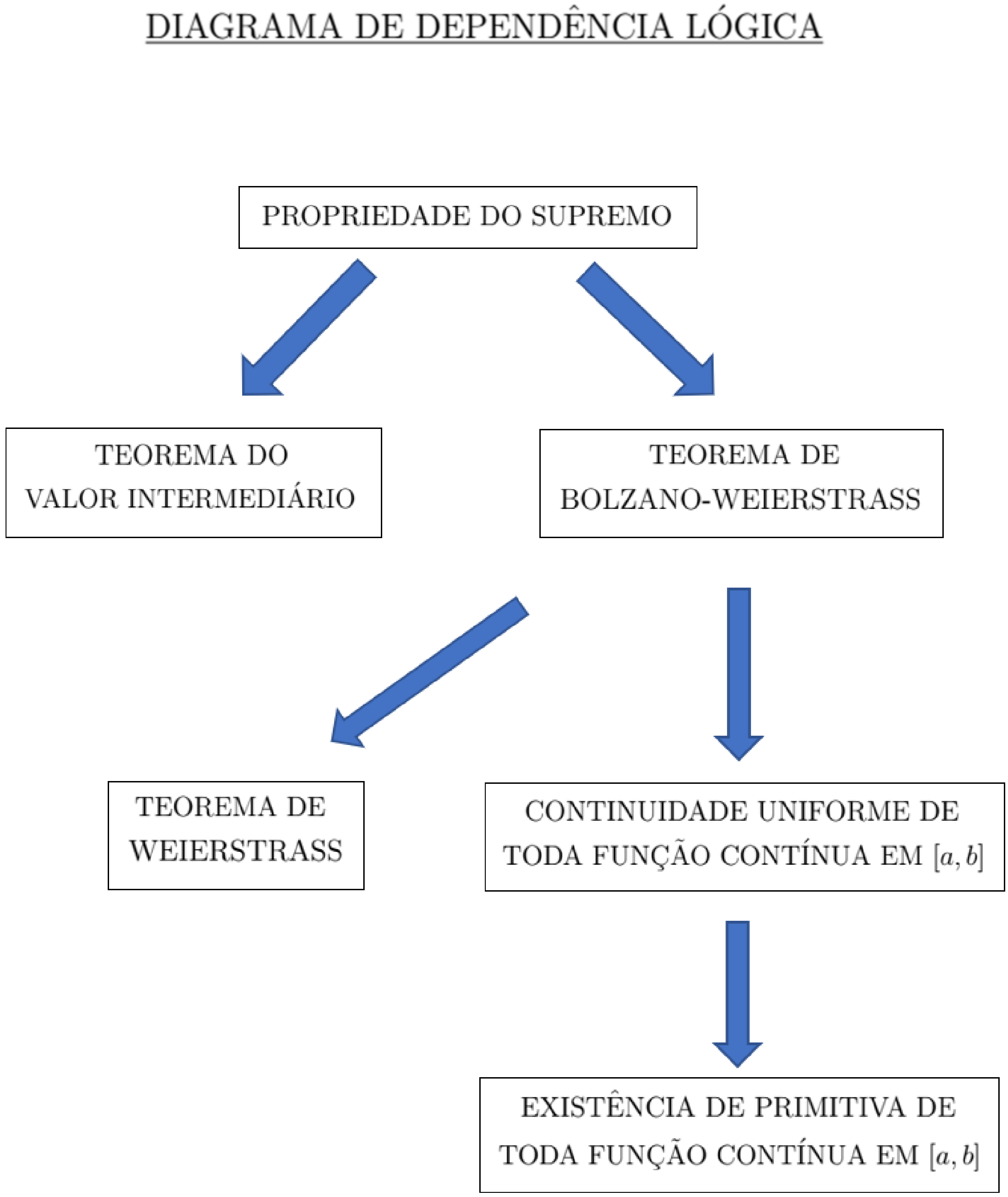
O Teorema do Valor Intermediário, provado por Bernard Bolzano (1781 - 1848), e o Teorema de Weierstrass, provado por Karl Weierstrass (1815 - 1897), foram estabelecidos no século XIX, e de maneira rigorosa. Com o desenvolvimento da Matemática, esses resultados centrais receberam versões mais abrangentes, como aquelas válidas no contexto dos espaços métricos (consultar por exemplo, o Capítulo 4 de (S. Lang, 1969)), as quais também possuem grande relevância e contêm os resultados clássicos como caso particular.

O objetivo principal deste trabalho é expor, de maneira elementar, rigorosa e completa, três fatos fundamentais sobre funções[1] contínuas em intervalos fechados e limitados, a saber, o Teorema do Valor Intermediário, o Teorema de Weierstrass, referidos acima, e o resultado segundo o qual toda função contínua em um intervalo fechado e limitado é uniformemente contínua, provados no Capítulo 4. O primeiro deles é consequência da Propriedade do Supremo, introduzida no Capítulo 2, o qual é dedicado ao sistema dos números reais. O segundo e terceiro resultados decorrem do importante Teorema de Bolzano-Weierstrass, estabelecido no Capítulo 3. Finalmente, no Capítulo 5, provamos que toda função contínua em um intervalo fechado e limitado admite primitiva, utilizando para isso a sua continuidade uniforme.

Cabe mencionar que os requisitos necessários à compreensão do texto são aqui apresentados, bem como vários exemplos esclarecedores. A leitura do presente trabalho pressupõe apenas o conteúdo abordado na primeira disciplina de Cálculo (H. L. Guidorizzi, 2000), o que o torna acessível a um grande número de leitores.

[1] Todas as funções consideradas neste trabalho assumirão valores reais.

Figura 1 - Diagrama



1 O SISTEMA DOS NÚMEROS REAIS

Neste capítulo faremos uma apresentação axiomática do sistema dos números reais, baseada no Capítulo I de (S. Lang, 1969), supondo conhecido o sistema $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ dos números racionais.

1.1 Axiomas Algébricos

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é um conjunto munido de duas operações, adição e multiplicação, satisfazendo os axiomas a seguir.

1.1.1 Adição

Para cada par x, y de números reais associa-se um, e apenas um, número real, representado por $x + y$ e chamado de soma de x e y. Além disso, a aplicação $(x, y) \in \mathbb{R}\mathrm{x}\mathbb{R} \mapsto x + y \in \mathbb{R}$, chamada de adição, possui as seguintes propriedades:

A1 Comutatividade

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, temos

$$\boxed{x + y = y + x}$$

A2 Existência de Elemento Neutro

Existe um elemento 0 de $\mathbb{R}$ tal que, para todo elemento x de $\mathbb{R}$, temos

$$\boxed{x + 0 = x}$$

A3 Existência de Inverso Aditivo

Para qualquer x de $\mathbb{R}$ existe um elemento y de $\mathbb{R}$ de forma que

$$\boxed{x + y = 0}$$

A4 Associatividade

Para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$, temos

$$\boxed{(x + y) + z = x + (y + z)}$$

Observemos que o elemento 0 de $\mathbb{R}$, citado em **A2**, é único. Com efeito, seja $0'$ um elemento de $\mathbb{R}$ tal que $x + 0' = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então, fazendo $x = 0$, temos $0 + 0' = 0$. Por outro lado, fazendo $x = 0'$ em **A2**, temos $0 + 0' = 0'$. Como, por **A1**, $0 + 0' = 0' + 0$, conclui-se que $0 = 0'$.

Além disso, podemos ver também que para cada elemento $x \in \mathbb{R}$ existe apenas um elemento $y \in \mathbb{R}$ com a propriedade citada em **A3**. De fato, admitamos a existência de $z \in \mathbb{R}$ tal que $x + z = 0$. Então, por **A1**,

$$y = y + 0 = y + (x + z) = (y + x) + z = 0 + z = z,$$

como afirmamos. O inverso aditivo (ou simétrico) de um número real x será representado por $-x$; assim, $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

1.1.2 Multiplicação

Para cada par x, y de números reais associa-se um, e apenas um, número real, representado por xy e chamado de produto de x e y. Além disso, a aplicação $(x, y) \in \mathbb{R}\text{x}\mathbb{R} \mapsto xy \in \mathbb{R}$ é chamada de multiplicação e possui as propriedades a seguir.

M1 Comutatividade

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, temos

$$\boxed{xy = yx}$$

M2 Existência de Elemento Neutro

Existe um elemento $e \neq 0$ em $\mathbb{R}$ tal que, para todo elemento x de $\mathbb{R}$, temos

$$\boxed{xe = x}$$

M3 Existência de Inverso Multiplicativo

Se $x \neq 0$ é um elemento de $\mathbb{R}$, existe um elemento w de $\mathbb{R}$ de forma que

$$\boxed{xw = e}$$

M4 Associatividade

Para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$, temos

$$\boxed{(xy)z = x(yz)}$$

Da mesma maneira pela qual foi observado na adição, vemos que o elemento neutro da multiplicação e o elemento w (mencionado em **M3**) são únicos. Vamos justificar a segunda afirmação. Com efeito , seja $w' \in \mathbb{R}$ tal que $xw' = e$. Então, por **M1** e **M4**,

$$w = we = w(xw') = (wx)w' = ew' = w',$$

como afirmamos.

O inverso multiplicativo de um número real $x \neq 0$ será representado por x^{-1}, ou por $\frac{1}{x}$; assim, $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$.

Gostaríamos de mencionar que, se a é um número real e n é um número inteiro maior ou igual a 1, definimos

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}^{n \text{ vezes}}.$$

E, se $a \neq 0$, definimos $a^0 = 1$ e $a^{-n} = (a^{-1})^n$. Uma importante propriedade, que decorre essencialmente do Princípio de Indução Finita, nos diz que, para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, e para quaisquer inteiros m, n, temos

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

1.1.3 Distributividade

A adição e a multiplicação se relacionam através de um importante axioma, a *distributividade*. Esse axioma nos diz que, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$, temos

$$\boxed{x(y+z) = xy + xz}$$

Podemos agora mostrar que, para todo número real x, $0x = 0$. Realmente, $0x+x = 0x + ex = (0+e)x = ex = x$, o que implica $0x = 0x + (x + (-x)) = (0x + x) + (-x) = x + (-x) = 0$. Logo, a nossa afirmação está justificada.

Além disso, podemos mostrar que

$$(-x) \cdot (-y) = xy$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Em particular, $(-e)(-e) = e^2 = e$. Realmente, como $0 = 0(-y) = (x + (-x))(-y) = x(-y) + (-x)(-y) = -(xy) + (-x)(-y)$, conclui-se que $xy = xy + 0 = xy + (-(xy) + (-x)(-y)) = (xy + (-(xy))) + (-x)(-y) = 0 + (-x)(-y) = (-x)(-y)$.

1.2 Axiomas de Ordem

Assumimos a existência de um subconjunto P de $\mathbb{R}$, chamado de conjunto dos elementos positivos de $\mathbb{R}$, satisfazendo os seguintes axiomas de ordem:

ORD 1. *Para qualquer $x \in \mathbb{R}$ temos que $x \in P$, $x = 0$, ou $-x \in P$. E essas três possibilidades são mutuamente exclusivas.*

ORD 2. *Se $x, y \in P$, então $x + y \in P$ e $xy \in P$.*

Para $x, y \in \mathbb{R}$, escrevemos $x > y$ para indicar que $x - y \in P$, onde $x - y$ representa o número real $x + (-y)$. Assim, $x > 0$ significa que $x \in P$; neste caso diremos que x é positivo. Por outro lado, se $x < 0$, ou seja, se $-x \in P$, diremos que x é negativo. Com essas informações é possível verificar a validade das seguintes asserções para $x, y, z \in \mathbb{R}$:

O1. Se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$.
O2. Se $x < y$ e $z > 0$, então $xz < yz$.
O3. Se $x < y$, então $x + z < y + z$.
O4. Se $0 < x < y$, então $1/y < 1/x$.

Por exemplo, para provar **O2** basta ver que, como $y - x \in P$ e $z \in P$, o produto deles também é um elemento de P, ou seja, $(y-x)z = yz - xz \in P$; portanto, $xz < yz$.

Utilizamos $x \leq y$ para indicar que $x < y$ ou $x = y$. Dessa forma pode-se verificar que **O1, O2, O3** continuam válidas trocando $<$ por $\leq$. Além disso, é possível mostrar que, se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$.

Um fato importante a ser mencionado é que, se $x, y \in \mathbb{R}$ e $xy = 0$, então $x = 0$ ou $y = 0$. De fato, se $x \neq 0$ temos $y = ey = (x^{-1}x)y = x^{-1}(xy) = x^{-1}0 = 0$. Cabe também mencionar que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, o que é óbvio se $x = 0$. Por outro lado, se $x \neq 0$, então $x > 0$ ou $x < 0$. No primeiro caso $x^2 = xx > 0$; e, no segundo caso, também temos $x^2 = (-x)(-x) > 0$.

Finalmente, seja $a \in \mathbb{R}$ fixado e observemos que existe no máximo um número real $x \geq 0$ tal que $x^2 = a$. Com efeito, se $a < 0$, não há $x \in \mathbb{R}$ para o qual $x^2 = a$ e, se $a = 0$, $x = 0$ é o único número real cujo quadrado é a. Agora, se $a > 0$ e $x, y > 0$ são tais que $x^2 = a = y^2$, então $(x+y)(x-y) = 0$, o que implica $x = y$, pois $x + y > 0$. A seguir garantiremos a existência de $x > 0$ tal que $x^2 = a$ quando $a > 0$, o qual será representado por $\sqrt{a}$; escrevemos ainda $\sqrt{0} = 0$. Admitamos, por um instante, tal fato conhecido, e sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ e $b \geq 0$. Então $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$. Realmente, se $z, w \geq 0, z^2 = a$ e $w^2 = b$, temos $zw \geq 0$ e $(zw)^2 = z^2w^2 = ab$; assim, $zw = \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

A *função valor absoluto*, $|\cdot|$, é a função real de variável real definida por

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0, \\ -x & se \quad x < 0. \end{cases}$$

É fácil observar que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$ e $|x|^2 = x^2$. Realmente, a primeira afirmação decorre da própria definição. E a segunda afirmação segue imediatamente da definição quando $x \geq 0$. E, se $x < 0$, também temos

$$|x|^2 = (-x)(-x) = x^2.$$

Consequentemente, $\sqrt{x^2} = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. A função valor absoluto goza das seguintes propriedades:

ABS 1. $|0| = 0$ e $|x| > 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

ABS 2. $|xy| = |x||y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

ABS 3. $|x + y| \leq |x| + |y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Com efeito, **ABS 1** é óbvia e **ABS 2** é válida tendo em vista que

$$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x||y|$$

para $x, y \in \mathbb{R}$ arbitrários.

Mostraremos, agora, a validade de **ABS 3**, em cuja justificativa usaremos o fato evidente de que $t \leq |t|$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Realmente, para $x, y \in \mathbb{R}$ arbitrários, temos

$$\begin{gathered} 2xy \leq 2|x||y| \\ x^2 + 2xy \leq x^2 + 2|x||y| = |x|^2 + 2|x||y| \\ x^2 + 2xy + y^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + y^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \\ (x+y)^2 \leq (|x| + |y|)^2, \end{gathered}$$

o que equivale a

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Para cada $x \in \mathbb{R}$, o número real $|x|$ é dito o *valor absoluto de* x. Uma importante propriedade satisfeita pela função valor absoluto nos diz que

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Para justifica-lá observe que, por **ABS 3**,

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|,$$

isto é,

$$|x| - |y| \leq |x - y|.$$

Trocando os papéis de x e y, vem

$$|y| - |x| \leq |y - x| = | - (x - y)| = |x - y|.$$

Assim, acabamos de mostrar que

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|,$$

o que equivale à desigualdade desejada.

Falaremos agora um pouco sobre *intervalos*. Para $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \leq b$, o intervalo fechado de extremos a e b é o conjunto

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\};$$

se $a = b$, $[a, b] = \{a\}$. E, para $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, o intervalo aberto de extremos a e b é o conjunto

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}.$$

Para $c \in \mathbb{R}$ e $\xi \in \mathbb{R}, \xi > 0$, as relações $x \in \mathbb{R}, |x - c| < \xi$ (resp. $x \in \mathbb{R}, |x - c| \leq \xi$) equivalem às relações $x \in \mathbb{R}, x \in (c - \xi, c + \xi)$ (resp. $x \in \mathbb{R}, x \in [c - \xi, c + \xi]$), como se verifica facilmente. Em particular, as relações $x \in \mathbb{R}, |x| < \xi$(resp. $x \in \mathbb{R}, |x| \leq \xi$) equivalem às relações $x \in \mathbb{R}, x \in (-\xi, \xi)$(resp. $x \in \mathbb{R}, x \in [-\xi, \xi]$).

1.3 A Imersão de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$

Seja $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ o sistema dos números racionais. A seguir mostraremos que há uma harmonia entre o sistema dos números racionais e o sistema $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ dos números reais, num sentido a ser tornado claro. Com este propósito, designaremos por $0_{\mathbb{Q}}$ (respectivamente 1) o elemento neutro aditivo (respctivamente multiplicativo) de $\mathbb{Q}$ e adotaremos as seguintes convenções:

I. $0_{\mathbb{Q}} \cdot e = 0$.

II. $m \cdot e = \overbrace{e + e + e + ... + e + e}^{m \text{ vezes}}$ se $m \in \mathbb{Z}$ e $m > 0_{\mathbb{Q}}$.

Note que $m \cdot e > 0$, pois $e > 0$.

III. $m \cdot e = -((-m) \cdot e)$ se $m \in \mathbb{Z}$ e $m < 0_{\mathbb{Q}}$.

Note que $m \cdot e < 0$.

Proposição 1.1. *Para quaisquer* $m, n \in \mathbb{N} = \{0_{\mathbb{Q}}, 1, 2, 3, ...\}$, *temos*

$$(m+n)e = me + ne \quad \text{e} \quad (mn)e = (me)(ne).$$

Demonstração. Para demonstrar essa proposição observemos que as duas afirmações são satisfeitas quando $m = 0_{\mathbb{Q}}$ ou $n = 0_{\mathbb{Q}}$. Vamos mostrar a segunda afirmação para $m, n \geq 1$; de maneira análoga prova-se a primeira afirmação para $m, n \geq 1$. Em primeiro lugar, a afirmação é verdadeira para $m = 1$ e $n \geq 1$ arbitrário. Suponhamos que a mesma seja verdadeira para $m = k \geq 1$ e $n \geq 1$ arbitrário. Então, para todo $n \geq 1$, temos

$$[(k+1)n] = (kn+n)e = (kn)e + ne = (ke)(ne) + e(ne) = (ke+e)(ne) = [(k+1)e](ne)$$

Logo, pelo Princípio de Indução Finita, temos o resultado.

Proposição 1.2. *Para quaisquer* $m, n \in \mathbb{Z}$, *temos*

$$(m+n)e = me + ne \quad \text{e} \quad (mn)e = (me)(ne).$$

Demonstração. Similarmente à Proposição 2.1, provaremos a segunda afirmação. Admitamos, então, $m < 0_{\mathbb{Q}}$ e $n > 0_{\mathbb{Q}}$. Pela proposição anterior, $[(-m)n]e = [(-m)e](ne)$. Como $mn < 0_{\mathbb{Q}}$,

$$(mn)e = -[(-(mn))e] = -[((-m)n)e] = -[((-m)e)(ne)] =$$
$$(-((-m)e))(ne) = (me)(ne).$$

Admitamos, agora, $m, n < 0_{\mathbb{Q}}$. Então, pela Proposição 2.1,

$$(me)(ne) = [-((-m)e)][-((-n)e)] = ((-m)e)((-n)e) =$$
$$((-m)(-n)e) = (mn)e.$$

Definamos $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ por $f(\frac{p}{q}) = (pe)(qe)^{-1}$ se $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0_\mathbb{Q}\}$. Notar que $f(0_\mathbb{Q}) = 0$ e $f(1) = e$. Afirmamos que:

(i) f preserva as operações:

Realmente,

$f\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{mq+np}{nq}\right) = [(mq) + (np)]e \cdot [(nq)e]^{-1} =$

$[(me)(qe) + (ne)(pe)][(ne)^{-1}(qe)^{-1}] = [(me)(ne)^{-1}] + [(pe)(qe)^{-1}] = f\left(\frac{m}{n}\right) + f\left(\frac{p}{q}\right)$

e

$f\left(\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{mp}{nq}\right) = [(mp)e][(nq)e]^{-1} = [(me)(pe)][(ne)^{-1}(qe)^{-1}] =$

$[(me)(ne)^{-1}][(pe)(qe)^{-1}] = f\left(\frac{m}{n}\right) \cdot f\left(\frac{p}{q}\right)$

se $m, p \in \mathbb{Z}$ e $n, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(ii) f é estritamente crescente (em particular, f é injetora):

Realmente, se $p, q > 0$, $f\left(\frac{p}{q}\right) = (pe)(qe)^{-1} > 0$, o que implica em

$f\left(\frac{p}{q}\right) > f\left(\frac{m}{n}\right)$ quando $\frac{p}{q}, \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{p}{q} > \frac{m}{n}$.

Dessa forma, podemos "identificar" $\mathbb{Q}$ a $Im(f)$, tanto do ponto de vista das operações quanto do ponto de vista das relações de ordem. Cabe também mencionar que, para todo racional $z \neq 0_\mathbb{Q}$, tem-se $f(z^{-1}) = (f(z))^{-1}$. Em vista da referida identificação teremos

$$|z|_\mathbb{Q} = |z| \text{ para todo } z \in \mathbb{Q}$$

e escrevemos $0_\mathbb{Q} = 0$ e $1 = e$.

1.4 A Propriedade do Supremo

Definição 1.1. *Diz-se que $A \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente se existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq y$ para todo $x \in A$. Neste caso, diz-se que y é uma cota superior de A. Substituindo $\leq$ por $\geq$ tem-se as noções de conjunto limitado inferiormente e de cota inferior.*

Definição 1.2. *Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado superiormente. Diz-se que $s \in \mathbb{R}$ é o supremo de A, e escreve-se $s = \mathrm{supA}$, se as seguintes condições são satisfeitas:*

(a) s é uma cota superior de A;
(b) se $t \in \mathbb{R}$ e $t < s$, então t não é uma cota superior de A.

Notemos que, em vista de *(b)*, há no máximo um tal número real s.

Dualmente, definimos a noção de *ínfimo* de um subconjunto limitado inferiormente $B \subset \mathbb{R}$, denotado por $\inf \mathrm{B}$. Assim, a asserção $i = \inf \mathrm{B}$ significa que i é uma cota inferior de B tal que, se $w \in \mathbb{R}$ e $w > i$, então w não é uma cota inferior de B.

Assumiremos a validade da seguinte

Propriedade do Supremo

Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, limitado superiormente, possui supremo.

É fácil observar que a Propriedade do Supremo equivale à

Propriedade do Ínfimo

Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, limitado inferiormente, possui ínfimo.

Cabe aqui ressaltar que um sistema, como o sistema dos números reais, efetivamente existe e é essencialmente único [2,6].

A seguir provaremos duas propriedades fundamentais do sistema dos números reais.

Proposição 1.3. *(Propriedade Arquimediana) Se $x \in \mathbb{R}$ e $x > 0$, então existe um número inteiro $n > 1$ tal que $x < n$.*

Demonstração. Caso a afirmação não fosse verdadeira, o conjunto $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ..., n, n+1, ...\}$ seria limitado superiormente. Portanto, pela Propriedade do Supremo, existiria $s = \sup\ \mathbb{N}^*$. Mas, como $s - 1 < s$, então $s - 1$ não é uma cota superior de $\mathbb{N}^*$. Consequentemente existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $s - 1 < m$, o que equivale a $s < m + 1$. Entretanto, como $m + 1 \in \mathbb{N}^*$, a relação $s < m + 1$ não pode ocorrer.

Como consequência da Propriedade Arquimediana temos $\inf\{\frac{1}{\mathrm{n}}; \mathrm{n} \in \mathbb{N}^*\} = 0$, o que fornece um exemplo de um conjunto cujo ínfimo não pertence ao conjunto.

Corolário 1.1. *Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, com $x > 0$, existe um número inteiro $n > 1$ tal que $nx > y$.*

Demonstração. A afirmação é óbvia se $y \leq 0$. Se $y > 0$ ela decorre da Proposição 2.3, substituindo x por $\dfrac{y}{x}$.

Proposição 1.4. *Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, com $x < y$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q < y$.*

Demonstração. Pela Propriedade Arquimediana, existe $l \in \mathbb{N}^*$ tal que $l > \frac{1}{y-x}$, o que equivale a $ly > lx + 1$. Por outro lado, existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $lx < k$. Realmente isso é óbvio se $lx \leq 0$ e decorre da Propriedade Arquimediana se $lx > 0$. Seja m o menor $k \in \mathbb{N}^*$ para o qual $lx < k$ (cuja existência é garantida pelo Princípio da Boa Ordem). Assim $m - 1 \leq lx < m$. Consequentemente, $ly > lx + 1 \geq m > lx$, o que fornece $y > \frac{m}{l} > x$. Logo, basta tomar $q = \frac{m}{l} \in \mathbb{Q}$ para concluir a demonstração.

Proposição 1.5. *Existe um único número real $x > 0$ tal que $x^2 = 2$.*

Demonstração. Como a unicidade já foi justificada, resta-nos estabelecer a existência. Com esse propósito, ponhamos

$$A = \{y \in \mathbb{R}; y \geq 0, y^2 < 2\}.$$

Notemos que $A \neq \emptyset$, pois $0 \in A$, e 2 é uma cota superior de A, pois $y^2 > 2$ se $y \geq 2$. Seja $x = \text{supA}$. Afirmamos que $x^2 = 2$.

Suponhamos $x^2 < 2$ e tomemos um inteiro $n > 1$ tal que $n > \frac{2x+1}{2-x^2}$ (Corolário 2.1). Então

$$(x + \tfrac{1}{n})^2 = x^2 + \tfrac{2x}{n} + \tfrac{1}{n^2} \leq x^2 + \tfrac{2x}{n} + \tfrac{1}{n} < x^2 + 2 - x^2 = 2,$$

o que implica $x + \frac{1}{n} \in A$. Mas isto não pode ocorrer, pois $x + \frac{1}{n} > x$.

Admitamos, agora, $x^2 > 2$, e tomemos um inteiro $m > 1$ tal que $\frac{1}{m} < \frac{x^2-2}{2x}$ e $\frac{1}{m} < x$ (Corolário 2.1). Então

$$(x - \tfrac{1}{m})^2 = x^2 - \tfrac{2x}{m} + \tfrac{1}{m^2} > x^2 - \tfrac{2x}{m} > 2,$$

o que implicaria que x não é o supremo de A (já que $x - \frac{1}{m}$ seria uma cota superior de A menor do que x).

Portanto $x^2 = 2$, como queríamos provar.

Pelo mesmo raciocínio provar-se-ia que, para todo $t \in \mathbb{R}, t > 0$, existe um único $w \in \mathbb{R}$ tal que $w > 0$ e $w^2 = t$. Lembremos que, pela convenção já adotada, $w = \sqrt{t}$.

Proposição 1.6. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Primeira demonstração (Hipaso). Suponhamos que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Então existem dois inteiros maiores que 0, a e b, primos entre si e tais que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Daí $a^2 = 2b^2$, o que implica a ser par, digamos $a = 2l$ para algum inteiro $l \geq 1$. Consequentemente $b^2 = 2l^2$, o que implica b ser par. Mas isto não pode ocorrer, pois a e b são primos entre si. Logo $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Segunda demonstração (Fermat). Suponhamos que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Então podemos escrever $\sqrt{2} = \frac{c}{d}$, onde c e d são inteiros ≥ 1 e c é mínimo (a existência de c é garantida pelo Princípio da Boa Ordem). Como

$$d^2 < 2d^2 = c^2 < 4d^2 = (2d)^2,$$

tem-se $d < c < 2d$. Ponhamos $m = 2d - c > 0$ e $n = c - d > 0$. Então $m < c$ e

$$m^2 - 2n^2 = 4d^2 - 4dc + c^2 - 2c^2 + 4dc - 2d^2 = 2d^2 - c^2 = 0,$$

contrariando a minimalidade de c.

Seja p um natural primo arbitrário. Lembrando que se p divide um produto de dois inteiros então p divide pelo menos um dos dois inteiros e argumentando como na primeira demonstração da proposição anterior, mostra-se que $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$. Por consequência, $t\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$ para todo racional $t \neq 0$ e $t + \sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$ para todo racional t.

Um número real não racional é dito um número irracional.

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, com $x < y$. Afirmamos que existe um número irracional z tal que $x < z < y$. De fato, basta tomar z da forma $z = q + \frac{\sqrt{2}}{n}$, onde $q \in \mathbb{Q}$ e $x < q < y$ e n é um inteiro maior do que 1 tal que $\frac{1}{n} < \frac{y-q}{\sqrt{2}}$.

2 O TEOREMA DE BOLZANO - WEIERSTRASS

Neste capítulo provaremos o Teorema de Bolzano-Weierstrass, o qual desempenhará um papel central no decorrer do nosso trabalho.

Diremos que um subconjunto de $\mathbb{R}$ é *limitado* se ele é limitado superiormente e inferiormente.

Definição 2.1. *Uma sequência de números reais é uma função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$. Uma sequência x de números reais será representada por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita limitada inferiormente (respectivamente limitada superiormente, limitada) se o conjunto $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ é limitado inferiormente (respectivamente limitado superiormente, limitado).*

Exemplo 2.1. *A sequência limitada $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que $(-1)^{2n} = 1$, $(-1)^{2n+1} = -1$ e $|(-1)^{2n+1} - (-1)^{2n}| = 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

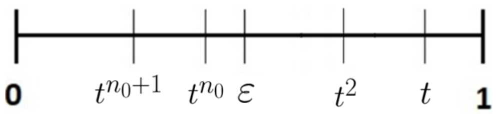
Exemplo 2.2. *A sequência limitada inferiormente e não limitada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dada por $x_{2n} = 2n$ e $x_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, satisfaz a seguinte propriedade:*

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < x_{2n+1} < \varepsilon$ para todo inteiro $n \geq n_0$.

Realmente, a Propriedade Arquimediana garante a existência de $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{2n_0+1} = \frac{1}{2n_0+1} < \varepsilon$, e daí resulta que $x_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{2n_0+1} < \varepsilon$ para todo inteiro $n \geq n_0$.

Exemplo 2.3. *Fixemos $t \in \mathbb{R}$, com $0 < t < 1$, e consideremos a sequência $(t^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Então para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < t^n < \varepsilon$ para todo inteiro $n \geq n_0$.*

Figura 2 - Exemplo 3.3



Realmente, sem perda de generalidade podemos supor $\varepsilon < 1$. Por outro lado, podemos escrever $\dfrac{1}{t} = 1 + \alpha$, onde $\alpha > 0$. Pela Propriedade Arquimediana existe um inteiro $n_0 \geq 1$ tal que $1+n_0\alpha > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Além disso, pela desigualdade de Bernoulli, $(1+\alpha)^{n_0} \geq 1 + n_0\alpha$. Consequentemente,

$$0 < t^n = \frac{1}{\frac{1}{t^n}} = \frac{1}{(1+\alpha)^n} \leq \frac{1}{(1+\alpha)^{n_0}} \leq \frac{1}{1+n_0\alpha} < \varepsilon$$

para todo inteiro $n \geq n_0$.

Notemos ainda que $t > t^2 > ... > t^n > t^{n+1} > ... > 0$ e $\inf \{t^n; n \in \mathbb{N}\} = 0$.

Exemplo 2.4. *Consideremos a sequência* $(\sqrt[n]{n})_{n\geq 1}$. *Então para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \geq 1$ *tal que* $1 - \varepsilon < \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$ *para todo* $n \geq n_0$.

De fato , ponhamos $y_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$ para todo $n \geq 1$. Pelo teorema do binômio, para $n \geq 2$, temos

$$n = (1 + y_n)^n \geq \tfrac{n(n-1)}{2} \cdot y_n^2;$$

portanto,

$$0 \leq y_n \leq \sqrt{\tfrac{2}{n-1}}.$$

Pela Propriedade Arquimediana, existe um inteiro $n_0 \geq 2$ tal que $\sqrt{\frac{2}{n_0-1}} < \varepsilon$, o que implica

$$1 - \varepsilon < \sqrt[n]{n} = y_n + 1 \leq \sqrt{\tfrac{2}{n-1}} + 1 \leq \sqrt{\tfrac{2}{n_0-1}} + 1 < 1 + \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$.

Exemplo 2.5. *Fixemos* $\beta > 0$ *e consideremos a sequência* $(\sqrt[n]{\beta})_{n\geq 1}$. *Então para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \geq 1$ *tal que* $1 - \varepsilon < \sqrt[n]{\beta} < 1 + \varepsilon$ *para todo* $n \geq n_0$.

Como o caso em que $\beta = 1$ é claro e como no caso em que $0 < \beta < 1$ basta tomar $\frac{1}{\beta} > 1$, é suficiente considerar o caso em que $\beta > 1$. Admitamos então $\beta > 1$ e consideremos a sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ de termos maiores do que 0, onde $x_n = \sqrt[n]{\beta} - 1$. Pelo teorema do binômio,

$$1 + nx_n \leq (1 + x_n)^n = \beta,$$

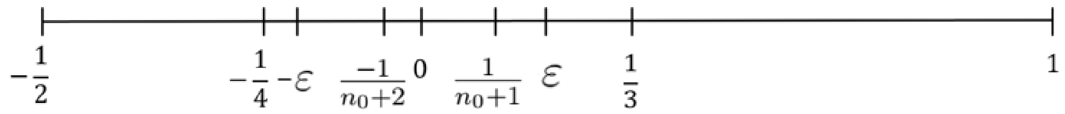
de modo que

$$0 < x_n \leq \tfrac{\beta-1}{n} \qquad (n = 1, 2, ...).$$

Consequentemente, argumentando como no Exemplo 3.4, tem-se a validade da afirmação.

Exemplo 2.6. *Consideremos a sequência* $\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. *Então para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right| < \varepsilon$ *para todo* $n \geq n_0$.

Figura 3 - Exemplo 3.6



Com efeito, pela Propriedade Arquimediana existe $n_0 \geq 0$ tal que $\frac{1}{n_0+1} < \varepsilon$, o que implica $\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_0+1} < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.

Definição 2.2. *(Sequência Convergente) Diz-se que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um número real x se, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \epsilon$ para todo inteiro $n \geq n_0$, isto é, $x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ para todo inteiro $n \geq n_0$.*

Na definição acima, em geral, n_0 depende do ε dado anteriormente.

Observação 2.1. *Caso exista um número real x gozando da propriedade descrita na Definição 3.2, ele é necessariamente único.*

De fato, seja $x' \in \mathbb{R}$ tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x' e admitamos $x \neq x'$. Então, tomando $\varepsilon = \frac{|x-x'|}{2} > 0$, podemos encontrar $n_0, n_0' \in \mathbb{N}$ de modo que $|x_n - x| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$ e $|x_n - x'| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0'$. Consequentemente, se $m = max\,\{n_0, n_0'\}$, temos

$$|x - x'| = |(x - x_m) + (x_m - x')| \leq |x - x_m| + |x_m - x'| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |x - x'|,$$

o que é absurdo. Logo, $x = x'$.

Escrevemos $x = \lim\limits_{x\to\infty} x_n$ ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$ para designar que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x. Vimos, no Exemplo 3.3 (respectivamente, 3.4, 3.5, 3.6) que $\lim\limits_{n\to\infty} t^n = 0$ $(0 < t < 1)$ $\left(\text{respectivamente} \lim\limits_{\text{n}\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \lim\limits_{\text{n}\to\infty} \sqrt[n]{\beta} = 1 \quad (\beta > 0), \lim\limits_{\text{n}\to\infty} \dfrac{(-1)^{\text{n}}}{\text{n}+1} = 0\right)$.

Pela definição de convergência de sequência, é claro que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0 se, e somente se, a sequência $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0.

Exemplo 2.7. *Se $x \in \mathbb{R}$ e $|x| < 1$, então*

$$\lim_{x\to\infty} (1 + x + ... + x^n) = \frac{1}{1-x}.$$

Realmente, como $1 + x + ... + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e como $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = 0$ (Exemplo 3.3), conclui-se a validade da afirmação.

Apesar da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ considerada no Exemplo 3.1 não convergir, como é fácil constatar, a sequência $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 1. Por outro lado, temos:

Proposição 2.1. *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$*, então* $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |x|$.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Mas, como já vimos no Capítulo 2,

$$||x_n| - |x|| \leq |x_n - x|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, o que nos permite concluir que $||x_n| - |x|| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |x|$.

Todo número real pode ser aproximado por uma sequência de números racionais. Mais precisamente:

Proposição 2.2. *Seja* $x \in \mathbb{R}$ *arbitrário. Então existe uma sequência* $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de números racionais tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = x$.

Demonstração. Pela Proposição 2.4, para cada $n \geq 0$ existe $q_n \in \left(x - \frac{1}{n+1}, x + \frac{1}{n+1}\right)$, o que equivale a $|q_n - x| < \frac{1}{n+1}$. Por consequência, pela Propriedade Arquimediana, concluímos que $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = x$.

Definição 2.3. *Uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é chamada monótona crescente (respectivamente monótona decrescente) se* $x_n \leq x_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *(respectivamente* $x_n \geq x_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*).*

Dizer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona crescente equivale a dizer que $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona decrescente. Nem toda sequência monótona crescente converge; considere, por exemplo, a sequência não limitada superiormente $(n)_{n\in\mathbb{N}}$. Por outro lado, as sequências $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(0 < t < 1)$ são monótonas decrescentes e ambas convergem para 0, sendo que

$$0 = \inf\left\{\tfrac{1}{n+1}; n \in \mathbb{N}\right\} = \inf\{t^n; n \in \mathbb{N}\}.$$

Na verdade, isso não é mera coincidência, como mostra a

Proposição 2.3. *Se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência monótona crescente e limitada superiormente, então* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* $x = \sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. Equivalentemente, se $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monótona decrescente e limitada inferiormente, então $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $y = \inf\{y_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Demonstração. Primeiramente, lembremos que a existência de x é assegurada pela Propriedade do Supremo. Mostremos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$. Com efeito, para $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x - \varepsilon < x_{n_0}$. Portanto,

$$x - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq x < x + \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$, provando que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$.

Exemplo 2.8. *A sequência* $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, ..., ...$ *converge para* 2.

De fato, escrevamos $x_0 = \sqrt{2}$ e $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Como, para $0 < t < 2$, tem-se $t < \sqrt{2t} < 2$, o Princípio da Indução Finita garante que $(x_n)_{n\geq 0}$ é uma sequência monótona crescente e limitada superiormente (por 2). Logo, pela Proposição 3.3, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um número real $x > 0$. Por outro lado, do fato de que $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ $(n \in \mathbb{N})$ e da unicidade do limite (Observação 3.1) decorre que $x = \sqrt{2x}$. Portanto, $x = 2$, como havíamos afirmado.

Observemos, agora, que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergindo para x goza da seguinte propriedade:

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_m - x_n| < \varepsilon$ para quaisquer $m, n \geq n_0$.

Realmente, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \geq n_0$, o que implica

$$|x_m - x_n| = |(x_m - x) + (x - x_n)| \leq |x_m - x| + |x - x_n| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para quaisquer $m, n \geq n_0$.

A referida propriedade expressa o fato de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ser uma *sequência de Cauchy.*

Consideremos, agora, uma sequência de Cauchy, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_{n_0}| \leq 1$ para todo $n > n_0$. Se tomarmos $L = max\,\{|x_0|, ..., |x_{n_0}|\}$ e $n > n_0$, teremos

$$|x_n| = |(x_n - x_{n_0}) + x_{n_0}| \leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| \leq 1 + |x_{n_0}|.$$

Podemos então concluir que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \leq max\,\{L, 1 + |x_{n_0}|\}$, mostrando que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Em resumo, acabamos de observar que toda sequência convergente é de Cauchy e que toda sequência de Cauchy é limitada. É fácil mostrar que a sequência limitada $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, considerada no Exemplo 3.1, não é de Cauchy (logo, não é convergente). E a sequência considerada no Exemplo 3.2 também não é de Cauchy, por não ser limitada.

Veremos, a seguir, que toda sequência de Cauchy de números reais admite um limite em $\mathbb{R}$. Esse fato fundamental não é válido em $\mathbb{Q}$; basta tomar uma sequência de números racionais convergindo para $\sqrt{2}$.

Antes de continuar observemos que as sequências não convergentes, definidas nos Exemplos 3.1 e 3.2, possuem uma certa similaridade, a saber: da sequência limitada do Exemplo 3.1 podemos extrair duas sequências convergentes, a dos seus termos de ordem par e a dos seus termos de ordem ímpar; e, na sequência não limitada do Exemplo 3.2, a sequência formada pelos termos de ordem ímpar é convergente. Vamos aprofundar as considerações anteriores introduzindo a seguinte

Definição 2.4. *Seja* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência. Se* $n_0 < n_1 < n_2 < ... < n_k < n_{k+1} < ...$ *é uma sequência estritamente crescente de números naturais, a sequência* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *é dita uma subsequência de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Como acabamos de mencionar, uma sequência não convergente pode admitir uma subsequência convergente. Temos o seguinte fato básico:

Proposição 2.4. *Se* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *é uma subsequência de uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$, *então* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \to x$.

Demonstração. Com efeito, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon$ para todo $n \geq l$. Tomemos um inteiro $k_0 \geq 0$ tal que $n_{k_0} \geq l$. Então, para todo $k \geq k_0$, temos $n_k \geq n_{k_0} \geq l$; consequentemente,

$$|x_{n_k} - x| < \varepsilon,$$

e $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \to x$.

Proposição 2.5. *Se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de Cauchy e admite uma subsequência* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *convergindo para* x, *então* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* x.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ para $m, n \geq l$. E, como $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \to x$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k_0} \geq l$ e $|x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ para $k \geq k_0$. Portanto, para $n \geq n_{k_0}$,

$$|x_n - x| = |(x_n - x_{n_{k_0}}) + (x_{n_{k_0}} - x)| \leq |x_n - x_{n_{k_0}}| + |x_{n_{k_0}} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$, como queríamos provar.

Teorema 2.1. *(Teorema de Bolzano-Weierstrass) Se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência limitada, então* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admite uma subsequência convergente.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, ponhamos

$$y_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\}.$$

É fácil ver que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monótona crescente e limitada superiormente. Logo, pela Proposição 3.3, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $x = \sup\{y_n; n \in \mathbb{N}\}$. Afirmamos que existem inteiros $0 = n_0 < n_1 < n_2 < ... < n_k < n_{k+1} < ...$ de modo que

$$|y_{n_k+1} - x_{n_{k+1}}| < \frac{1}{k+1}$$

para todo inteiro $k \geq 0$.

Com efeito, ponhamos $n_0 = 0$. Como $y_1 = \inf\{x_1, x_2, x_3, ...\}$, existe $n_1 \geq 1 > 0 = n_0$ tal que $y_1 \leq x_{n_1} < y_1 + 1$ (logo, $|y_{n_0+1} - x_{n_1}| < 1$). Seja $k \geq 1$ e suponhamos construídos inteiros $0 = n_0 < n_1 < n_2 < ... < n_k$ de modo que a condição requerida seja satisfeita. Como $y_{n_k+1} = \inf\{x_{n_k+1}, x_{n_k+2}, ...\}$, existe $n_{k+1} \geq n_k + 1 > n_k$ de modo que $y_{n_k+1} \leq x_{n_{k+1}} < y_{n_k+1} + \frac{1}{k+1}$ (logo, $|y_{n_k+1} - x_{n_{k+1}}| < \frac{1}{k+1}$). Logo, pelo Princípio de Indução Finita, a afirmação é válida.

Notemos que, pela Proposição 3.4, $(y_{n_k+1})_{k\in\mathbb{N}} \to x$. Finalmente, afirmamos que $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \to x$. De fato, tem-se

$$|x_{n_{k+1}} - x| = |\left(x_{n_{k+1}} - y_{n_k+1}\right) + (y_{n_k+1} - x)| \leq |x_{n_{k+1}} - y_{n_k+1}| + |y_{n_k+1} - x| < \frac{1}{k+1} + |y_{n_k+1} - x|$$

para todo $k \geq 0$. Portanto, pela Propriedade Arquimediana e o fato de $\left(|y_{n_k+1} - x|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergir para 0, conclui-se que $\left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para x. Assim, o resultado está provado.

Corolário 2.1. *Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy de números reais, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$.*

Demonstração. De fato, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, o Teorema de Bolzano - Weierstrass garante a existência de uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergindo para $x \in \mathbb{R}$. Logo, pela Proposição 3.5, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$, como desejávamos.

3 FUNÇÕES CONTÍNUAS EM INTERVALOS FECHADOS E LIMITADOS

Proposição 3.1. *Seja $D \subset \mathbb{R}, D \neq \emptyset$. Para uma função $f : D \to \mathbb{R}$ e para cada $x \in D$, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que as relações $t \in D$, $|t - x| < \delta$ implicam $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$;

(ii) para toda sequência $(x_n)_{\in \mathbb{N}}$ em D convergindo para x, a sequência $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $f(x)$.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$: Sejam $\varepsilon > 0$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como em (ii). Por (i) existe $\delta > 0$ tal que $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ sempre que $t \in D$ e $|t - x| < \delta$. Por outro lado, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \delta$ para todo $n \geq n_0$. Logo, $|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$, e $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \to f(x)$.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Admitamos que (i) não seja válida. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo inteiro $n \geq 1$ existe $x_n \in D$ tal que $|x_n - x| < \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(x)| \geq \varepsilon$. Consequentemente, $(x_n)_{n\geq 1}$ converge para x e $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ não converge para $f(x)$, e (ii) não é válida.

Na proposição acima, em geral, δ depende de x e ε dados anteriormente.

Definição 3.1. *Diz-se que uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é contínua em $x \in D$ quando as condições equivalentes da Proposição 4.1 são satisfeitas. Diz-se que f é contínua em D quando f é contínua em todo $x \in D$.*

Exemplo 3.1. *Para $c \in \mathbb{R}$ fixado, a função $x \in D \mapsto c \in \mathbb{R}$ é contínua em D.*

Exemplo 3.2. *Se $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$ são duas funções contínuas em D, a função*

$$f_1 + f_2 : x \in D \mapsto (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \in \mathbb{R}$$

é contínua em D. Logo, pelo Princípio de Indução Finita, se $n = 2, 3, ...,$ $f_1 + ... + f_n$ é uma função contínua em D caso $f_1, .., f_n$ gozem da mesma propriedade.

Exemplo 3.3. *Se $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$ são duas funções contínuas em D, a função*

$$f_1 f_2 : x \in D \mapsto (f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x) \in \mathbb{R}$$

é contínua em D. Logo, pelo Princípio de Indução Finita, se $n = 2, 3, ...,$ $f_1 ... f_n$ é uma função contínua em D caso $f_1, ..., f_n$ gozem da mesma propriedade.

Exemplo 3.4. *Em vista da continuidade da função $x \in \mathbb{R} \mapsto x \in \mathbb{R}$ e dos Exemplos 4.1, 4.2 e 4.3, todo polinômio*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

é uma função contínua em $\mathbb{R}$.

Exemplo 3.5. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 0$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, não é contínua em qualquer $x \in \mathbb{R}$.*

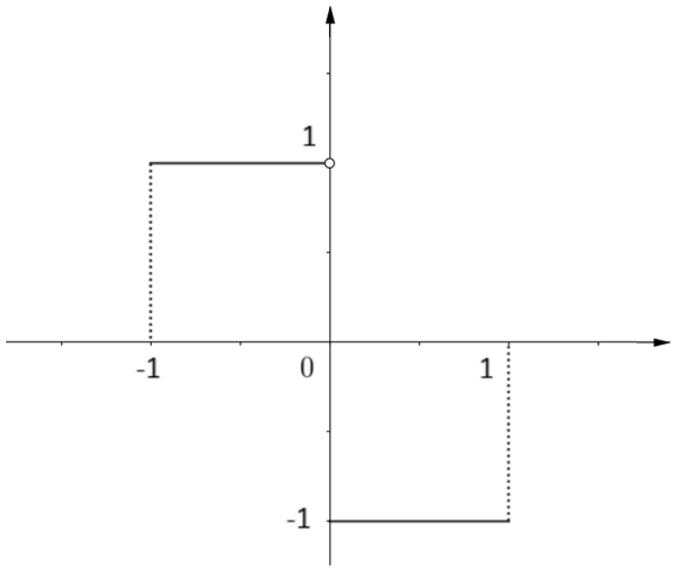
De fato, seja $x \in \mathbb{Q}$ arbitrário e seja $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números irracionais convergindo para x. Então $(f(t_n))_{n\in\mathbb{N}} \to 1 \neq 0 = f(x)$, e a Proposição 4.1 garante que f não é contínua em x. Analogamente, f não é contínua em qualquer $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Para uma função $f : D \to \mathbb{R}$, escrevemos

$$Im(f) = \{f(x); x \in D\} .$$

Exemplo 3.6. *Consideremos a função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(t) = 1$ se $-1 \leq t < 0$ e $f(t) = -1$ se $0 \leq t \leq 1$, cujo gráfico esboçamos abaixo.*

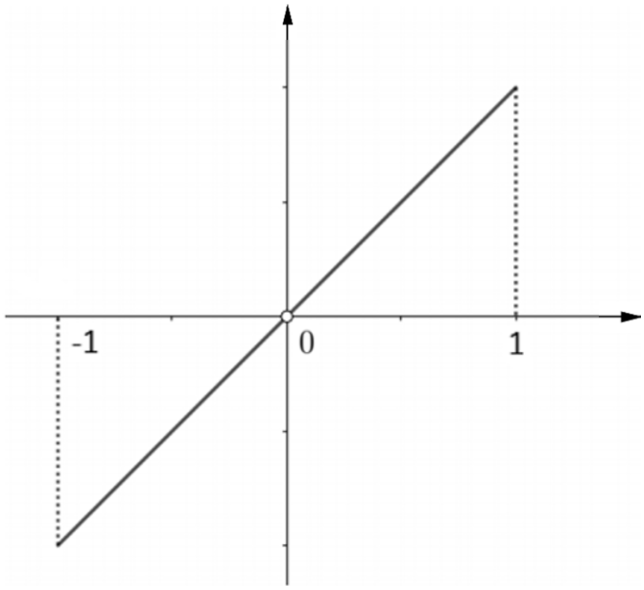
Figura 4 - Exemplo 4.6



Notemos que f, definida no intervalo $[-1, 1]$, não é contínua em 0, pois $\left(-\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ e $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ convergem para 0, $\left(f\left(-\frac{1}{n}\right)\right)_{n\geq 1} \to 1$ e $\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\geq 1} \to -1$ (lembrar a Proposição 4.1). Observemos, ainda, que $f(-1) = 1 > 0 > f(1) = -1$ e $0 \notin Im(f)$.

Exemplo 3.7. *Consideremos, agora, a função* $f : [-1,0) \cup (0,1] \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(t) = t$*, cujo gráfico esboçamos abaixo.*

Figura 5 - Exemplo 4.7



Apesar de f ser contínua em $[-1,0) \cup (0,1]$, que não é um intervalo, tem-se $f(-1) = -1 < 0 < f(1) = 1$ e $0 \notin Im(f)$.

Veremos, no resultado fundamental a seguir, que o fenômeno descrito nos Exemplos 4.6 e 4.7 nunca ocorre se considerarmos funções contínuas definidas em intervalos fechados e limitados.

Teorema 3.1. *(Teorema do Valor Intermediário). Se* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua em* $[a,b]$ *e* $f(a) < c < f(b)$*, existe* $x \in (a,b)$ *tal que* $f(x) = c$ *(logo,* $c \in Im(f)$*).*

Demonstração. Substituindo f pela função contínua $f - c$, se necessário, podemos supor $c = 0$. Ponhamos

$$A = \{t \in [a,b]; f(t) \leq 0\}.$$

Como $a \in A$ e b é uma cota superior de A, a Propriedade do Supremo garante a existência de $x = \sup A$, que pertence a $[a,b]$.

Afirmamos que $f(x) = 0$. Com efeito, seja $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em A tal que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$. Como f é contínua em x , $(f(t_n))_{n\in\mathbb{N}} \to f(x)$ pela Proposição 4.1 (ii). Por outro lado, como $f(t_n) \leq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $f(x) \leq 0$, o que fornece $x < b$. Para concluir basta mostrar que não podemos ter $f(x) < 0$. De fato, se supuséssemos $f(x) < 0$, a Proposição 4.1 (i) garantiria a existência de $x < t' < b$ tal que $f(t') < 0$. Mas isto não pode ocorrer, pois $t' \in A$ e $t' > \sup A$. Portanto, $f(x) = 0$, concluindo assim a demonstração.

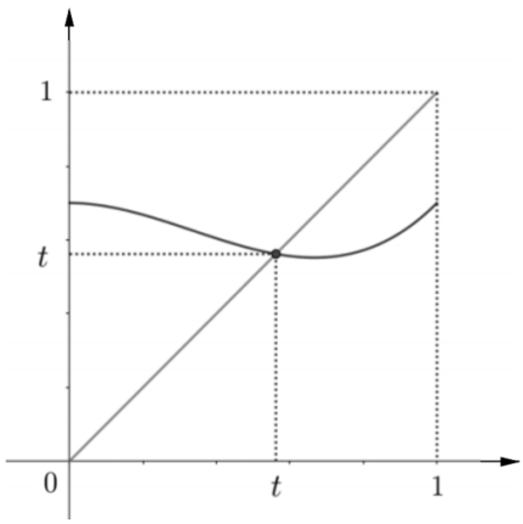
Exemplo 3.8. *Se* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ *é um polinômio de grau ímpar* n*, existe* $y \in \mathbb{R}$ *tal que* $p(y) = 0$.

De fato, como $p(x) = a_n \left(x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + ... + \frac{a_1}{a_n} x + \frac{a_0}{a_n} \right)$, basta considerar o caso em que $a_n = 1$. Como $\lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$, pois o grau de p é ímpar, existem $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, de modo que $p(a) < 0 < p(b)$. Logo, considerando a restrição de p ao intervalo $[a, b]$, que é uma função contínua em $[a, b]$, o Teorema do Valor Intermediário garante a existência de $y \in (a, b)$ tal que $p(y) = 0$.

Exemplo 3.9. *Seja* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[0, 1]$ *e tal que* $Im(f) \subset [0, 1]$. *Então existe* $t \in [0, 1]$ *tal que* $f(t) = t$ *(isto é,* f *possui um ponto fixo).*

Com efeito, se $f(0) = 0$ ou $f(1) = 1$, a afirmação é óbvia. Caso contrário, consideremos a função contínua $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = f(x) - x$ para $x \in [0, 1]$. Como $g(1) < 0 < g(0)$, o Teorema do Valor Intermediário fornece $t \in (0, 1)$ tal que $g(t) = 0$, ou seja, $f(t) = t$.

Figura 6 - Exemplo 4.9



Exemplo 3.10. *Seja* n *um inteiro maior ou igual a* 1. *Então para cada* $y > 0$ *existe um único* $t > 0$ *tal que* $t^n = y$.

Para mostrar a unicidade, tomemos $u, v > 0$ tais que $u^n = v^n = y$. Como

$$0 = u^n - v^n = (u - v)(u^{n-1} + ... + v^{n-1})$$

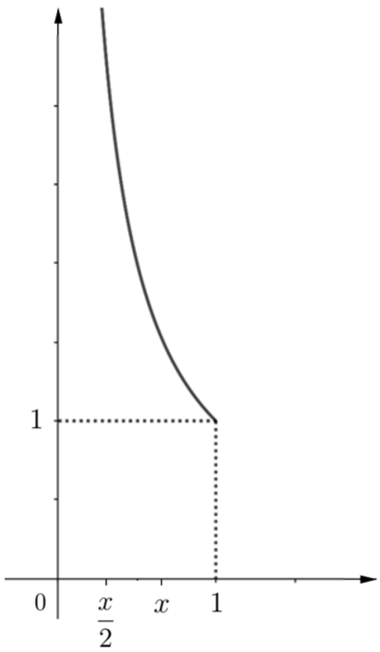
e $(u^{n-1} + ... + v^{n-1}) > 0$, segue que $u = v$.

Para mostrar a existência, consideremos a função contínua $h : [0, y+1] \to \mathbb{R}$, dada por $h(x) = x^n - y$ para $x \in [0, y + 1]$. Como $h(0) = -y < 0 < (y + 1)^n - y = h(y + 1)$, segue do Teorema do Valor Intermediário a existência de $t \in (0, y + 1)$ tal que $h(t) = 0$, isto é, $t^n = y$.

O Exemplo 4.10 nos diz que todo número real maior do que 0 admite raiz $n-$ésima. Usando a Propriedade do Supremo, já havíamos visto na Proposição 2.5 que 2 admite raiz quadrada.

Exemplo 3.11. *Consideremos a função* $f : (0,1] \to \mathbb{R}$, *dada por* $f(t) = \dfrac{1}{t}$ *para* $t \in (0,1]$, *cujo gráfico esboçamos abaixo.*

Figura 7 - Exemplo 4.11



Primeiramente, observemos que f é contínua em $(0,1]$. Realmente, seja $x \in (0,1]$ e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $(0,1]$ convergindo para x. Então, considerando o intervalo $\left(\dfrac{x}{2}, \dfrac{3x}{2}\right)$ centrado em x, existe um inteiro $n_0 \geq 0$ tal que $x_n > \dfrac{x}{2}$ para todo $n \geq n_0$, o que implica

$$|f(x_n) - f(x)| = \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right| = \frac{|x_n - x|}{|x_n||x|} = \frac{|x_n - x|}{x_n x} < \frac{2}{x^2}|x_n - x|$$

para todo $n \geq n_0$. Agora, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$, existe um inteiro $n_1 \geq n_0$ de modo que $|x_n - x| < \dfrac{x^2}{2}\varepsilon$ para todo inteiro $n \geq n_1$. Consequentemente, em vista das desiqualdades acima, concluímos que

$$|f(x_n) - f(x)| < \frac{2}{x^2}\frac{x^2}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

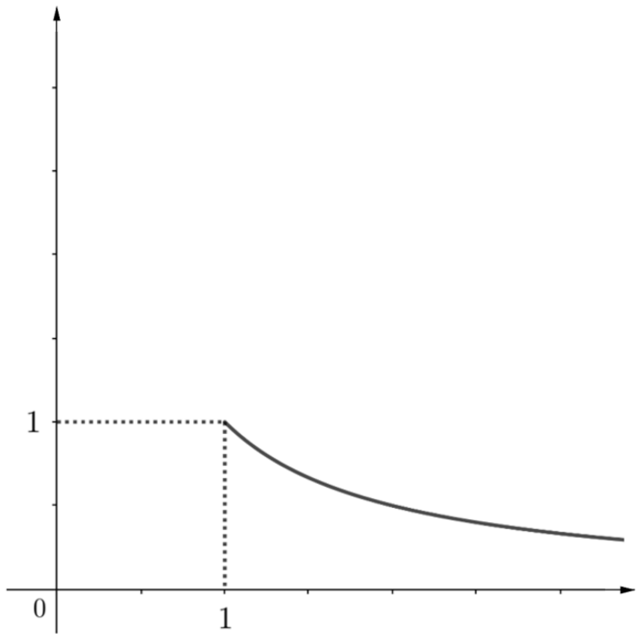
para todo $n \geq n_1$; assim, f é contínua em x. Como x é arbitrário, acabamos de mostrar que f é contínua em $(0,1]$.

Notemos que, no exemplo em questão , $Im(f)$ é limitado inferiormente, mas não é limitado superiormente. Além disso,

$$1 = \inf Im(f) \in Im(f).$$

Exemplo 3.12. *Consideremos, agora, a função contínua* $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$*, dada por* $f(t) = \dfrac{1}{t}$ *para* $t \in [1, \infty)$*, cujo gráfico esboçamos abaixo.*

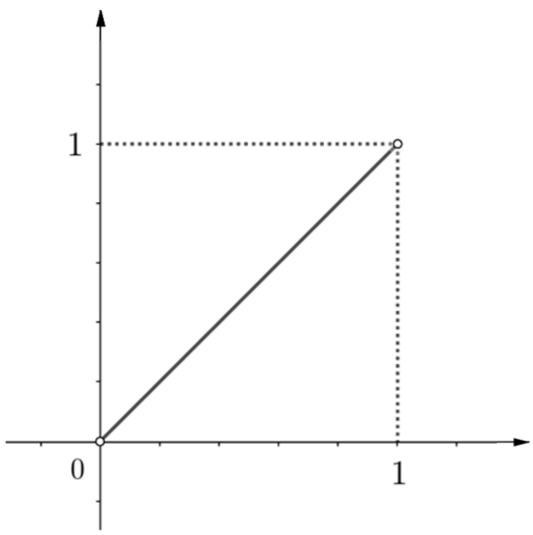
Figura 8 - Exemplo 4.12



Notemos que $Im(f)$ é limitado, $1 = \sup Im(f) \in Im(f)$ e $0 = \inf Im(f) \notin Im(f)$.

Exemplo 3.13. *Consideremos, ainda, a função contínua* $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(t) = t$*, cujo gráfico esboçamos abaixo.*

Figura 9 - Exemplo 4.13



Observemos que $Im(f)$ é limitado, $0 = \inf Im(f) \notin Im(f)$ e $1 = \sup Im(f) \notin Im(f)$.

Veremos, no resultado a seguir, que para um função real contínua definida em um intervalo fechado e limitado os fenômenos destacados nos Exemplos 4.11, 4.12 e 4.13 não podem ocorrer.

Teorema 3.2. *(Teorema de Weierstrass) Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua em* $[a, b]$*, então* $Im(f)$ *é limitado,* $inf Im(f) \in Im(f)$ *e* $sup Im(f) \in Im(f)$*.*

Demonstração. Inicialmente, mostremos que $Im(f)$ é limitado superiormente. Caso contrário, para todo inteiro $n \geq 1$ existiria $x_n \in [a, b]$ tal que $f(x_n) > n$. Como a sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ é limitada, o Teorema de Bolzano-Weierstrass garante a existência de uma subsequência $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(x_n)_{n\geq 1}$ convergindo para um número real x, que forçosamente pertence a $[a, b]$. Por outro lado, pela Proposição 4.1 (ii), $(f(x_{n_k}))_{k\geq 1}$ converge para $f(x)$, e, por consequência, $(f(x_{n_k}))_{k\geq 1}$ é limitada. Mas isso não ocorre, já que $f(x_{n_k}) > n_k$ para todo inteiro $k \geq 1$. Assim, acabamos de mostrar que $Im(f)$ é limitado superiormente. Raciocinando como acima ou aplicando o que acabamos de ver à função contínua $-f$, concluímos que $Im(f)$ é limitado inferiormente.

Agora, ponhamos $\alpha = \inf Im(f)$ e seja $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $[a, b]$ tal que $(f(t_n))_{n\in\mathbb{N}} \to \alpha$. Aplicando novamente o Teorema de Bolzano-Weierstrass, obtém-se uma subsequência $(t_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(t_n)_{n\geq 1}$ convergindo para $t \in [a, b]$, e a continuidade de f em t fornece $(f(t_{n_k}))_{k\geq 1} \to f(t)$. Pela Proposição 3.4, $(f(t_{n_k}))_{k\geq 1} \to \alpha$, e a unicidade do limite (Observação 3.9) fornece $\alpha = f(t) \in Im(f)$. Finalmente, raciocinando como mencionamos acima, mostra-se que $\sup Im(f) \in Im(f)$, concluindo assim a demonstração.

Observação 3.1. *Nas condições do Teorema 4.2, sejam* $u, v \in [a, b]$ *tais que* $f(u) \leq f(x) \leq f(v)$ *para todo* $x \in [a, b]$*. Então, pelo Teorema do Valor Intermediário,* $Im(f) = [f(u), f(v)]$*.*

Exemplo 3.14. *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua em* $[a, b]$*, existem* $x_1, x_2 \in [a, b]$ *tais que*

$$|f(x_1)| \leq |f(x)| \leq |f(x_2)|$$

para todo $x \in [a, b]$*.*

De fato, pelas Proposições 4.1 (i) e 3.1, a função

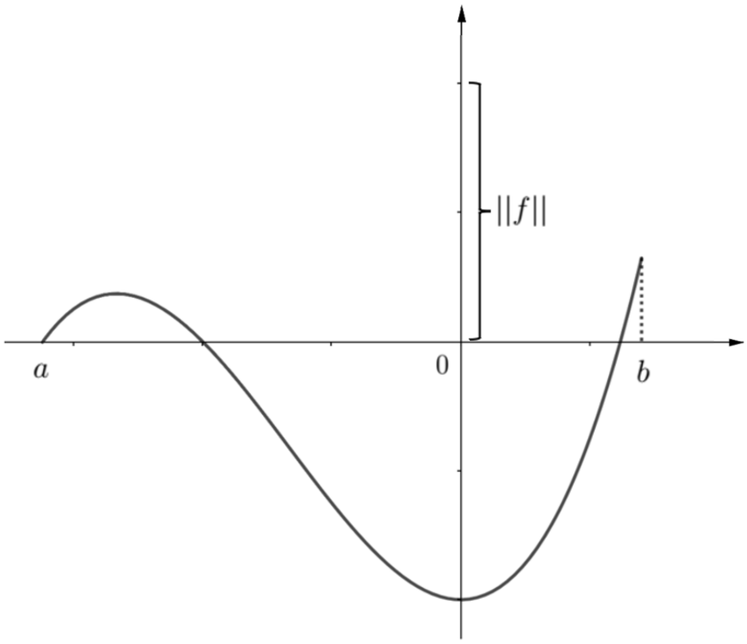
$$x \in [a, b] \longmapsto |f(x)| \in \mathbb{R}$$

é contínua em $[a, b]$. Portanto, a afirmação decorre do Teorema de Weierstrass.

Observação 3.2. *Para $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$, arbitrária, escrevamos*

$$||f|| = sup\{|f(x)|; x \in [a, b]\}.$$

Figura 10 - Observação 4.1



Não é difícil mostrar que, para quaisquer $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínuas em $[a, b]$ e para todo $d \in \mathbb{R}$, tem-se:
(i) $||g|| \geq 0$ e $||g|| = 0$ se, e somente se, $g = 0$;
(ii) $||dg|| = |d|\,||g||$;
(iii) $||g + h|| \leq ||g|| + ||h||$.

Exemplo 3.15. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$. Então existe $s > 0$ tal que*

$$f(x) \geq s$$

para todo $x \in [a, b]$.

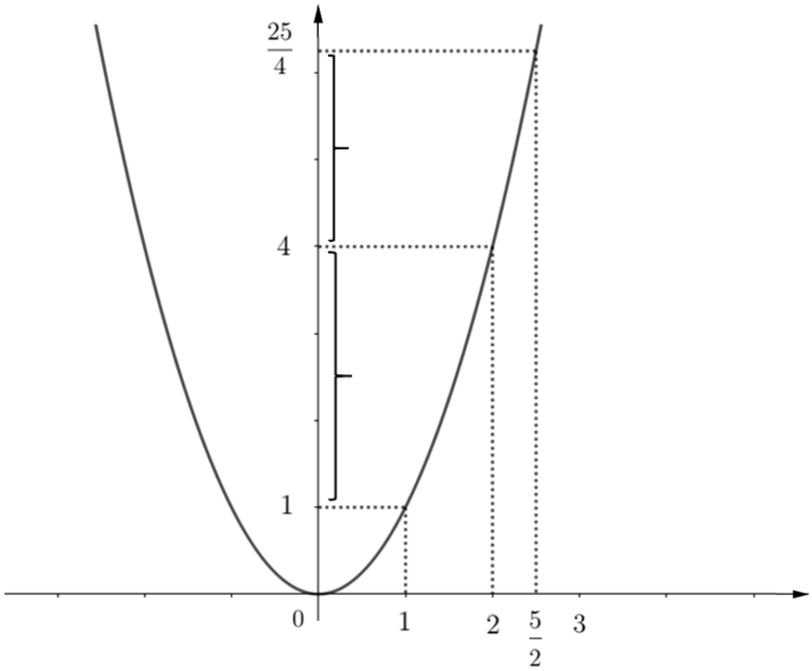
Com efeito, o Teorema de Weierstrass garante a existência de $z \in [a, b]$ tal que $f(x) \geq f(z)$ para todo $x \in [a, b]$. Consequentemente, basta tomar $s = f(z) > 0$ para concluir.

O Exemplo 4.13 mostra que o Exemplo 4.15 pode não ser verdadeito se substituirmos $[a, b]$ por um intervalo limitado, mas não fechado.

Exemplo 3.16. *Consideremos a função* $f(x) = x^2$*, que é contínua em* $\mathbb{R}$*. Então, para cada* $x \in \mathbb{R}$ *fixado, as relações "*$y \in \mathbb{R}, y$ *próximo de* x*" implicam "*$f(y)$ *próximo de* $f(x)$*". Entretanto, as relações "*$x, y \in \mathbb{R}, x$ *próximo de* y*" não implicam "*$f(x)$ *próximo de* $f(y)$*". Realmente, para todo inteiro* $n \geq 1$*, tem-se*

$$\left(n + \frac{1}{n}\right) - n = \frac{1}{n} \quad e \quad f\left(n + \frac{1}{n}\right) - f(n) = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} > 2.$$

Figura 11 - Exemplo 4.16



Por outro lado, se T é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$, existe um número real $m > 0$ tal que $T \subset [-m, m]$. Daí, se $x, y \in T$,

$$|f(x) - f(y)| = |x + y|\,|x - y| \leq (|x| + |y|)|x - y| \leq 2m|x - y|.$$

Portanto, as relações "$x, y \in T$, x próximo de y" implicam "$f(x)$ próximo $f(y)$".

Para tornar precisas as considerações acima, introduzamos a seguinte

Definição 3.2. *Sejam* $D \subset \mathbb{R}, D \neq \emptyset$ *e* $f : D \to \mathbb{R}$*;* f *é dita uniformemente contínua em* D *se para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que as relações* $x, y \in D, |x - y| < \delta$ *implicam* $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$*.*

Na definição acima, em geral δ depende exclusivamente do ε dado anteriormente. É claro que, se f é uniformemente contínua em D, então f é contínua em D. Mas a recíproca não é verdadeira em geral, como mostra o Exemplo 4.16. Entretanto, a restrição da função f, a qualquer subconjunto limitado T de $\mathbb{R}$, é uniformemente contínua em T (para $\varepsilon > 0$ dado, basta tomar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2m} > 0$, sendo m como acima). Veremos, no resultado a seguir, que a última afirmação não é mera coincidência.

Teorema 3.3. *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua em* $[a, b]$*, então* f *é uniformemente contínua em* $[a, b]$*.*

Demonstração. Admitamos que f não seja uniformemente contínua. Logo, por definição, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo inteiro $n \geq 1$ existem $x_n, y_n \in [a, b]$ tais que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ da sequência $(x_n)_{n \geq 1}$ tal que $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ converge para $x \in [a, b]$. E, como

$$|y_{n_k} - x| = |(y_{n_k} - x_{n_k}) + (x_{n_k} - x)| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| \leq \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - x|$$

para todo $k \geq 1$, conclui-se que $(y_{n_k})_{k \geq 1}$ também converge para x (lembrar a Propriedade Arquimediana). Ora, pela continuidade de f em x, $(f(x_{n_k}))_{k \geq 1} \to f(x)$ e $(f(y_{n_k}))_{k \geq 1} \to f(x)$, o que implica $(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}))_{k \geq 1} \to f(x) - f(x) = 0$. Mas isto não pode ocorrer, visto que $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$ para todo $k \geq 1$. Portanto, f é uniformemente contínua, como queríamos provar.

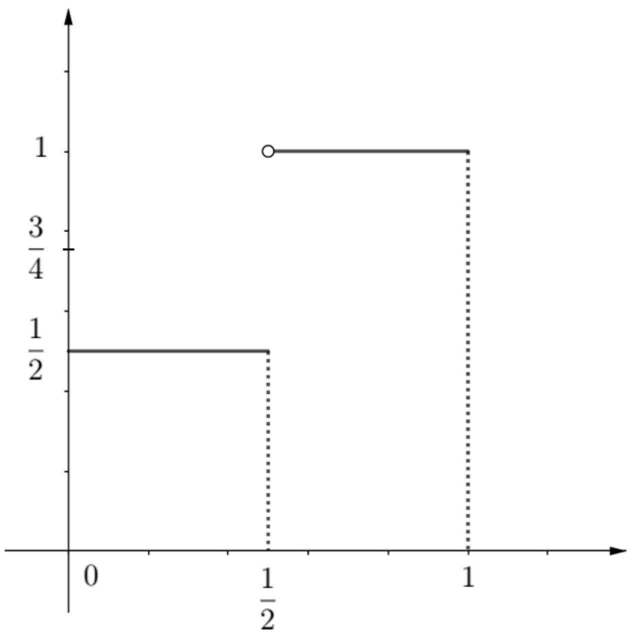
4 PRIMITIVA DE UMA FUNÇÃO CONTÍNUA

Parte deste capítulo é baseada no Apêndice do Capítulo II de [1].

Comecemos com um exemplo sugestivo.

Exemplo 4.1. *Seja* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$*, dada por* $f(x) = \dfrac{1}{2}$ *se* $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ *e* $f(x) = 1$ *se* $x \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right]$*, que não é contínua em* $[0,1]$.

Figura 12 - Exemplo 5.1



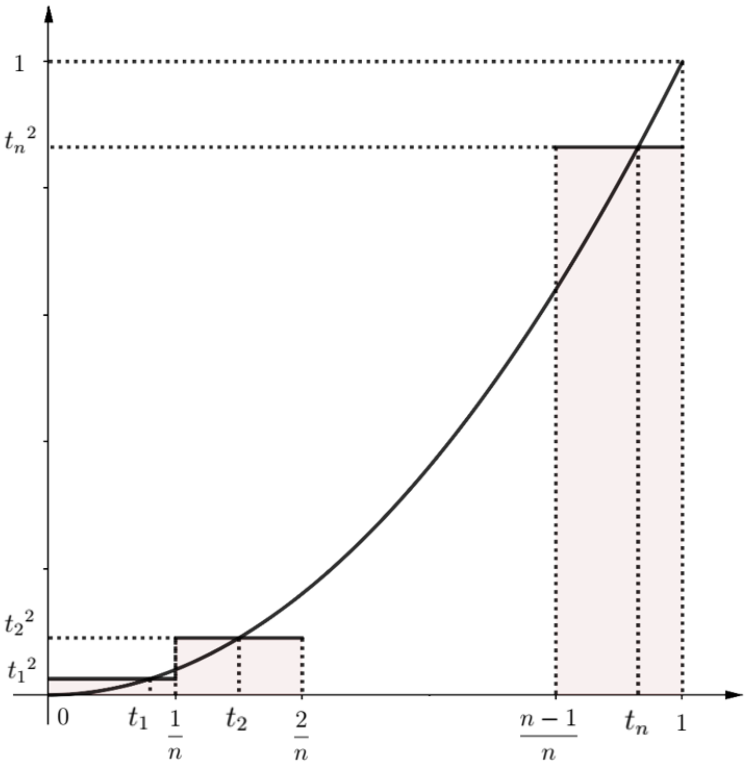
Suponhamos que exista uma função derivável $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $F' = f$; em particular, $F'(0) = f(0) = \dfrac{1}{2}$ e $F'(1) = f(1) = 1$. Pelo Teorema de Darboux (Apêndice A), existe $t \in (0,1)$ tal que $F'(t) = \dfrac{3}{4}$, isto é, tal que $f(t) = \dfrac{3}{4}$, o que não ocorre.

Mostraremos, neste capítulo, que para toda função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R} (a < b)$ existe uma função derivável $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $F' = f$, ou seja, f admite primitiva em $[a,b]$. Para atingir este objetivo, necessitaremos de alguns preliminares. Mas antes, vejamos o seguinte

Exemplo 4.2. *Consideremos a função contínua* $f(x) = x^2$ *para* $x \in [0,1]$*. Para cada inteiro* $n \geq 1$*, dividamos o intervalo* $[0,1]$ *nos* n *subintervalos* $\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \ldots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$ *de comprimento* $\frac{1}{n}$*, tomemos* $t_1 \in \left[0, \frac{1}{n}\right], t_2 \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \ldots, t_n \in \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$ *arbitrariamente e ponhamos*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(t_i)}{n} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} {t_i}^2\right).$$

Figura 13 - Exemplo 5.2



Notemos que S_n depende da escolha de $t_1, t_2, \ldots, t_n$ e é a soma das áreas dos retângulos indicados na Figura 13. Notemos ainda que, fazendo $t_i' = \frac{i-1}{n}$ e $t_i'' = \frac{i}{n}(i = 1, 2, \ldots, n)$, temos

$$\frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} f(t_i')\right) \leq S_n \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} f(t_i'')\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right),$$

ou seja,

$$\frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\right) \leq S_n \leq \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right).$$

Por outro lado, segue do Princípio de Indução Finita que

$$1^2 + 2^2 + \; ... \; + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

para todo inteiro $n \geq 1$. Por consequência,

$$\frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6n^3} \leq S_n \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

Portanto, para todo $n \geq 1$, temos

$$\frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

Finalmente , como

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2,$$

conclui-se que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}.$$

Geometricamente, $\dfrac{1}{3}$ representa a área compreendida entre o gráfico da função e o eixo horizontal.

Observemos que a sequência $(S_n)_{n\geq 1}$ pode não convergir.

Exemplo 4.3. *Com efeito, se considerarmos a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 0$ se $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ e $f(x) = 1$ se $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]$ (que não é contínua) e tomarmos todos os t_i racionais ou todos os t_i irracionais, teremos*

$$S_n = 0 \textit{ para todo } n \geq 1 \textit{ ou } S_n = 1 \textit{ para todo } n \geq 1.$$

Proposição 4.1. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$. Para cada inteiro $n \geq 1$, definamos*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\left(a + \frac{b-a}{n} i - \left(a + \frac{b-a}{n}(i-1)\right)\right) = \frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\right),$$

onde t_i é um elemento arbitrário de $\left[a + \dfrac{b-a}{n}(i-1), a + \dfrac{b-a}{n} i\right]$ para $i = 1, \; ... \; , n$. Então a sequência $(S_n)_{n\geq 1}$ converge.

Demonstração. Para cada $i = 1, \dots, n$ ponhamos

$$f(\lambda_i) = \inf\left\{f(x); x \in \left[a + \frac{b-a}{n}(i-1), a + \frac{b-a}{n}i\right]\right\}$$

e

$$f(\mu_i) = \sup\left\{f(x); x \in \left[a + \frac{b-a}{n}(i-1), a + \frac{b-a}{n}i\right]\right\},$$

onde

$\lambda_i, \mu_i \in \left[a + \frac{b-a}{n}(i-1), a + \frac{b-a}{n}i\right]$ (lembre o Teorema 4.2), $\underline{S}_n = \frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\right)$ e $\overline{S}_n = \frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} f(\mu_i)\right)$. Como

$$\underline{S}_n \leq S_n \leq \overline{S}_n$$

para todo inteiro $n \geq 1$, basta mostrar que as sequências $(\underline{S}_n)_{n\geq 1}$ e $\left(\overline{S}_n\right)_{n\geq 1}$ convergem, e para o mesmo limite.

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como, pelo Teorema 4.3, f é uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ sempre que $x, y \in [a, b]$ e $|x - y| < \delta$. Pela Propriedade Arquimediana, existe um inteiro $n_0 > 1$ tal que $\frac{b-a}{n_0} < \delta$. Consequentemente, para $n \geq n_0$ qualquer, tem-se $|\lambda_i - \mu_i| \leq \frac{b-a}{n} \leq \frac{b-a}{n_0} < \delta$; logo, $f(\mu_i) - f(\lambda_i) < \frac{\varepsilon}{b-a}$ $(i = 1, \dots, n)$. Daí resulta que

$$\overline{S}_n - \underline{S}_n = \frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} (f(\mu_i) - f(\lambda_i))\right) < \varepsilon,$$

e acabamos de mostrar que a sequência $\left(\overline{S}_n - \underline{S}_n\right)_{n\geq 1}$ converge para 0. Notemos, ainda, que se mostrarmos que $\left(\overline{S}_n\right)_{n\geq 1}$ converge, resultará que $(\underline{S}_n)_{n\geq 1}$ converge, e para o mesmo limite, pois $\underline{S}_n = \left(\underline{S}_n - \overline{S}_n\right) + \overline{S}_n$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Provemos, então, que $\left(\overline{S}_n\right)_{n\geq 1}$ converge. Com este propósito, para quaisquer inteiros $m, n \geq 1$ definamos, exatamente como fizemos acima, $T_{m,n}$ como a soma de todas as parcelas da forma $f(\theta_j)(\xi_j - \xi_{j-1})$ $(j = 1, \dots, l)$, onde $\xi_0 = a < \xi_1 < \dots < \xi_{l-1} < \xi_l = b$ são os números $a, a + \frac{b-a}{m}, \dots, a + \frac{b-a}{m}(m-1), b$ ou os números $a + \frac{b-a}{n}, \dots, a + \frac{b-a}{n}(n-1)$, ordenados de forma crescente (por exemplo, se $a = 0, b = 1, m = 2$ e $n = 3$, teríamos $\xi_0 = 0, \xi_1 = \frac{1}{3}, \xi_2 = \frac{1}{2}, \xi_3 = \frac{2}{3}$ e $\xi_4 = 1$) e

$$f(\theta_j) = \sup\{f(x); x \in [\xi_{j-1}, \xi_j]\} \ (j = 1, \dots, l).$$

Notemos que qualquer subintervalo $\left[a+\frac{b-a}{n}(i-1), a+\frac{b-a}{n}i\right]$ $(i=1,\ \dots, n)$ é expresso como união de certos subintervalos $[\xi_{j-1}, \xi_j]$ determinados pelos $\xi_j s$ que acabamos de introduzir; e, em cada um desses subintervalos $[\xi_{j-1}, \xi_j]$, temos

$$f(\lambda_i) \leq f(\theta_j) \leq f(\mu_i).$$

Consequentemente, como

$$T_{m,n} = \sum_{j=1}^{l} f(\theta_j)\,(\xi_j - \xi_{j-1}),$$

teremos

$$\underline{S}_n \leq T_{m,n} \leq \overline{S}_n.$$

Pelo mesmo raciocínio, também teremos

$$\underline{S}_m \leq T_{m,n} \leq \overline{S}_m.$$

Portanto, para $m, n \geq n_0$,

$$\left|\overline{S}_m - T_{m,n}\right| \leq \overline{S}_m - \underline{S}_m < \varepsilon \text{ e } \left|\overline{S}_n - T_{m,n}\right| \leq \overline{S}_n - \underline{S}_n < \varepsilon,$$

o que implica

$$\left|\overline{S}_m - \overline{S}_n\right| \leq \left|\overline{S}_m - T_{m,n}\right| + \left|T_{m,n} - \overline{S}_n\right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

e mostra que $\left(\overline{S}_n\right)_{n\geq 1}$ é uma sequência de Cauchy. Portanto, pelo Corolário 3.1, $\left(\overline{S}_n\right)_{n\geq 1}$ converge, concluindo assim a demonstração.

O número real $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ é representado por $\int_a^b f(x)dx$; $\int_a^b f(x)dx$ é dita a *integral* de f em $[a,b]$. Por exemplo, $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ (lembrar o Exemplo 5.2).

Observação 4.1. *Não é difícil justificar as seguintes afirmações:*

(i) Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas em $[a,b]$ e $f(t) \leq g(t)$ para todo $t \in [a,b]$, então $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Em particular,

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \textstyle\int_a^b |f(x)|dx,$$

já que $|f|$ é contínua e $-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$ para todo $t \in [a,b]$.

(ii) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$ e $a < c < b$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Proposição 4.2. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$, com $a < b$. Para cada $t \in [a,b]$, definamos*

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx \text{ (por convenção, } \int_a^a f(x)dx = 0).$$

Então F é derivável em $[a,b]$ e $F'(t) = f(t)$ para todo $t \in [a,b]$.

Demonstração. Provaremos que F é derivável em um elemento arbitrário $t_0 \in (a,b)$. Analogamente, prova-se que F é derivável à direita em a e $F'_+(a) = f(a)$ e que F é derivável à esquerda em b e $F'_-(b) = f(b)$. Vamos mostrar que F é derivável à direita em t_0 e

$$F'_+(t_0) = \lim_{t \to t_0^+} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = f(t_0).$$

Com efeito, para $t_0 < t \leq b$ arbitrário, tem-se

$$\left| \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} - f(t_0) \right| = \left| \frac{\int_{t_0}^t f(x)dx}{t - t_0} - f(t_0) \right| =$$

$$\frac{\left| \int_{t_0}^t (f(x) - f(t_0))\, dx \right|}{t - t_0} \leq \frac{\int_{t_0}^t |f(x) - f(t_0)|\, dx}{t - t_0}.$$

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Pela continuidade de f em t_0, existe $\delta > 0$ tal que $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset [a,b]$ e $|f(x) - f(t_0)| \leq \varepsilon$ se $x \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Por consequência, para todo $t \in (t_0, t_0 + \delta)$, tem-se

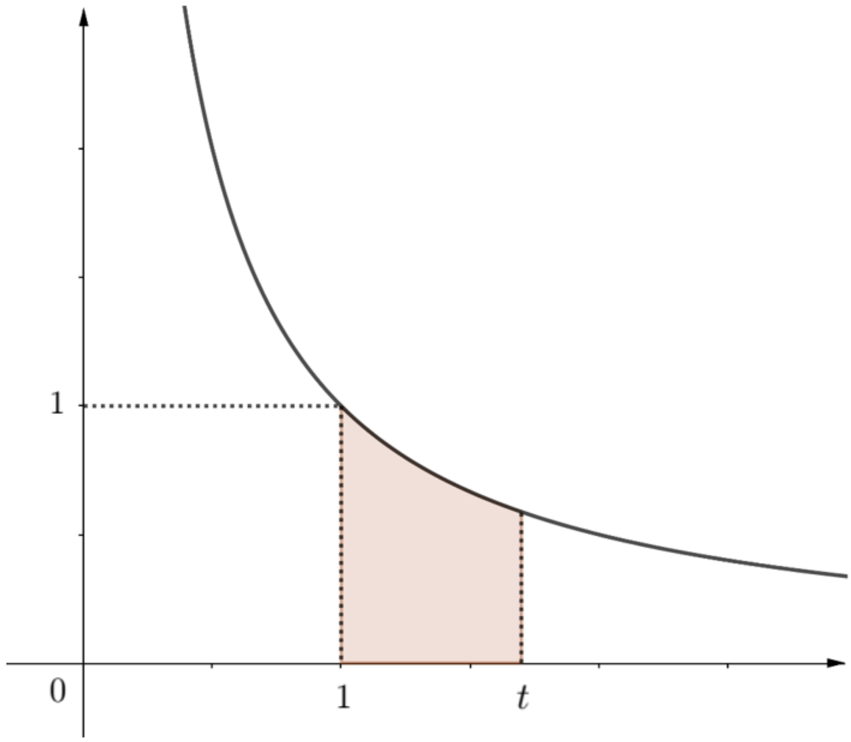
$$\left| \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} - f(t_0) \right| \leq \frac{\int_{t_0}^t |f(x) - f(t_0)|\, dx}{t - t_0} \leq \frac{\varepsilon(t - t_0)}{t - t_0} = \varepsilon.$$

Portanto, F é derivável à direita em t_0 e $F'_+(t_0) = f(t_0)$. Da mesma forma, mostra-se que F é derivável à esquerda em t_0 e $F'_-(t_0) = f(t_0)$, o que conclui a demonstração.

Acabamos de provar que toda função contínua de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ admite uma primitiva em $[a,b]$.

Exemplo 4.4. *Definamos, para todo* $t > 0$, $F(t) = \int_1^t \frac{dx}{x}$ *(por convenção,* $F(t) = -\int_t^1 \frac{dx}{x}$*, para* $0 < t < 1$*).*

Figura 14 - Exemplo 5.4



Pela Proposição 5.2, F é derivável em $(0, \infty)$ e $F'(t) = \frac{1}{t}$ para todo $t \in (0, +\infty)$; F nada mais é do que a função logarítmica ($\log t$ é a área da região sombreada na Figura 14).

Corolário 4.1. *(Teorema Fundamental do Cálculo). Sejam* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a, b]$ $(a < b)$ *e* $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função derivável em* $[a, b]$ *tal que* $G'(t) = f(t)$ *para todo* $t \in [a, b]$*. Então*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Demonstração. Ponhamos $H(t) = G(t) - F(t)$ para $t \in [a, b]$, sendo F como na Proposição 5.2; H é um função derivável em $[a, b]$ tal que $H'(t) = G'(t) - F'(t) = f(t) - f(t) = 0$ para todo $t \in [a, b]$. Portanto, pelo Teorema do Valor Médio, existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $H(t) = G(t) - F(t) = d$ para todo $t \in [a, b]$. Fazendo $t = a$, temos $H(a) = G(a) - F(a) = G(a) = d$. Finalmente, fazendo $t = b$, vem $H(b) = G(b) - F(b) = G(a)$, isto é,

$$G(b) - G(a) = F(b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Observação 4.2. *A propósito, vimos na demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo que toda primitica G de f difere de F por uma constante.*

Exemplo 4.5. *Para $n = 1, 2, \ldots$ e $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$,*

$$\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Com efeito, basta aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo à função $G(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

CONCLUSÃO

Neste trabalho foram estabelecidos, de maneira completa e rigorosa, três resultados fundamentais sobre funções reais contínuas definidas em intervalos fechados e limitados do conjunto dos números reais, a saber, o Teorema do Valor Intermediário, o Teorema de Weierstrass e o fato de que toda função contínua em um intervalo fechado e limitado é uniformemente contínua. Provou-se, ainda, que toda função contínua em um intervalo fechado e limitado admite primitiva. Com o propósito de tornar o texto acessível a um grande número de leitores, fez-se uma apresentação axiomática do sistema dos números reais e provou-se o Teorema de Bolzano - Weierstrass, o qual desempenhou um papel central no nosso trabalho.

REFERÊNCIAS

R. Courant. *Differential and Integral Calculus*. 2. ed. London: Blackie & Son Limited, 1937.

R. Dedekind. *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Braunschweig: Vieweg, 1872.

H.L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo*. 4. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 2000.

S. Lang. *Analysis I*. Boston: Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. 3. ed. New York: McGraw-Hill International Company, 1976.

M. Spivak. *Calculus*. 3. ed. New York: W.A. Benjamin, 1967.

APÊNDICE A – O Teorema de Darboux

O resultado a seguir é uma versão do Teorema do Valor Intermediário para a derivada.

Teorema A.1. *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $[a, b]$ e $f'(a) < c < f'(b)$. Então existe $\theta \in (a, b)$ tal que $f'(\theta) = c$.*

Demonstração. [5, p. 108]. Ponhamos $g(x) = f(x) - cx$ para $x \in [a, b]$. Então g é derivável em $[a, b]$ e $g'(x) = f'(x) - c$ para todo $x \in [a, b]$. Como $g'(a) = f'(a) - c < 0$, existe $x_1 \in (a, b)$ tal que $g(x_1) < g(a)$; e, como $g'(b) = f'(b) - c > 0$, existe $x_2 \in (a, b)$ tal que $g(x_2) < g(b)$. Seja $\theta \in [a, b]$ tal que

$$g(\theta) = \inf\{g(x); x \in [a, b]\} \text{ (Teorema 4.2).}$$

Como $g(\theta) \leq g(x_1) < g(a)$ e $g(\theta) \leq g(x_2) < g(b), \theta \in (a, b)$, e daí resulta que $g'(\theta) = 0$ [5, p. 107], ou seja, $f'(\theta) = c$.