Universidade Federal do Rio de Janeiro

A HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS:

"das quantidades sofisticadas de Cardano

às linhas orientadas de Argand"

Ulício Pinto Júnior

2009

A HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS:

“das quantidades sofisticadas de Cardano

às linhas orientadas de Argand”

Ulício Pinto Júnior

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Tatiana Roque

Aprovada por:

____

Tatiana Roque, IM-UFRJ

____

Gérard Emile Grimberg, IM-UFRJ

____

João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho, PUC-RJ

____

Carlos Eduardo Mathias Motta, UFRRJ

Rio de Janeiro
Março de 2009

PINTO JUNIOR, Ulício
A História dos números complexos: das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand / Ulício Pinto Júnior. -- Rio de Janeiro: UFRJ / Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2009.
94 f. : il. ; 31 cm.
Orientadora: Tatiana Roque

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2009.

1. Matemática. 2. Números Complexos. I. Roque, Tatiana. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. III.Título.

Agradecimentos

À minha orientadora Tatiana Roque que, com devida maestria, me resgatou e guiou em momentos importantes de minha dissertação.

Aos professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática que idealizaram e viabilizaram um programa de mestrado que atendesse às nossas expectativas.

Ao professor e grande amigo Victor Giraldo que, além de um grande educador, despertou em mim o desejo de ampliar minha formação acadêmica.

À CAPES que me proporcionou condições de realizar este trabalho, concedendo-me bolsa de estudos.

Às equipes do Colégio São Vicente de Paulo e Escola SESC de Ensino Médio que me incentivaram durante todo o processo de pesquisa.

Aos grandes amigos da primeira e inesquecível turma de mestrado deste Programa, particularmente a Malu, Bruna e Rosa que desde os estudos em grupo às grandes histórias vivenciadas, conquistaram um lugar em meu coração.

Ao meu eterno “chefe” Artur Motta e aos amigos Marco, Nara, Nanda, Bete, Clarissa, Polly, Inah e Natacha que demonstraram que vizinhança, mesmo que momentânea, pode ser sinônimo de uma grande família.

Aos meus pais, Ulício e Jaynete, que com todo amor e carinho sempre acreditaram que a educação é o maior investimento que o homem pode possuir.

Aos meus familiares pelo apoio e amor dedicados durante a pesquisa e pela compreensão de minha ausência física em diversos momentos.

A Deus, por ter me proporcionado saúde para realizar mais um de meus sonhos.

Resumo da Dissertação de Mestrado entregue ao Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática (M.Sc.).

A HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS:

"das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand"

Ulício Pinto Júnior

Março de 2009

Orientador: Tatiana Roque

Programa: Pós-Graduação em Ensino de Matemática

O objetivo deste trabalho é apresentar o desenvolvimento histórico dos números complexos desde o surgimento das quantidades "sofisticadas", nas obras de Cardano e Bombelli, no contexto dos problemas de resolução das equações cúbicas através de radicais, até as tentativas de representação geométrica destas quantidades, nos trabalhos de matemáticos como Wallis, Buée, Wessel e principalmente Argand. Observaremos como importantes resultados no desenvolvimento da matemática durante os três séculos que nossa análise percorre forneceram maneiras originais de se conceber esses números antes que ganhassem a estrutura que conhecemos hoje.

Abstract of Dissertation presented to Institute of Mathematics of the Federal University of Rio de Janeiro (IM-UFRJ) as part of the necessary requirements for getting the Master's Degree in the Teaching of Mathematics (M.Sc.)

THE HISTORY OF COMPLEX NUMBERS:

"from Cardan's sophisticated quantities to Argand's oriented lines"

Ulício Pinto Júnior

Março de 2009

Advisor: Tatiana Roque

Department: Pós-Graduação em Ensino de Matemática

The aim of this dissertation is to present the historical development of the complex numbers since the appearance of the sophisticated quantities, in the works of Cardano and Bombelli, in the context of solving problems of cubic equations through radicals, until attempts at representing these equations geometrically, in the works of least known mathematicians such as Wallis, Buee, Wessel and mainly Argand. In this research, we will observe how important results in the development of mathematics during these three centuries of analysis have provided original means to conceive these numbers before earning the structure known today.

Sumário

Introdução

“Números complexos” é um assunto abordado, freqüentemente, no final do Ensino Médio, objeto de muitas indagações a respeito da melhor maneira de apresentá-los em sala de aula, bem como de suas aplicações e conexões com outros tópicos da matemática. É notório, tanto nos livros didáticos, como na prática em sala de aula, que este conteúdo é usualmente exposto em uma ordem que não corresponde à história do desenvolvimento deste conceito, pois os números complexos são introduzidos após os números naturais, inteiros, racionais e reais. Isto dá a impressão de que a história dos conjuntos numéricos é linear e de que a ampliação destes conjuntos foi motivada somente pela necessidade de se resolver um número cada vez maior de equações. Isto não corresponde à ordem histórica, muito mais intrincada e complexa.

É freqüente percebermos, entre os professores de matemática, uma resistência em abordar este tema. Embora conheçam a teoria, que envolve definições, operações e as diferentes formas de representar estes números, eles parecem tímidos quanto à legitimidade de se ensinar este tópico, o que vêm provocando a sua eliminação prática de muitos currículos escolares. Muitos justificam este movimento por uma falta de aplicação concreta dos números complexos e pouco de discute sobre a importância destes entes matemáticos no desenvolvimento da própria ciência.

Não nos deteremos sobre o questionamento da permanência deste conteúdo no currículo do Ensino Médio, embora acreditemos que a sua compreensão é fundamental para o entendimento do que é a matemática atual e de como ela foi estruturada ao decorrer do tempo.

Acreditamos que um dos grandes fatores que contribuem para que a matemática não tenha uma “concretude” vem da forma como aprendemos e ensinamos a matemática. Por esta razão, diante de um objeto matemático, é muito importante conhecermos os “problemas” que envolveram o seu surgimento e o seu desenvolvimento.

Os termos utilizados para designar estas quantidades, atualmente imaginárias e complexas, fazem pensar freqüentemente que estes objetos foram criados de maneira aleatória, apenas com a finalidade de proporcionar soluções “irreais” para equações quadráticas que não possuíam solução durante quase todo o período de escolaridade do aluno. Nós mesmos, professores, não sabemos como estes números surgiram, nem qual foi o seu papel no desenvolvimento da matemática. Estas são algumas das questões que alimentaram nosso interesse para o desenvolvimento desta pesquisa. Responder a estas questões significa muito mais do que deixar de perceber a matemática como uma ciência pronta ou acabada, implica refletir sobre nosso papel como educadores, proporcionando uma visão crítica de nossas práticas pedagógicas.

Como trabalhamos sobre objetos abstratos por excelência, procuramos na história da matemática as respostas a estas e outras questões envolvendo conceitos e objetos matemáticos. Estudar história da matemática não é apenas buscar as origens dos conhecimentos matemáticos que temos atualmente. Devemos ver a matemática de uma outra época a partir do ponto de vista do que ela representava para os matemáticos da época em questão e, para isso, temos que perceber os problemas que caracterizavam o modo de pensamento em um contexto cultural, social e filosófico,

A história da matemática tem adquirido, nos últimos anos, um status de forte aliada do ensino, fundando novas práticas e metodologias. É fato que ela se faz presente atualmente em cursos de graduação, de pós-graduação e na formação continuada de professores, porém é comum verificar que muitos professores de matemática, no exercício de sua profissão, não tiveram contato com essa disciplina em sua graduação. Além disso, vários livros didáticos, utilizados por eles, ainda buscam encontrar a melhor maneira de oferecer uma opção para o trabalho com conceitos matemáticos à luz do processo histórico no qual estão inseridos.

Buscaremos contribuir para estes esforços apresentando, neste trabalho, o desenvolvimento dos números complexos em determinado período da história, que vai desde o Renascimento, até o início do século XIX, antes que fosse estabelecida uma formalização rigorosa para estes números com conceitos matemáticos. Esta dissertação é dividida em três capítulos:

I) A resolução das equações cúbicas por meio de radicais na Europa renascentista, em particular nos trabalhos de Tartaglia (1500-1557), Cardano (1501-1576) e Bombelli (1526-1572). Procuramos mostrar aqui como a busca de uma solução para esta questão abre espaço para o surgimento de novos números que ainda não eram considerados legítimos.

II) O desenvolvimento da matemática durante os séculos XVII e XVIII, quando estes números foram designados como “imaginários” e os matemáticos passaram a operar com eles sem se preocupar com o seu estatuto próprio.

Independente de alguns equívocos, o uso destas novas quantidades foi fundamental para o surgimento de novos e importantes resultados.

III) Os trabalhos de matemáticos como Wallis, Wessel, Buée e Argand que, na busca de uma representação geométrica das quantidades imaginárias, lançaram as bases para que pudesse ser fundado um novo cálculo sobre estes objetos.

Apresentaremos, em anexo, a tradução de algumas páginas de *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* (1806), de Jean Robert Argand.

Sabemos que a axiomatização necessária para obtermos o que atualmente conhecemos como "conjunto dos números complexos" só será fornecida alguns anos mais tarde, a partir dos trabalhos de Gauss, Cauchy e Hamilton. No entanto, nosso objetivo foi trabalhar justamente sobre o período que antecede este movimento de formalização, para compreendermos porque ele foi necessário e como se esboçavam alguns de seus elementos. Acreditamos que, para isto, este recorte histórico, de aproximadamente três séculos, atende aos nossos objetivos iniciais.

Sempre que necessário, tentamos traduzir o pensamento dos matemáticos antigos de que tratamos aqui em linguagem simbólica atual, correspondente àquela citada na época em questão, para facilitar o entendimento. Os diversos termos utilizados em várias épocas para designar os números complexos não reais foram mantidos, logo perceberemos a presença das designações de "sofisticados", "impossíveis", "inexplicáveis" e "imaginários" e sua variação de acordo com o contexto histórico no qual estavam inseridos. É justamente esta mudança de nomenclatura que estrutura a divisão em capítulos, uma vez que, de nosso ponto de vista, ela traduz também a transformação da concepção epistemológica sobre estes números em cada época.

Capítulo I – As equações cúbicas e as quantidades “sofisticadas”[1]

Os números complexos são freqüentemente associados à resolução de equações quadráticas cujas soluções são expressas por raízes quadradas de números negativos. Evoca-se um contexto histórico para justificar a necessidade de se introduzir estes números na matemática, ainda que a sua história não seja detalhada.

Estudaremos, aqui, a história dos métodos de resolução das equações cúbicas, com ênfase nos trabalhos desenvolvidos por Cardano e Bombelli em meados do século XVI. Nosso objetivo neste capítulo é investigar que matemáticos trabalharam com raízes quadradas de números negativos, analisando os problemas que motivaram a utilização destes números e de que maneira os matemáticos lidaram com estes objetos, quando eles ainda não eram reconhecidos como números no sentido próprio.

As equações quadráticas que apareciam na matemática grega surgiam de investigações geométricas que utilizavam figuras como círculos e parábolas. No entanto, algumas soluções não podiam ser obtidas através destas construções, o que caracterizava a inexistência de solução das equações quadráticas correspondentes. Se investigarmos, por exemplo, o problema da existência de interseção entre uma reta e um círculo, a solução é um número que deve estar associado a uma representação geométrica, ou então não é possível encontrar tal solução.

Com o desenvolvimento das equações quadráticas entre os matemáticos árabes, as soluções não reais continuaram não sendo amplamente admitidas, uma vez que estes matemáticos herdaram dos gregos a necessidade de justificar geometricamente a legitimidade de seus métodos algébricos.

Mesmo quando as equações quadráticas já eram resolvidas por métodos de solução por radicais, sempre que a fórmula levava a resultados associados a números negativos ou a raízes

[1] Em nosso trabalho, optamos pelo emprego do termo “sofisticado”, em decorrência das traduções realizadas, embora nos pareça que o vocábulo sofístico fosse o mais apropriado. Neste momento, consideramos interessante aclarar que a tradução preserva em si a noção de algo que foi afetado por uma elaboração, passagem capaz de agregar, a essa noção primária, imagens que remetem a falsificado, adulterado e, curiosamente, requintado. A existência destas quantidades e a capacidade de operar com elas ainda estão associadas a um estado de “delírio” do pensamento matemático.

quadradas de números negativos, indicava-se a inexistência de soluções. Veremos adiante que foi o problema de resolver equações cúbicas que tornou incontornável admitir os números negativos e suas raízes como números legítimos na matemática. Isto ocorreu no Renascimento, sobretudo nas obras de que trataremos neste capítulo.

Na matemática grega já há registro de situações que envolvem soluções de equações cúbicas. Um exemplo disso é um problema clássico da antiguidade, o problema da duplicação do cubo, que consistia em encontrar duas médias proporcionais entre o comprimento da aresta de um cubo dado e o dobro da medida dessa aresta. Esta situação pode ser traduzida por:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

Outro trabalho com cúbicas pode ser encontrado em um problema da Aritmética de Diofanto que nos leva a uma formulação que, em linguagem atual, seria equivalente à equação $x^3 + x = 4x^2 + 4$. Sabemos que a solução 4 foi apresentada e é facilmente verificada, porém não temos informação a respeito de como esta solução foi encontrada.

Escritores árabes também contribuíram na solução de equações cúbicas especiais. No século XI, em seu famoso livro chamado *Demonstrações de problemas de al-jabr de al-muqabala*, o matemático árabe Omar Khayan, utilizando as cônicas de Apolônio, encontra soluções de diversos tipos de equações cúbicas, equivalentes em notação atual a equações do tipo $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$.

Mas a resolução das cúbicas utilizadas nos exemplos anteriores consistia em um problema geométrico. Mesmo na álgebra árabe, a independência dos métodos algébricos para resolução de equações se verificava mais freqüentemente nas equações quadráticas. Os problemas cúbicos de Omar Khayan eram plenamente geométricos e envolviam a interseção de cônicas. Apenas no Renascimento os problemas cúbicos ganharam uma conotação mais geral e tornou-se importante responder à pergunta: “Como encontrar um método geral para resolver equações do 3º.grau?”

Por centenas de anos, matemáticos procuravam por uma fórmula de resolução de cúbicas através de radicais, análoga à que se usava para a solução das equações quadráticas. Os créditos pela descoberta desta fórmula devem ser atribuídos à matemática italiana do século XVI.

Um dos mais completos e detalhados estudos matemáticos do século XV foi o “*Summa de arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita*” (1494) de Luca Pacioli. Pacioli terminou sua *Summa* assegurando que a solução de uma equação cúbica era tão impossível quanto a quadratura do círculo. Este fato distanciou alguns matemáticos do foco desse trabalho, ao mesmo tempo que incentivou outros matemáticos na busca da solução.

Scipione Del Ferro (1465-1526), contrariamente às previsões de Pacioli, resolveu o caso especial da cúbica $x^3 + px = q$, com p e q positivos. Sem publicar seus resultados, divulgou-os a um pequeno grupo de amigos no qual estava incluído seu pupilo Antônio Maria Fior.

Neste momento da história, Fior desafia publicamente Tartaglia, propondo a resolução de algumas equações cúbicas. Temos aí o relato de uma das mais famosas disputas matemáticas envolvendo a resolução de equações do terceiro grau. A participação de Tartaglia[2] na história da resolução das cúbicas tem seu primeiro passo em 1530, quando um amigo o enviou dois problemas:

1. Achar um número cujo cubo somado com o triplo de seu quadrado resulta em cinco. Em linguagem atual isto quer dizer: achar o valor de x que satisfaz à equação $x^3 + 3x^2 = 5$.

2. Encontrar três números, o segundo excedendo o primeiro em 2, e o terceiro excedendo o segundo também em 2, cujo produto é 1000. Ou seja, em linguagem atual, resolver a equação $x(x+2)(x+4) = 1000$, ou analogamente, $x^3 + 6x^2 + 8x = 1000$.

Em 1535, Tartaglia finalmente conseguiu encontrar a solução de qualquer equação do tipo $x^3 + px^2 = q$. Na disputa entre Fior e Tartaglia, o objetivo era a solução de vários problemas que um deveria propor ao outro. Fior apresentou a Tartaglia, 30 problemas que eram solucionados pelo caso particular da cúbica, cujo método de solução já era conhecido por ele.

Tartaglia é declarado o vencedor, já que, além de resolver todos os problemas propostos por Fior, não teve seus problemas propostos resolvidos pelo oponente, uma vez que estes implicavam na resolução de equações do tipo $x^3 + px^2 = q$.

Enquanto isso, Girolamo Cardano (1501-1576), um típico homem renascentista, obtinha reconhecimento em suas contribuições na Astrologia, Medicina, Filosofia e na

[2] Nicolo Tartaglia nasceu em Brescia no norte da Itália. Quando a França invadiu Brescia em 1512, muitos de seus habitantes se refugiaram na catedral local. Os soldados, entretanto, violaram o santuário e massacraram os habitantes locais. Nesta tragédia, o menino Nicolo foi deixado à morte depois de um severo golpe de espada que cortou sua mandíbula. Embora sua mãe tenha achado o rapaz e o tratado da melhor maneira possível, ele ficou com um impedimento na fala que fez com que ele ganhasse o cruel apelido de Tartaglia, “o gago”. Depois, ele passou a utilizar formalmente este apelido em seus trabalhos publicados. Embora os anos iniciais tenham sido de extrema miséria, Tartaglia adquiriu proficiência em matemática, lecionando posteriormente em Verona e Veneza.

Matemática. Durante anos, lecionou em várias universidades e teve seu nome associado a uma vida desregrada e marcada por episódios trágicos.

Reza a lenda que a notícia do duelo travado entre Fior e Tartaglia chega ao conhecimento de Cardano que implora a Tartaglia a tão desejada solução das cúbicas, prometendo publicá-la com a devida autoria em sua obra *Pratica Arithmeticae* (1539), obra que já continha racionalização de denominadores envolvendo raízes cúbicas.

Tartaglia recusou o convite, já que possuía intenção de publicar uma obra de sua autoria contendo seus estudos em álgebra. Mas Cardano obtém de Tartaglia a famosa fórmula e a publica em sua *Ars Magna* (1545), importante obra que atualmente poderia ser classificada como um texto seminal sobre equações algébricas. O *Ars Magna* teve influência das obras algébricas de alguns antecessores, como o *Líber Abaci* (1202) de Leonardo de Pisa e do *Summa* (1494) de Frei Luca Pacioli.

O trabalho de Cardano, em sua forma original, possui uma linguagem matemática específica do período em questão. Para os contemporâneos de Cardano, o *Ars Magna* simbolizou uma nova etapa no campo da matemática, exibindo publicamente pela primeira vez os princípios de resolução de equações cúbicas e biquadradas, fornecendo as regras da resolução por radicais de uma maneira similar à que era conhecida para as equações quadráticas.

Cardano estuda o que ele considerava serem propriedades de equações gerais, por exemplo: relações entre raízes e coeficientes, regras de localização de raízes e chega a abordar timidamente o assunto do número de soluções de uma equação. Mas um dos aspectos mais notáveis da obra de Cardano foi trazer à tona a questão da existência de quantidades "sofisticadas", como eram chamadas as raízes de números negativos, denominação provavelmente herdada de Bombelli, como discutiremos adiante.

Essas quantidades "sofisticadas" aparecem nas fórmulas e ele não as coloca de lado, nem as considera de pouca importância como se fazia antes dele. Ao contrário, Cardano construiu exemplos que expressam o propósito de lidar com estas quantidades.

Ao lidar com soluções de equações de grau maior que dois, fica evidente que Cardano não possuía uma sistematização algébrica que permitisse uma generalização dos métodos utilizados. Pouco tempo depois, alguns de seus sucessores criaram uma linguagem algébrica mais geral e eficiente, como é o caso de Viète (1591), que criou uma terminologia matemática quase tão geral quanto à que usamos hoje.

Cardano analisa casos particulares para a resolução de equações, cujas demonstrações são retóricas e baseadas em argumentos geométricos. Neste momento histórico, havia ainda uma grande influência dos métodos gregos, principalmente os encontrados nos *Elementos* de Euclides.

As soluções geométricas de Euclides para as equações quadráticas consistiam na construção de quadrados, logo seria bem apropriado pensar na solução das equações cúbicas através da construção de cubos. Cardano pareceu perceber uma conexão entre o fato do espaço que ele conhecia ser tri-dimensional e as dificuldades em resolver equações de grau 3.

O trabalho com resolução das equações cúbicas não é fácil, por isso, em muitos casos, Cardano utilizou exemplos numéricos, oriundos da aritmética mercantilista italiana, envolvendo distribuição de dinheiro entre soldados, viagens de negócios e parcerias.

Os poucos problemas mais abstratos que aparecem em sua obra são uma extensão do problema da duplicação do cubo (cap. XVII), problemas envolvendo triângulos (cap. XXXII) e um capítulo em que Cardano trata livremente com os números negativos (cap. XXXVII).

Cardano demonstrou que a fórmula que recebeu de Del Ferro e Tartaglia estava correta e encontrou um método para reduzir as formas mais complexas das cúbicas (aquelas que incluíam todos os quatro possíveis termos e as que possuíam três termos envolvendo o termo quadrático) a uma forma mais simples, de modo que a resolução de Del Ferro e Tartaglia pudesse atender a todos os casos de equações cúbicas.

Cardano também encontrou e demonstrou a existência de múltiplas raízes para vários tipos de cúbicas e biquadradas. Explorou e explicitou relações entre as raízes de um tipo de cúbica e outras de outro tipo diretamente relacionadas a ela. Estabeleceu uma relação entre as raízes da equação e os termos numéricos nela envolvidos. Atribuímos a ele também o fato de ter mostrado, em certos casos, que uma equação deveria ter duas raízes idênticas. O mais importante para nós é que o trabalho de Cardano desenvolveu a consciência da importância e da inevitabilidade de soluções negativas e complexas, tendo encontrado soluções envolvendo raízes quadradas de quantidades negativas.

Dentre as inovações que Cardano introduziu na *Ars Magna* estava um método para transformar uma equação cúbica em outra sem o termo de segundo grau. Utilizando uma linguagem atual, trata-se de reescrever a equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ em uma nova variável. Basta fazer a substituição $x = y - \frac{a}{3}$ para obter uma equação com coeficientes arbitrários onde o termo em y^2 fica ausente. Com esta nova variável, a equação adquire a forma $y^3 + py = q$, que também é conhecida como uma forma reduzida da equação cúbica.

Cardano propõe o seguinte método para efetuar essa redução, que interpretamos em nossa linguagem:

Seja $x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$ fazendo $x = y - \frac{a}{3}$ obtemos

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$

$$y^3 + \left(\frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{3} + b\right)y + \left(-\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} + c\right) = 0$$

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right) = 0$$

Sendo assim, se $p = b - \frac{a^2}{3}$ e $q = -\left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right)$ teremos:

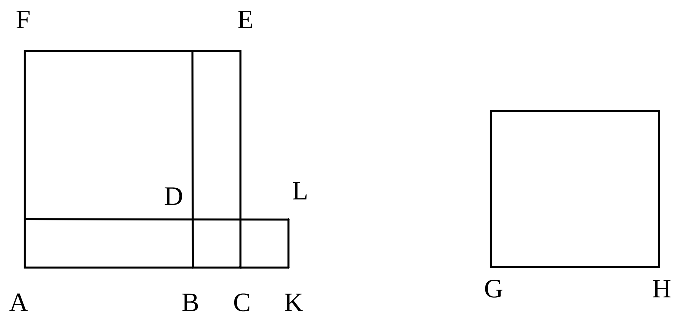
$y^3 + py = q$ com $p > 0$ e $q > 0.$

Vale ressaltar que, hoje, pensamos em equações cúbicas como sendo essencialmente todas de um mesmo tipo e podendo ser resolvidas por um mesmo método, mas naquela época, quando os coeficientes negativos ainda não eram utilizados, existiam 13 diferentes tipos de equações cúbicas, que dependiam da posição do termo quadrático, do linear e do termo numérico.

Cardano trata a solução de cada um dos treze tipos de equação cúbica em capítulos separados. O capítulo XI, por exemplo, é destinado à resolução da cúbica do tipo "cubo e coisas igual a número". A demonstração é feita tendo como base um exemplo particular de uma cúbica e, posteriormente, estabelece-se uma regra de resolução dessas equações cúbicas particulares.

Exibiremos o método de resolução fornecido por Cardano, método este que não utilizava a linguagem algébrica atualmente utilizada e que possuía uma fundamentação geométrica. Isto faz com que a demonstração feita por Cardano não seja de fácil entendimento. Por este motivo, acrescentaremos ao final de algumas etapas da demonstração uma tradução para a linguagem simbólica que usamos hoje, a fim de proporcionar uma melhor compreensão do raciocínio de Cardano.

No capítulo XI da *Ars Magna* Cardano estuda a resolução de um caso específico de equação cúbica representada por *cub p; 6 reb æqlis 20*, atualmente expressa por $x^3 + 6x = 20$. Consideremos que o cubo de GH e seis vezes o lado GH seja igual a 20. Sejam dois cubos AE e CL cuja diferença deve ser 20.



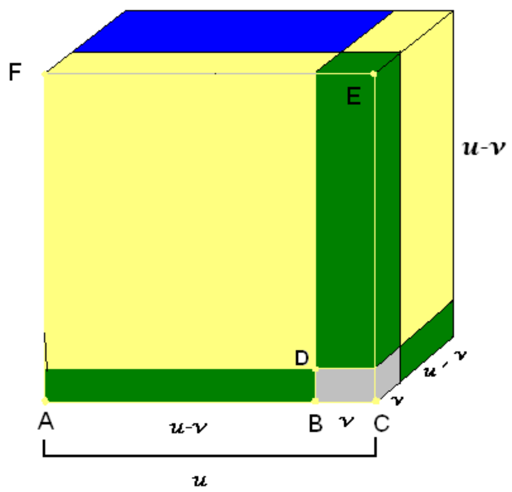
Logo, o produto do lado AC pelo lado CK deve ser 2, ou seja, a terça parte do número de "coisas". Fazendo BC igual a CK, teremos que AB é igual a GH, ou seja, o valor da "coisa".

Neste momento, podemos associar às grandezas AC e CK as variáveis u e v, tais que AC = u e CK = v, de modo que $u.v$ = 2 o que equivale a $\frac{1}{3}$ do coeficiente de x na equação, sendo a solução desejada AB = GH = $u-v$.

De um resultado apresentado no capítulo anterior, entendemos DC como o cubo de BC, DF como o cubo de AB, DA como três vezes CB vezes o quadrado de AB e DE como três vezes AB vezes o quadrado de BC.

Nesta etapa, Cardano utiliza uma notação própria para alguns sólidos cujos volumes serão utilizados durante a demonstração. Em linguagem atual, temos que:

DC = v^3, DF = $(u-v)^3 = x^3$, DA = $3(u-v)^2 v$ e DE = $3(u-v)\,v^2$ e podemos observar a igualdade geométrica através da representação abaixo:



Já que o produto de AC por CK resulta em 2, o triplo de AC vezes CK resulta em 6 que é o número de “coisas”. Como AB é igual a GH (coisa), temos que AB vezes o triplo de AC vezes CK resulta em “6 coisas”. Sendo CK igual a BC, temos que três vezes o produto de AB, BC e AC é 6 vezes AB. Pela hipótese, temos que a diferença entre o cubo de AC e o cubo de CK é 20, que é a diferença entre o cubo de AC e o cubo de BC.

Em outros termos, já que $u.v$= 2, temos que 3. $u.v$= 6, que é o coeficiente de x na equação dada. E o produto de AB por 3. $u.v$= 6x. De hipótese temos que $u^3 - v^3 = 20$

De resultado anterior, temos então que a soma dos sólidos DA, DE e DF é 20, o que nos remete à equação $(u-v)^3 + 3.(u-v)^2 v + 3.(u-v)v^2 = 20$.

Assumindo BC como negativo, teremos então que o cubo de AB é igual ao cubo de AC mais três vezes o produto de AC pelo quadrado de BC menos o cubo de BC menos três vezes o produto de BC pelo quadrado de AC.

Neste momento, notamos que o fato de Cardano assumir BC negativo está relacionado à idéia de “retirada” de volume, podendo ser expressa através da equação algébrica $(u-v)^3 = u^3 + 3uv^2 - v^3 - 3vu^2$.

Por sua vez, a diferença entre o triplo do produto de BC pelo quadrado de AC e o triplo do produto de AC pelo quadrado de BC é o triplo do produto de AB, BC e AC, o que vale seis vezes AB, como foi mostrado.

Esta relação, em termos algébricos, pode ser reescrita da forma:

$3vu^2 - 3uv^2 = 3(u-v)uv$, resultando em 6.$(u-v)$.

Adicionando 6 vezes AB ao resultado do produto do triplo de AC pelo quadrado de BC teremos o produto do triplo de BC pelo quadrado de AC, ou seja, $6(u-v) + 3uv^2 = 3u^2 v$.

Tendo assumido BC como negativo, fica claro que o triplo do produto de BC pelo quadrado de AC ($3vu^2$) também é negativo. Logo, o triplo do produto de CB pelo quadrado de AC mais o triplo do produto de AC pelo quadrado de CB mais 6 vezes AB resulta em nada, o que pode ser compreendido pela equação $-3vu^2 + 3uv^2 + 6(u-v) = 0$.

A diferença entre os cubos AC e BC é o total do cubo de AC, e o triplo do produto de AC pelo quadrado de CB, e o triplo do produto de CB pelo quadrado de AC (negativo), e o cubo de BC (negativo), e 6 vezes AB, o que por sua vez é igual a 20.

Cardano propôs, portanto, acrescentar, ao volume resultante da diferença dos cubos AC e BC, uma outra operação envolvendo volumes que resultam em nada, o que não altera o valor dessa diferença, que era de 20. Essa operação pode ser observada na equação:

$$u^3 - v^3 = u^3 + 3uv^2 - 3vu^2 - v^3 + 6(u - v) = 20$$

Sendo assim, utilizando um resultado anterior, do sexto capítulo, considerando BC negativo, o cubo de AB será igual ao cubo de AC mais o triplo do produto de AC pelo quadrado de BC menos o cubo de BC e menos o triplo do produto de BC pelo quadrado de AC, representado por $(u - v)^3 = u^3 + 3uv^2 - v^3 - 3vu^2$.

Podemos agora concluir que o cubo de AB mais 6 vezes AB será igual a 20 e o cubo de GH mais 6 vezes GH também será igual a 20, já que

$$(u - v)^3 + 6(u - v) = u^3 + 3uv^2 - v^3 - 3vu^2 + 6(u - v) = 20$$

ou

$AB^3 + 6AB = 20$, ou $GH^3 + 6GH = 20$

e, pelo que foi dito no volume 11 dos *Elementos* de Euclides, GH será igual a AB, portanto GH é a diferença entre AC e CB.

As grandezas AC e CB, ou AC e CK, são números ou linhas contendo uma área igual à terça parte do número de "coisas" cujos cubos têm como diferença o termo numérico da equação. Logo, teremos a seguinte regra:

"Eleve ao cubo a terça parte do número de coisas ao qual será somado o quadrado da metade do termo numérico da equação e extraia a raiz quadrada deste total que será usado, em dois momentos. Em um deles, adicione a metade do termo numérico da equação e no outro subtraia o mesmo número. Teremos então, um *binomium* e o seu *apotome* respectivamente. Subtraia a raiz cúbica do *apotome* da raiz cúbica do *binomium* e o resultado final é o valor da coisa.

No caso particular da equação "cubo e seis coisas igual a 20", teremos: eleve 2 ao cubo, que é a terça parte de 6, o que resulta em 8; Multiplique 10, metade do termo numérico, por ele mesmo resultando 100; some 100 e 8, fazendo 108. Extraia a raiz quadrada, que é $\sqrt{108}$, e a utilize em um primeiro momento somando 10, e em um segundo momento subtraindo a mesma quantidade, e teremos o *binomium* $\sqrt{108}+10$ e o *apotome* $\sqrt{108}-10$. Extraia a raiz cúbica desses valores e subtraia o valor do *apotome* do valor do *binomium*, e teremos o valor da coisa: $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10} - \sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$.

Utilizando termos algébricos atuais, poderíamos reescrever como segue o desenvolvimento e a regra de Cardano para a resolução de uma equação cúbica reduzida do tipo $x^3 + px = q$ com $p > 0$ e $q > 0$:

Consideremos :

$(a-b)^3 + 3ab(a-b) = a^3 - b^3$

Se I) $p = 3ab$ e II) $q = a^3 - b^3$

temos $(a-b)^3 + p(a-b) = q$ ou seja $x = a - b.$

De I e II obtemos que:

III) $ab = \dfrac{p}{3}$ e IV) $a^3 - b^3 = q$.

Elevando ao cubo os dois membros da equação III e posteriormente multiplicando por 4 e, elevando ao quadrado os dois membros da equação IV, obtemos:

$$4a^3b^3 = \frac{4p^3}{27} \qquad \text{e} \qquad a^6 - 2a^3b^3 + b^6 = q^2$$

Adicionando as equações acima teremos:

$$a^6 + 2a^3b^3 + b^6 = q^2 + \frac{4p^3}{27}$$

$$\left(a^3 + b^3\right)^2 = q^2 + \frac{4p^3}{27}$$

$$a^3 + b^3 = \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}$$

Logo:

$$a^3 - b^3 = q \quad e \quad a^3 + b^3 = \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} \quad \Rightarrow$$

$$2a^3 = q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} \quad \Rightarrow$$

$$a^3 = \frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} \quad \Rightarrow$$

$$a^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \Rightarrow$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad \text{e} \quad b = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Como a solução desejada é $x = a - b$, obtemos temos que

$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ é a solução da equação cúbica.

Nesta demonstração, Cardano utilizou resultados já demonstrados em capítulos anteriores de seu livro, atualmente conhecidos como o cubo da soma e o cubo da diferença. A fórmula que atualmente chamamos de "cubo da soma de dois termos" foi enunciada por Cardano da seguinte maneira: "*Se uma quantidade é divida em duas partes, o cubo do inteiro é igual ao cubo das duas partes mais o triplo do produto de cada uma pelo quadrado da outra*".(*Ars Magna, cap*. VI, p.52)

A demonstração deste resultado é realizada através de uma extensão da proposição II.4 de Euclides que tratava geometricamente do quadrado da soma de dois termos. No mesmo capítulo, ele demonstra alguns corolários que serão de extrema importância para o método apresentado por Cardano para a resolução das equações cúbicas.

É importante notar que, nas demonstrações apresentadas por Cardano para cada caso particular das cúbicas, há uma preocupação em proporcionar uma fundamentação geométrica, embora ele já usasse ferramentas algébricas importantes.

Observamos na demonstração do método de solução da cúbica *cub p; 6 reb æqlis 20*, atualmente expressa por $x^3 + 6x = 20$, que Cardano considera, no início da demonstração, dois cubos cuja diferença vale 20 e cujo produto de suas arestas vale 2. Isto indica que ele tinha ciência de que estas considerações seriam fundamentais para a obtenção do resultado final.

Nos treze capítulos que Cardano dedica à solução das cúbicas particulares, a demonstração é sempre seguida de uma regra prática de resolução. Em sua obra, não fica evidente como estas regras são estabelecidas a partir da demonstração realizada, mas devemos ressaltar que dadas as considerações iniciais de sua demonstração, a cúbica apresentada no capítulo pode ser resolvida, a menos de uma mudança de variáveis, pelos métodos de resolução por radicais de equações quadráticas, bastante conhecidos na época.

Com esse trabalho, Cardano reconhece que uma equação cúbica deveria possuir três raízes, embora não exibisse por qual método estas raízes eram determinadas. No primeiro capítulo do *Ars Magna*, ele estabelece relações entre tipos de equações cúbicas e suas raízes. Ele afirma, por exemplo, que as raízes verdadeiras da equação "cubo mais coisa mais número igual a quadrado" são as fictícias da equação "cubo mais quadrado mais coisa igual a número", sendo mantidos os mesmos coeficientes.

No caso da cúbica $x^3+3x+18=6x^2$, temos que 3 é uma raiz verdadeira, logo -3 será uma raiz fictícia da equação $x^3+6x^2+3x=18$.

Cardano explora diversas relações envolvendo raízes fictícias e raízes verdadeiras das equações cúbicas, embora desvinculadas de um contexto geométrico. Logo o que hoje entendemos como raízes negativas de uma equação cúbica eram descritas como raízes fictícias, porém ainda não eram aceitas como soluções legítimas. Um problema envolvendo quantidades negativas como solução aparece no capítulo XXXVII: *"O dote da esposa de Francis é 100 aurei[3] maior do que o valor que possui e o quadrado do dote é 400 a mais do que o quadrado do valor possuído. Encontre os valores do dote e de seus bens próprios."*

Adotando uma linguagem simbólica atual, a solução apresentada assume que se Francis possui $-x$, logo o dote de sua esposa é $100-x$. Elevando ao quadrado ambas as partes, teremos x^2 e $10000+x^2-200x$. A diferença entre elas é 400, então: $x^2+400+200x=10000+x^2$. Subtraindo termos comuns teremos que 9600 valem $200x$, concluindo que $x=48$ e que Francis está com este débito pessoal. O valor do dote será o que resta de 100, o que vale 52. Então Francis tem -48 *aurei* e o dote de sua esposa é 52 *aurei*.

Trabalhando desta forma, Cardano afirma que pode resolver os mais difíceis e emaranhados problemas.

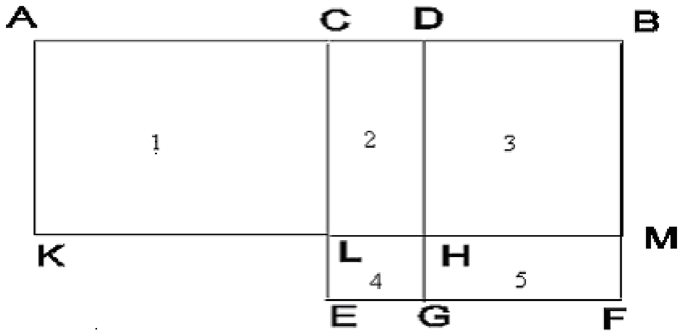
Outro aspecto notável na discussão de Cardano encontra-se neste mesmo capítulo: a consideração do que atualmente chamamos de "números complexos" ou "números imaginários". Cardano manteve esses números fora do *Ars Magna*, com exceção de um caso, quando ele considerava o problema de dividir 10 em duas partes cujo produto fosse igual a 40. Ou seja, dividimos 10 em duas partes iguais obtendo 5, que multiplicado por si mesmo resulta em 25. Deste resultado devemos subtrair 40, que é o valor do produto desejado, restando *m*15.

A solução deveria ser justificada geometricamente e Cardano apresenta uma tentativa geométrica baseada nas proposições de Euclides. Esta justificativa deveria apresentar a solução através da construção de um quadrado de área *m*15.

O segmento AB (figura 1) de comprimento 10 é dividido em partes iguais, tendo que AC = CB = 5, logo pela proposição II.5 de Euclides, teríamos que a medida de CD é a raiz da diferença entre o quadrado construído sobre CB e o produto de AD por DB, indicado por R*m*15 ($\sqrt{-15}$). A solução desejada é AC + CD e AC – CD que eram registradas como "5 *p* R *m*15" e "5 *m* R *m*15".

[3] Uma moeda de ouro da Roma antiga

Fazendo o produto desses resultados, obtemos “25*m m* 15 *quad est* 40”. Logo, Cardano afirma que podemos realizar com essas quantidades “sofisticadas” operações do tipo $\left(5+\sqrt{-15}\right)\left(5-\sqrt{-15}\right)=25-\left(-15\right)=40$.



(figura 1)

Cardano se referia às raízes quadradas de números negativos como sofisticadas[4] e chegou a avaliar que esses resultados eram tão sutis quanto inúteis.

Podemos observar que, independente das operações funcionarem perfeitamente com estas quantidades “sofisticadas”, era necessário, mas confuso, associar um sentido geométrico a elas, permanecendo em aberto uma justificativa para o cálculo de raízes de números negativos.

A atenção dada por Cardano a essas quantidades, aliada ao método de solução de equações cúbicas através de radicais, dá origem a um processo longo e de extrema importância na história da matemática. A partir deste momento, uma nova questão vai alimentar o pensamento matemático: como justificar a possibilidade de efetuarmos cálculos e admitirmos soluções envolvendo raízes quadradas de números negativos?

Um matemático que muito contribuiu para o estudo dos números imaginários foi o italiano Rafael Bombelli, nascido provavelmente em 1526 na cidade de Bologna, embora não se encontrem informações precisas a este respeito. A grande contribuição de Bombelli para a Matemática é conhecida através da publicação de sua obra *L’Algebra* (1572), escrita por volta do ano de 1560.

Diferentemente de muitos contemporâneos seus, Bombelli parece ter tido a intenção de elevar a matemática a um nível superior, não necessariamente ligada a problemas práticos.

[4] O termo “sofisticado” associado às quantidades atualmente conhecidas como imaginárias, já constava em manuscritos datados de 1543 de Rafael Bombelli, localizados atualmente na biblioteca do Vaticano. Presume-se que Cardano, já ciente do conteúdo desses manuscritos, tenha então adotado a mesma terminologia. (Flament.D, mini curso sobre a história dos números complexos, UFF 2008)

Os problemas apresentados na obra de Bombelli são, em sua grande maioria, influenciados por Diofanto, mas tratados de modo mais abstrato, com nítido interesse em generalizar vários dos casos com que lidava.

A obra de Bombelli divide-se em 5 partes, que são considerados 5 livros, dos quais os dois últimos não foram apresentados tais como Bombelli havia pensado. Após a sua morte, aos 46 anos, os dois últimos livros ainda incompletos foram dados como perdidos, descobertos por E. Bortolotti e publicados em 1929.A primeira edição integral de *L'Algebra* foi publicada em 1966 e deixa clara a distinção dos três primeiros livros, relacionados à álgebra, dos demais, essencialmente dedicados à geometria.

Segundo Bortolotti, no prefácio à edição da Álgebra de 1966,

> (...) Nela se apresenta pela primeira vez uma completa sistematização lógica da teoria das equações dos primeiros quatro graus; mas o conceito de informação de toda a obra, a disposição e ordenação da matéria, o procedimento construtivo e demonstrativo essencialmente analítico nela seguido, representa um passo notável na aritmetização da Matemática. (Bombelli, 1966)

A contribuição de Bombelli foi notável no que diz respeito à linguagem simbólica utilizada, semelhante à linguagem já utilizada por Nicolas Chuqet em sua obra *Triparty en la science des nombres* (1484).

A notação algébrica de Bombelli foi ocupando o espaço das abordagens retóricas utilizadas anteriormente. Ele utilizou *R.q.* para denotar raiz quadrada, *R.c.* para raízes cúbicas e expressões similares para raízes de índices maiores. Os símbolos $\lfloor\ \ \rfloor$ são utilizados para incluir longas expressões, como por exemplo: $R.c.\lfloor 2p\ R.q.21 \rfloor$, que atualmente é representado por $\sqrt[3]{2+\sqrt{21}}$; e a utilização de um semicírculo em torno de um número *n*, indicando a *n*-ésima potência do termo desconhecido. Logo, x^3+6x^2-5x seria escrito como $\overset{\overset{3}{\smile}}{1}\ p\ \overset{\overset{2}{\smile}}{6}\, m\, \overset{\overset{1}{\smile}}{5}$.

Esta forma de "ligar" os elementos de um mesmo radicando foi um grande avanço na representação simbólica de expressões envolvendo radicais, que muito se assemelha com o objetivo do emprego do símbolo de raiz utilizado atualmente.

O quadro abaixo[5] relaciona a linguagem simbólica utilizada por Bombelli com a linguagem atual:

[5] Imagem disponível em http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Bombelli.html

Notação Moderna	Publicado por Bombelli	manuscrito por Bombelli
$5x$	$\overset{\underset{\smile}{1}}{5}$	$\overset{\underset{\smile}{1}}{5}$
$5x^2$	$\overset{\underset{\smile}{2}}{5}$	$\overset{\underset{\smile}{2}}{5}$
$\sqrt{4+\sqrt{6}}$	Rq⌊4pRq6⌋	R⌊4pR6⌋
$\sqrt[3]{2+\sqrt{0-121}}$	Rc⌊2pRq⌊0m121⌋⌋	R^3⌊2pR⌊0m121⌋⌋

Os números imaginários são abordados em seu primeiro livro, juntamente com definições de conceitos elementares, como potências, raízes, binômios e as operações que os envolvem. Ele reconhece a existência das raízes negativas e segue adiante afirmando que estas expressões são mais “sofisticadas” que reais, como podemos perceber no trecho citado abaixo, encontrado na página 133 de *L’Algebra*:

> “Encontrei um outro tipo de raiz cúbica composta muito diferente das outras, que nasce no capítulo do “cubo igual a tanto e número”, quando o cubo da terça parte do tanto é maior que o quadrado da metade do número, como nesse capítulo se demonstrará, (…) porque quando o cubo do terço do tanto é maior que o quadrado da metade do número, o excesso não se pode chamar nem mais nem menos, pelo que lhe chamarei de pìu di meno, quando se adicionar e meno di meno quando se subtrair. (…) E esta operação é necessária (…) pois são muitos os casos de adicionar onde surge esta raiz, (…) que poderá parecer a muitos mais **sofisticada** que real, tendo eu também essa opinião, até ter encontrado a sua demonstração em linha (…) mas primeiro tratarei de os multiplicar, escrevendo a regra de mais e de menos.”

Bombelli, então enuncia as regras de multiplicação citadas abaixo:

Più via più di meno, fà più di meno

Meno via più di meno, fà meno di meno

Più via meno di meno, fà meno di meno

Meno via meno di meno, fà più di meno

Più di meno via più di meno, fà meno

Più di meno via meno di meno, fà più

Meno di meno via più di meno, fà più

Meno di meno via meno di meno, fà meno

Alguns historiadores da matemática, como Bourbaki em seus *Élements* (p.97), chegam a afirmar que *più*, *meno*, *meno di meno* e *più di meno* são respectivamente 1, -1, -*i* e *i*. Sobretudo por que Bombelli, no capítulo "*Summare di p.di m. et m.di m*"., apresenta um importante axioma que revela que não se pode somar *più* com *piú.di.meno*. Esta idéia é vista como uma primeira noção de independência linear entre os valores real e imaginário.

Poderíamos efetivamente estabelecer uma comparação entre as regras de Bombelli e aquelas que utilizamos atualmente, porém dizer que *più*, *meno*, *meno di meno* e *più di meno* são respectivamente 1, -1, -*i* e *i* nos parece perigoso. A razão mais forte para nos precavermos desta associação apressada é que nós utilizaremos mais tarde o símbolo *i* como sendo uma unidade imaginária, ao passo que *più di meno* e *meno di meno* contém em suas expressões as idéias de adição e de subtração, ou seja, relacionam-se a operações. Ou seja, nos parece valioso insistir, do ponto de vista da história da matemática, que *piú di meno* e *meno di meno*, mesmo tendo respectivamente o significado de $+\sqrt{-1}$ e $-\sqrt{-1}$, não significam o nosso *i* e –*i*. Os sinais que precedem as raízes do número -1 indicam que estas quantidades não são independentes, mas são sempre somadas a ou subtraídas de um número real.

Bombelli mostrou que estava à frente de seus antecessores quando apresentou regras operatórias com raízes de números negativos que ainda não tinham a sua legitimidade assegurada, demonstrando uma capacidade de abstração algébrica surpreendente para sua época.

Vejamos agora o que acontece se aplicarmos o método de resolução apresentado por Cardano à equação $x^3 = 15x + 4$, considerada por Bombelli em sua *Álgebra*:

Se $x^3 = 15x + 4$ temos que $p = 15$ e $q = 4$, logo

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{15^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{15^3}{27}}} \quad \Rightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Como acontece neste exemplo, quando o discriminante é menor que zero, ou seja, $\left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{3}\right)^3$, a fórmula de Cardano nos leva inevitavelmente a raízes quadradas de números negativos, logo $\sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$ seria o que chamamos hoje de "número imaginário". Mas no exemplo acima, sabemos que a equação possui três raízes reais: 4, $-2+\sqrt{3}$ e $-2-\sqrt{3}$.

Equações deste tipo são ditas “irredutíveis”, ou seja, equações cúbicas que admitem 3 raízes reais e distintas que, quando resolvidas pela fórmula de resolução das cúbicas por meio de radicais, levam a números desconhecidos. Nesse caso particular, qualquer manipulação algébrica que tivesse como objetivo descobrir as raízes da cúbica através da fórmula de resolução de 3° grau, não obteria sucesso, o que caracterizaria a “irredutibilidade” desta equação.

Este caso apresenta um problema fundamental na história dos números complexos: como é possível obter as três raízes reais, logo plenamente legítimas, através de um método que faz aparecer números ilegítimos, como é o caso das raízes de números negativos?

Bombelli sabia que a equação do exemplo possuía três soluções reais e reparou que, de maneira paradoxal, tínhamos, de um lado, uma situação em que a fórmula produzia um número não reconhecido como tal e, de outro, três boas soluções que podiam ser descobertas por esta fórmula. Bombelli foi o primeiro matemático com coragem suficiente para aceitar a existência dos números imaginários, dando uma nova luz ao quebra-cabeça das equações cúbicas. Sua habilidade em operar com números imaginários o capacitou a demonstrar a aplicabilidade da fórmula de Cardano até nos casos irredutíveis de uma equação cúbica.

Bombelli conseguiu enxergar que os valores complexos dos radicais $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ deveriam ser relacionados com os próprios radicais, ou seja, eles deveriam diferir apenas no sinal. Bombelli sabia que 4 era uma solução da cúbica mencionada acima[6], exibindo o fato extraordinário de que números reais poderiam ser obtidos através de operações com expressões contendo números imaginários.

É importante ressaltar que Bombelli acrescenta que “*adverte-se que este tipo de raiz cúbica surge sempre acompanhada do binômio com o seu resíduo*”. Podemos afirmar que

---

[6] Um método amplamente divulgado para a obtenção da solução 4 para a cúbica dada é a seguinte: Consideremos $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a+b\sqrt{-1}$ e $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a-b\sqrt{-1}$, com *a > 0* e *b > 0* a serem determinados. Sendo assim, a relação $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a+b\sqrt{-1}$ implica que:

$$2+\sqrt{-121} = \left(a+b\sqrt{-1}\right)^3 = a^3+3a^2b\sqrt{-1}+3ab^2\left(\sqrt{-1}\right)^2+b^3\left(\sqrt{-1}\right)^3 = a\left(a^2-3b^2\right)+b\left(3a^2-b^2\right)\sqrt{-1}.$$

Dessa igualdade, segue que $a\left(a^2-3b^2\right)=2$ e $b\left(3a^2-b^2\right)=11$. Se as soluções forem inteiras, a primeira dessas condições nos diz que *a* deve ser igual a 1 ou 2, e a segunda condição assegura que *b* tem valor 1 ou 11. Como apenas as opções *a = 2* e *b = 1* satisfazem a ambas simultaneamente, obtemos as igualdades: $2+\sqrt{-121} = \left(2+\sqrt{-1}\right)^3$ e $2-\sqrt{-121} = \left(2-\sqrt{-1}\right)^3$.

Podemos concluir então que uma das soluções para a equação cúbica $x^3 = 15x+4$ é dada por:

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = \sqrt[3]{\left(2+\sqrt{-1}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{-1}\right)^3} = \left(2+\sqrt{-1}\right)+\left(2-\sqrt{-1}\right) = 4.$$

Bombelli já apontava aqui para o importante papel que os números imaginários conjugados iriam assumir futuramente.

Sabemos que as regras apresentadas por Bombelli , que também são válidas para os números reais, abririam caminho para que no futuro, alguns matemáticos viessem conceber esses elementos munidos de operações e propriedades específicas como uma valiosa estrutura algébrica.

Assim, às vésperas do século XVI, as quantidades imaginárias eram empregadas em cálculos, possuindo nome e algoritmos definidos, mas seu emprego ainda causava incômodo. Estas quantidades eram toleradas quando partiam do real para se chegar ao real e pelo fato de que a teoria sobre as equações ainda não estava perfeitamente definida. Aos numerosos e longos cálculos utilizados na resolução das cúbicas irá se substituir uma escrita formal que as reduzirá e fará os matemáticos descobrirem a generalidade que lhes faltava. Todas essas pesquisas serão feitas no fim do século XVI e prosseguirão pelo século seguinte, ficando aparentemente ocultos os resultados que Bombelli tinha obtido. Mas foi a partir dos trabalhos destes matemáticos italianos que os números sofisticados começaram a perder parte de sua característica mística, ainda que sua plena aceitação no universo dos números comece a ser obtida apenas no século XIX com os trabalhos de Wallis,Wessel, Buée e Argand.

Mostraremos no capítulo seguinte como o desenvolvimento da matemática nos séculos seguintes contribuirá de maneira significativa para que estes importantes resultados saiam do estado de um “eclipse aparente” (FLAMENT, 2003, p.28) e, junto com os demais, iniciem um processo de edificação do pensamento matemático, no qual as quantidades sofisticadas desempenharão um papel fundamental.

Capítulo II – Os números “imaginários” na matemática dos séculos XVII e XVIII

Durante o século XVII, os trabalhos de Harriot, Girard e Descartes, muito contribuíram para a história dos números conhecidos, até este momento, como “sofisticados”.

Thomas Harriot, professor de Oxford, com sua obra “*Artis analyticae praxix”* (1631), pode ser considerado, com Viète, um dos pais da Análise Matemática. Ele é responsável por evidenciar a importância da natureza e da formação das equações, transformando o modo tradicional de lidar com as equações e apresentando um processo que conduz a uma forma canônica.

Em uma primeira fase, Harriot transporta todos os termos do segundo membro de uma equação, atribuindo sinais e iguala a zero. Esta é uma prática facilmente reconhecida atualmente, considerar uma equação na forma geral, porém, na época, este procedimento implicava em ultrapassar algumas barreiras, pois igualar um “objeto” a zero era igualar a nada.

Na obra de Harriot, considerada por Cajori como “*menos retórica e mais simbólica do que talvez qualquer outra álgebra que já tenha sido escrita*”[7], afirma-se que adicionar “ $\begin{array}{r} a+b \\ -d \end{array}$ representa a soma $a+b-d$.”

A linguagem simbólica utilizada já representava uma inovação, pois usava letras minúsculas para representar as quantidades que aparecem nas equações, dando o mesmo significado que Viète atribuía as suas letras maiúsculas. Expressava por uma consoante as quantidades positivas conhecidas e os números negativos eram precedidos por um sinal. A novidade aí não consistia em escrever *“- d”* e sim no fato de que não era apresentada uma expressão precedente que indicasse diretamente uma subtração. Ele não explica a ambigüidade gerada pelo sinal “ – ” que, em um dado exemplo, poderia significar uma subtração, assim como uma adição de um número negativo.

É interessante observar que Harriot não utilizava palavras especiais para designar os números “sofisticados”, embora quando deparado com a equação $"eee = ccc + \sqrt{-dddddd}"$ considere um caso de redução impossível e declare que $\sqrt{-dddddd}$ é inexplicável.

---

[7] Cajori, *Revaluation of Harriot’s Artis Analyticae Praxix*, (1920), p.37.

Independente da simbologia utilizada, ele ainda não valida as raízes negativas de uma equação. Sendo assim, ainda não podemos dizer que Harriot tenha sido o primeiro a reconhecer e utilizar as raízes negativas de uma equação de maneira similar às raízes positivas. Este equívoco, encontrado algumas vezes na história da matemática, deve-se ao fato dele ter proposto uma formalização inovadora na construção de equações canônicas a partir de produtos de fatores binomiais, como podemos ver a seguir:

1) $$\left.\begin{array}{c} a-b \\ a-c \\ \hline \end{array}\right| = aa - ba - ca + bc$$

2) $$\left.\begin{array}{c} a+b \\ a+c \\ \hline \end{array}\right| = aa + ba + ca + bc$$

3) $$\left.\begin{array}{c} a-b \\ a+c \\ \hline \end{array}\right| = aa - ba + ca - bc$$ [8]

A partir daí, somos tentados a acreditar que Harriot interpretava a equação $aa-(b-c)a-bc=0$ como sendo equivalente à $aa-ba+ca-bc=0$, cujas raízes seriam *b* e – *c*. Mas esta conclusão é falsa, já que Harriot desprezava – *c* como raiz da equação.

Considerando a equação $a=b$ e conseqüentemente $a-b=0$, poderíamos multiplicar os dois membros dessa equação por $a+c$, obtendo então a equação $aa-ba+ca-bc=0$, que poderia ser escrita da forma $aa-ba+ca=bc$. Cajori conclui que "*portanto a equação canônica proposta obtida através de uma prévia multiplicação é aqui deduzida considerando-se* a = b."[9]

Como Harriot não reconhecia – *c* como uma raiz da equação, não poderia fazer o mesmo cálculo partindo de $a=-c$, o que seria pertinente para uma equação moderna. Em seu livro, diante a uma equação do terceiro grau da forma $(a-b)(a-c)(a-d)=0$, reconheceu suas três raízes *b*, *c* e *d*, mas para o caso da equação $(a+b)(a-c)(a-d)=0$, admitiu *c* e *d* como raízes, ficando provado que não existiriam outras.

[8] Em notação atual teríamos $(x-b).(x+c)=x^2-bx+cx-bc$.
[9] Cajori, *Revaluation of Harriot's Artis Analyticae Praxix*, (1920), p.37.

Embora não tenha admitido raízes negativas como soluções das equações, o mesmo valendo para os números "sofisticados", suas equações canônicas serviram como modelos para determinar o número de raízes de equações de terceiro e quarto graus (nos casos particulares em que todas são estritamente positivas). Este fato já seria suficiente para ressaltar a importância da contribuição de Harriot para a matemática.

Outras de suas contribuições são a invenção dos símbolos > e <, que significam respectivamente "superior a" e "inferior a", um melhor desenvolvimento no processo de Viète para a aproximação das raízes de uma equação numérica e a utilização simbólica para representar a multiplicação como $a.a$, $a.a.a$, $a.a.a.a$,...

Nota-se a importância do termo "inexplicável", utilizado em expressões que aparecem nos trabalhos de Harriot, como por exemplo, $\sqrt{-dddddd}$, pois os números ditos anteriormente "impossíveis" recebem entre os anos de 1620 e 1630 uma outra denominação em razão do alargamento provocado pelas resolução das cúbicas. As dificuldades da fórmula de Cardano para a resolução das equações cúbicas ainda são mantidas nesta época, sendo o termo "inexplicável", característico das conseqüências da evolução matemática durante o século XVII.

Albert Girard nasceu em 1595 em St Michel (França) e morreu no dia 8 de dezembro de 1632 em Leiden (Holanda). Era francês, mas emigrou como refugiado religioso para a Holanda. Apaixonado por música, freqüentou pela primeira vez a Universidade de Leiden, aos 22 anos, aonde estudou Matemática. No que tange à história da legitimação dos números impossíveis, podemos considerar que Girard foi mais adiante que Harriot, pois em seu livro *"Invention nouvelle em l'algèbre"*, publicado em 1629, aparecem diversos resultados que admitem raízes negativas para equações.

Na primeira parte de seu livro, Girard incorpora resultados de alguns contemporâneos. Ele introduz dois novos sinais que seriam importantes em seus trabalhos:

ff - mais que

§ - menos que

Estes símbolos utilizados por Girard não são tão simples quanto aqueles já utilizados por Harriot e que se tornarão os nossos sinais "<" e ">". Em relação à notação algébrica, Girard utiliza, assim como Viète, letras maiúsculas para representar grandezas, desconsiderando a notação utilizada por Harriot.

Para representar operações entre grandezas, ele já utilizava $A+B$ para a soma, AB para o produto, $\frac{A}{B}$ para a divisão de A por B e o sinal de “ = ” representava a diferença entre grandezas. Logo, para o caso geral da diferença entre as grandezas A e B, era utilizada a notação $A=B$, mas, caso A fosse maior que B, a representação seria feita por $A-B$. Esta dupla notação para uma mesma operação, nos revela uma resistência em trabalhar com quantidades negativas.

Naquela época, a soma de todos os conhecimentos disponíveis não era necessariamente utilizada pelos matemáticos atuantes, uma vez que não existia um padrão de notação matemática como hoje em dia. A linguagem utilizada dependia da preferência de cada um. Girard, por exemplo, com a sua notação, ao resolver a equação quadrática “(2) igual a 6(1) – 25”[10], afirma que o valor de 1(1), ou seja, a raiz da equação, assume valor $3+\sqrt{-16}$ ou $3-\sqrt{-16}$, o que seria inexplicável. Afirma também que algumas equações do tipo (2) igual a (1) – (0), ou em linguagem atual, $x^2 = ax - b$, são impossíveis de serem resolvidas.

Na página 53 de *“Invention nouvelle em l’algèbre”*, Girard enuncia o famoso teorema que relaciona o número de raízes de uma equação ao seu grau. Ele afirma que todas as equações algébricas têm como número de soluções o mesmo número de seu maior grau e estabelece relações entre os coeficientes dos outros termos da equação com as raízes, estando os termos, em ordem alternada de grau.

Ele explica este teorema através de um exemplo. Se a equação 1(4) é igual a 4(3) + 7(2) -34(1) - 24[11], 4 é o maior grau, o que significa que esta equação possui quatro soluções. Reescrevendo-a alternando seus graus, temos que 1(4) – 7(2) – 24(0) é igual a 4(3) -34(1). Desta equação, com exceção do termo de maior grau, os demais coeficientes com seus respectivos sinais, em ordem decrescente em relação aos graus de seus termos, ou seja: 4, -7, -34 e -24 são as quatro “facções” das quatro soluções da equação. Estas facções mencionadas por Girard são resultados envolvendo a soma e o produto das raízes da equação, que recebem atualmente o nome desse matemático.

Para o caso das equações incompletas, Girard fornece o exemplo da equação 1(3) igual a 7(1) – 6 que admite três soluções. São elas 1, 2 e -3 e ele reescreve a equação da forma completa 1(3) igual a 0(2) + 7(1) – 6 para encontrar todas as soluções.

---

[10] Em notação atual, equivale à equação $x^2 = 6x - 25$.
[11] Em notação atual, equivale à equação $x^4 = 4x^3 + 7x^2 - 34x - 24$.

Na citação a seguir, Girard nos mostra um exemplo de equação que evidencia o fato dele já admitir as quantidades "sofisticadas" de Bombelli: "*Se 1(4) é igual a 4(1) – 3, então as quatro facções serão 0, 0, 4 e 3, logo as quatro soluções serão 1, 1,* $-1+\sqrt{-2}$ *e* $-1-\sqrt{-2}$ *. (Note que o produto das duas últimas é 3)*"[12].

Girard afirma que pode dar três nomes às soluções encontradas: aquelas que são "mais que nada", outras que são "menos que nada" e as outras "que possuem $\sqrt{-}$ ", como $\sqrt{-3}$ e outras similares. Provavelmente ele foi o primeiro a fornecer uma idéia precisa sobre a representação dos números negativos, quando diz: "*a solução por menos se explica em geometria por retrocessão: o menos recua exatamente onde o mais avança*".

Girard parece ter tido forte influência de diversos outros autores. Parte de sua notação tem inspiração em Chuquet, Stifel e Bombelli. Sua representação para expressar uma raiz permanece até os dias de hoje. Em relação às quantidades negativas e "inexplicáveis", sabia aceitá-las e superá-las em seus cálculos.

Sem muita precisão, ao enunciar o teorema fundamental da álgebra, ele forneceu um sentido mais amplo para os números "inexplicáveis". Este importante teorema, que podemos considerar como uma breve declaração, já que não possuía uma demonstração formal, será abordado por diversos matemáticos como Descartes, Newton, Euler, D'Alembert e Gauss, que fornecerá uma prova rigorosa.

Passaremos agora ao trabalho de René Descartes (1596-1650), filósofo, matemático e físico e, em particular, ao seu famoso livro *Geometria*, que foi concebido como o primeiro apêndice de sua grande obra filosófica *Discurso do Método*, publicada em 1637. Procuraremos evidenciar, nesta obra, as passagens e as situações em que os números "inexplicáveis" se tornam presentes, de forma a compreender quais as contribuições desse grande matemático na história desses números.

Podemos dizer que várias de suas idéias já tinham sido expostas por Harriot e Girard, embora seja incontestável que a clareza e a riqueza de suas exposições demonstrem a independência de Descartes em relação a quaisquer influências externas. Descartes foi o primeiro a qualificar os números expressos por raízes de números negativos como "imaginários", não com o sentido de que eles não seriam "reais", mas como números que podem ser imaginados.

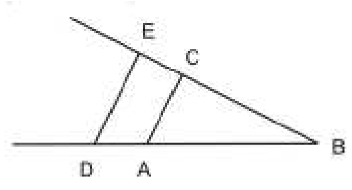
Citaremos aqui, as primeiras páginas de sua *Geometria* que explicam sua concepção:

[12] Itard, J., *op.cit.*, p.14

> “Todo problema em geometria pode facilmente ser reduzido a alguns termos, que o conhecimento de certas medidas de linhas retas seja suficiente para a sua construção.
> Assim como a aritmética consiste de somente quatro ou cinco operações, denominadas adição, subtração, multiplicação, divisão e a extração de raízes, que deve ser considerada, como um tipo de divisão. Logo na geometria, para determinar linhas desejadas, é meramente necessário adicionar ou subtrair outras linhas, ou seja, tomando uma linha, que eu chamarei de unidade, a fim de relacioná-la o mais possível a números, e que pode ser escolhida geralmente de maneira arbitrária e sendo dadas duas outras linhas, encontrar a quarta linha que deve estar para uma das linhas dadas, assim como a outra está para a unidade (que é o mesmo que a multiplicação). Ou novamente, encontrar a quarta linha que está para uma das linhas dadas, assim como a unidade está para a outra (o que é equivalente à divisão). Ou finalmente, encontrar uma, duas, ou várias médias proporcionais entre a unidade e uma outra linha (o que é o mesmo que extrair a raiz quadrada, raiz cúbica, etc. da linha dada). E eu não devo hesitar em introduzir estes termos aritméticos na geometria, por razões de maior clareza.”[13]

Uma conseqüência do procedimento citado acima, é que o produto de dois segmentos pode ser visto como um segmento, o que não poderia ocorrer na geometria euclideana, em que o produto de dois segmentos deveria ser visto, necessariamente, como a superfície de um retângulo, ou seja, como uma figura de natureza distinta de um segmento de reta.

Procedimentos deste tipo, exemplificado pela figura baixo, permitirão vencer a questão da homogeneidade das grandezas que estava presente na geometria euclideana. Suponhamos, na figura, que AB seja a unidade. Utilizando construções geométricas simples, com régua e compasso, teremos que BE é o produto dos segmentos BD e BC obtidos ligando-se os pontos A e C e construindo DE paralela a AC.



Baseando-se no texto de Descartes, e feitas as devidas construções geométricas, teremos que: $\frac{BE}{BC} = \frac{BD}{BA}$ e, como BA é unidade, segue que $BE = BC.BD$.

Após esta explicação, Descartes propõe a aplicação da multiplicação e da extração de raiz quadrada através de figuras geométricas, mas antes especifica:

[13] Descartes,R. *The Geometry of René Descartes*, New York: Dover Publications, 1954. p 5.

"...Portanto, geralmente não é necessário traçar linhas no papel, mas é suficiente designar uma letra a cada uma delas, deste modo, para somar as linhas BD e GH, eu chamo uma de a e a outra de b e escrevo $a+b$. Então $a-b$ irá indicar que b é subtraído de a ; ab que é a multiplicado por b ; $\frac{a}{b}$ que é a dividido por b ; aa ou a^2 que representa a multiplicado por ele mesmo; a^3 que é este resultado multiplicado por a, e assim por diante, indefinidamente. Novamente, se eu desejo extrair a raiz quadrada de a^2+b^2, eu escrevo $\sqrt{a^2+b^2}$; se eu desejo extrair a raiz cúbica de $a^3-b^3+ab^2$, eu escrevo $\sqrt[3]{a^3-b^3+ab^2}$ [14] e igualmente para outras raízes"[15].

Até este momento, a^2 era comumente associado à superfície de um quadrado cujo lado é a e b^3 significava o volume de um cubo cuja aresta é b, enquanto b^4, b^5, etc. não eram associados a formas geométricas. Descartes diz que a^2 não possui esse significado, mas representa uma linha construída como a terceira proporcional entre 1 e a.

Assim como Harriot, Descartes utiliza letras minúsculas, além de expressar o radical como Girard, porém a raiz cúbica era expressa de uma forma mais complexa, o que poderia acarretar alguns erros em cálculos. O risco era mínimo quando se tratavam de grandezas homogêneas, mas o mesmo não acontecia com as demais. Porém, Descartes contorna esta situação afirmando:

"Se queremos resolver qualquer problema, primeiramente supomos que a solução já está efetuada, e damos nomes a todas as linhas que parecem necessárias para construí-la. Tanto para as que são desconhecidas como para as que são conhecidas. Em seguida, sem fazer distinção entre linhas conhecidas e desconhecidas, devemos percorrer a dificuldade da maneira mais natural possível, mostrando as relações entre estas linhas, até que seja possível expressar uma única quantidade de dois modos. A isto chamamos uma Equação, uma vez que os termos de uma destas duas expressões são iguais aos termos da outra"[16].

Além disso, Descartes introduz uma escrita simbólica para representar equações de uma maneira muito similar à utilizada atualmente, apenas com uma diferença para o sinal de igualdade, que ele representava utilizando o símbolo " ∝ ". Abaixo seguem alguns exemplos de equações descritas por Descartes:

[14] Descartes escreve $\sqrt{C.a^3-b^3+abb}$.

[15] Descartes,R. *The Geometry of Rene Descartes*, New York: Dover Publications, 1954.

[16]. Descartes,R. *The Geometry of Rene Descartes*, New York: Dover Publications, 1954, p 8-9.

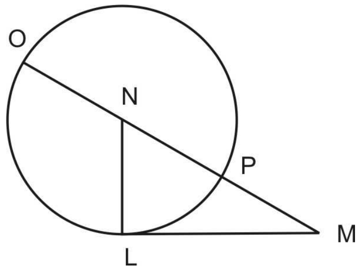
$$z \propto b$$

$$z^2 \propto -az+bb$$

$$z^3 \propto +az^2+bbz-c^3$$

$$z^4 \propto az^3-c^3z+d^4$$

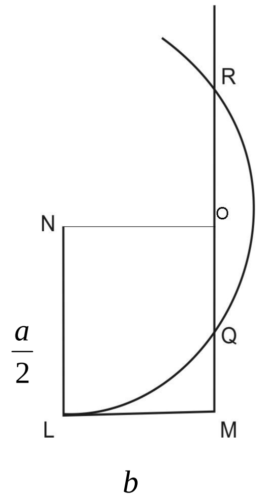
Em seguida, Descartes analisa alguns casos de equações quadráticas, mostrando como podemos interpretar a incógnita como uma reta que pode ser construída. Por exemplo, para a equação $z^2 \propto az + b^2$, esta reta incógnita seria construída como na figura abaixo:



Queremos comparar os triângulos LMP e LOM. Os ângulos LOM e MLP são iguais e, como o ângulo LMP é comum a ambos, concluímos que os triângulos LMP e LOM são semelhantes. Logo, $\dfrac{LM}{OM}=\dfrac{PM}{LM} \Rightarrow OM.PM = LM^2$. O segmento LM tem comprimento b e desenhamos o segmento NL, com tamanho $\dfrac{a}{2}$, perpendicular a LM. Construímos então um círculo com raio $\dfrac{a}{2}$ e desenhamos a reta por M e N que intercepta o círculo em O e P. Temos então que $MN^2 = b^2 + \dfrac{a^2}{4}$ e o segmento OM = $\dfrac{a}{2}$ + MN é o z que procuramos, pois sabemos da geometria que $OM.PM = LM^2$, logo se OM = z, PM = $z-a$ e $z^2 = az + b^2$, uma vez que LM = b. Sendo assim, temos que OM, a raiz da equação, é dada por $z \propto \dfrac{1}{2}a+\sqrt{\dfrac{1}{4}aa+bb}$.
Observamos que a segunda raiz da equação, que é negativa, é ignorada por Descartes.

Em seguida, ele mostra como podemos construir as raízes da equação $z^2 \propto az-bb$ (equivalente à equação $x(b-x)=c^2$ cuja solução é apresentada na proposição II.5 dos

Elementos de Euclides). Para resolver esta última equação, traçamos, como no exemplo anterior, um segmento NL de tamanho $\frac{a}{2}$ e um segmento LM de tamanho b.



No entanto, ao invés de ligar M a N, traçamos MQR paralela a LN e, tomando N como centro, traçamos uma circunferência por L cortando MQR nos pontos Q e R. A linha z procurada é MQ ou MR, expressas respectivamente por:

$$z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} \quad \text{e} \quad z \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$$

Isto porque $Q\hat{L}M = L\hat{R}M$, uma vez que são ambos ângulos inscritos que determinam o mesmo arco. $\hat{M}$ é um ângulo comum a ambos, logo os triângulos LRM e QLM são semelhantes, logo $\frac{LM}{MR} = \frac{QM}{LM} \Rightarrow LM^2 = MR.MQ$. Se $RQ = 2.(MR - \frac{1}{2}a)$, $LM = b$ e $MR = z$, temos de $LM^2 = MR.MQ$ que $b^2 = z.MQ$ e $MQ = z - RQ$. Sendo assim, $MQ = z - 2.(z - \frac{1}{2}a)$, $MQ = a - z$. Como $b^2 = z.MQ$, $b^2 = z.(a - z)$. Logo $z = MR$.

Para deduzir a fórmula algébrica a partir da construção geométrica acima, basta observar na figura que $LN = \frac{1}{2}a = NQ = NR$. Se marcarmos um ponto O sobre MR, obteremos também que $MO = \frac{1}{2}a$ e $NO = b$. Como $MR = z = MO + OR$, chamando OR de x, temos que $\frac{a^2}{4} = x^2 + b^2$, logo $x = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$.

Ao final desse resultado, Descartes afirma que: "*Se o círculo descrito por N passando por L não corta e nem toca a linha MQR, a equação não tem nenhuma raiz, de forma que podemos dizer que a construção do problema é impossível*".[17]

Podemos observar que, pelo fato de Descartes utilizar figuras euclideanas para solucionar algumas equações, determinando o lugar geométrico que representa os valores das raízes, ele não garante a existência das raízes "imaginárias". Quando o círculo não corta e nem toca a linha MQR, o problema algébrico é traduzido por uma impossibilidade geométrica.

A necessidade da construção geométrica das soluções das equações, fez com que Descartes ainda considerasse separadamente as soluções de equações do tipo $z^2 \propto az + bb$, $z^2 \propto az - bb$ e $z^2 \propto -az + bb$, não apresentando uma generalização para uma equação do tipo $z^2 + az + b^2 \propto 0$.

Em seu primeiro livro, Descartes também aplica o seu método na resolução do famoso problema de Pappus. Em seu segundo livro, trata da natureza das linhas curvas, utilizando a Geometria para a resolução de problemas em Dióptrica. No terceiro livro, que investiga a natureza das equações, Descartes levanta a questão da existência e do número de raízes de uma equação qualquer, fornecendo a seguinte resposta:

> "Qualquer equação pode ter[18] tantas raízes distintas (valores das quantidades desconhecidas) quanto o número de dimensões da quantidade desconhecida na equação[19]. Suponhamos, por exemplo, $x = 2$ ou $x - 2 = 0$, e novamente, $x = 3$ ou $x - 3 = 0$. Multiplicando as equações $x - 2 = 0$ e $x - 3 = 0$, temos $x^2 - 5x + 6 = 0$ ou $x^2 = 5x - 6$. Esta é uma equação em que x tem valor 2 e ao mesmo tempo tem valor 3. Se nós após, fizermos $x - 4 = 0$ e multiplicarmos por $x^2 - 5x + 6 = 0$, teremos $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, uma outra equação, em que x, tendo três dimensões, terá também três valores que são 2, 3 e 4."

[17] Descartes,R. *The Geometry of Rene Descartes*, New York: Dover Publications, 1954, p 15.

[18] É importante notar que Descartes escreve "pode ter" e não "deve ter", já que considera apenas raízes reais positivas.

[19] Que é o número que denota o grau da equação.

O fato do número de raízes de uma equação estar associado à dimensão do termo desconhecido desta equação é uma antecipação do resultado que conhecemos hoje como "Teorema Fundamental da Álgebra", embora não designado desta forma em sua obra.

Descartes afirma que, muitas vezes, algumas raízes são falsas ou menos que nada[20]. Deste modo, quando considera que x representa a quantidade 5 subtraída de nada (o que atualmente é representado por -5), conclui que $x+5=0$, resultado que, multiplicado por $x^3-9x^2+26x-24=0$, resulta em $x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$. Ele conclui então que esta equação possui quatro raízes, das quais 2, 3 e 4 são as verdadeiras e 5 é a falsa.[21]

Descartes afirma ainda que é possível diminuir o número de dimensões de uma equação se conhecemos uma de suas raízes, bastando dividi-la pelo binômio $x-a$, em que x representa a quantidade desconhecida e a, a raiz conhecida. Trata-se de uma generalização de um fato já conhecido no Renascimento e freqüentemente aplicado à resolução da cúbica, com o objetivo de reduzi-la a uma equação quadrática.

Outro fato importante, ressaltado por Descartes, é que podemos determinar o número de raízes verdadeiras e falsas de qualquer equação, basta proceder da seguinte maneira: uma equação tem tantas raízes verdadeiras quanto for o número de vezes em que há a troca de sinais de + para – ou de – para +; e tantas falsas quanto for o número de vezes que dois sinais de + ou dois sinais de – forem encontrados seguidamente. No caso da equação $x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$, citada anteriormente, temos que $+x^4$ é seguido de $-4x^3$, sendo a primeira mudança de sinal. Depois temos $-19x^2$ seguido de $+106x$ e finalmente $+106x$ seguido de -120, perfazendo um total de três mudanças de sinais como especificado, logo sabemos que existem três raízes verdadeiras nesta equação. Temos também que $-4x^3$ é seguido de $-19x^2$, existindo, então, uma raiz falsa.

Esta regra é conhecida como a "Regra de sinais de Descartes". Entretanto, já havia sido citada anteriormente por Harriot em sua obra *Artis analyticae praxis* (1631). Em (Cantor, Vol II, p.496, p.725) encontramos que Descartes poderia ter tido acesso a tal regra nos manuscritos de Cardano, porém o francês foi o primeiro a apresentá-la como uma regra geral.

Descartes também apresenta uma técnica para gerar uma nova equação em que as raízes verdadeiras da antiga sejam as falsas da nova e vice-versa, utilizando-se apenas de algumas trocas de sinais de alguns coeficientes da equação. Isto é feito trocando os sinais do segundo termo, quarto termo, sexto termo, ou seja, agindo desta maneira com os termos de

[20] "Raízes falsas" era um termo formalmente utilizado para o que conhecemos hoje de raízes negativas.
[21] Que são três raízes positivas, 2, 3 e 4, e uma raiz negativa -5.

ordem par e conservando os sinais dos termos de ordem ímpar. Logo, a equação $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$, quando reescrita como $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$, terá 5 como a raiz verdadeira e três falsas raízes, que serão 2, 3 e 4.

Caso fosse desejado aumentar uma quantidade dada ou diminuir de uma quantidade dada os valores das raízes de uma equação, deveríamos substituir o termo desconhecido da equação por outro, acrescentando ou diminuindo a quantidade dada. Desta forma, se for desejado aumentar 3 unidades do valor de cada raiz da equação $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$, trocamos o termo desconhecido x por um outro y que exceda x em 3 unidades, ou seja $y - 3 = x$. Desta maneira, teríamos que, no lugar de x^2, colocar o quadrado de $y - 3$; para x^3, colocar o cubo de $y - 3$ e assim por diante. Fazendo as devidas substituições na equação acima e efetuando as combinações possíveis, obtemos a equação $y^4 - 8y^3 - y^2 + 8y = 0$ [22].

Aumentando-se as raízes verdadeiras de uma equação, as falsas diminuem da mesma quantidade e também é válido o contrário, ou seja, diminuindo as raízes verdadeiras, aumentamos as falsas. Quando diminuímos tanto uma verdadeira, quanto uma falsa raiz, uma quantidade igual a ela própria, temos a raiz zero. Quando diminuímos do valor da raiz uma quantidade maior do que ela, fazemos com que uma raiz verdadeira se torne falsa e uma falsa se torne verdadeira. No caso da equação $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$, em que tínhamos a raiz verdadeira 5 e as falsas 2, 3 e 4, após o acréscimo de 3 unidades, faremos as seguintes alterações para descobrirmos as raízes da equação $y^4 - 8y^3 - y^2 + 8y = 0$:

- A raiz verdadeira 5 será acrescida de 3 unidades, obtendo a raiz verdadeira 8.
- Da raiz falsa 4, diminuiremos 3 unidades, obtendo a raiz falsa 1.
- Da raiz falsa 3, diminuiremos 3 unidades, obtendo a raiz zero.
- Da raiz falsa 2, diminuiremos 3 unidades, obtendo a raiz verdadeira 1.

Outro resultado extremamente importante, que tem como objetivo fazer desaparecer o segundo termo de uma equação dada, é apresentado por Descartes em seu terceiro livro:

> "...Nós podemos sempre remover o segundo termo de uma equação, subtraindo de suas verdadeiras raízes a quantidade relativa ao segundo termo dividida pelo número de dimensões do primeiro termo, no caso dos dois termos terem sinais opostos; ou, se eles possuírem sinais iguais, adicionando

[22] Em sua obra, Descartes registrou $y^4 - 8y^3 - y^2 + 8y * \propto 0$, indicando por um asterisco, a ausência de um termo do polinômio completo.

às raízes a mesma quantidade. Logo, para remover o segundo termo da equação $y^4+16y^3+71y^2-4y-420=0$, divido 16 por 4 (expoente de y em y^4), sendo o quociente igual a 4. Então eu faço $z-4=y$ e escrevo:

$$\begin{array}{llllll}
z^4 & -16z^3 & +96z^2 & -256z & +256 & \\
 & +16z^3 & -192z^2 & +768z & -1024 & \\
 & & +71z^2 & -568z & +1136 & \\
 & & & -4z & +16 & \\
 & & & & -420 & \\
\hline
z^4 & & -25z^2 & -60z & -36 & =0
\end{array}$$

A raiz verdadeira dessa equação que era 2 agora é 6, já que houve um acréscimo de 4 unidades, e as raízes falsas, 5, 6 e 7, são justamente 1, 2 e 3, já que houve uma diminuição de 4 unidades."[23]

Destacamos, no contexto desta discussão, o que podemos considerar como a primeira referência feita por Descartes às quantidades consideradas por ele como "imaginárias":

"Nem todas as raízes verdadeiras e nem as falsas são sempre reais; às vezes elas são imaginárias; ou seja, enquanto nós podemos sempre conceber a quantidade de raízes de uma equação como eu tinha atribuído, ainda assim nem sempre existe uma quantidade definida que corresponda a cada raiz obtida. Logo, mesmo concebendo que a equação $x^3-6x^2+13x-10=0$ tenha três raízes, ainda que só exista uma raiz real, 2, as outras duas, embora nós possamos somá-las, diminuí-las ou multiplicá-las de acordo com as regras estabelecidas, permanecerão sempre imaginárias."[24]

O termo "imaginários" foi utilizado por Descartes em outras situações para traduzir a impossibilidade de uma representação geométrica para as equações. Em seu livro, ele também faz referências às equações cúbicas e ao método de resolução de Cardano:

"Além disso, deveria ser comentado que este método de expressar as raízes através de relações com os lados de certos cubos cujos conteúdos sejam conhecidos não é mais claro ou mais simples que o método de expressá-las por meio de relações envolvendo arcos ou porções de círculo, quando seu triplo é conhecido. E as raízes das equações cúbicas que não podem ser resolvidas pelo método de Cardano podem ser expressas tão claramente quanto qualquer outra, ou mais claramente do que outras pelo método dado aqui. Por exemplo, considerando dada a raiz da equação $z^3=-qz+p$, sabemos que ela é a soma de duas linhas em que cada uma é o lado de um cubo cujo volume é $\frac{1}{2}q$ somado ao lado de um quadrado cuja área é

[23] Descartes,R. *The Geometry of Rene Descartes*, New York: Dover Publications, 1954. p 167.
[24] Descartes,R. *The Geometry of Rene Descartes*, New York: Dover Publications, 1954. p 175.

$\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$, e a outra é o lado de um outro cubo cujo volume é a diferença entre $\frac{1}{2}q$ e o lado de um quadrado cuja área é $\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$, o que representa a determinação das raízes como no método de Cardano. Não há dúvida que o valor da raiz da equação $z^3 = +qz - p$ também é conhecido e claramente concebido quando considerado como o comprimento de uma corda inscrita em um círculo de raio $\sqrt{\frac{1}{3}P}$ e subentendendo um arco que é um terço do arco subentendido pela corda de comprimento $\frac{3q}{p}$. Esses termos são menos complicados do que os outros e eles poderiam ser muito mais concisos utilizando símbolos particulares que os expressassem, como o símbolo $\sqrt[3]{}$ é usado para representar o lado de um cubo (...) porque, pela sua natureza, essas raízes não podem ser expressas em termos simples e nem podem ser determinadas por nenhuma construção que seja ao mesmo tempo mais fácil e mais geral.”[25]

Descartes já havia mostrado, através da trissecção de um ângulo e de meias proporcionais, como obter geometricamente a solução da equação $z^3 = +3z - q$, em que são utilizados um círculo da raio unitário e uma corda de medida q. Também tinha enunciado algumas conjecturas que relacionam o discriminante da fórmula apresentada por Cardano e a possibilidade desta construção.

A influência de Descartes sobre seus contemporâneos foi bastante significativa na França e os números batizados por ele de “imaginários” ficaram conhecidos deste modo durante o desenvolvimento dos estudos de álgebra e análise realizado pelos sucessores de Descartes. Na época de que tratamos aqui já estava bastante claro que estes números não podem ser descartados, ainda que não se tenha definição precisa ou uma representação deles como entes matemáticos plenamente legítimos.

O século XVII é o palco de uma verdadeira explosão na matemática: o estudo da geometria pura cede espaço para o estudo de outras geometrias; a aritmética se enriquece com numerosos resultados e a sua transição para a álgebra é facilitada pelo estudo de fórmulas válidas para números arbitrários e pela pesquisa de soluções gerais, trazendo como resultado a valorização da linguagem simbólica. A forma como as equações são tratadas, fazendo variar os termos desconhecidos ou os outros termos da equação, e a maneira de representá-las através de figuras colocam em evidência uma correspondência entre objetos algébricos e geométricos que irá culminar com a noção de função e os estudos relacionados às séries e ao cálculo diferencial e integral. No entanto, muitas destas inovações não eram apoiadas em demonstrações consideradas rigorosas pelos matemáticos do século seguinte, que tentaram

[25] Descartes,R. *The Geometry of René Descartes*, New York: Dover Publications, 1954, p 215-216.

então fundar estas teorias sobre novas bases, o que abriu caminho também para uma novo tratamento dos números imaginários.

Segundo D. Flament[26], três campos de pesquisa parecem importantes para se obter uma imagem precisa sobre a inserção dos números imaginários nos cálculos matemáticos e sobre o progresso que a sua utilização permitiu realizar. Cada um dos três campos, apresentados a seguir, possui suas dificuldades particulares:

1- *Tentativas para banir os imaginários dos resultados*

Expressões do tipo $\sqrt[n]{a+\sqrt{-b}}+\sqrt[n]{a-\sqrt{-b}}$ não são novas neste momento, pois os italianos do século XVI já procuravam calcular expressões deste tipo para o caso de $n=3$. Foi de fato através da resolução de uma equação de terceiro grau, que resultava no caso "irredutível" de Cardano, que Bombelli chegou à expressão $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=4$. É difícil de acreditar, levando em consideração o método de resolução desta equação utilizado na época, que ele tenha chegado a essa expressão sem ter a prévia certeza de que 4 é uma raiz da equação.

Um estudo mais sistemático destas fórmulas foi promovido por Leibniz que, em 1675, em uma carta endereçada à Huygens, comunica suas pesquisas e a "curiosa" relação: $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$. Huygens, em sua resposta, demonstra uma familiaridade já avançada em relação a esses problemas, ao mesmo tempo em que demonstra certa aversão aos números imaginários, comentando que existia algo escondido dentro desta expressão que continuava incompreensível. Leibniz qualifica os números imaginários como "*um recurso elegante e maravilhoso para a inteligência humana, um nascimento* contra-natura *no campo do pensamento, quase um anfíbio entre o ser e o não ser*." (Collete, 1979, p.131). Vemos assim, que Leibniz não rejeita os números imaginários contidos nas expressões que utiliza, mas isto não impede que ele ache que seria mais cômodo retirar desses "números não interpretáveis" o direito de figurar em uma álgebra rigorosa e de compreensão universal. Ele afirma ter conseguido livrar essas expressões reais de seu caráter de irrealidade, empregando um método sobre o desenvolvimento de séries. Não nos estenderemos sobre este método, pois fugiríamos do escopo deste trabalho.

O nome de Abraham de Moivre é certamente um dos mais importantes no estudo das expressões citadas acima. Moivre nasceu na França no ano de 1667, mas após a revogação do Édito de Nantes buscou refúgio em Londres. Devemos a ele a fórmula que leva seu nome e

[26] *Histoire des nombres complexes, Entre algèbre et géométrie*, CNRS Éditions, Paris 2003.

que permite resolver "com uma plena generalidade e uma perfeita elegância"[27], uma questão fundamental da teoria das funções trigonométricas, a saber, o problema da multiplicação dos arcos circulares.

Foi a partir de 1706 que de Moivre conseguiu estabelecer uma ligação entre as expressões gerais, que faziam parte de sua proposta, e a divisão de um arco de círculo. Ele demonstra que estas expressões estão relacionadas à divisão de um arco de círculo em n partes iguais. Podemos encontrar estes cálculos nas *Transactions philosophiques* da Royal Academy de Londres, em que Moivre determina a solução de uma equação de grau ímpar:

Para n ímpar, a equação $ny+\frac{nn-1}{2.3}ny^3+\frac{nn-1}{2.3}.\frac{nn-9}{4.5}ny^5+...=a$ admite como solução $y=\frac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}+a}-\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{\sqrt{1+aa}+a}}$. Como exemplo, ele utilizou a equação do quinto grau $5y+20y^3+16y^5=4$. Neste caso, temos que $n=5$ e $a=4$, logo a raiz da equação seria apresentada pela fórmula: $y=\frac{1}{2}\sqrt[5]{\sqrt{17}+4}-\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[5]{\sqrt{17}+4}}$.

Moivre utiliza uma tábua de logaritmos e efetua algumas operações para estimar um valor para a raiz quinta em questão e conclui que $y=0{,}4313$ é uma solução aproximada para a equação dada. No caso em que os termos da equação são alternadamente positivos e negativos, a solução é dada por: $y=\frac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{aa-1}+a}+\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{a+\sqrt{aa-1}}}$.

Em um outro exemplo, Moivre resolveu a equação $5y-20y^3+16y^5=\frac{61}{64}$, em que $n=5$. Pela solução sugerida teríamos $y=\frac{1}{2}\sqrt[5]{\frac{61}{64}+\sqrt{\frac{-375}{4096}}}+\frac{1}{2}\sqrt[5]{\frac{61}{64}-\sqrt{\frac{-375}{4096}}}$, que fariam aparecer quantidades imaginárias. Neste momento, ele afirma que, se os cálculos forem difíceis com a tabela de logaritmos, podemos utilizar a tabela de senos da seguinte maneira:

[27] Flament, D. *Histoire des nombres complexes, Entre algèbre et géométrie*, CNRS Éditions, Paris 2003, p.48.

$a = \frac{61}{64} = 0{,}953125$, que equivale ao seno de 72° 23', logo a sua quinta parte vale aproximadamente 14° 28', cujo seno é 0,24982 que é aproximadamente $\frac{1}{4}$, solução exata da equação.

Neste procedimento, ele não justifica explicitamente a validade da troca da tabela de logaritmos pela tabela de senos, bem como não justifica o cálculo da quinta parte da medida do ângulo.

A partir dos exemplos citados, podemos perceber, nesta época, como as tentativas de "burlar" os cálculos com as quantidades imaginárias foram de extrema importância para que outros resultados matemáticos fossem encontrados. Atualmente, não encontramos dificuldades em relacionar as quantidades imaginárias com relações trigonométricas, já que a representação geométrica destas quantidades já nos é familiar. Entretanto, historicamente, a relação das quantidades imaginárias com as relações trigonométricas não passou pela representação geométrica dos números imaginários, que só foi desenvolvida no século XIX, como veremos no capítulo 3.

É justo esclarecer que a idéia desta relação não é uma criação devida somente à Moivre. Viète, em seu *Supplementum geometricae*, publicado em 1590, já havia notado que o caso "irredutível" das equações de terceiro grau estava relacionado à trissecção do arco e que todas as soluções de uma dada equação cúbica já haviam sido apresentadas por Girard. Viète também já havia obtido uma fórmula de multiplicação por n através de regras trigonométricas. Veremos que Moivre segue exatamente o processo inverso.

As pesquisas de Moivre, por volta de 1730, permitiram concluir um importante resultado que o faria sair definitivamente do anonimato:

$$\cos B = \frac{1}{2}\sqrt[n]{\cos .nB + \sqrt{-1}\sin .nB} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{\cos .nB - \sqrt{-1}\sin .nB}.$$

Outra realização de suas pesquisas foi o estudo mais aprofundado das expressões $\sqrt[n]{a+\sqrt{-b}}$, que o permitiu enunciar um resultado ainda mais importante. Em 1738, em uma carta endereçada a W. Jones, ele declara que estas expressões admitem n valores, todos da forma $p + q\sqrt{-1}$, em que p e q são números reais. Este resultado se baseia na demonstração da expressão particular $\sqrt[n]{\cos .a + \sqrt{-1}\sin .a}$, em que os n valores são obtidos através da divisão do arco a e dos arcos $a + kC$ (arcos que se diferenciam por um múltiplo da circunferência C).

Trabalhando sobre os casos irredutíveis das equações de terceiro grau, utilizando o método inventado por Leibniz para fazer desaparecer os números imaginários das expressões $\sqrt[n]{a+\sqrt{-b}}+\sqrt[n]{a-\sqrt{-b}}$, F. Nicole, em seu artigo *Sur le cas irréductible du troisième degré* [28], registra que é surpreendente que uma grandeza real seja expressa por uma composição de quantidades reais e imaginárias. Nicole verificou que era necessário que essas quantidades imaginárias fossem destruídas mutuamente durante os cálculos. Em seu trabalho, os termos "falsas" e "verdadeiras", utilizados para qualificar as raízes, já cediam lugar para os termos "negativas" e "positivas".

Nicole apresenta um método com uma seqüência de resultados e corolários que estão diretamente relacionadas às soluções de uma equação cúbica do tipo $x^3-px+q=0$, resolvida pelo método de Cardano, visto no primeiro capítulo.

Em seu corolário I, mostra que, no caso de $\frac{1}{27}p^3=\frac{1}{4}q^2$, a equação possuirá raízes reais, das quais duas delas são iguais.

Em seu corolário II, mostra que, no caso de $\frac{1}{27}p^3$ ser menor que $\frac{1}{4}q^2$, a equação possuirá duas raízes imaginárias.

E finalmente, em seu corolário III, mostra que, no caso de $\frac{1}{27}p^3$ ser maior que $\frac{1}{4}q^2$, a equação possuirá três raízes reais e todas diferentes entre si, embora elas apareçam através de uma forma imaginária, já que $\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}$ é uma quantidade imaginária.

Um importante resultado de seu trabalho foi mostrar que a quantidade $\left(\frac{a}{b}+\sqrt{-1}\right)^n+\left(\frac{a}{b}-\sqrt{-1}\right)^n$ que envolve quantidades imaginárias, sendo n um número inteiro ou fracionário, positivo ou negativo, sempre resultará em uma quantidade real. Essa explicação é feita através do desenvolvimento de cada uma das parcelas da expressão acima, em que:

$$\left(\frac{a}{b}+\sqrt{-1}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^n+\frac{n}{1}.\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}.\sqrt{-1}+\frac{n.(n-1)}{1.2}.\left(\frac{a}{b}\right)^{n-2}.(-1)+\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}.\left(\frac{a}{b}\right)^{n-3}.\left(-1\sqrt{-1}\right)+etc.$$

e

[28] Nicole,F., *Mémoire de l'Historie de l'Académie des Sciences de Paris*, 1738, p.97.

$$\left(\frac{a}{b}-\sqrt{-1}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^n-\frac{n}{1}.\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}.\sqrt{-1}+\frac{n.(n-1)}{1.2}.\left(\frac{a}{b}\right)^{n-2}.(-1)-\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}.\left(\frac{a}{b}\right)^{n-3}.\left(-1\sqrt{-1}\right)+etc.$$ [29]

A soma dessas duas expressões acima será dada por:

$$2.\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n-\frac{n.(n-1)}{1.2}.\left(\frac{a}{b}\right)^{n-2}+\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.4}.\left(\frac{a}{b}\right)^{n-4}-\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4).(n-5)}{1.2.3.4.5.6}.\left(\frac{a}{b}\right)^{n-6}+etc\right).$$

Logo, a soma dessas expressões não será afetada pelas quantidades imaginárias, resultando em uma quantidade real. Ele segue dando exemplos de desenvolvimento quando n é inteiro positivo, negativo e fracionário.

Este é um bom exemplo para que possamos observar o tratamento dado aos imaginários pelos matemáticos do século XVIII. A necessidade de demonstração é, na verdade, uma necessidade de explicação, envolvendo a escrita simbólica.

A escrita simbólica, neste momento, difere pouco da utilizada por Descartes, porém apresenta certas particularidades. O símbolo que representava igualdade “æ” ou “ ∞ ” dá lugar ao símbolo “=”. O símbolo que traduz a extração de uma raiz ainda não está unificado, podemos encontrar diversas maneiras de representá-lo. Descartes utiliza para a extração de raiz quadrada o mesmo símbolo utilizado atualmente, mas Nicole utiliza para a extração da raiz cúbica o símbolo $\sqrt[3]{a}$, que é menos ambíguo do que o $\sqrt{C.a}$ adotado por Descartes.

A expressão escrita em linguagem moderna como:

$\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}}\right)^2$, era registrada da seguinte maneira:

$$\overline{\sqrt[3]{}\left[\frac{1}{2}q+\sqrt{}\left(\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3\right)\right]+\sqrt[3]{}\left[\frac{1}{2}q-\sqrt{}\left(\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3\right)\right]}^{\,2}.$$

A linha horizontal acima do número 2 significava que toda a expressão abaixo deveria ser elevada ao quadrado. A utilização de qq no lugar de q^2 deve-se à escrita de Descartes e Euler. O termo $\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}$, por exemplo, era expresso por $\frac{n\times n-1\times n-2}{1.2.3}$, cujo numerador representa o produto dos três números consecutivos n, $n-1$ e $n-2$. A ausência de parêntesis poderia gerar outra interpretação, já que poderíamos calcular $n\times n-1$ como n^2-n ou como sendo n^2-1.

Atualmente, não consideraríamos as explicações de F. Nicole como demonstrações universais. A afirmação de que a quantidade $\left(\frac{a}{b}+\sqrt{-1}\right)^n+\left(\frac{a}{b}-\sqrt{-1}\right)^n$ é real é apresentada

[29] As expressões citadas estão em linguagem atual. Exibiremos em breve a simbologia utilizada nesta época.

como uma generalização da ausência de quantidades imaginárias nos primeiros termos da seqüência obtida após a soma das duas expressões. Alguns anos mais tarde, Nicole, em um trabalho apresentado à Academia de Paris, demonstra a fórmula $\sqrt[3]{1+\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{-1}}=\sqrt[3]{4}$.

Prosseguindo nosso objetivo de entender o tratamento dado aos imaginários pelos matemáticos do século XVIII, passamos a analisar agora alguns resultados de Euler que estão diretamente relacionados com o problema das soluções gerais da soma de dois radicais particulares. Em algumas notas de sua *Introdução à análise infinitesimal,* Euler apresenta resultados que, embora estejam diretamente ligados à fórmula de Moivre, esclarece como devem ser utilizadas as quantidades imaginárias. Um exemplo pode ser visto na nota 132 desta mesma obra:

> "De $(\sin.z)^2+(\cos.z)^2=1$, decompondo em fatores temos $\left(\cos.z+\sqrt{-1}\sin.z\right)\left(\cos.z-\sqrt{-1}\sin.z\right)=1$.
>
> Esses fatores, apesar de imaginários, são de grande utilidade na combinação e na multiplicação de arcos. De fato, fazendo o produto dos fatores
>
> $\left(\cos.z+\sqrt{-1}\sin.z\right)\left(\cos.y+\sqrt{-1}\sin.y\right)$, encontraremos:
>
> $\cos.y.\cos.z-\sin.y.\sin.z+\left(\cos.y.\sin.z+\sin.y.\cos.z\right)\sqrt{-1}$, mas como
>
> $\cos.y.\cos.z-\sin.y.\sin.z=\cos.(y+z)$ e
> $\cos.y.\sin.z+\sin.y.\cos.z=\sin.(y+z)$
>
> obteremos este produto:
>
> $$\left(\cos.y+\sqrt{-1}\sin.y\right)\left(\cos.z-\sqrt{-1}\sin.z\right)=\cos.(y+z)+\sqrt{-1}\sin.(y+z).$$
>
> Analogamente:
>
> $$\left(\cos.y-\sqrt{-1}\sin.y\right)\left(\cos.z-\sqrt{-1}\sin.z\right)=\cos.(y+z)-\sqrt{-1}\sin.(y+z).$$
>
> Da mesma forma que:
>
> $$\left(\cos.x\pm\sqrt{-1}\sin.x\right)\left(\cos.y\pm\sqrt{-1}\sin.y\right)\left(\cos.z\pm\sqrt{-1}\sin.z\right)$$
> $$=\cos.(x+y+z)\pm\sqrt{-1}\sin.(x+y+z)."$$

Euler fornece, assim, um enunciado da fórmula, mas há em sua exposição uma clareza superior à explicação de F. Nicole. Podemos constatar com nitidez, no desenvolvimento de Euler, a forte ligação entre as extrações de raízes de quantidades imaginárias e arcos de círculos. Novos resultados aparecerão e acrescentarão aos estudos já realizados, mas não modificarão estes resultados.

2- Tentativas para decompor toda fração em elementos simples

Os matemáticos Árabes e Hindus, ao buscarem relações entre o grau de uma equação e o número de suas raízes, já tratavam dos problemas de decomposição de uma equação em fatores simples. Na Itália do século XVI, encontramos estudos que apresentam um interesse por assunto, pois para Cardano as equações cúbicas poderiam possuir três raízes, assim como para Ferrari. Bombelli, com suas raízes “sofisticadas”, fornece uma base mais sólida para as constatações de seus contemporâneos. Viète apresentou a construção de uma equação do quinto grau a partir de suas cinco raízes.

Com o conhecimento das equações canônicas de Harriot, que são obtidas a partir de produtos de fatores de primeiro grau da forma $a-b$, já se apresentava um método em que se podia reconhecer que uma equação de terceiro ou de quarto grau admitiria três ou quatro raízes, embora seja importante relembrar que Harriot recusava as raízes negativas. Girard foi mais audacioso quando apresentou os números “inexplicáveis”, ao enunciar que uma equação de grau n possui necessariamente n raízes. Quando ele encontrava um número de raízes menor que o grau da equação, ou ele repetia raízes já encontradas (apresentando o que atualmente definimos como multiplicidade de uma raiz) ou ele acrescentava tantas raízes “impossíveis” quantas fossem necessárias, de modo que seu enunciado não perdesse o caráter de generalidade. Descartes não acrescentou muito em afirmar que uma equação de grau n poderia admitir no máximo n raízes, entretanto sua contribuição foi notória quando relacionava o número de raízes de uma equação aos sinais dos seus termos.

As pesquisas tentaram demonstrar justamente que toda equação algébrica poderia ser resolvida através de métodos de radicais. O matemático Norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829) mostrou que este tipo de resolução geral não poderia exceder às equações de quarto grau.

As contribuições de Leibniz e Jean Bernoullli para a integração de funções racionais, decompondo-as em elementos simples, foi o primeiro passo para o estudo de novos problemas. Eles ampliaram para as quantidades imaginárias as regras demonstradas, no cálculo integral, para os números reais. Assim, estes estudos deveriam conduzir naturalmente à decomposição de uma função racional inteira de variável x em um produto de fatores de primeiro grau da forma $x-a$ ou $x-a-b\sqrt{-1}$ e os problemas de integração colocariam o problema dos logaritmos dos números imaginários.

Tomamos como exemplo a expressão $\frac{1}{x^2+1}$. Em uma primeira etapa chegamos à decomposição $\frac{1}{2i}\log\left(\frac{1}{x-i}+\frac{1}{x+i}\right)$, cuja primitiva será $arctg.x$ ou em um cálculo formal $\frac{1}{2i}\log\left(\frac{x-i}{x+i}\right)+c$.

Nicolas Bernoulli recusou-se a admitir que uma função racional inteira, com coeficientes reais, pudesse ser representada por um produto de fatores de primeiro e de segundo graus com coeficientes reais. Ele apresentou esta idéia em carta a Euler que ficou motivado a estudar o tema, admitindo que o teorema seria demonstrável.

Uma primeira demonstração completa deveu-se a Jean Le Rond d'Alembert. Ela pareceu tão rigorosa na época que o Teorema Fundamental da Álgebra chegou a ser conhecido como o "Teorema de d'Alembert". No entanto, Gauss apresentaria em seus trabalhos em 1799, algumas objeções ao trabalho de d'Alembert. Do ponto de vista aritmético, esta demonstração deveria ser justificada de uma maneira mais rigorosa, pois d'Alembert admitia, como trivial, o fato de que uma função contínua, definida em um intervalo fechado e limitado possuía um valor mínimo em um de seus pontos.

Euler forneceu uma explicação um pouco diferente da fornecida por d'Alembert. Em sua obra *Introdução à análise infinitesimal*, que pode ser considerada como um estudo da álgebra preliminar ao cálculo diferencial e integral, encontramos algumas notas em que podemos observar resultados e expressões importantes para a história dos números imaginários:

> "144. Há comumente uma dificuldade de encontrar desta maneira os fatores imaginários; por esta razão apresento neste capítulo, um método particular, através do qual poderemos encontrar, em muitos casos, os fatores simples imaginários. Sendo a natureza dos fatores simples imaginários tal que o produto entre dois deles seja real, nós os encontraremos todos, procurando os fatores duplos, ou da forma $p-qz+rzz$, que são reais, mas cujos fatores simples sejam imaginários; pois é evidente que, conhecendo uma vez todos os fatores duplos trinômios da forma $p-qz+rzz$, que contém a função $\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\varepsilon z^4+\&c$, nós teremos ao mesmo tempo todos os fatores imaginários."

> "145. Logo o trinômio $p-qz+rzz$ terá fatores simples imaginários se $4pr>qq$, ou $\frac{q}{2\sqrt{pr}}<1$, mas como o seno e o cosseno dos ângulos são menores que a unidade, a fórmula $p-qz+rzz$ terá fatores simples imaginários se $\frac{q}{2\sqrt{pr}}$ for igual ao seno ou ao cosseno de um ângulo

qualquer. Seja então $\frac{q}{2\sqrt{pr}} = \cos\varphi$, ou $q = 2\sqrt{pr}.\cos\varphi$ e o trinômio $p - qz + rzz$ conterá os fatores simples imaginários, mas para não ser atrapalhado por nenhum sinal de radical, escolhi a forma $pp - 2pqz.\cos\varphi + qqzz$, cujos fatores imaginários sempre serão: $qz - p\left(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi\right)$ e $qz - p\left(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi\right)$. Vemos desta forma que se $\cos\varphi = \pm 1$, os dois fatores, pelo fato de $\sin\varphi = 0$, tornam-se iguais e reais."

"146. Considerando a função inteira $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \&c$, nós conhecemos seus fatores simples imaginários se determinarmos as letras *p* e *q* com o ângulo φ, de forma que o trinômio $pp - 2pqz.\cos\varphi + qqzz$ seja o fator da função. Logo, teremos como fatores simples imaginários $qz - p\left(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi\right)$ e $qz - p\left(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi\right)$. Conseqüentemente a função proposta se reduzirá a zero fazendo-se: $z = \frac{p}{q}\left(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi\right)$ e $z = \frac{p}{q}\left(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi\right)$. Esta dupla substituição vai gerar então, duas equações através das quais poderemos determinar a fração $\frac{p}{q}$ e o arco φ."

"147. Mesmo que estas substituições que faremos para *z* pareçam difíceis em um primeiro momento... podemos resolvê-la de forma eficaz, pois tendo mostrado que $\left(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\varphi\right)^n = \cos.n\varphi \pm \sqrt{-1}\sin.n\varphi$, não precisaremos mais escrever as fórmulas seguintes para as diferentes potências de *z*:

Para o primeiro fator	Para o segundo fator
$z = \frac{p}{q}\left(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi\right)$	$z = \frac{p}{q}\left(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi\right)$
$z^2 = \frac{p^2}{q^2}\left(\cos.2\varphi + \sqrt{-1}\sin.2\varphi\right)$	$z^2 = \frac{p^2}{q^2}\left(\cos.2\varphi - \sqrt{-1}\sin.2\varphi\right)$
$z^3 = \frac{p^3}{q^3}\left(\cos.3\varphi + \sqrt{-1}\sin.3\varphi\right)$	$z^3 = \frac{p^3}{q^3}\left(\cos.3\varphi - \sqrt{-1}\sin.3\varphi\right)$
&c	&c

Façamos para abreviar, $\frac{p}{q} = r$. Nós teremos após as devidas substituições, as duas equações seguintes:

$$0 = \begin{Bmatrix} \alpha + \beta r.\cos\varphi + \gamma r^2.\cos 2\varphi + \delta r^3.\cos 3\varphi + etc \\ + \beta r\sqrt{-1}\sin\varphi + \gamma r^2\sqrt{-1}\sin 2\varphi + \delta r^3 \sin 3\varphi + etc. \end{Bmatrix} \text{ e}$$

$$0 = \begin{Bmatrix} \alpha + \beta r.\cos\varphi + \gamma r^2.\cos 2\varphi + \delta r^3.\cos 3\varphi + etc \\ - \beta r\sqrt{-1}\sin\varphi - \gamma r^2\sqrt{-1}\sin 2\varphi - \delta r^3 \sin 3\varphi + etc. \end{Bmatrix}."$$

> "148- Se somarmos estas duas equações, ou se subtrairmos uma da outra e dividirmos este resultado por $2\sqrt{-1}$, obteremos estas duas equações reais:
> $0 = \alpha + \beta r.\cos\varphi + \gamma r^2.\cos 2\varphi + \delta r^3.\cos 3\varphi + etc.$
> e
> $0 = \beta r.\sin\varphi + \gamma r^2.\sin 2\varphi + \delta r^3.\sin 3\varphi + etc$ que podemos deduzir imediatamente da função proposta $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \&c$, fazendo inicialmente para cada potência de *z*, $z^n = r^n \cos.n\varphi$, e em seguida $z^n = r^n \sin.n\varphi$."

O século XVIII apresentou uma intensa atividade em torno da forma do "imaginário". Uma primeira apresentação deste resultado pode ser encontrada em 1747, na obra de d'Alembert em sua dissertação sobre os ventos[30]. No artigo 79, ele afirma que uma quantidade qualquer composta de tantos imaginários quanto desejarmos pode ser reduzida à forma $A + B\sqrt{-1}$ com A e B quantidades reais; de tal maneira que se a quantidade proposta for real, isto significa que $B = 0$.

Em seguida são apresentados os resultados:

1. $\dfrac{a + b\sqrt{-1}}{g + h\sqrt{-1}} = A + B\sqrt{-1}$;
2. $[a + b\sqrt{-1}]^{g+h\sqrt{-1}} = A + B\sqrt{-1}$;
3. $a + b\sqrt{-1} \pm (g + \sqrt{-1}) = A + B\sqrt{-1}$ e que $a + b\sqrt{-1} \times (g + \sqrt{-1}) = A + B\sqrt{-1}$;

Euler aborda esta temática em sua obra *Recherces sur les racines imaginaires des équations* (1749) apresentando diversos teoremas e corolários, dos quais ressaltamos o teorema XII que afirma que toda fração formada por adição, subtração, multiplicação ou por divisão, envolvendo quantidades imaginárias quaisquer da forma $M + N\sqrt{-1}$, terá a mesma forma $M + N\sqrt{-1}$, em que as letras M e N representam quantidades reais.

Deste teorema decorre o corolário III, que diz que a forma geral $M + N\sqrt{-1}$ compreende todas as quantidades reais quando considerado $N = 0$. Deste modo, as quatro operações mencionadas anteriormente atendem não somente aos imaginários da forma $M + N\sqrt{-1}$, mas também aos números reais.

D'Alembert registra em 1784 na *Encyclopédie Méthodique*, a importância de seu próprio trabalho, nos artigos denominados "*Équation*" e "*Imaginaire*". No primeiro, ele afirmou ter sido o primeiro a demonstrar que haveria de fato sempre uma quantidade, sendo ela real ou igual a $m + n\sqrt{-1}$ com m e n sendo reais, e m podendo ser igual a zero. No

[30] D'ALEMBERT, Jean Le Rond. *Réflexions sur la cause générale des vents.* Paris, 1747.

segundo artigo, ele ressaltou a importância de ter sido o pioneiro em demonstrar que qualquer quantidade imaginária, tomada à vontade, poderia sempre ser reduzida à forma $e+f\sqrt{-1}$, com e e f sendo quantidades reais. Afirmou também que Euler, alguns anos após, demonstrou esta mesma proposição, sem que existisse diferença significativa da sua e indica as páginas das obras em que as duas demonstrações se encontram, no caso de alguma dúvida. No caso do resultado que afirma que toda raiz imaginária de uma equação qualquer pode ser reduzida à forma $e+f\sqrt{-1}$, com e e f sendo quantidades reais, d'Alembert chamou atenção para o fato de que a demonstração apresentada por Euler, diferiria totalmente da apresentada por ele mesmo.

Embora as realizações de d'Alembert e de Euler tenham sido de extrema relevância, nem todos os problemas sobre a forma dos imaginários estavam resolvidos. Citamos como exemplo o artigo *Sobre a forma das raízes imaginárias das equações* (1772), em que Joseph-Louis de Lagrange retorna ao estudo deste tema, classificando as demonstrações de d'Alembert como engenhosas, embora necessitassem de um caráter mais rigoroso e de maior generalidade.

Os trabalhos de Gauss viriam fornecer maiores esclarecimentos acerca deste tema, mas dificuldades de outra natureza ainda existiam. Outras reflexões sobre a forma $M+N\sqrt{-1}$ seriam exploradas por Jean-Robert Argand que conserva a forma $a+b\sqrt{-1}+c\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ para designar uma reta orientada em um espaço de três dimensões, enquanto esta forma seria redutível à forma genérica $M+N\sqrt{-1}$, como veremos adiante, associada então, a um segmento orientado no plano.

Temos então que, todos os estudos que relacionavam o grau de uma equação polinomial e suas raízes esbarravam necessariamente no fato de escrevê-la através de fatores simples. Para isso, foram indispensáveis conjecturas a respeito dos números imaginários e de sua forma genérica. Notório foi o avanço nesta direção, embora as tentativas de utilizar, para estas quantidades, regras já conhecidas para os reais, culminaram algumas falhas que demonstraram que o percurso à legitimidade ainda deveria ser trilhado.

O estudo da decomposição de uma fração em elementos simples vai ao encontro do desenvolvimento da teoria dos logaritmos, que provocará o interesse em estender a concepção dos logaritmos para os números negativos e imaginários, como veremos a seguir.

3- Tentativas de generalização dos logaritmos

John Napier (1550-1617), um lorde escocês admirador da matemática, já havia demonstrado, em fragmentos de uma obra publicada após a sua morte, interesse pelos números imaginários. Muitos ressentem que Napier tenha interrompido seus trabalhos, já que provavelmente se questionaria sobre os logaritmos de números negativos, embora não fossem encontrados em seus trabalhos indícios de que seu pensamento seria conduzido para uma correta interpretação dos números imaginários.

O primeiro registro de alusão direta aos logaritmos de um número imaginário foi uma carta escrita por Leibniz, endereçada a Jean Bernoulli, em 1702. Leibniz já tinha indicado anteriormente que os números imaginários introduziriam uma relação entre a quadratura do círculo, da hipérbole e de suas respectivas partes.

Atribuímos a Jean Bernoulli resultados importantes como a relação entre arcos de círculos e logaritmos de números imaginários e a determinação de uma expressão para a tangente de um múltiplo de arco a partir da tangente do próprio arco.

Houve diversas descobertas consecutivas neste período, que deram a impressão equivocada de que a teoria dos logaritmos dos números complexos estava consolidada. Ainda seriam necessárias algumas décadas para que esta teoria formasse bases sólidas, fornecidas através dos trabalhos de Euler.

Alguns resultados devem ser destacados, pois geraram controvérsias e dificuldades a respeito deste tema. Obviamente estes resultados, independentes de estarem corretos ou não, impulsionaram o desenvolvimento do pensamento dos matemáticos da época, culminando em uma teoria bem fundamentada que nos acompanha até os dias de hoje.

O problema de cálculo já apresentado no item 2 anterior nos leva à primitiva da fração $\frac{1}{x^2+1}$, apresentada no cálculo formal por $\frac{1}{2i}\log\left(\frac{x-i}{x+i}\right)+c$ ou $arctg.x$. Efetuando as duas mudanças de variáveis citadas abaixo:

$$arctg.x = \frac{y}{2} \quad \text{e} \quad tg\,\frac{y}{2} = t$$

obteremos $\frac{y}{2} = \frac{1}{2i}\log\frac{t-i}{t+i}$ ou $yi = \log\frac{t-i}{t+i}$

ou ainda $yi = \log\frac{t^2-2it-1}{t^2+1}$

o que nos dá finalmente: $xi = \log[-(\cos.x + i\sin.x)]$.

O sinal $-$ da quantidade do logaritmo que está entre colchetes foi a primeira dificuldade que originou a divergência entre Leibniz e Bernoulli. Partindo do fato que $\log(+1) = 0$, Bernoulli conclui:

$$\log(1) = \log(-1)^2 = 2\log(-1) = 0 \text{, ou seja, } \log(-1) = 0.$$

$$\log\left(\sqrt{-1}\right) = \log(-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log(-1) = 0 \text{, ou seja, } \log\left(\sqrt{-1}\right) = 0.$$

Desta forma, ele enuncia que todo número negativo possui um logaritmo real, sendo ele o mesmo de seu valor absoluto. Esta falsa conclusão pode ser expressa em linguagem matemática por:

$$(-a)^2 = a^2 \Rightarrow \log(-a)^2 = \log(a)^2 \Rightarrow 2.\log(-a) = 2.\log(a) \Rightarrow \log(-a) = \log(a).$$

O que sustentava a idéia de que um número e seu oposto possuem o mesmo logaritmo. Este enunciado não poderia ser considerado como um absurdo ou como um erro cuja origem pudesse ser facilmente observada, sobretudo que ele conservaria a característica unívoca do logaritmo.

Euler, através de uma carta enviada a Bernoulli em 1728, evidencia a contradição e sugere que ele desconsidere a característica unívoca do logaritmo. Euler apontava para o fato de que todos os números deveriam admitir uma infinidade de logaritmos. Para que fique notória a diferença dos autores citados em relação aos seus resultados sobre os logaritmos, destacamos que Bernoulli em outra carta enviada anteriormente a Euler, ao se questionar sobre o valor da fórmula $y = (-1)^x$, apresenta o seguinte desenvolvimento:

I- $y = (-n)^x$

II- $\log.y = x\log.(-n)$ e derivando:

III- $\dfrac{dy}{y} = dx.\log.(-n)$

IV- Para $[\log.(-n) = \log.(+n)]$, ele se apoiou no fato seguinte:

$$d\log(-z) = \frac{-dz}{-z} = \frac{+dz}{z} = d\log(z), \text{ então } \log(-z) = \log(z).$$

Tendo esse resultado em mãos e feita a substituição $\log.(-n)$ por $\log.(n)$ na relação III e, posteriormente, fazendo a integração, ele obteve a igualdade $\log.y = x\log.(n)$. Daí obteve $y = n^x$ que no caso em que $n = 1$ resulta em $1^x = 1$, que o permitiu concluir que $y = 1$.

O desenvolvimento do estudo dos números imaginários muito se deveu às controvérsias entre Leibniz e Bernoulli, depois entre Bernoulli e Euler, e posteriormente entre Euler e d'Alembert. Elas chamaram atenção também para o estudo de outras funções.

Após métodos antigos que utilizavam comparações de progressões aritméticas e geométricas, o estudo da função exponencial realizado principalmente por Wallis, Newton e J. Bernoulli revelou que a função logarítmica seria a inversa desta nova função, cujas propriedades eram mais simples.

A aplicação das exponenciais sobre os números imaginários, já poderia ser observada em 1740 em algumas notas do trabalho de Euler. Na nota 133 de sua obra *Introdução à análise infinitesimal* (1748), ele parte do resultado $(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^n = \cos .nz \pm \sqrt{-1}\sin .nz$ e obtém as seguintes igualdades que podem ser verificadas sem maiores problemas:

$$\cos .nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2}$$

$$\sin .nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2\sqrt{-1}}$$

A partir deste resultado, em sua nota 138, considerando o arco z infinitamente pequeno, e n um número infinitamente grande i, de modo a obter para iz um valor finito ϕ, teremos então $iz = \phi$ e $z = \frac{\phi}{i}$ e, conseqüentemente, substituindo $\sin z = \frac{\phi}{i}$ e $\cos .z = 1$ nas igualdades citadas acima, teremos:

$$\cos\phi = \frac{\left(1+\frac{\phi\sqrt{-1}}{i}\right)^i + \left(1-\frac{\phi\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2} \quad \text{e} \quad \sin\phi = \frac{\left(1+\frac{\phi\sqrt{-1}}{i}\right)^i - \left(1-\frac{\phi\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2\sqrt{-1}}.$$

Vejamos como Euler apresentou um importante resultado relacionando as quantidades exponenciais imaginárias ao seno e ao cosseno de arcos reais. De resultado anterior, temos que $\left(1+\frac{z}{i}\right)^i = e^z$. Considerando $z = \phi\sqrt{-1}$ e $z = -\phi\sqrt{-1}$, obtemos $\left(1+\frac{\phi\sqrt{-1}}{i}\right)^i = e^{\phi\sqrt{-1}}$ e $\left(1-\frac{\phi\sqrt{-1}}{i}\right)^i = e^{-\phi\sqrt{-1}}$ respectivamente. Com as devidas substituições, chegamos às igualdades:

$$\cos\phi = \frac{e^{\phi\sqrt{-1}} + e^{-\phi\sqrt{-1}}}{2} \qquad \text{e} \qquad \sin\phi = \frac{e^{\phi\sqrt{-1}} - e^{-\phi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$ e, por conseguinte:

$$e^{\phi\sqrt{-1}} = \cos\phi + \sqrt{-1}\sin\phi \qquad \text{e} \qquad e^{-\phi\sqrt{-1}} = \cos\phi - \sqrt{-1}\sin\phi\,.$$

Com esses resultados, podemos retornar à controvérsia gerada em relação aos logaritmos de números negativos. Durante os anos de 1747 e 1748, Euler remeteu a d'Alembert diversas cartas que sustentavam que os números negativos não possuíam logaritmos reais, como pensavam d'Alembert e Bernoulli. Sua objeção em relação à teoria de d'Alembert se baseava no fato de que e na equação $y = e^x$ poderia assumir um valor positivo e negativo. Euler afirma que, se e assumisse o valor da expressão $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + etc.$, x seria o logaritmo hiperbólico do número y e seria impossível encontrar um valor para x tal que e^x fosse negativo. Isto faz com que ele considere que os logaritmos de números negativos devem ser impossíveis.

Esta denominação "impossível", dada por Euler aos logaritmos dos números negativos, remete à denominação dos números imaginários. Esta observação pode ser notada em sua obra *Vollständige Anleitung zur Álgebra* (1769) onde encontramos as seguintes citações:

> "Uma vez que todos os números que são possíveis de imaginar são, ou maiores ou menores que 0, ou são o próprio 0, é claro que não podemos incluir a raiz quadrada de um número negativo entre os números possíveis, então é necessário dizer que é uma quantidade impossível. É desta forma que nós somos conduzidos à idéia de números que pela sua própria natureza são impossíveis. Nós nominamos ordinariamente estes números de quantidades imaginárias porque eles existem puramente na imaginação."

> "...Os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc., ou seja, todos os números positivos, são logaritmos da raiz a (inteira natural ≥ 1) e de suas potências, e por conseguinte, logaritmos de números maiores que a unidade. Contrariamente, os números negativos como -1, -2, etc., são os logaritmos das frações $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a.a}$, etc. que são menores que a unidade, entretanto são ainda maiores que nada. Segue então que, se o logaritmo é positivo, o número é sempre maior que a unidade, mas se o logaritmo é negativo, o número é sempre menor que 1, e portanto maior que zero. Por conseguinte, não saberíamos indicar os logaritmos de números negativos, e é necessário concluir que os logaritmos de números negativos são impossíveis, e que eles pertencem à classe das quantidades imaginárias."

Utilizando os resultados de Euler e a linguagem conhecida atualmente, teríamos que $e^{i\pi} = \cos\pi + i.sen\pi$, ou seja, $e^{i\pi} = -1$ o que significaria escrever que $\ln(-1) = \pi.i$, logo os logaritmos de números negativos não seriam reais, como havia suposto d'Alembert e Bernoulli, e sim quantidades imaginárias. Devido aos seus estudos, Euler também ressalta que os números positivos e negativos possuem uma infinidade de logaritmos e, no caso dos positivos, apenas um é real. Devemos a Euler uma série de resultados na forma $p + q\sqrt{-1}$, envolvendo expressões como $\sin.(a + b\sqrt{-1})$, $\cos.(a + b\sqrt{-1})$ e $tg.(a + b\sqrt{-1})$, além de uma teoria dos logaritmos muito próxima da que conhecemos atualmente.

***

Os três campos de estudo que citamos, nos ajudam a perceber como os números "imaginários", embora não tenham sido o objeto principal de estudo neste período, participaram do desenvolvimento de novas teorias matemáticas que pretendiam fundar esta ciência sobre bases mais sólidas.

Durante este capítulo, destacamos as características principais do que se conhecia sobre os números "imaginários". As dificuldades encontradas pelos matemáticos nesta época, inclusive alguns equívocos, demonstram que a inexatidão ou a incompletude de muitos resultados podem representar um aspecto positivo que implica em reflexões necessárias para o desenvolvimento de uma nova teoria.

A presença destas quantidades anteriormente ditas "sofisticadas" na decomposição de funções racionais em elementos simples favoreceu o estudo de relações entre equações polinomiais e suas raízes, o cálculo de primitivas e o desenvolvimento da teoria dos logaritmos. Temos aí um bom exemplo de que estas quantidades já possuíam um espaço no desenvolvimento da matemática.

Todavia, faltavam ainda a estes números regras próprias e o caráter de entes matemáticos sobre os quais novos cálculos pudessem ser realizados. O nome de "imaginários", atribuído a estes números, caracteriza bem o contexto matemático no qual estão inseridos até este momento.

Veremos no capítulo seguinte como a busca de uma representação geométrica constituiu um momento decisivo para a história destas quantidades ditas "imaginárias", antes que elas fossem concebidas como números "complexos". Este estudo, no final do século XVIII e no início do século XIX, mostrará que a investigação do estatuto destes números foi um problema para os matemáticos durante dois séculos, antes da criação da análise vetorial e, conseqüentemente, da elaboração de novas regras que fornecerão a estas quantidades o estatuto de “números”.

Capítulo III – A representação geométrica dos números imaginários

Desde os gregos, o critério de existência para as entidades algébricas era dado a partir de sua representação geométrica. As soluções para problemas que atualmente seriam obtidas pela resolução de equações correspondiam a segmentos de reta obtidos por construções geométricas.

Durante o desenvolvimento da álgebra, desde a cultura árabe até a européia na Idade Média, números como os irracionais, mesmo associados à relação entre grandezas, apareciam na resolução de equações, mas ainda não possuíam sentido geométrico. Como vimos, os números negativos e suas raízes quadradas, ainda que presentes na resolução de equações, não eram admitidos como solução, uma vez que ainda não possuíam um estatuto definido. A legitimação destes números como entidades matemáticas aceitáveis passa necessariamente pela compreensão de sua natureza, relacionada à representação geométrica. Neste capítulo, citaremos alguns matemáticos e suas contribuições para a busca de uma representação geométrica para os números imaginários.

Uma análise histórica deste assunto nos remete às diversas tentativas de representação e suas dificuldades particulares.

Durante o século XVIII buscava-se uma forma lícita para representar da mesma maneira grandezas geométricas e aritméticas, tidas como objetos distintos. Um exemplo disto é o fato de que sinais distintos (“=” e “: :”) eram utilizados para representar a igualdade entre quantidades aritméticas e a igualdade entre razões geométricas.

Descartes foi quem deu o primeiro passo para solucionar esta questão, introduzindo uma nova maneira de utilizar a álgebra na demonstração de problemas geométricos. A obra de Descartes proporcionou uma concepção analítica da geometria euclideana, fornecendo recursos tanto para a demonstração de antigos resultados, quanto para a descoberta de novos. A utilização de curvas específicas para a resolução de novos problemas cede espaço para a utilização de uma classe mais geral de curvas, as curvas algébricas. Esta generalização se traduziria no desejo de que toda construção geométrica pudesse ser traduzida por fórmulas. Com esta nova sistematização, a distância entre a geometria e a álgebra começou a diminuir.

Relembramos que certas soluções de equações algébricas denominadas “falsas”, “impossíveis” ou “irredutíveis” não eram representadas por um desenho. Nestas condições, surgem os questionamentos sobre as bases das construções matemáticas e as primeiras tentativas de representação dos números imaginários. A descoberta de uma representação geométrica para os números imaginários forneceria um caráter homogêneo à álgebra.

John Wallis (1616-1703), professor de Geometria de Oxford foi o primeiro a admitir uma construção geométrica para raízes imaginárias. Esta nova perspectiva constava em sua obra *Tratado de Álgebra* (1685), cap. LXVI (Vol. II, p.286) da versão em Latim e já havia sido relatada em uma carta endereçada a John Collins, datada em 6 de maio de 1673, na qual sugere uma construção um pouco diferente das demais encontradas em seu livro.

Nesta carta, Wallis apresentou uma explicação de sua interpretação das raízes imaginárias como médias proporcionais, inseridas no contexto da discussão de Cardano na resolução de equações polinomiais. Inicialmente, ele fornece uma representação do fato de que uma magnitude pode ser "menos que nada". Considerando uma situação aplicada ao movimento, supõe que, se um homem avança de A para B, em linha reta, 5 jardas e então retorna de B para C 2 jardas, pergunta-se: quantas jardas ele avançou a partir de A até C? Teremos então (+ 5 – 2 = + 3), ou seja, ele teria avançado de A para C 3 jardas. No caso de ele ter avançado 5 jardas de A para B e, então, retornado 8 jardas em direção a D, temos que (+ 5 – 8 = - 3), ou seja, ele avançou 3 jardas menos que nada. Com este exemplo, Wallis afirma que – 3 designaria o ponto D, assim como + 3 o ponto C, ambos sobre a mesma reta.

Estes argumentos, baseados em deslocamentos de avanço e de recuo sobre uma reta, são pouco inovadores, mas o ponto que o destaca de seus antecessores é o fato de que ele relata: "agora, o que era admitido para retas, também deveria ser, pela mesma razão, permitido para planos."[31]

Os capítulos LXVI de seu *Tratado de Álgebra* possui diversos exemplos acerca deste tema, dois quais destacamos os seguintes:

> "Por exemplo, supondo que em um lugar ganhemos sobre o mar 30 acres, porém percamos em outro lugar 20 acres: se perguntarmos quantos acres ganhamos ao todo a resposta será 10 acres ou +10 (pois 30 – 20 =10)."[32]

Se, em seguida, perdermos ainda 20 acres, poderemos conceber a idéia de um plano negativo.

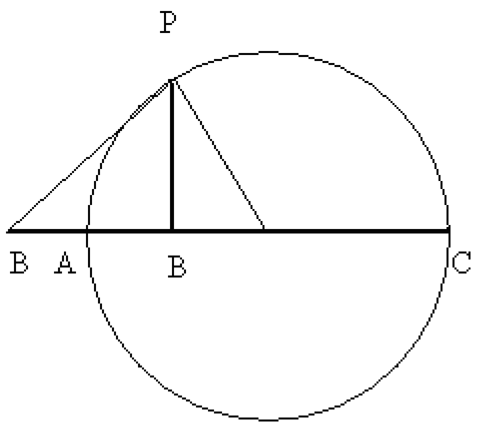
> "Mas agora (supondo certa superfície negativa de -1600 perches[33] em forma de quadrado) não é verdade que este suposto quadrado tenha que ter um

[31] Wallis, J. *A Treatise of Algebra*, London (1685), p.265
[32] 10 Acres equivalem a 1600 perches quadrados.
[33] Unidade de medida de superfície originada na Roma antiga.

> lado? E mesmo assim, qual será este lado? Não podemos dizer que é 40 nem -40 (pois qualquer um deles multiplicado por ele mesmo resulta +1600 e não -1600), podemos dizer então que é $\sqrt{-1600}$ (a suposta raiz de um quadrado negativo) ou (ainda equivalentemente) $10\sqrt{-16}$, ou $20\sqrt{-4}$, ou $40\sqrt{-1}$. Em que $\sqrt{\ }$ indica uma média proporcional entre uma quantidade positiva e uma quantidade negativa. Assim como $\sqrt{bc}$ indica uma média proporcional entre +*b* e +*c*; ou entre –*b* e –*c*; Logo $\sqrt{-bc}$ representa uma média proporcional entre +*b* e –*c*, ou entre –*b* e +*c*; que multiplicados resultam –*bc*. O que para uma consideração algébrica, é a verdadeira noção de uma raiz imaginária, $\sqrt{-bc}$.”

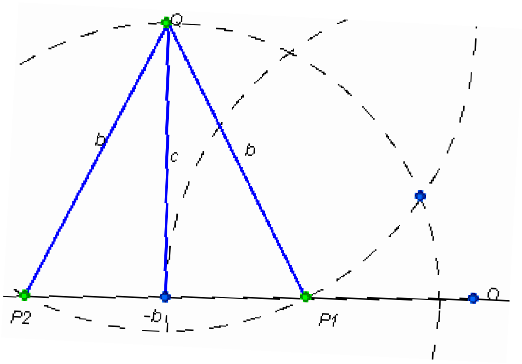
Wallis exemplificou sua argumentação algébrica através de diversas construções geométricas, mostrando como algumas quantidades imaginárias poderiam ser representadas como segmentos trigonométricos. No capítulo LXVII de sua obra, podemos observar como ele representou geometricamente, através de exemplos, o valor algébrico $\sqrt{-bc}$.

Ele construiu um círculo cujo diâmetro é AC e tomou o ponto B seguido de A de modo que AB = +*b* e considerou BC = +*c*, logo ele afirma que o diâmetro AC = +AB + BC = + *b* + *c* e que a média proporcional, ou o seno do arco AP, é BP = $\sqrt{bc}$. Mas quando toma B anterior a A, de modo que AB = - *b*, e a partir deste novo ponto B, temos BC = +*c*. Ele afirma então que o diâmetro AC = - AB + BC = - *b* + *c* e que a média proporcional BP = $\sqrt{-bc}$ agora é a tangente do mesmo arco AP do círculo dado (figura abaixo).

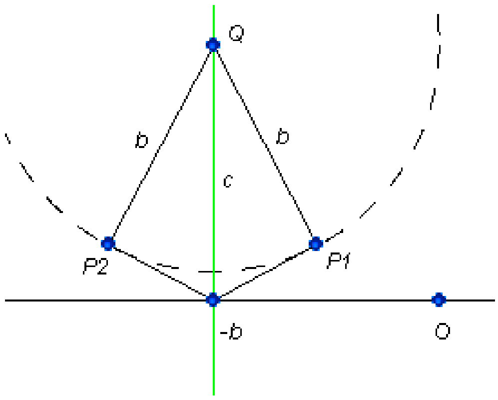


Após este exemplo, Wallis segue com mais dois exemplos de construção geométrica, cujas soluções seriam obtidas através da resolução de equações quadráticas. No primeiro exemplo, as raízes obtidas são reais e no segundo, imaginárias.

Mostramos, utilizando uma representação atual, como seriam interpretadas geometricamente, as raízes da equação quadrática $x^2 + 2bx + c^2 = 0, \quad b, c \geq 0.$[34] As raízes dessa equação são: $x = -b \pm \sqrt{b^2 - c^2}$, logo reais quando $b \geq c$. Neste caso, as raízes poderiam ser interpretadas por pontos P_1 e P_2 sobre a reta real, determinados pela construção representada abaixo.



Quando $b < c$, segmentos de comprimento b construídos a partir do ponto Q seriam pequenos para alcançar a reta numérica, logo os pontos P_1 e P_2 não estariam sobre esta reta, porém no mesmo plano. Esta situação seria representada da maneira abaixo:



[34] No texto original as construções são feitas a partir da equação quadrática $A^2 - 2SA + AE = 0$, de forma que A e E são linhas que representam as raízes da equação, sendo $S = \frac{A+E}{2}$. Neste caso, como S e AE são sempre positivos, não podemos considerá-las como uma construção geral das raízes de uma equação quadrática.

Em linguagem atual, P_1 e P_2 estariam associados às raízes $-b \pm i\sqrt{c^2 - b^2}$. Aparentemente em sua proposta, Wallis continuava correspondendo os sinais + e – aos sentidos “direita” e “esquerda”.

Podemos notar que a representação acima, baseada nas idéias de Wallis, não corresponde às representações atualmente utilizadas, já que no caso de *b* assumir valor 0, teríamos P_1=P_2, o que consequentemente nos levaria ao fato de que $i = -i$.

Embora não tivesse resolvido o problema da representação geométrica dos números imaginários, as tentativas de Wallis despertaram o interesse nos matemáticos em desvendar o mistério que envolvia esta questão.

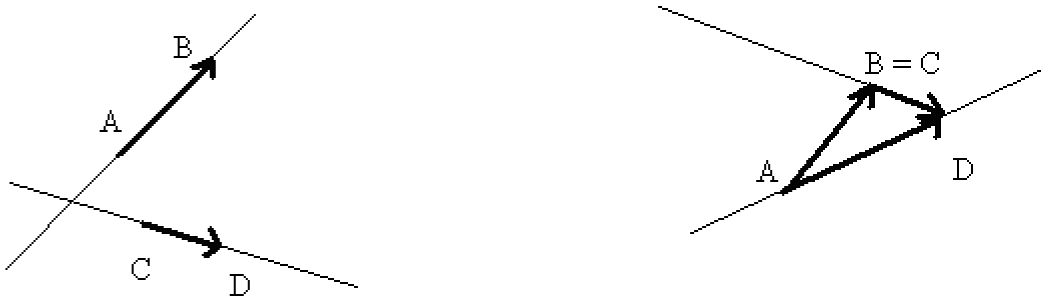
O Norueguês Caspar Wessel (1745-1818) é reconhecido como o primeiro a ter apresentado a atual representação geométrica para os números complexos e suas regras de composição. Seu trabalho, em dinamarquês, sobre este assunto foi apresentado ao *Royal Danish Academy of Sciences and Letters* em 1797 e publicado apenas dois anos após no jornal da academia.

Muitos historiadores consideram Wessel como um gênio ignorado em sua época. Com formação modesta e distante da intensa atividade científica e das teorias matemáticas desenvolvidas no momento, apresentou, aos 52 anos, o trabalho que o faz ser lembrado até os dias de hoje. Mas este trabalho foi esquecido durante um século e retornou ao conhecimento dos matemáticos graças à tese de S.A.Christensen em 1895. Sua obra é de extrema importância para a história dos números imaginários, embora não tenha sido claramente estudada.

A proposta de Wessel é claramente exposta desde o início, quando ele afirma que, sabendo como a direção deve ser representada analiticamente e como são expressos os segmentos de reta, através de uma relação entre um segmento desconhecido e outros conhecidos, ele poderia encontrar uma expressão que representasse de uma só vez, o comprimento e a direção do segmento desconhecido.

Sua proposta se baseia em uma consideração evidente de que a variação de direção produzida por operações algébricas também deveria ser representada por símbolos. Podemos constatar que Wessel não pretendia isolar a álgebra da geometria. Sua atitude era mais moderna, embora ela continuasse a ser, em grande parte, fiel ao espírito cartesiano. Para ele, a geometria analítica era a aplicação da álgebra à geometria.

A terminologia “segmento” utilizada por Wessel era usada para uma linha cuja direção e grandeza eram conhecidas. Ele apresentou uma definição para a soma de dois segmentos, como podemos visualizar na figura abaixo:



Podemos observar que, na soma de dois segmentos apresentada por Wessel, encontramos as noções atuais de invariância por translação e de segmentos eqüipolentes, embora a passagem de uma figura para a outra não tenha sido matematicamente definida.

Em relação à soma de dois segmentos ele faz a seguinte citação:

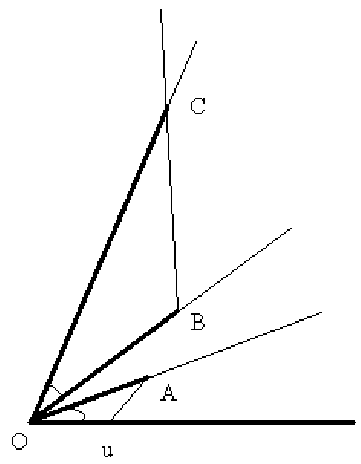
> “Da mesma forma, quando um dos lados de um triângulo segue de *a* para *b* e o segundo de *b* para *c*, dizemos que o terceiro, que segue de *a* para *c* é a soma destes dois outros, e é designado por *ab* + *bc*, de forma que *ac* e *ab* + *bc* possuem o mesmo significado, ou que *ac* = *ab* + *bc* = - *ba* + *bc*, se *ba* significa o segmento oposto a *ab*.”[35]

Ele apresenta, para a soma de dois segmentos, diversas propriedades que atualmente estariam associadas à associatividade, comutatividade, existência do elemento simétrico e a existência do elemento neutro, dando à soma uma estrutura de grupo. É importante observar, através deste exemplo, que ele mostra de maneira simples que as “quantidades” utilizadas verificavam as mesmas relações aplicadas à adição de números “ordinários”.

Em seguida, ele apresenta a operação de multiplicação de segmentos. De início, não há muita diferença em relação ao trabalho já realizado por Descartes, mas restava ainda a dúvida de como seria apresentado, por exemplo, o produto (-1).(-1) = 1.

A multiplicação de dois segmentos era perfeitamente definida a partir da escolha de uma unidade absoluta, o que seria representado por um segmento absoluto igual a 1. A operação de multiplicação é totalmente fundamentada nas noções geométricas de semelhança, como poderemos observar abaixo:

[35] Wessel, C. *Essai sur la représentation analytique de la direction*, Paris, 1897. p.8



O produto dos segmentos OA e OB é feito através da construção, a partir de OB, de um triângulo OBC semelhante ao triângulo OUA, o que seria o mesmo que construir a partir de OA um triângulo OAC semelhante ao triângulo OUB. Ambas as possibilidades nos remetem ao fato que OC = OA.OB = OB.OA, o que mostra que independente dos segmentos escolhidos, como diz Wessel, a multiplicação destes segmentos não depende da ordem em que os tomamos, caracterizando o que atualmente conhecemos como comutatividade.

A partir desta construção, Wessel constata que o segmento OC pode ser determinado da seguinte maneira:

1°) A medida de seu comprimento é o produto das medidas correspondentes aos comprimentos dos segmentos OA e OB;

2°) A direção pode ser obtida, em termos trigonométricos, a partir da semi-reta Ou de um ângulo igual à soma dos ângulos que a mesma semi-reta determina com os segmentos OA e OB.

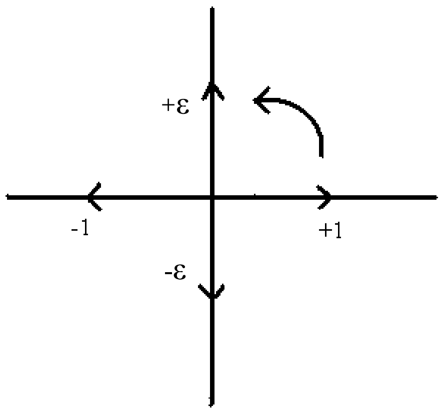
Esta construção pode ser considerada mais simples do que a apresentada anteriormente, porém não seria possível obtê-la independentemente da primeira e sem que fossem feitas numerosas observações.

O trabalho de Descartes, que mostra que o produto de um segmento por outro poderia ser representado por um segmento e não necessariamente como a superfície de um retângulo, abre caminhos para se questionar, por exemplo, a representação geométrica de $a^2 = -1$, já que seria inadmissível pensarmos em superfície negativa ou no lado de um quadrado com medida igual a $\sqrt{-1}$.

O trecho descrito abaixo, traduzido de sua obra "*Essai sur la représentation analytique de la direction*" (1897- p.9) nos ajudará a perceber como comprimento e direção estão relacionados através de operações algébricas devidamente indicadas por seus sinais.

> "Seja +1 a designação da unidade positiva retilínea e + ε uma outra unidade perpendicular à unidade positiva que possui a mesma origem; Então o ângulo da direção de +1 será igual a 0º, o de -1 a 180º, o de +ε a 90º e o de –ε a -90º ou 270º. Pela regra que o produto dos ângulos das direções deve ser igual à soma dos ângulos dos fatores, temos: (+1)(+1) = +1; (+1)(- 1) = - 1; (- 1)(- 1) = +1; (+1)(+ε) = +ε; (+1)(- ε) = - ε; (- 1)(+ε) = - ε; (- 1)(- ε) = +ε; (+ε)(+ε) = - 1; (+ε)(- ε)= +1; (- ε)(- ε) = - 1.
>
> De onde temos que ε = $\sqrt{-1}$; e a divergência do produto é determinada de tal maneira que nenhuma das regras comuns de operação seja violada."

Podemos compreender a citação de Wessel através de uma figura, já bem próxima da representação que possuímos atualmente:



Através deste encaminhamento, uma conseqüência simples e importante pode ser observada: $(\pm\varepsilon)^2 = (\pm\sqrt{-1})^2 = -1$.

Ainda nesta obra, encontramos diversas contribuições como:

1) A representação do seno e do cosseno de arcos de círculo (lembrando que nesta época ainda não se fazia distinção entre "arco de círculo" e "ângulo") e as relações entre eles e as representações das quantidades imaginárias;

2) O produto de dois segmentos indiretos unitários que formam ângulos *u* e *v* com a unidade absoluta pode ser escrito da forma cos(*u* + *v*) + ε.sin(*u* + *v*);

3) O estudo sobre a divisão e a extração de raízes de segmentos;

4) Uma representação da direção de um raio em uma esfera.

Não é de se estranhar que muitos tenham se surpreendido com o método apresentado por Wessel, pois ele atinge plenamente seus objetivos através de um método que possibilitaria realizar operações consideradas impossíveis, fornecendo uma liberdade nova às quantidades imaginárias.

Adrien-Quentin Buée, um exilado padre católico, não era considerado como um matemático profissional e, além de suas publicações relacionadas a tratados político-religiosos, teve seu artigo *"Mémoire sur les quantités imaginaires"*, lido em 1805 e publicado em 1806 pela Royal Society of London. Ele estabeleceu uma conexão entre dois conceitos básicos: o de comprimento e o de direção de um segmento, que eram sistematicamente separados na França durante o século XVIII.

A importância de seu trabalho está relacionada ao desenvolvimento do conceito de números negativos e à representação gráfica dos números imaginários. Nas primeiras páginas de sua obra, Buée tenta estabelecer uma fronteira entre a aritmética e a geometria. Comentando sobre os sinais " + " e " – ", ele registra algumas regras específicas. Como sinais de operações aritméticas, o primeiro indicaria adição e o segundo subtração e, no aspecto geométrico, eles denotariam simplesmente orientações opostas. Um exemplo que nos permite visualizar como ele aplicava estas operações aos objetos é citado abaixo:

> "(...) ao descrever uma reta com um comprimento determinado, podemos fazer duas coisas: 1°) damos a esta linha comprimento; 2°) damos a esta linha uma orientação. A primeira destas operações é puramente *aritmética*. A segunda é puramente *geométrica* (...). Logo quando reunimos estas duas operações, fazemos realmente uma operação *aritmético-geométrica*."[36]

Nesta citação fica evidente, assim como nos resultados de Wessel, que a representação geométrica das quantidades imaginárias não poderia pertencer exclusivamente à geometria e que seria necessário trabalhar sobre seu aspecto aritmético.

Os sinais de " + " e " – " não estavam destinados unicamente a atender às regras. A linguagem aritmética que Buée procura introduzir possui um objetivo maior e, para atingir este objetivo, ele alia a noção de quantidade à qualidade.

Buée admitia que uma letra *a* precedida do sinal " – " não poderia existir isoladamente, ao passo que a precedida pelo sinal " + " era perfeitamente aceitável. Ele

[36] Buée, A. *Mémoire sur les quantités imaginaires*, Royal Society of London. 1805. p.24

afirmava que a primeira situação poderia ser prevista caso a segunda fosse previamente definida. Um exemplo exposto pelo próprio autor revela que se "+ *t*" indicasse um "tempo passado" logo "- *t*" indicaria um "tempo futuro", ou se "+ *p*" representasse uma "aquisição" então "- *p*" representaria uma "dívida".

Em uma álgebra simples, esta prática relacionava a expressão simbólica "+ *a*" com uma simplificação da soma "0 + *a*", porém a expressão "- *a*" correspondia a uma forma reduzida da diferença nada trivial "0 - *a*". Buée compreende que uma certa noção de "qualidade" diferencia os números negativos dos positivos e que o desconhecimento desta "qualidade" afastava os números negativos do lugar que deveriam ocupar na matemática.

Tudo começava a ficar mais evidente. O emprego de "- *a*" não chocaria mais o espírito se fosse levada em conta a sua "qualidade". Não seria mais necessária a utilização da expressão "seja a quantidade menos que nada", pois a mesma já poderia ser traduzida pela "qualidade" do sinal " – ".

Além de introduzir esta rica noção de "qualidade" em uma ciência que lidava com a questão da "quantidade", Buée recorre à gramática para expressar a sua idéia de linguagem matemática:

> "Considerando o segundo significado dado aos sinais + e - , eles designam duas qualidades opostas tendo como sujeito as unidades que compõe uma quantidade. Como uma qualidade não pode ser separada de seu sujeito, os sinais + e – não podem ser separados de suas unidades. Em uma linguagem algébrica, estas unidades são os substantivos, e os sinais, os adjetivos"[37].

Neste momento podemos relacionar as expressões "+*q*" e "-*q*" não necessariamente como as expressões condensadas de "0 + *q*" e "0 – *q*", e sim às expressões "+1.*q*" e "-1.*q*" respectivamente, nas quais a letra *q* significa o número de vezes que tomamos a unidade +1, ou –1, o que caracterizaria um número abstrato.

Através de sua linguagem matemática, Buée apresenta o que entenderia por "quantidades imaginárias":

> "Do sinal $\sqrt{-1}$.
> Eu considero o título *Do sinal* $\sqrt{-1}$ e não *Da quantidade ou Da unidade imaginária* $\sqrt{-1}$,porque $\sqrt{-1}$ é um sinal particular adicionado à unidade real 1, e não uma quantidade particular. É um novo adjetivo junto ao substantivo comum 1, e não um novo substantivo."[38]

[37] Buée, A. *Mémoire sur les quantités imaginaires*, Royal Society of London. 1805. p.25
[38] Buée, A. *Mémoire sur les quantités imaginaires*, Royal Society of London. 1805. p.27

Para Buée, o símbolo "$\sqrt{-1}$" tomado isoladamente nada significava e nenhuma característica operacional poderia ser atribuída a ele. Contudo, ele forneceria uma qualidade à unidade quando percebido como $\sqrt{-1}.1$. Ele afirma que uma quantidade acompanhada do símbolo "$\sqrt{-1}$" não era o oposto àquela indicada por " + " nem indicada por " – ".

Com a finalidade de explicar este novo símbolo, o autor recorre à geometria. Os números reais obtiveram, com o passar dos tempos, uma posição natural sobre a reta. A característica do número estava relacionada com a questão da linearidade e esta imagem se tornou um grande obstáculo quando se tratavam de quantidades imaginárias. A concepção que se tinha era que esta reta não poderia receber novos números.

Qualquer especulação em relação a este assunto quebraria um dogma, ao se atribuir uma espessura a um ponto ou a uma reta. O ponto correspondente ao número 0 sobre uma reta orientada faria com que os números positivos de localizassem de um lado e os negativos do lado oposto, o que geraria uma impossibilidade de localizar as quantidades imaginárias.

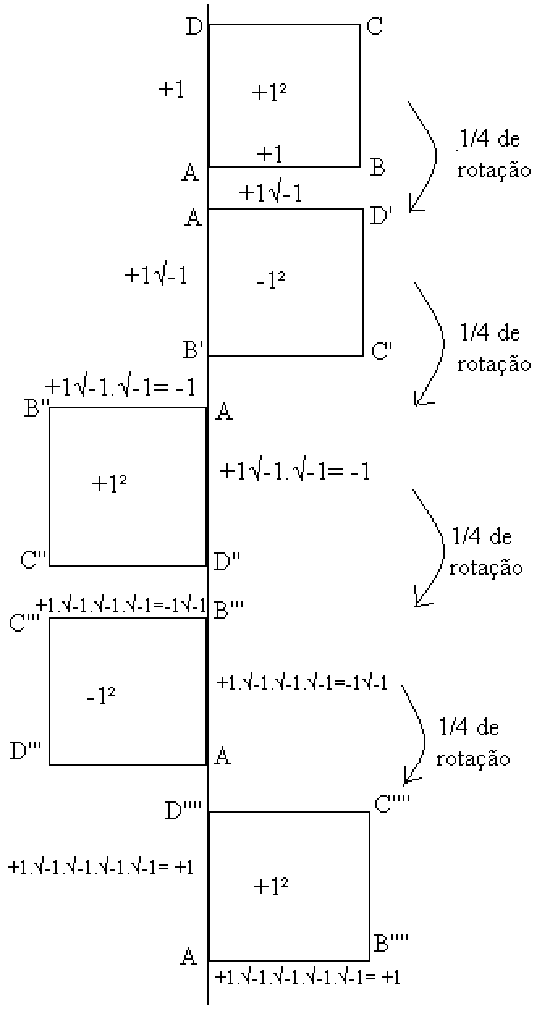
Para resolver o "mistério" que envolvia o sinal $\sqrt{-1}$, ele supõe três linhas iguais AB, AC e AD partindo todas do ponto A. Notemos que Buée neste momento considera como linhas iguais as que possuíam mesmo comprimento, abstraindo a questão de suas orientações, entretanto ele continua afirmando: "Se designarmos a linha AB por +1, a linha AC será -1, e a linha AD, que é a media proporcional entre AB e AC será necessariamente $\sqrt{-1^2}$ ou mais simplesmente $\sqrt{-1}$".

Buée considera $\sqrt{-1}$ como um "sinal de perpendicularidade" no momento que conclui que:

> "$\sqrt{-1}$ é um sinal de perpendicularidade, cuja propriedade característica é que *todos os pontos da perpendicular estão igualmente afastados de pontos igualmente distantes de um lado e do outro de seu pé.* O sinal $\sqrt{-1}$ expressa toda esta e é a única que a expressa. Este sinal colocado antes de *a* (*a* significando uma linha ou uma superfície) nos diz então que ele deve dar à *a* uma situação perpendicular àquela que daria, se tivéssemos simplesmente +*a* ou –*a*."[39]

Buée apresenta outra explicação geométrica baseada em um quadrado ABCD, cujos lados AB e AD representam, por exemplo, "+1". Fazendo um quarto de rotação, considerando A como o centro de rotação, ele obtém as diferentes posições e as novas representações do lado e da superfície deste quadrado como exemplifica a figura:

[39] Buée, A. *Mémoire sur les quantités imaginaires*, Royal Society of London. 1805. p.28



A definição que Buée fornece ao sinal "$\sqrt{-1}$" não pode ser plenamente introduzida sem uma idéia de movimento. Ele considera o quadrado ABCD e os lados AB e AD representando uma grandeza *a* e em nenhum momento ele supõe que eles pudessem representar respectivamente *a* e $a\sqrt{-1}$. A ação do sinal "$\sqrt{-1}$" sobre a grandeza *a*, que a conduz a uma posição perpendicular à que ocupava anteriormente reforça a idéia de que a expressão "$\pm\sqrt{-1}$" provém dos adjetivos "+", "-" e "$\sqrt{-1}$" associados ao substantivo "1".

Embora tenha estado muito próximo de obter uma representação geométrica, Buée não atinge o seu objetivo. Este exemplo mostra uma realidade mais geral desta época, que diz respeito ao fato de que a linguagem algébrica utilizada contribuiu para ocultar várias dificuldades relacionadas às operações com números imaginários. A necessidade de legitimar as operações algébricas sobre as quantidades imaginárias e a falta de precisão destas operações impedem os matemáticos de conceber um novo objeto para o qual as regras de cálculo deveriam ser aplicadas, como os segmentos orientados de Wessel ou as linhas orientadas de Argand.

O suíço Jean-Robert Argand (1768-1822) em sua pesquisa de uma “realização geométrica” para os objetos contestados tem uma intuição muito similar à de Wessel. O trabalho de Argand pode ser considerado como o mais esclarecedor sobre a representação das quantidades imaginárias. Este modesto pesquisador contribuiu com uma obra que pode ser considerada uma das grandes descobertas do século XIX e não é sem motivos que até os dias de hoje lemos e ouvimos expressões como “representação de Argand”, “plano de Argand” que nos remetem à grande importância de seu trabalho.

Matemáticos de diversas nacionalidades e de grande renome não pouparam palavras ao descrever Argand como o verdadeiro “arquiteto” desta rica e importante descoberta. Este reconhecimento não foi imediato e muitos destes matemáticos puderam presenciar diversas transformações que conduziram à álgebra das estruturas e às geometrias com esta “realização” geométrica.

O suíço, autor de “Ensaio sobre uma maneira de representar as quantidades imaginárias nas construções geométricas” (*Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques.* Paris, Blanchard, 1971), teve seu trabalho publicado em 1813 nos *Annales de Mathématiques purês et appliquées*, o primeiro jornal especializado em Matemática.

Como Wessel, Argand inicia seu trabalho tratando das quantidades negativas e direções opostas. Em seu ensaio, encontramos uma retomada de idéias de seus contemporâneos a respeito das quantidades negativas. Através de diversos exemplos, Argand mostra que estas quantidades poderiam ser de fato “reais”.

O ponto de partida no trabalho de Argand se baseou em diversas situações que implicam na aceitação das quantidades negativas. A reflexão inicial é feita tendo como base grandezas representadas por a, $2a$, $3a$, etc. e a idéia de que podemos sempre acrescentar a grandeza a às grandezas anteriores. Mas o que faríamos em relação à operação inversa? Poderíamos subtrair a grandeza a de cada um dos termos anteriores? Que representação teria $0 - a$?

Ao colocar estas questões, Argand expõe claramente os motivos que impulsionaram muitos matemáticos à rejeição destas quantidades. Contrariamente à Buée, ele é muito mais convincente. Os exemplos apresentados revelam a sua proposta de forma clara e simples. Argand propõe uma construção capaz de dar “realidade” aos números ditos “imaginários”.

As quantidades relativas são apresentadas através da concepção de uma balança que possui os pratos A e B, sendo que no prato A é colocada a grandeza *a, 2a, 3a* e assim sucessivamente, fazendo com que a balança incline em direção ao prato A. O equilíbrio da balança pode ser obtido, retirando-se do prato A, a grandeza *a* de modo a obtermos o 0. Caso desejássemos continuar retirando esta grandeza do prato A, teríamos uma situação que poderia ser traduzida pela expressão 0 – *a*, cuja existência ainda repousaria no campo da imaginação.

Esta situação é representada considerando a grandeza *a* como um peso em gramas cuja seqüência ..., 4*a*, 3*a*, 2*a*, *a* e 0 não poderia seguir além de 0. Os termos posteriores a 0 têm existência apenas no campo da imaginação e, por este motivo, poderiam ser chamados de imaginários.

Utilizando o mesmo exemplo da "balança", Argand considera os dois pratos contendo pesos, tais que os movimentos dos braços sejam proporcionais aos pesos adicionados ou retirados. Por exemplo, a ação de adicionar ao prato A o peso *n*, corresponde a uma variação *n'* na extremidade deste braço e, adicionando sucessivamente ao prato A pesos *n*, obteremos uma seqüência de variações 2*n*', 3*n*', 4*n*', etc. Mas no caso de retirarmos pesos *n* de uma quantidade estipulada como, por exemplo, 3*n*, obteremos a seqüência 2*n*', *n*'e 0. Porém estas variações podem ser obtidas também de outra maneira, se ao invés de retirarmos pesos *n* do prato A, acrescentarmos ao prato B estes mesmos pesos. A grande diferença entre estas duas ações é que a primeira é finita e a segunda infinita gera variações que Argand registra da seguinte maneira:

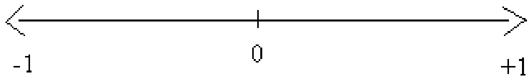
> "Ora, a adição de peso ao prato B pode ser repetido indefinidamente; assim, prosseguindo, formar-se-ão novos graus de peso expressos por - *n', - 2 n', - 3 n'*, ..., e estes termos, chamados negativos, exprimirão quantidades tão reais quanto os termos positivos. Portanto, observamos que, se dois termos, de sinais diferentes, têm o mesmo número como coeficiente, como *3 n', - 3 n'*, eles exprimirão dois estados da alavanca tais que a extremidade que marca os graus de peso será, em ambos os casos, igualmente afastada do ponto 0. Pode-se considerar esse afastamento fazendo abstração do sentido no qual ele teve lugar, e lhe dar então o título de *absoluto*.[40]

Neste momento, Argand introduz a noção relativa de que retirarmos do prato A é equivalente a acrescentarmos ao prato B. Deste modo, aos valores absolutos de grandezas

[40] Argand, J. R. *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques.* Paris, Blanchard, 1971.

associaremos a idéia de direção. A partir deste momento, as quantidades negativas perdiam seu caráter “imaginário”, associando-se a elas a união dos conceitos de quantidade e de direção.

Nesta perspectiva, o zero poderia ser visto como um referencial e a operação com números negativos, como por exemplo, a multiplicação por – 1 poderia ser compreendida geometricamente, como uma reflexão em relação à origem:



É interessante a simplicidade dos exemplos fornecidos por Argand. Entretanto, a sensação de “facilidade” e “tranqüilidade” que nos é transmitida por suas idéias é proveniente de uma grande familiaridade com as situações por ele apresentadas como peso, capital, temperatura, etc. Chega a ser difícil compreender os motivos que tornaram os números negativos inaceitáveis durante séculos. Para nós, leitores de nossa época, parece mais que suficiente que a legitimidade dessas quantidades negativas seja garantida observando o número negativo como uma simples oposição ao número positivo. Era também necessário que o contexto histórico em que tais situações apareceram fosse favorável, como o espírito de “realismo” e de “abstração” encontrado no início do século XIX, que fundaram novas estruturas matemáticas. Os números imaginários trilhavam seu caminho rumo à legitimidade com as idéias de grandeza absoluta e direção associadas às quantidades negativas:

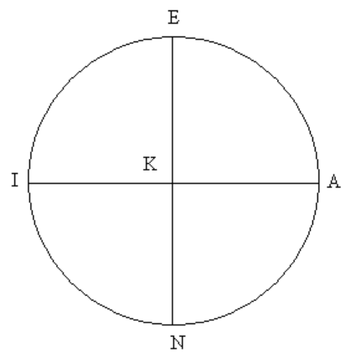
> “De resto, não se propõe de modo algum dar aqui princípios mais rigorosos ou mais evidentes do que aqueles que encontramos nas obras que tratam do assunto; teve-se simplesmente por objetivo fazer duas observações sobre as quantidades negativas. A primeira é que, segundo a espécie de grandeza a qual se aplica a numeração, a quantidade negativa é real ou imaginária; a segunda é que, duas quantidades de uma espécie suscetível de fornecer valores negativos estando comparadas entre si, a idéia de sua ligação é complexa. Ela compreende: 1º) A idéia da relação numérica dependendo de suas grandezas respectivas consideradas *absolutamente*; 2º) A idéia da relação das *direções* ou *sentidos* aos quais elas pertencem, relação que é sua identidade ou oposição.”[41]

[41] Argand, J. R. *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques.* Paris, Blanchard, 1971. p.4

Identificadas as noções de valor absoluto e de direção como elementos fundamentais de sua representação geométrica, Argand investiga a possibilidade de combinar estas noções de modo a encontrar uma representação também para as quantidades imaginárias. As quantidades imaginárias não podem estar sobre a reta aonde se encontram as quantidades positivas e negativas, colocadas em direções opostas, mas devem estar sobre o mesmo plano.

Tendo associado grandezas relativas com grandezas direcionadas, ele sugere então que seja interpretada no plano a proporção 1 : - 1 = - 1 : 1. Sabendo que a média proporcional entre grandezas de valor absoluto 1 e com mesmo sinal deve ser + 1 ou – 1, como determinar a média proporcional caso essas grandezas tivessem sinais opostos? Ou seja, que valores de x satisfariam às proporções – 1 : x = x : + 1 e + 1 : x = x : - 1 ?

Pensando em dias atuais, os valores de x procurados nas proporções acima seriam aqueles que solucionam a equação $x^2 = -1$. Argand encontra, com o auxílio de um diagrama, a solução desta questão.



As grandezas unitárias positiva e negativa são respectivamente compreendidas como os segmentos direcionados KA e KI. Encontrar a média proporcional entre as grandezas + 1 e – 1 seria então, combinando as idéias de grandeza absoluta e direção, encontrar a direção da grandeza unitária x, de modo que a direção da grandeza representada por KA esteja para a direção da grandeza x , assim como a direção da grandeza x esteja para a direção representada por KI.

Podemos observar que tanto KE como KN são segmentos direcionados e KE pode ser obtido através de uma rotação de 90º a partir de KA, assim como KI pode ser obtido através de uma rotação de 90º a partir de KE. O mesmo acontece para o segmento KN, portanto KE e

KN são as grandezas geométricas procuradas que representam geometricamente $+\sqrt{-1}$ e $-\sqrt{-1}$.

Expandindo sua perspectiva, Argand não restringiu as quantidades imaginárias às linhas perpendiculares. Ele construiu geometricamente todas as direções e, deste modo, construiu outras médias proporcionais associadas a outras quantidades imaginárias, o que nos fornece uma generalização:

> “ $\overline{KB}$, $\overline{KD}$. $\overline{KF}$, $\overline{KH}$, $\overline{KJ}$, $\overline{KM}$, $\overline{KO}$, $\overline{KQ}$” são médias entre $\overline{KA}$ e $\overline{KC}$, $\overline{KC}$ e $\overline{KE}$, ..., e assim por diante.”[42]

Fig. 1.

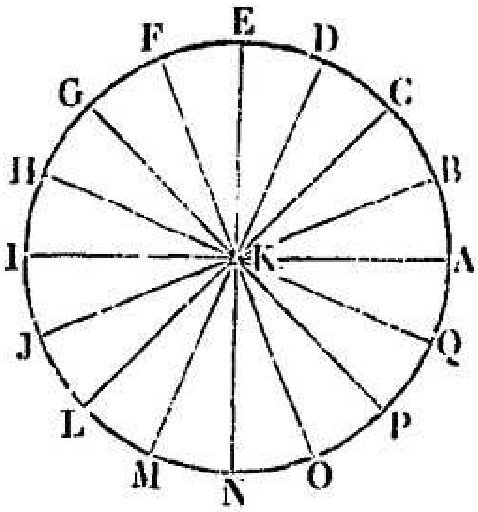


figura [43]

Esta relação entre a representação geométrica dos números imaginários e as médias proporcionais pode ser utilizada nos dias de hoje, como uma importante ferramenta no processo de representação geométrica das soluções imaginárias de equações quadráticas.

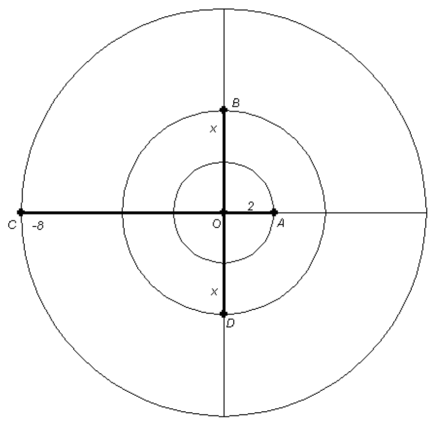
Tendo como referencial as idéias citadas por Argand, poderíamos atualmente determinar as soluções $\pm 4i$ da equação quadrática $x^2 = -16$ da seguinte maneira:

---

[42] Argand, J. R. *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques.* Paris, Blanchard, 1971. p.9

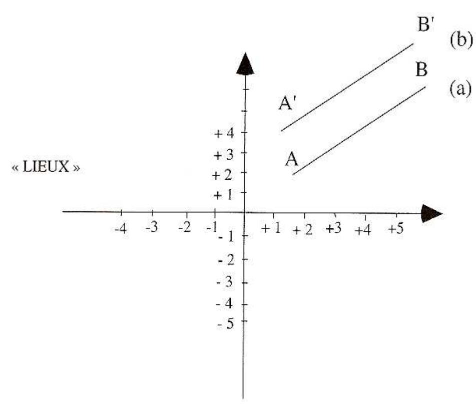
[43] Argand, J. R. *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques.* Paris, Blanchard, 1971. p.9

1. Representar geometricamente a grandeza x, tal que: + 2 : x = x : - 8
2. Representamos geometricamente as grandezas + 2 e – 8 respectivamente pelos segmentos direcionados OA e OC.
3. A direção da grandeza procurada deve ser a mesma da bissetriz de AÔB.
4. O valor absoluto da grandeza procurada é 4, pois 2:4 = 4:8.
5. Considerando juntamente o valor absoluto e a direção da grandeza procurada, temos que x é representado pelos segmentos direcionados OB ou OD.



Um aspecto importante introduzido por Argand foi o fato de que as linhas orientadas, que representavam a solução das relações de proporção, não deveriam ser fixadas a um único ponto K. Se KA=K'A'; KA=K''A'', etc. e tendo estas linhas a mesma direção, Argand fornecia a uma linha orientada uma infinidade de outras que representariam o mesmo objeto.

Esta noção de eqüipolência forneceria condições de que um determinado objeto considerado pudesse ter uma infinidade de representantes legítimos. Baseando-se na figura[44] abaixo poderemos fazer algumas observações:



[44] Flament, D. *Histoire des nombres complexes, Entre algèbre et géométrie*, CNRS Éditions, Paris 2003. p.175

Na visão de Descartes, os objetos (a) e (b) são distintos, pois ocupam lugares geométricos distintos, enquanto para Argand, estes dois objetos são iguais, já que são representantes de uma mesma classe, caracterizando uma matemática das “formas”.

Dada uma unidade primitiva $\overline{KA}$, todas as linhas direcionadas paralelas a esta unidade representam um número real. As perpendiculares expressam os números imaginários da forma $\pm a\sqrt{-1}$ e todas as outras linhas direcionadas representam os números da forma $\pm a \pm b\sqrt{-1}$, compostos de uma parte real e de uma parte imaginária.

Ao fundar esta nova teoria, Argand sugere também a utilização de um novo simbolismo que tornaria mais simples a notação que designava as quantidades imaginárias. Ao passo que Buée escrevia “+1.*a*” e “-1.*a*” no lugar de “+*a*” e “-*a*”, com a finalidade de diferenciar a aritmética universal da sua “linguagem algébrica”, Argand caminha no sentido contrário, não fazendo esta dissociação. Ele chega a afirmar que “$+a\sqrt{-1}$” apresenta um fator $\sqrt{-1}$ que multiplica *a* e, assim como o fator 1 multiplicado por *a* em “+1.*a*” pode ser representado por apenas +*a*, é possível agir de modo semelhante para as quantidades imaginárias. Ele utiliza os símbolos “∼” e “ϯ” no lugar de “+$\sqrt{-1}$” e “-$\sqrt{-1}$” respectivamente e apresenta de maneira simples a sua tabela de multiplicação:

∼ . ∼ = -

ϯ . ϯ = -

∼ . ϯ = +

ϯ . ∼ = +

Através deste simbolismo, Argand faz uma associação curiosa para reconhecer a periodicidade das potências da unidade imaginária. Inicialmente, ele atribui valores aos seus símbolos da seguinte maneira: atribuímos ao símbolo representado por uma linha curva (∼) o valor numérico 1 e, para cada linha vertical ou horizontal, o valor numérico 2. Desta forma, teremos que cada símbolo será constituído da soma dos valores das linhas que possui, constituindo a seguinte associação:

$\sim$ = 1;

\- = 2;

$\top$ = 2 + 1 = 3;

\+ = 2 + 2 = 4.

Assim, através de regras expressas por Argand, o que atualmente relacionamos ao cálculo “módulo 4”, a tabela de multiplicação dos símbolos pode ser estabelecida e a periodicidade das potências facilmente verificada.

A utilização de sua linguagem simbólica para a representação da expressão “$a+b\sqrt{-1}$” resulta em um novo objeto “$a \sim b$”. Tal representação se aproxima muito do par ordenado (*a*,*b*) de Hamilton, que daria a “$a+b\sqrt{-1}$” um novo estatuto matemático.

Após definir a multiplicação de linhas direcionadas e obter o que chamamos hoje de “fórmula de De Moivre”, Argand julgou desnecessário o detalhamento da divisão e encerra a parte teórica de seu ensaio com a seguinte afirmativa: “Com estas regras, operaremos uma construção qualquer com linhas direcionadas como as que praticamos com as linhas absolutas”.[45]

Os resultados de Argand não despertaram muito interesse na comunidade matemática até suas idéias serem publicadas em 1813, tidas como de um autor desconhecido. Esse fato o levou a participar de vários debates públicos, o que garantiu a conquista da autoria de tão importante trabalho.

O que ele propõe possui uma grande riqueza conceitual e simplifica a resolução de diversos problemas, mas este critério não era suficiente para garantir a adesão da comunidade matemática da época. O trabalho de Argand se destaca na “realização” geométrica das quantidades imaginárias, mas não chega a definir que operações podem ser aplicadas às suas “linhas orientadas”, logo não fornece a necessária justificativa de um cálculo algébrico com os símbolos imaginários. O caráter convencional das regras de cálculo é deixado de lado para privilegiar aplicações imediatas.

Desta forma, apesar da grande importância do trabalho de Argand, as quantidades imaginárias ainda não podiam ser consideradas como “números”, dignos de figurar em uma ciência rigorosa. São apenas expressões simbólicas úteis para facilitar o cálculo, mas indignas para aparecer nos resultados. A representação geométrica das quantidades imaginárias

[45] Argand, J. R. *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques.* Paris, Blanchard, 1971. p.25.

funcionava como um instrumento que forneceria um caráter de “realidade” a estas quantidades, mas para parte da comunidade matemática da época esta representação ainda não trazia o critério de rigor para que estas quantidades fossem aceitas. No entanto, os esforços realizados para buscar uma representação geométrica para as quantidades imaginárias contribuíram para aprofundar as exigências do pensamento matemático da época.

Podemos considerar que a obra de Argand constituiu um importante marco na história dos números complexos uma vez que, na representação geométrica das quantidades imaginárias, estas quantidades já começam a ser concebidas como um ente matemático distinto dos reais, que possuem um caráter composto, que levará Gauss a designar estas quantidades como “complexas”.

A história das quantidades “sofisticadas”, da matemática italiana renascentista, até a representação geométrica das quantidades “imaginárias”, com as linhas orientadas de Argand, congrega os elementos principais que motivarão Gauss, Cauchy e Hamilton a desenvolver, no período subseqüente, uma teoria propriamente dita, que forneça o estatuto aritmético que garante a existência matemática dos números complexos.

Considerações finais

Quando propusemos um trabalho sobre a história dos números complexos, visamos resgatar o ambiente que proporcionou seu surgimento, observando a linguagem utilizada na época e os “problemas” que contribuíram com o desenvolvimento da matemática e conseqüentemente destas quantidades ditas “sofisticadas”, “impossíveis”, “inexplicáveis” ou “imaginárias”.

Pesquisar os números complexos à luz da história da matemática faz com que compreendamos que um dos grandes problemas no ensino é o fato de que a ordem de exposição não condiz com a ordem da invenção, logo seria pertinente que nós recriássemos o modo de ensinar a fim de proporcionar aos alunos a experiência de conviver e de compreender como a matemática estudada nos dias de hoje foi produzida por descobertas ao longo de séculos.

O acesso à história dos números complexos nos remete inevitavelmente a uma reflexão sobre a metodologia utilizada em sala de aula. Seria impossível apresentar a matemática na ordem histórica em que ela foi desenvolvida. Mas com a história temos condições de oferecer respostas às muitas questões que surgem durante o processo de aprendizagem.

No desenvolvimento deste trabalho, percebemos o surgimento dos números complexos como fruto de um “problema” que significava determinar as soluções de equações cúbicas por meio de radicais. Em relação a este aspecto, muito pode ser desenvolvido em sala de aula. A forma com que geralmente trabalhamos e expomos as fórmulas de resolução de equações quadráticas e cúbicas pode gerar uma falsa compreensão de que estes importantes resultados foram frutos de trabalhos isolados de matemáticos como Bhaskara e Cardano. A força destes resultados algébricos faz com que seja criado um distanciamento cada vez maior da geometria, o que não condiz com seu desenvolvimento histórico.

Ter acesso à história destes números proporciona um ambiente favorável para diversas discussões em torno de resultados envolvendo equações polinomiais e suas raízes, o desenvolvimento da teoria dos logaritmos e o advento do cálculo infinitesimal.

As tentativas de representação geométrica para os números complexos, com as dificuldades experimentadas, contribuem para a desconstrução de uma concepção, por parte de muitos alunos, de uma matemática “pronta” e em algumas situações até arbitrária, em que são apresentadas definições seguidas de teoremas e demonstrações.

Um trabalho diferenciado, ao lecionar números complexos, abre espaço para questionamentos e reflexões por parte dos alunos acerca de muitos conceitos explorados durante mais de uma década até a conclusão de seu ensino médio como, por exemplo:

- O papel da geometria no ensino de matemática;
- A exploração do conceito de número;
- O desenvolvimento da álgebra e a contextualização de muitos de seus resultados;
- A relação entre os números complexos e a geometria;
- O conceito de número negativo;
- A conexão entre a representação geométrica dos complexos e a análise vetorial;

Uma reestruturação na abordagem metodológica no ensino dos complexos representa mais do que fornecer uma “concretude” para estes novos entes matemáticos. Trata-se de abrir oportunidades para investigações que despertem o interesse pelo desenvolvimento da matemática.

Não seria utopia nossa acreditar que a história dos números complexos e, de forma mais ampla, a história da matemática, possam despertar nos professores uma prática docente menos centrada em uma matemática de resultados e sim em uma matemática de descobertas e conexões.

A partir de uma fundamentação histórica sobre os números complexos é possível vislumbrar o desenvolvimento de pesquisas voltadas para a elaboração de materiais pedagógicos para os alunos e para a formação continuada de professores que valorizem mais os aspectos geométricos, as investigações e, conseqüentemente, a compreensão deste novo conceito, para além das manipulações algébricas e algorítmicas. Pretendemos explorar estes caminhos em um trabalho futuro.

Referências bibliográficas

ARGAND J. R. *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* (1806). Reimp. Blanchard: Paris, 1971. Disponível em < http://www.gallica.bnf.fr >.

BALL, W. W. Rouse (Walter William Rouse) (1865-1925) *A short account of the history of mathematics.* Macmillan, London, 1888. Reimp: Dover: Nova Iorque, 1960.

BOYER, Carl B. (Carl Benjamin) (b. 1906) *A history of mathematics.* Wiley, 1968. Reimp: Princeton University Press: Princeton, New Jersey, 1985.

BUÉE, A. Q. *Mémoire sur les quantités imaginaires*. Royal Society of London, 1806. Disponível em < http://www.gallica.bnf.fr >.

BOMBELLI, R. *L'Algebra.* (1972). G. Rossi. Bolonha, 1579.

BURTON, David M. *The history of mathematics: an introduction.* Allyn & Bacon: Boston, 1985.

CAJORI F., *Historical note on the graphic representation of imaginaries before the time of Wessel.* Amer. Math. Mon., 19 (1912) 167-171.

CARDANO, G. *Ars Magna*. Massachusetts Institute of Technology, 1968.

DESCARTES, R. *The Geometry of René Descartes.* Dover: Nova Iorque, 1925.

EVES, Howard Whitley (b. 1911) *An introduction to the history of mathematics.* Sanders : Philadelphia, 1983.

FLAMENT, D., *Histoire des nombres complexes: entre algèbre et géométrie.* CNRS Éditions: Paris, 2003.

KATZ, Victor J. *A history of mathematics, an introduction.* Harper Collins College Publishers: Nova Iorque, 1993.

ROQUE, T. *A Matemática através da história*. Notas de aula do curso de História da Matemática. UFRJ, 2006.

SCHUBRING, G. - "Argand and the early work on graphical representation: New sources and interpretations" In *Around Caspar Wessel and the Geometric Representation of Complex Numbers.* Proceedings of the Wessel Symposium at The Royal Danish Academy of Sciences and Letters, Jesper Lutzen, Copenhagen, (2001), 125-146.

SMITH, David E. *A Source Book in Mathematics* .McGraw Hill Company: Nova Iorque e Londres, 1929.

STILLWELL, John. *Mathematics and its history.* Springer-Verlag: Nova Iorque-Berlin, 1989. Rev: *Math. Rev.* 91b:01001

WESSEL, C. *Essair sur la représentation analytique de la direction.* Copenhague e Paris, 1897. Disponível em < http://www.gallica.bnf.fr >.

Anexo

ENSAIO SOBRE UMA MANEIRA DE REPRESENTAR AS QUANTIDADES IMAGINÁRIAS NAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

(JEAN ROBERT ARGAND)

1. Seja a uma grandeza tomada à vontade. Se a esta grandeza acrescentarmos uma segunda que lhe seja igual, para formar um único todo, teremos uma nova grandeza, que será expressa por 2 a. Fazendo a partir desta última grandeza uma nova semelhante operação, o resultado será expresso por 3 a, e assim por diante. Obter-se-á assim uma continuação de grandezas

$$a,\ 2\,a,\ 3\,a,\ 4\,a,\ \ldots,$$

da qual cada termo nasce do precedente, por uma operação que é a mesma para todos os termos, e que pode ser repetida indefinidamente.

Consideremos esta mesma série ao contrário, a saber:

$$\ldots,\ 4\,a,\ 3\,a,\ 2\,a,\ a.$$

Podemos ainda conceber, nessa nova série, cada termo como subtraído do precedente, por uma operação inversa àquela que serve à formação da primeira série; mas existe uma diferença notável entre as duas: a primeira pode ser levada tão longe quanto se queira; não se passa o mesmo com a segunda. Após o termo a, encontraremos o termo 0; mas, para ir mais além, é preciso que a natureza do valor a seja tal que se possa operar com respeito a 0 como fazemos com relação aos termos ..., 4 a, 3 a, 2 a, a. Ora, isto não é todavia possível.

Se a, por exemplo, designa um peso material, como o grama, a série das quantidades ..., 4 a, 3 a, 2 a, a, 0 não pode ser continuada para além de 0; porque pode-se tirar 1 grama de 3, de 2 ou de 1, mas não se poderá tirá-lo de 0. Assim os termos que deveriam seguir-se ao 0 só podem ter existência na imaginação; podem, justamente por isso, ser chamados *imaginários*.

Mas, no lugar de uma série de pesos materiais, consideremos os diversos graus de peso que agem sobre o prato A de uma balança que contém pesos em seus dois pratos, e vamos supor, para dar mais apoio às nossas idéias, que os movimentos dos braços dessa balança sejam proporcionais aos pesos acrescentados ou suprimidos, efeito que ocorrerá, por exemplo, por meio de uma mola adaptada ao eixo. Se a adição do peso n no prato A faz variar com a quantidade *n'* a extremidade do braço A, a adição dos pesos *2 n, 3 n, 4 n,* ... ocasionará, nessa mesma extremidade, variações *2 n', 3 n', 4 n'*, ..., e essas variações poderão ser tomadas como medida do peso agindo sobre o prato A: esse peso é 0 para o caso da igualdade entre os dois pratos. Poder-se-á, acrescentando no prato A pesos *n, 2 n, 3 n,* ..., obter os pesos *n', 2 n', 3 n'*, ..., ou, falando do peso *3 n'*, obter, suprimindo pesos, os valores *2 n', n',* 0. Mas esses diversos graus podem ser produzidos não somente tirando pesos do prato A como também acrescentando-os ao prato B. Ora, a adição de peso ao prato B pode ser repetido indefinidamente; assim, prosseguindo, formar-se-ão novos graus de peso expressos por - *n'*, - *2 n'*, - *3 n'*, ..., e estes termos, chamados negativos, exprimirão quantidades tão reais quanto os termos positivos. Portanto, observamos que, se dois termos, de sinais diferentes, têm o mesmo número como coeficiente, como *3 n'*, - *3 n'*, eles exprimirão dois estados da alavanca tais que a extremidade que marca os graus de peso será, em ambos os casos, igualmente afastada do ponto 0. Pode-se considerar esse afastamento fazendo abstração do sentido no qual ele teve lugar, e lhe dar então o título de *absoluto*.

Consideremos ainda, em outra espécie de grandeza, a geração de quantidades negativas. Se, para conter uma soma de dinheiro, adotamos o *franco*[46] material, poder-se-á operar diminuições sucessivas nessa soma, e reduzi-la a zero pela subtração de um certo número de francos. Chegados a esse termo, vemos que a subtração cessa de ser praticável, e que, por conseqüência, - 1 franco, - 2 francos, ... são quantidades imaginárias.

Tomemos agora o franco financeiro como unidade, com a intenção de avaliar a fortuna de um indivíduo, que se compõe de valores ativos e de valores passivos. O que chamamos *diminuição* nessa fortuna poderá ocorrer seja pela subtração de um determinado número de francos ao ativo, seja pela adição de um determinado número de francos ao passivo, e, levando a certo termo essa diminuição por um desses dois meios, chegaremos a uma fortuna negativa, tal qual - 100 francos, - 200 francos, ... Essas expressões significarão que o número de francos de valor passivo, considerado abstratamente, é maior de 100, de 200, ... que aquele dos valores ativos. Assim, - 100 francos, - 200 francos, ..., que só exprimiam no primeiro caso quantidades imaginárias, representam aqui quantidades tão reais quanto aquelas que designam as expressões positivas.

2. Essas noções são muito elementares; todavia não é tão fácil como poderia parecer a princípio estabelecê-las de uma maneira bem clara, e emprestar-lhes aquela generalidade que

[46] Antiga moeda francesa, substituída atualmente pelo Euro com a criação da União Européia. (Nota do Tradutor).

sua aplicação aos cálculos exige. Não se pode duvidar da dificuldade do assunto, se refletirmos que as ciências exatas foram cultivadas durante um grande número de séculos, e que elas fizeram imensos progressos antes de se ter adquirido as verdadeiras noções de quantidades negativas e de se ter concebido a maneira geral de empregá-las.

De resto, não se propõe de modo algum dar aqui princípios mais rigorosos ou mais evidentes do que aqueles que encontramos nas Obras que tratam do assunto; teve-se simplesmente por objetivo fazer duas observações sobre as quantidades negativas. A primeira é que, segundo a espécie de grandeza a qual se aplica a numeração, a quantidade negativa é real ou imaginária[47]; a segunda é que, duas quantidades de uma espécie suscetível de fornecer valores negativos estando comparadas entre si, a idéia de sua ligação é complexa. Ela compreende: 1º) A idéia da relação numérica dependendo de suas grandezas respectivas consideradas *absolutamente*; 2º) A idéia da relação das *direções* ou *sentidos* aos quais elas pertencem, relação que é sua identidade ou oposição.

3. Agora, se, fazendo abstração da relação das grandezas absolutas, considerarmos os diferentes casos que pode apresentar a relação das direções, perceberemos que elas se reduziam ao que oferece as duas proporções seguintes:

$$+1 : +1 :: -1 : -1,$$
$$+1 : -1 :: -1 : +1.$$

A inspeção dessas proporções e daquelas que formaríamos pela inversão dos termos mostra que os termos médios são sinais semelhantes ou diferentes, conforme os extremos sejam eles mesmos sinais semelhantes ou diferentes.

Que nos proponhamos agora a determinar a média proporcional geométrica entre duas quantidades de sinais diferentes, ou seja, a quantidade x que satisfaz a proporção

$$+1 : +x :: +x : -1$$

Somos impedidos de continuar aqui como o fomos querendo continuar para além de 0 a progressão aritmética decrescente, porque não se pode igualar x a nenhum número positivo

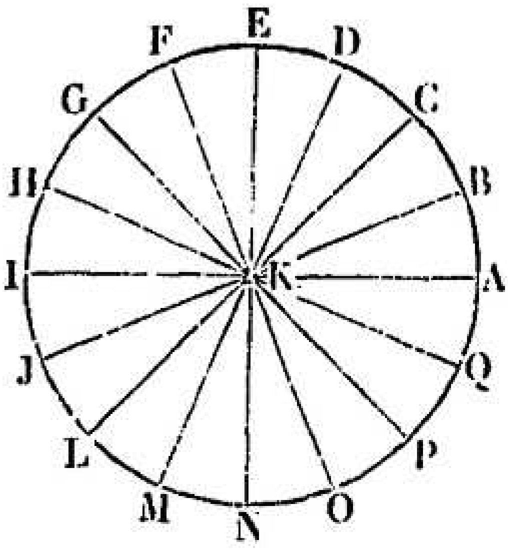
[47] O sentido com o qual se toma essas palavras é suficientemente determinado por aquilo que antecede: a extensão que se dá aqui à sua significação ordinária parece permitida, e, aliás, não é absolutamente nova. O que se chama, em Ótica, *centro imaginário*, por oposição ao centro real, é o ponto de reunião dos raios que não têm uma existência física e que podem, de certa maneira, ser considerados como raios negativos.

ou negativo; mas, já que encontramos mais que a quantidade negativa, imaginária quando a numeração era aplicada a certas espécies de grandezas, tornada real quando a combinamos de uma certa maneira a idéia de *grandeza absoluta* com a idéia de *direção* , não seria possível obter o mesmo sucesso relativamente à quantidade da qual se trata, quantidade considerada imaginária pela impossibilidade em que estamos de lhe encontrar um lugar na escala das grandezas positivas e negativas?

Refletindo sobre esta questão, pareceu que conseguiríamos atingir esse objetivo se pudéssemos encontrar um gênero de grandezas ao qual pudesse se aliar a idéia de direção, de maneira que, adotadas duas direções opostas, uma para os valores positivos, outra para os valores negativos, existiria uma terceira, tal como a direção positiva foi para aquela da qual tratamos e como esta à direção negativa.

4. Ora, se tomarmos um ponto fixo K (fig. 1) e adotarmos por unidade positiva a linha KA considerada como tendo sua direção de K em A, o que poderíamos designar por $\overline{KA}$, para distinguir esta quantidade da linha KA na qual só consideramos aqui sua grandeza absoluta, a unidade negativa será $\overline{KI}$, o traço superior tendo a mesma destinação que aquele colocado sobre $\overline{KA}$, e a condição à qual se trata de satisfazer será preenchida pela linha KE, perpendicular às precedentes e considerada como tendo sua direção de K em E, e que exprimiremos igualmente por $\overline{KE}$.

Fig. 1.



Com efeito, a direção de $\overline{KA}$ é, com respeito à direção de $\overline{KE}$, o que esta última é com respeito à direção de $\overline{KI}$. Além do mais, vemos que essa mesma condição é tanto preenchida por $\overline{KN}$

quanto por $\overline{KE}$, estas duas últimas quantidades estando entre elas como +1 e -1, assim como deve ser. Elas são, portanto, o que expressamos comumente por $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$

Por um movimento análogo, poder-se-á inserir novas médias proporcionais entre as quantidades que acabamos de ver. Com efeito, para construir a média proporcional entre $\overline{KA}$ e $\overline{KE}$, será preciso traçar a linha CKL que divide o ângulo AKE em duas partes iguais, e a média buscada será $\overline{KC}$ ou $\overline{KL}$. A linha GKP dará igualmente as médias $\overline{KE}$ e $\overline{KI}$ ou entre $\overline{KA}$ e $\overline{KN}$. Obter-se-á igualmente as quantidades $\overline{KB}$, $\overline{KD}$. $\overline{KF}$, $\overline{KH}$, $\overline{KJ}$, $\overline{KM}$, $\overline{KO}$, $\overline{KQ}$ para as médias entre $\overline{KA}$ e $\overline{KC}$, $\overline{KC}$ e $\overline{KE}$, ..., e assim por diante. Poder-se-á da mesma forma inserir um maior número de médias proporcionais entre duas dadas quantidades, e o número de construções que poderão resolver a questão será igual ao número de ligações que apresenta a progressão buscada. No caso de se tratar, por exemplo, de construir duas médias $\overline{KP}$, $\overline{KQ}$, entre $\overline{KA}$ e $\overline{KB}$, o que deve originar as três relações

$$\overline{KA} : \overline{KP} :: \overline{KP} : \overline{KQ} :: \overline{KQ} : \overline{KB}$$

é preciso haver

$$\text{ângulo } \overline{AKP} = \text{ângulo } \overline{PKQ} = \text{ângulo } \overline{QKB},$$

Fig. 2.

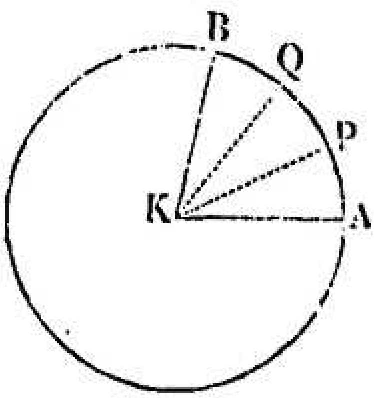
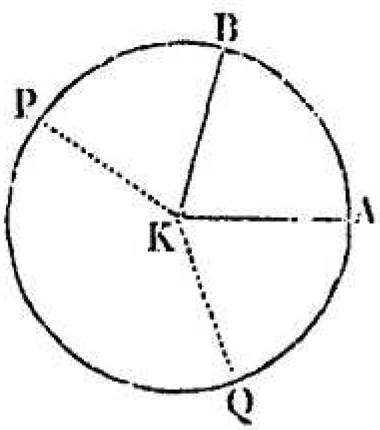


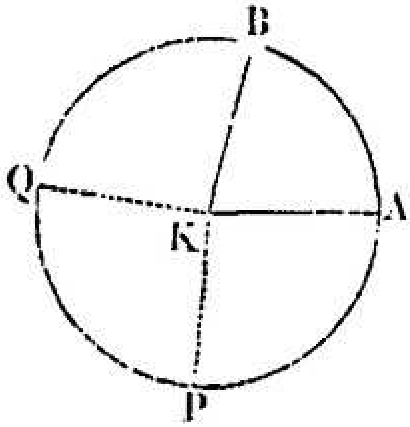
Fig. 2 *bis*.



o traço superior indicando que esses ângulos estão em posição homóloga sobre as bases AK, PK, QK. Ora, podemos atingir esse objetivo de três maneiras, a saber, dividindo em três partes iguais: 1º) o ângulo AKB; 2º) o ângulo AKB mais uma circunferência; 3º) o ângulo

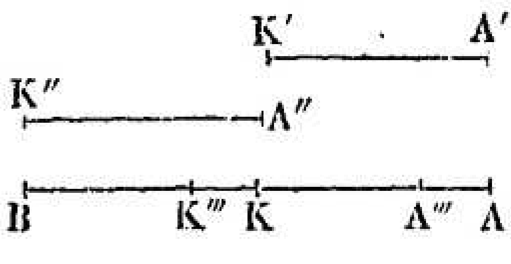
AKB, mais duas circunferências, o que resultará nas três construções representadas pelas *fig. 2, 2 bis, 2 ter*[48].

Fig. 2 ter.



5. Observemos agora que, para a existência das relações que acabamos de estabelecer entre as quantidades $\overline{KA}$, $\overline{KB}$, $\overline{KC}$, ..., não é necessário que o ponto de partida da direção, que constitui uma parte da essência dessas quantidades, seja fixada em um ponto único K; mas que essas relações igualmente ocorram, se supusermos que cada expressão, como $\overline{KA}$, designa geralmente uma grandeza igual a KA, e tomada na mesma direção, como $\overline{K'A'}$, $\overline{K''A''}$, $\overline{K'''A'''}$, $\overline{BK}$, ... (*fig. 3*).

Fig. 3.



[48] O princípio sobre o qual se fundam essas construções, enunciado de uma maneira geral, consiste em que a relação de dois raios $\overline{KP}$, $\overline{KQ}$, fazendo entre eles um ângulo QKP, depende deste ângulo, quando consideramos esses raios como traçados em certa direção, e que esta relação é a mesma que aquela dos outros dois raios $\overline{KR}$, $\overline{KS}$, formando entre eles o mesmo ângulo; mas, embora esse princípio seja, em certo sentido, uma extensão daquele sobre o qual se estabelece a relação geométrica entre uma linha positiva e uma linha negativa, só o apresentamos aqui como uma hipótese, cuja legitimidade ficará por ser estabelecida, e cujas conseqüências, a partir daí, deverão ser confirmadas por outra via.

Com efeito, seguindo, em relação a essa nova espécie de grandezas, os raciocínios que foram feitos acima, veremos que, se $\overline{KA}$, $\overline{K'A'}$, $\overline{K''A''}$, ..., são unidades positivas, $\overline{AK}$, $\overline{A'K'}$, $\overline{A''K''}$, ..., serão unidades negativas; que a média proporcional entre + 1 e – 1 poderá ser expressa por uma linha qualquer, igual às precedentes, perpendicular à sua direção, e que poder-se-á tomar à vontade em um de seus dois sentidos, e assim por diante. Podemos, para ajudar as idéias a se fixar, considerar um caso particular, como, por exemplo, se designarmos por $\overline{KA}$, uma determinada força tomada como unidade, e cuja ação se exerce sobre todos os pontos possíveis, paralelamente a KA e no sentido de K para A, essa unidade poderá ser expressa por uma linha paralela a KA, tomada a partir de um ponto qualquer. A unidade negativa será uma força igual em ação, e cujo efeito acontece paralelamente à mesma linha, mas no sentido de A para K, e poderá igualmente ser expressa por uma linha partindo de um ponto qualquer, a qual será tomada em sentido contrário ao da precedente. Ora, basta que as qualidades positivas e negativas, que nós atribuímos às grandezas de uma certa espécie, depende de direções opostas entre as quais existe uma média, para que possamos equilibrar as idéias desenvolvidas há pouco com relação aos raios partindo de um centro único, e conceber, entre todas as linhas que representarão uma tal espécie de grandeza, as mesmas relações que ofereceram esses raios.

6. Em conseqüência dessas reflexões, poder-se-á generalizar o sentido das expressões da forma $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{KP}$, ..., e toda expressão semelhante designará, como conseqüência, uma linha de um certo comprimento, paralela a uma certa direção, tomada em um sentido determinado entre os dois sentidos opostos que essa direção apresenta, e cuja origem é um ponto qualquer, essas linhas podendo elas mesmas ser a expressão de grandezas de um outro tipo.

Como eles devem ser o assunto de pesquisas que vão se seguir, é a ocasião de lhes aplicar uma denominação particular. Nós as chamaremos *linhas em direção* ou, mais simplesmente, *linhas dirigidas*. Elas serão assim distinguidas de linhas *absolutas*, nas quais só consideramos o comprimento, sem nenhuma relação com a direção[49].

7. Reportando às diversas denominações de uso as diversas espécies de linhas em direção que se engendram a partir de uma unidade primitiva $\overline{KA}$, observa-se que toda linha paralela à direção primitiva é expressa por um número real, que aquelas que lhe são

[49] A expressão de *linhas em direção* é somente a abreviação desta frase: “linhas consideradas como pertencendo a certa direção”. Essa observação indica que não se pretende fundar novas denominações, mas que se emprega essa maneira de se exprimir seja para evitar confusão, seja para abreviar o discurso.

perpendiculares são expressas por números imaginários ou pela fórmula $= a\sqrt{-1}$, e, enfim, que aquelas que são traçadas em uma outra direção que as duas precedentes pertencem à forma $\pm a \ \pm b\sqrt{-1}$, que se compõe de uma parte real e de uma parte imaginária.

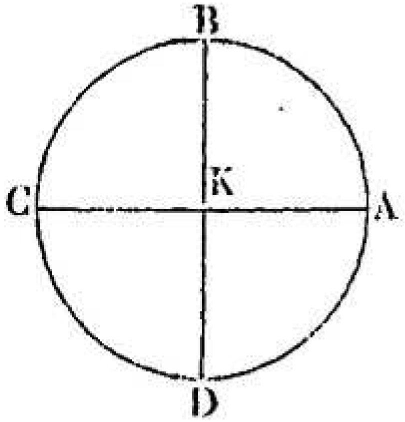
Mas essas linhas são quantidades tão reais quanto a unidade primitiva; derivam dela pela combinação da idéia de direção com a idéia da grandeza, e são, nesse aspecto, o que é a linha negativa , que não é de modo algum encarada como imaginária. Os nomes de *real* e de *imaginário* não combinam, portanto, com as noções que acabaram de ser expostas. É desnecessário observar que aqueles de *impossível* e de *absurdo*, que se encontra por vezes, são ainda mais contrários. Podemos, aliás, nos surpreender ao não ver esses termos empregados nas ciências exatas senão para qualificar o que é contrário à verdade[50].

Uma quantidade absurda seria aquela cuja existência atrasasse a verdade com uma proposição falsa: tal seria, por exemplo, a quantidade x que satisfaria ao mesmo tempo duas equações $x = 2$, $x = 3$, de onde resultaria que $2 = 3$. Admitindo semelhante quantidade no cálculo, chegaríamos a conseqüências tão contraditórias quanto a da equação $2 = 3$; mas os resultados obtidos pelo emprego de quantidades ditas imaginárias são inteiramente conformes àqueles que se deduz dos raciocínios nos quais só utilizamos quantidades reais. Poderíamos, portanto, pressentir um vício nas denominações que colocariam nas mesmas classes as quantidades de fato absurdas e as raízes de ordem par das quantidades negativas, e é o sentimento secreto dessa inconveniência que foi o primeiro germe das idéias que recebem seu desenvolvimento neste Ensaio[51]. Somos, então, conduzidos a empregar outras denominações.

Observemos que, embora exista uma infinidade de espécies diferentes de linhas derivadas da unidade primitiva, levamos, na prática do cálculo, e pelos meios de que nos ocuparemos em breve, todas as linhas em direção às espécies $\overline{KA}$, $\overline{KC}$, $\overline{KB}$, $\overline{KD}$. $\overline{KA}$ é uma unidade primitiva positiva; $\overline{KC}$ é uma unidade negativa; $\overline{KB}$ e $\overline{KD}$ são unidades médias (*fig. 4*).

[50] Houve uma época em que, conduzidos pela força da verdade a ser admitida, nas quantidades abstratas, dos valores negativos, os geômetras, tendo aparentemente alguma dificuldade em imaginar que *menos que nada* pudesse ser alguma coisa, deram o nome de *falsos* aos valores em questão. A palavra parou de ser empregada com o sentido a ela associado, quando foram corrigidas as primeiras idéias que tinham dado origem a essa denominação viciosa.
[51] É quase desnecessário observar que falamos aqui apenas da confusão existente nas palavras, e que de modo algum afirmamos que essa confusão esteja também nas idéias.

Fig. 4.



Além do mais, é conveniente juntar sob um mesmo nome as espécies opostas, positivas e negativas recíprocas. A reunião de duas espécies assim relativas formará uma ordem. Chamaremos *ordem primeira* àquela que forma a espécie primitiva $\overline{KA}$ e sua negativa $\overline{KC}$, e *ordem mediana* àquela que contém as espécies médias $\overline{KB}$ e $\overline{KD}$. Diremos também *quantidade primeira*, *quantidade mediana*, para *quantidade de ordem primeira*, *de ordem mediana*. Essas denominações são extraídas da geração dessas quantidades e da maneira pela qual nós concebemos sua existência. Poder-se-á dar o nome geral de *intermedianas* a todas as outras, que não é necessário designar particularmente[52].

8. Poderíamos também, segundo as idéias precedentes, modificar a expressão das quantidades ditas *imaginárias*, de maneira a dar mais simplicidade a essa parte da notação.

Quando escrevemos $+a\sqrt{-1}$ ou $-a\sqrt{-1}$, indicamos explicitamente a geração da quantidade $\sqrt{-1}$, o que pode ser bom em certos casos; mas, para o ordinário, fazemos abstração dessa geração, e $\sqrt{-1}$ não é outra coisa que a espécie particular de unidade a qual se aplica o número *a*. Portanto, não é essencialmente necessário lembrar-se dessa geração. Além de que a expressão $a\sqrt{-1}$ apresenta $\sqrt{-1}$ como um fator que multiplica *a*; mas, no fundo, $\sqrt{-1}$, em $a\sqrt{-1}$, não é mais um fator que +1 em + *a* ou - 1 em - *a*. Ora, não se escreve + 1.*a*, - 1.*a*, mas simplesmente +*a*, -*a*, e o sinal que precede *a* indica ele mesmo que espécie de

[52] Foi observado acima que as relações que se afirma existir entre as linhas, em virtude das direções as quais pertencem, só podem ser observadas, no presente momento, como hipotéticas. Estamos, portanto, bem longe de pretender que as denominações propostas neste artigo sejam apropriadas a substituir aquelas que o uso consagrou; se aqui as empregamos é que, em geral, convém evitar servir-se de termos cuja significação correta esteja em contradição com as idéias que se quer exprimir, mesmo quando se trata de suposições.

unidade exprime esse número. Pode-se, portanto, empregar um meio semelhante em relação às quantidades imaginárias, escrevendo, por exemplo, $\sim a$ e $\dotplus$a, no lugar de $+a\sqrt{-1}$ ou $-a\sqrt{-1}$, os signos $\sim$ e $\dotplus$ sendo positivos e negativos recíprocos.

Para a multiplicação desses signos, observaremos que, multiplicados por eles mesmos, dão –, e que, por conseguinte, multiplicados um pelo outro, eles dão +. Podemos, aliás, estabelecer uma regra única para todos os sinais, que se estende para um número qualquer de fatores.

Que designemos o valor 2 a cada um dos traços retos, sejam perpendiculares, sejam horizontais, que entram nos sinais de multiplicar, e o valor 1 a cada um dos traços curvos: teremos, para os quatro sinais, os seguintes valores:

$$\sim\ = 1,$$
$$-\ = 2,$$
$$\dotplus\ = 3,$$
$$+\ = 4.$$

Isto posto, tomaremos a soma do valor de todos os fatores, e subtrairemos 4 quantas vezes forem necessárias para que a sobra seja um dos números 1, 2, 3, 4; esse resultado será o valor do sinal produzido; e, da mesma forma, para a divisão, subtrairemos a soma dos traços do divisor daquela dos traços do dividendo, a qual teremos acrescentado, se for preciso, um múltiplo de 4, e a sobra indicará o sinal do quociente. Deve-se observar que essas operações são multiplicações e divisões por logaritmos; essa analogia se colocará em outro dia.

Esses novos sinais abreviarão a notação e tornarão talvez mais cômodo o cálculo das quantidades imaginárias, no qual é por vezes fácil cometer erros relativos aos sinais.