Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Felipe Pelluso Andrade

A criação dos números e sua evolução Matemática: de escrava a rainha das ciências.

Rio de Janeiro

2015

Felipe Pelluso Andrade

A criação dos números e sua evolução Matemática: de escrava a rainha das ciências.

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Helvécio Rubens Crippa

Rio de Janeiro

2015

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

A553 Andrade, Felipe Pelluso.
A criação dos números e sua evolução /Felipe Pelluso Andrade. – 2015.
50 f. : il.

Orientador: Helvécio Rubens Crippa.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Números - História. I. Crippa, Helvécio Rubens. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU 511(091)

Felipe Pelluso Andrade

A criação dos números e sua evolução Matemática: de escrava a rainha das ciências

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 06 de fevereiro de 2015.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Helvécio Rubens Crippa (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Roberto Afonso Olivares Jara
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Rio de Janeiro

2015

DEDICATÓRIA

A Jesus Cristo, pelo conforto de meu coração e acalanto de minh'alma.

A minha mãe, Marcia Pelluso, por todo o suporte e incentivo nesta difícil missão de tornar-me Mestre.

A minha futura esposa, Gabrielle Papera, por me amparar nos muitos momentos conturbados em que cogitei desistir.

AGRADECIMENTOS

A Deus, em cujos ombros descanso meus fardos e a minha avó, Sebastiana Pelluso, por gerenciar minha vida no lar.

Educai as crianças, para que não seja necessário punir os adultos

Pitágoras de Samos

RESUMO

ANDRADE, Felipe Pelluso. *Matemática: de escrava a rainha das ciências*. 2015. 60 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

Este trabalho aborda, de maneira bem sucinta e objetiva, a história da evolução dos números desde o primeiro risco em um osso, até chegar na forma atual como os conhecemos. Ao longo de aproximadamente 30.000 anos de existência, os sistemas de numeração, suas bases e representações sofreram inúmeras modificações, adequando-se ao contexto histórico vigente. Podemos citar a mentalidade científica da época, a necessidade da conquista de territórios, religiões e crenças e necessidades básicas da vida cotidiana. Deste modo, mostramos uma corrente histórica que tenta explicar como e porque a ideia de número se modifica com o tempo, sempre tendo em vista os fatores que motivaram tais mudanças e quais benefícios (ou malefícios) trouxeram consigo. Com um capítulo dedicado a cada uma das mais importantes civilizações que contribuíram para o crescimento da matemática e, sempre que possível, em ordem cronológica de acontecimentos, o leitor consegue ter uma boa ideia de como uma civilização influencia a outra e como um povo posterior pôde apoiar-se nos conhecimentos adquiridos dos antepassados para produzir seus próprios algorítimos e teoremas.

Palavras-chave: História da Matemática. História dos Números. Criação e Evolução dos Números. Origem dos Sistemas de Numeração. Numeração Decimal. Algarísmos Indo-Arábicos.

ABSTRACT

ANDRADE,Felipe Pelluso. *Mathematics: From slave to queen of the sciences*. 2015 60 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

This work addresses, in a short and objective way, the history of the evolution of numbers since the first scratch on a bone, until the current form we know. Through almost 30,000 years of its existence, the numerical system, it bases and representations had many modifications, being adapted to the historical context. We can cite the cientific mentality, the need to conquer territories, religions and beliefs and the basic needs of normal life. Thus, we show a historical chain that tries to explain how and why the idea of number changes in time, always aiming for the factors that motivated these changes and the benefits (or hindrances) that they brought with them. With one chapter dedicate to each on of the most important civilizations that had a contribution to mathematics improvement and, whenever possible, in a cronological order of happening, the reader can have a good idea of how one civilization influences others and how a nation could use earlier nations' knowledge to build their own algorithms and theorems.

Keywords: History of Mathematics. Criation and Evolution of the Numbers. Origin of the Numeral System. Decimal Numbers. Hindu-Arabic Numeral System

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Vem da necessidade de contar o primeiro achado matemático. O *osso de Lebombo* (osso de um babuíno) encontrado na Suazilândia data de aproximadamente 35.000 anos a.C., e contém quatro grupos de sete riscos feitos com algum material cortante. Provavelmente, aí o homem começa a contar os dias da semana.

Outro achado é o *Osso de Ishango*, encontrado no Congo. Nele aparecem 60 riscos em um lado e outros 60 em outro lado e em ambos os lados, os riscos estão agrupados em números iguais. Obviamente, não se pode fazer isso sem contar.

Desde então, a matemática tem desempenhado um papel de protagonista no desenvolvimento das tecnologias humanas e no desenvolvimento humano, propriamente dito, tendo sido usada principalmente como ferramenta pelas primeiras civilizações para a construção de templos, aquedutos, muralhas, castelos e pirâmides, bem como para o cálculo de áreas, volumes, impostos e despesas de governantes.

Uma das primeiras civilizações na qual a figura do *escriba* (uma espécie contador, que podia ser escrivão e arquivista) aparece são os babilônios. Povos que residiam na Mesopotâmia (atual Iraque), são conhecidos por sua complexa notação posicional de base 60 e notável habilidade de resolver problemas elementares por meio de algoritmos.

O estudo de suas técnicas de resolver problemas é feito por meio da interpretação de aproximadamente 400 tábuas de argila conhecidas desde o século XIX e que datam de 1800 a 1600 a.C.. Hoje já se sabe que as tábuas tratam de temas complexos, como frações, problemas que hoje seriam resolvidos por meio de equações do segundo e terceiro graus e cálculo de áreas e volumes. Conheciam o "Teorema de Pitágoras".

Outra civilização matematicamente notável foram os egípcios. Dentre suas principais contribuições à humanidade, podemos citar as três grandes pirâmides: Queops, Quefren e Miquerinos, que de modo algum poderiam ter sido construídas sem que este magnífico povo dominasse bem a matemática usada na arquitetura.

Ao contrário do que ocorre com os babilônios, poucos escritos egípcios resistiram até hoje, talvez por se tratar de um povo envolvido em inúmeras guerras ou por não ser parte da tradição egípcia registrar seus cálculos. Além disso, o papiro é muito mais frágil do que registros em tabletes de argila. Sabe-se que nesta civilização a figura do escriba também era fundamental na resolução de problemas práticos e que os egípcios foram os primeiros a padronizar uma unidade de medida: o Côvado ou Cúbito

Somente por meio da padronização desta unidade, que era a distância da ponta do nariz à ponta do polegar do Faraó, quando este estava com o braço esticado, foi possível projetar e construir monumentos tão grandiosos e resistentes como as grandes pirâmides.

Mas foi somente na Grécia que a matemática toma forma e rigor parecidos com os que temos hoje. Famosos pela criação da lógica e retórica, coube aos gregos a organização da matemática, a noção e formalização de inúmeros teoremas e suas demonstrações, muitas das quais usamos até hoje.

Uma peculiaridade da geometria grega era a desassociação entre grandezas e números. Os gregos dividiam a matemática em três áreas principais: logística, aritmética e geometria, mas os grandes pensadores e homens livres ocupavam-se majoritariamente da segunda e da terceira. Diziam que o estudo de geometria elevava o espírito e purificava a alma, enquanto a logística deveria ser usada somente por mulheres e escravos, que eram considerados, à época, inferiores e deviam ocupar-se das compras e comércio.

Com a ascensão do império de Roma, a Grécia passa a ser dominada e juntamente com ela, o pensamento filosófico. Neste período, que prerdurou até o início da Idade Média, a matemática passa pela *idade das trevas* do pensamento lógico e passa a ser usada quase que exclusivamente para fins militares.

Aos árabes e indianos devemos a principal contribuição, que foi crucial para o desenvolvimento da aritmética e posteriormente da álgebra: a representação dos números como conhecemos hoje.

Desenvolvidos pelos indianos, os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 foram reforçados posteriormente pelo 0, e juntamente com sistema posicional já inventado pelos babilônicos, derrubam o sistema de numeração romano. Ineficiente e incapaz de registrar o encadeamento de cada conta feita, o fraco sistema romano rui e os comerciantes e matemáticos lentamente adotam o sistema hoje conhecido como hindu-arábico.

Aos árabes, creditamos a criação de um novo ramo da matemática: a Álgebra, cuja invenção é dada ao matemático *Mohammed ben Musa Al-Khowarizmi*, nascido em 900 d.C., em seu trabalho *Al-gjabr Wa'l-mocábala*, ou *O livro sumário sobre cálculos por transposição e redução*. A palavra álgebra deriva exatamente de *Al-gjabr*.

O trabalho de Mohammed serviu de base para que François Viète e, em seguida, René Descartes pudessem formalizar uma notação para a álgebra usando letras do alfabeto para representar incógnitas.

A partir daí, a matemática européia toma grande impulso, com inúmeros matemáticos, sobretudo italianos, alemães e franceses, mas também suíços, belgas e russos, tendo desenvolvidos teorias extremamente complexas que prestam serviços indispensáveis à engenharia, química, biologia e sobretudo à física.

Neste trabalho, pretendemos mostrar como a matemática evolui, ao longo desses 30.000 anos de existência, de ferramenta a protagonista no meio científico e como ela pode ser, ao mesmo tempo, serva e rainha das ciências exatas e da natureza.

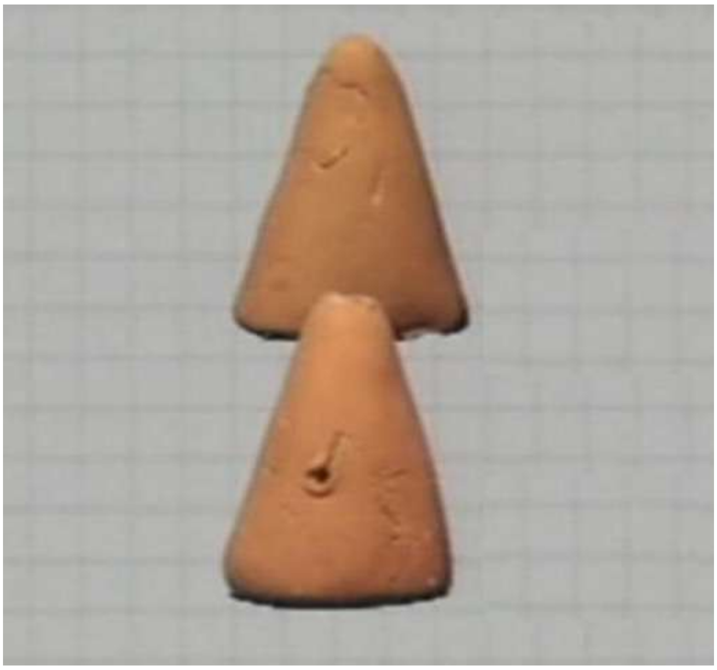
Esperamos que, ao final da leitura deste trabalho, o leitor (principalmente o professor de matemática) sinta-se confiante para contar a história de como nós, humanos, por meio da matemática e de muita criatividade, deixamos de ser simples animais para estarmos no topo da cadeia evolutiva, tendo nos transformado na espécie mais adaptada a viver no planeta. A história da matemática se confunde com a nossa história.

1 OS NÚMEROS NA MESOPOTÂMIA

A pré-história é o período caracterizado pela ausência da escrita, o que dificulta muito o estudo desta era da Humanidade. No que diz respeito à matemática, sabe-se apenas que o homem pré-histórico fazia riscos em ossos como um meio de contar primitivo. Surge aí o embrião do número "um": um risco ou um traço feito em um osso de animal.

Com a criação do "um" como um entalho em um osso, o homem já era capaz de realizar pequenas somas primitivas, mas ainda não era possível subtrair. Foi somente em torno de 4000 a.C. que os Sumérios, no Oriente Médio, começam a representar o "um" por meio de um cone feito de barro cozido. Esta invenção permite que objetos sejam representados pelos pequenos cones e, para subtraí-los, basta retirar a quantidade de cones correspondentes. Assim, 5 galinhas podiam ser associadas a 5 cones e ao se matar uma galinha, bastava retirar um cone e a quantidade de cones restantes era exatamente igual à quantidade de galinhas restantes. Os Sumérios haviam inventado a *aritmética*.

Figura1 - Cones de argila usados pelos Sumérios como número "um"



Fonte: www.laaventuradelsaber.com

A aritmética foi crucial na organização das complexas cidades sumérias, onde uma grande quantidade de pessoas vivia e transitava diariamente (pois tratava-se de uma importante rota comercial entre a Ásia e a Europa). Sem a aritmética, seria impossível o cálculo de impostos, o armazenamento e distribuição de grãos, o cálculo de ganhos e perdas, dentre outras coisas inerentes à grandes cidades. Não se sabe ao certo como os escribas dessa época efetuavam os cálculos.

Tamanha era a importância dos cones numéricos para os Sumérios que estes eram guardados em envelopes de argila lacrados. Mas como saber quantos cones havia em cada envelope? Então, eram feitas marcas do lado de fora dos envelopes, de modo que qualquer pessoa saberia quantos cones havia em cada envelope.

Figura 2 - Envelopes de argila Sumérios

Fonte: historyconnections.webs.com

Ora, a partir daí, o cone não era mais necessário, bastavam apenas as marcas para simbolizar as quantidades de números "uns" que fossem necessárias. Os sumérios aperfeiçoaram esta forma de escrita e conceberam símbolos diferentes para diferentes quantidades. As marcas então passaram a ser feitas em tabletes de argila enquanto esta ainda estava úmida. Em seguida, cada tablete era cozido ao forno ou ao sol de modo que a marca feita permaneceria por muito mais tempo. Assim surgia a primeira forma de escrita.

É com os Sumérios que surge a figura do *Escriba*. Ainda não se sabe como o Escriba era escolhido dentre todos, mas sabe-se que desde cedo entrava em contato com problemas de cunho real e fictícios de modo a treinar os algoritmos existentes. Quando crescia, este se tornava um dos profissionais mais bem remunerados da época. Era uma espécie de *Contador*.

Os Babilônicos, assim como os Sumérios, habitavam o Oriente Médio e tinham suas cidades organizadas de maneira muito próxima à dos Sumérios, de tal maneira que hoje, quando se estuda a matemática da Mesopotâmia, não se faz distinção entre os povos Babilônios e Sumérios, embora se saiba que tenham sido diferentes em muitos outros quesitos. Sabe-se, por exemplo, que os Sumérios eram muito melhores construtores que os Babilônicos que, por sua vez, inventaram o primeiro código de leis que se conhece, o *Código* *de Hamurabi*, e um rico e preciso calendário, cujo objetivo principal era conhecer mais sobre as cheias do rio Eufrates.

No sistema de numeração Babilônio e Sumério, o símbolo 𒁹 representava o número "um". Esse símbolo era repetido algumas vezes para formar o "dois" (𒈫), "três" (𒐈), e assim por diante, até formar o "nove". Para o número "dez", era usado o símbolo diferente 𒌋. A partir daí, acrescentava-se o símbolo 𒁹 ao 𒌋 para formar o "onze" até chegar ao número "dezenove". O número "vinte" era escrito como 𒌋𒌋.

O processo acima seguia até o número "cinquenta e nove". Para o número "sessenta" utilizava-se novamente o símbolo 𒁹. Observe a tabela abaixo.

Tabela 1 - Números Babilônicos e Sumérios

𒁹	1	𒈫	2	𒐈	3	𒐉	4
𒐊	5	𒐋	6	𒐌	7	𒐍	8
𒐎	9	𒌋	10	𒌋𒁹	11	𒌋𒈫	12
𒌋𒐈	13	𒌋𒐉	14	𒌋𒐊	15	𒌋𒐋	16
𒌋𒐌	17	𒌋𒐍	18	𒌋𒐎	19	𒎙	20
𒌍	30	𒐏	40	𒐐	50	𒁹	60

Note que é possível representar qualquer número apenas com esses símbolos, isso porque esse sistema, a exemplo do nosso sistema atual, é *posicional*, isto é, o valor de cada símbolo não é dado somente pelo seu *valor absoluto*, mas também pelo seu *valor relativo*, isto é, seu valor dentro do número que ele compõe. Como eram usados 60 símbolos diferentes para representar todos os números, dizemos que o sistema numérico babilônico era *posicional de base sessenta*. Na verdade, esse sistema era uma combinação da base 60 com a base 10, uma vez que até 59, os números mudam de 10 em 10.

Uma das vantagens de se ter um sistema de numeração de base 60 é o fato de 60 ser divisível por todos os inteiros de 1 a 6. Isso facilitava as contas e diminuía o índice de erros, mas há também limitações importantes no sistema numérico babilônico. Não era possível, a priori, discernir se 𒁹 𒁹 significava "dois", "sessenta e um" ou mesmo "cento e vinte", já que o mesmo símbolo era usado para o "um" e para o "sessenta". Os babilônios logo encontraram uma solução para isso e passaram a representar o número “dois” como 𒁹𒁹, isto é, dois símbolos 𒁹 juntos, mas ainda assim não era possível distinguir o número 120 do número 61. É fato que em alguma época, começou-se a usar símbolos de tamanhos diferentes para representar 60 e 1, mas a ambiguidade logo retorna quando há uma necessidade de se padronizar o tamanho dos símbolos de modo a facilitar o registro. De modo geral, a dúvida era sanada sempre de acordo com o contexto em que o número aparecia. Como eram somente os escribas eruditos que manipulavam a matemática, estes estavam sempre atentos aos contextos e discerniam se o número era 120 ou 61, de fato.

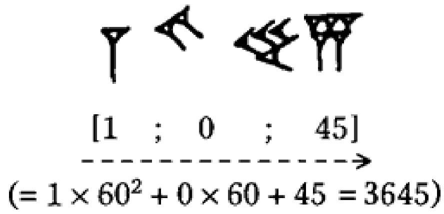
Outra limitação do sistema babilônico é a ausência de um separador entre a parte inteira e a parte fracionária, assim, o número 𒁹 𒁹 𒁹 𒁹 𒁹 podia representar ao mesmo tempo, em base 10, o número 5, o número $5x60^{-1}$ =1/12, ou o número $5x60^{-2}$ =1/720. Novamente o escriba decidia de que número se tratava somente pelo contexto.

Mas a maior limitação do sistema babilônico de numeração era a ausência do zero. De fato, o número que na base 10 é escrito como 3.601, poderia ser escrito na base 60 como $1x60^2+0x60+1$, que traduzindo para nossos algarismos seria $\overline{101}^{60}$, mas usando algarismos cuneiformes, seria 𒁹 𒁹. Novamente, a ambiguidade se faz presente neste sistema. É verdade que num sistema de base 60, o zero aparece bem menos do que num sistema de base 10 e, talvez por isso, essa limitação não tenha afetado tanto esta civilização.

Embora engenhoso, esse sistema não era único. Ele era usado em matemática, isto é, em problemas para exercitar os escribas, em problemas envolvendo medidas, etc. Para as demais ativiades, havia outros sistemas específicos.

Em torno do ano 300 a.C., os babilônios começaram seus estudos em astronomia e escrever números grandes tornou-se uma realidade. Era então imprescindível inventar um símbolo que funcionasse como o zero. Foi então que os astrônomos introduziram um símbolo de dois traços inclinados para separar a coluna vazia, como na figura abaixo.

Figura 3 - Exemplo de números Babilônicos.



É importante frisar que o separador não era o zero como conhecemos, pois não era aceito como o resultado de uma conta, mas somente um símbolo que separava as ordens que “não estavam sendo usadas”. O zero, propriamente dito, nunca foi inventado pelos babilônios.

Um exemplo que ilustra bem a complexidade da matemática Babilônica é o tablete de argila Plimpton 322. Encontrado em *Larsa* no antigo Iraque e vendida ilegalmente a *George Athur Plimpton*, o tablete de 8,8x15,5cm contem 15 linhas e 4 colunas em escrita cuneiforme, tendo sido partida na parte superior esquerda, inferior direita e nas linhas 5 e 6 na extrema direita. Segundo o *British Institute for the Study of Iraq* (Instituto Britânico de Estudo do Iraque), este tablete contem uma lista de ternos pitagóricos, apesar de isso ser muito discutido e de haver várias interpretações. A primeira coluna contem a razão entre os quadrados dos dois catetos, a segunda linha e a terceira contém os quadrados dos dois catetos e a quarta linha uma numeração de 1 a 15.

Figura 4 - Plimpton 322

Fonte: http://blogs.baruch.cuny.edu/plimpton322/the-tablet/

Um fato interessante sobre este tablete é que ele contem erros nas linhas 2, 8, 13 e 15, o que sugere que era um tablete usado como exercícios por algum aluno Escriba.

2 OS NÚMEROS NO EGITO

Os egípcios desenvolveram seu sistema de numeração em torno do ano 3000 a.C, mais ou menos na mesma época que os Sumérios e Babilônios, quando o contato entre as civilizações começa, o que não quer dizer que a criação egípcia não seja original.

A exemplo do nosso sistema, o sistema de numeração egípcio tinha base 10, embora não fosse posicional como o nosso, e isso não é tido como coincidência, mas credita-se ao fato de termos exatamente 10 dedos, uma vez que outras culturas pelo mundo também usam essa mesma base para seu sistema de numeração, mas diferente de nós, o sistema egípcio era aditivo, como o Sumério.

O estudo da civilização egípcia se dá principalmente pelo estudo de papiros encontrados, como o *Papiro de Rhind*, escrito em hierático e datado de cerca de 1650 a.C., embora no texto seja referido que foi copiado de um manuscrito, de cerca de, 200 anos antes.

Figura 5 - Papiro de Rhind

Fonte:www.fisica-interessante.com

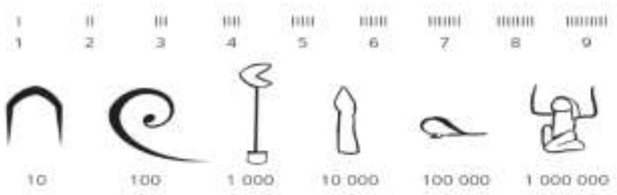
Comprado por *Alexander Henry Rhind* no ano de 1850, em Luxor, no Egito, é também conhecido por *Papiro de Ahmes*, nome do Escriba egípcio que o copiou. Atualmente no Museu Britânico, o papiro contém uma série de tabelas e 84 problemas com suas respectivas soluções.

A civilização egípcia é conhecida por sua grandiosidade. Suas pirâmides, esfinges e até mesmo seu exército eram de tamanhos espantosos, se comparado aos exércitos de sua época. Tal grandiosidade jamais seria possível com os pequenos números conhecidos pelos

Sumérios e Babilônios (já que estes preocupavam-se, principalmente, do comércio e da vida na cidade, o que não, geralmente, não necessitava de números muito grandes.), era preciso conceber números que representassem quantidades condizentes com a grandiosidade desta civilização. Foi então que, em torno do ano 3000 a.C., os egípcios concluíram seu sistema numérico. Para isso começaram com números do homem comum e os representaram por objetos comuns, do quotidiano.

O “um” era representado por um traço vertical e os números de “dois” a “nove” eram representados pelo número correspondente de traços verticais. O número “dez” era uma corda; o número “cem” era uma corda em espiral. Em seguida vinham os números da aristocracia. O número “mil” era a flor de lótus, que era considerado o símbolo do prazer; o número “dez mil” era um dedo esticado; o "cem mil" era um peixe, e então vinha o número dos faraós, o número “um milhão”. Há várias interpretações para este símbolo, mas alguns historiadores afirmam que seria um prisioneiro pedindo perdão. Este era certamente um número de que somente um faraó precisaria, justamente para contar seus prisioneiros.

Figura 6 - Números Egípcios



A convenção para escrever e ler os números é simples: os números maiores vêm escritos antes dos menores e, se há mais de uma linha de números, devemos começar pela superior. Sendo assim, para escrevermos um número, basta escrevermos, seguindo esta convenção, todos os símbolos, e a soma dará o número desejado. Por exemplo:

Que número é esse em nosso sistema de numeração? Como o sistema é aditivo, e os números são obtidos pela soma de todos os números representados pelos símbolos, basta escrevermos:

1.000+1.000+1.000+100+100+10+10+10+10+1+1+1+1=3.244

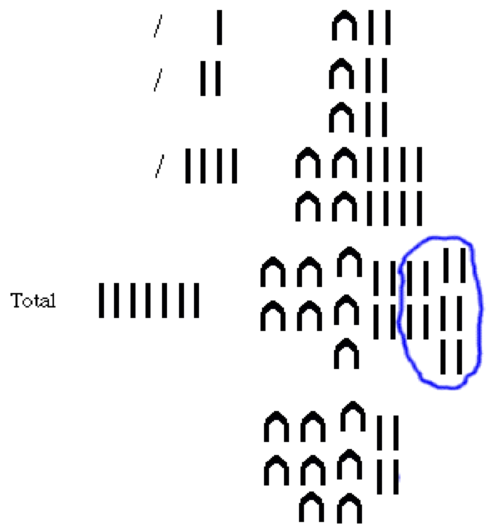
Vemos que se trata de um sistema "aditivo". O valor do número é obtido somando os valores dos símbolos usados para representá-lo. Por não se tratar de um sistema posicional, números muito grandes eram muito difíceis de serem escritos, pois demandariam um número muito grande de símbolos iguais. Esta dificuldade não parece ter afligido os egípcios que não deviam se importar muito com números muito maiores que um milhão, pois na prática, não havia necessidade de números muito grandes. Uma diferença do sistema egípcio em relação ao sumério são as frações. Os Sumérios não usavam frações, mas apenas representações sexagesimais (o análogo aos nossos decimais), ao passo que os egípcios tinham uma maneira, ainda que primitiva, de representar frações.

Antes de mencioná-la, notemos que os egípcios não viam as frações da mesma maneira que nós. Eles entendiam as frações como a “n-ésima” parte de algo, isto é, frações do tipo 3/10 não existiam, uma vez que qualquer objeto só pode ter <u>uma décima parte</u>. Ao invés disso, para escrever a fração 3/10 eles usavam, o que na notação atual seriam, frações de numerador 1, isto é, ao invés de 3/10, escreveriam 1/5+1/10.

A fração 1/2 tinha o símbolo especial  e a fração 2/3 (uma das únicas frações não unitárias que eles escreviam) era escrita como . As demais frações eram escritas com o símbolo referente ao “denominador” com uma elipse em cima. Assim, a fração 1/7 seria escrita como . A elipse acima dos números significa “parte”, de modo que o símbolo  não significa “um sétimo” mas “a sétima parte”.

Por se tratar de um sistema aditivo, somar dois números era uma tarefa bem simples, bastando apenas agrupar os números e fazer as simplificações necessárias. A multiplicação não era das tarefas mais difíceis também, uma vez que multiplicar um número por 2 era apenas repetir o mesmo símbolo duas vezes e simplificar. Dada a facilidade de se multiplicar por 2, todas as multiplicações eram feitas com base na multiplicação por 2, da seguinte forma: na primeira linha coloca-se o número 1 e ao lado o número que desejamos multiplicar. Vamos chamá-lo de x. Abaixo, o número 2, e ao lado, o dobro do número de cima, $2x$. Na próxima linha, o número 4 e ao lado, o dobro do número de cima,$4x$. E assim por diante, até que a soma dos números à esquerda fosse o fator pelo qual desejamos multiplicar. Basta então somar as linhas e o resultado aparecerá naturalmente. Isso é devido ao fato de que qualquer número pode ser escrito como potências de 2, ou seja, "na base 2".

Considere o problema de multiplicar 7 por 12.



Na nossa linguagem atual, a multiplicação acima ficaria assim:

1x12 = 12

2x12 = 24

4x12 = 48

Total: 7x12 = (1+2+4)x12 = 12+24+48 = 84

Era um sistema engenhosos para se efetuar multiplicações, e para divisões também não havia problema.

Considere o problema de dividir 184 por 8.

Dobramos sucessivamente o divisor até um passo antes que o número de duplicações exceda 184.

1x8 = 8

2x8 = 16

4x8 = 32

8x8 = 64

16x8 = 128.

Escolhemos os números da coluna da direita que somados dão 184. Neste caso, 184 = 128 + 32 + 16 + 8. Tomando os valores correspondentes aos escolhidos, na coluna da esquerda, temos o quociente 16+4+2+1 = 23. Então, 184 dividido por 8 é 23. E se fosse 185? Como 185 = 184 + 1, o resultado seria 23 + 1/8. Se o número fosse 189 = 184 + 5, o quociente seria 23 + 5/8 = 23 + 4/8 + 1/8 = 23 + 1/2 +1/8.

Como podemos ver, uma das grandes vantagens do sistema egípcio é que este facilita muito as contas básicas de adição e multiplicação, embora os Babilônios também não tivessem problemas em lidar com a adição e com a multiplicação.

Mas a maior conquista da matemática egípcia foi a padronização de uma unidade de medida. Mestres da construção e arquitetura, os egípcios sempre se destacaram pela grandeza e beleza de seus monumentos e seria impossível construir grandes e belos monumentos sem a padronização de uma unidade, isto é, sem definir a priori o que significava “1”. Tendo em vista a arquitetura, os egípcios se viram obrigados a criar o *Côvado ou Cúbito*. Sabe-se que estas unidades existiam em outras civilizações como os Babilônicos e os Hebreus (há inclusive citações bíblicas do uso do Côvado pelos hebreus), que eram povos que residiam bem próximo, mas somente os Cúbitos egípcios eram bem padronizados.

Com a medida do braço de um homem, do ombro à ponta dos dedos, mais a largura de sua mão, o Cúbito egípcio media em torno de 52,4cm e era tão importante que havia cópias guardadas em todos os templos espalhados por todo o Egito. Qualquer pessoa que fosse começar alguma construção deveria adquirir uma cópia do Cúbito em algum templo para que todas as construções no império fossem padronizadas.

3 OS NÚMEROS NA GRÉCIA

Foi na Grécia Antiga que a matemática, e portanto os números, começa a ganhar a forma que tem hoje, concebida não como um conjunto de receitas e algoritmos para resolver problemas, como na Mesopotâmia e Egito, mas como uma ciência baseada na lógica, onde cada afirmação deveria ser mostrada partindo de um fato inegável e aceito como verdade: os *axiomas*.

Mas equivoca-se quem pensa que a Grécia já nascera matematicamente desenvolvida. Deduz-se que o processo de evolução da matemática grega deu-se sobretudo pelo contato de algumas das célebres personalidades da matemática de todos os tempos com os povos da Mesopotâmia e do Egito, como por exemplo Tales de Mileto e o lendário Pitágoras.

À época de Tales (aproximadamente 620 a.C), a Grécia se estendia do sul da Europa ao norte da África e Ásia. Eram pequenas cidades, frequentemente brigando entre si, unidas por uma língua comum e por deuses comuns. Muito cedo, essas cidades tiveram que criar colônias, cidades filhas, que reverenciavam os mesmos deuses. Isso foi feito para se livrar do excesso de habitantes em uma terra pobre e sem recursos. Grego era todo aquele que falava grego e adorava os mesmos deuses do Olimpo, mas a Grécia não era um Estado Nação. Por se tratar de um terreno bastante acidentado, os povos que compunham a civilização grega muitas vezes tinham pouco contato o que dificultava a adoção de um sistema de contagem e numeração único. É sabido que havia um "sitema padrão" do qual todos os outros se derivavam e estes, por sua vez, eram bem semelhantes, mas com algumas características próprias de cada povo. Desse modo, cada cidade tinha seu próprio sistema numérico.

O mais antigo sistema de numeração de que se tem notícia na Grécia é o sistema Ático, usado em Atenas e datado da segunda metade do primeiro milênio antes da era cristã. Neste sistema havia um símbolo específico para cada um dos números 1, 5, 10, 100, 1000 e 10.000, de modo que para encontrar um número que não fosse um dos acima, usava-se o método aditivo ou multiplicativo.

Figura 7 – O sistema Ático

1 I	100 H	10 000 M
2 II	200 HH	20 000 MM
3 III	300 HHH	30 000 MMM
4 IIII	400 HHHH	40 000 MMMM
5 𐅃	500 𐅅	50 000 𐅇
6 𐅃I	600 𐅅H	60 000 𐅇M
7 𐅃II	700 𐅅HH	70 000 𐅇MM
8 𐅃III	800 𐅅HHH	80 000 𐅇MMM
9 𐅃IIII	900 𐅅HHHH	90 000 𐅇MMMM
10 Δ	1 000 X	
20 ΔΔ	2 000 XX	
30 ΔΔΔ	3 000 XXX	
40 ΔΔΔΔ	4 000 XXXX	
50 𐅄	5 000 𐅆	
60 𐅄Δ	6 000 𐅆X	
70 𐅄ΔΔ	7 000 𐅆XX	
80 𐅄ΔΔΔ	8 000 𐅆XXX	
90 𐅄ΔΔΔΔ	9 000 𐅆XXXX	

Fonte: História Universal dos Algarismos, 1997.

O sistema ático também é conhecido como *numérias acrofônicos* ou *acrófonos*, pois seus símbolos derivam da primeira letra das palavras usadas para representar "cinco", "dez", "cem", "mil" e "dez mil".

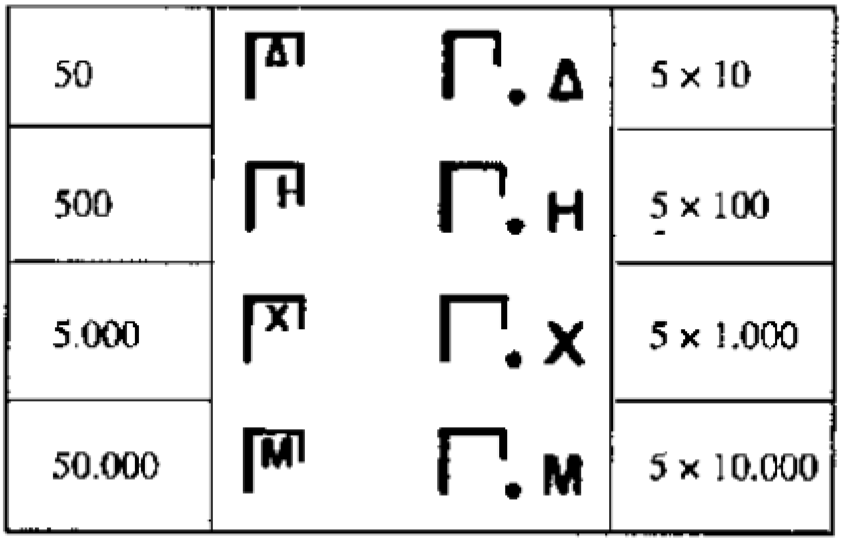
Figura 8 - Compreendendo o sistema ático

O SINAL	APENAS LETRA	E CUJO VALOR É IGUAL A	CORRESPONDE À INICIAL DA PALAVRA	ISTO É, AO NOME DO NÚMERO
𐅃	PI (trata-se da forma arcaica da letra P)	5	Πευτε Pénte	*Cinco*
Δ	DELTA	10	Δεκα Déka	*Dez*
H	ETA	100	Ηεκατον Hékaton	*Cem*
X	XI (pronunciar "KHI")	1.000	Χιλιοι Khílioi	*Mil*
M	MU	10.000	Μυριοι Myrioi	*Dez mil*

Fonte: História Universal dos Algarismos, 1997.

Os sinais que representam os números 50, 500, 5.000 e 50.000 são obtidos por meio de multiplicações.

Figura 9 - O sistema ático e a multplicação



50	𐅄	Γ . Δ	5 × 10
500	𐅅	Γ . Η	5 × 100
5.000	𐅆	Γ . Χ	5 × 1.000
50.000	𐅇	Γ . Μ	5 × 10.000

Fonte: História Universal dos Algarismos, 1997.

Como se pode ver, o sistema ático é um sistema muito próximo ao sistema de numeração egípcio, que também não era posicional, isto é, não permitia escrever com facilidade números muito grandes.

Esse sistema também era extremamente desvantajoso no que diz respeito às contas, já que não era possível criar um algoritmo prático que fornecesse um meio de realizá-las. Para esta finalidade eram usados os *ábacos* e as *mesas de calcular*. A pessoa que desejasse fazer algum tipo de conta deveria fazê-la num ábaco e anotar somente seu resultado usando o sistema acima. Mas como conferir se os cálculos foram feitos de maneira correta? Era impossível.

Com sistemas numéricos tão limitados, parece improvável que a Grécia tenha sido o berço da matemática moderna, mas mesmo contrariando a lógica, ela o foi. Graças ao talento de seus matemáticos, dentre os quais os mais antigos de que se tem notícia são Tales de Mileto e Pitágoras de Samos. O segundo principalmente, influenciou muito a matemática devido as concepções filosóficas com as quais impregnou praticantes da matemática ou filósofos que se valiam dela, como Platão.

Durante boa parte de sua vida, Tales de Mileto dedicou-se ao comércio, profissão que o fez a viajar por boa parte da Ásia, Europa e Egito. No Egito Tales provavelmente foi aluno dos sacerdotes (ou conviveu com eles), onde foi introduzido às ciências matemáticas e logo superou seus mestres. Há indícios de que Tales também tenha estado com os Escribas Babilônios, onde aprendeu, dentre outras coisas, a prever eclípses. Consta que, usando proporções, Tales foi capaz de medir a altura das pirâmides por meio de suas sombras. Ao retornar à Grécia, Tales funda a *Escola Jônica*, uma escola de filosofia na cidade de Mileto, na Jônia. Há indícios que um de seus alunos tenha sido Pitágoras.

A biografia de Pitágoras é cercada de misticismos e lendas e há até historiadores que duvidam de sua existência, mas o fato é que seu nome era bastante conhecido e respeitado. Pitágoras deve ter nascido aproximadamente no ano de 570 a.C. e, provavelmente, incentivado por seu mestre Tales, viajou por cerca de 30 anos pelo Egito, Babilônia, Síria, Fenícia e provavelmente Índia e Pérsia, onde aprendeu em cada lugar conhecimentos sobre Matemática, Ciências, Filosofia e Religião. Ao retornar à Grécia, Pitágoras fundou sua escola vegetariana de matemática: a *Escola Pitagórica*.

Ele foi o primeiro a criar a ideia de números pares e ímpares e os chamou de "macho" e "fêmea", respectivamente. Tinha grande interesse por números inteiros, triangulares e mágicos e acreditava que a unidade era a base de tudo. Chegou a dizer que "tudo é feito de números".

Pitágoras criou o precursor do violão, o *monocórdio*, que tinha esse nome por ser formado por uma única corda e o usou para estudar a razão entre as notas. Ele mostrou que cordas cujos comprimentos eram múltiplos produziam notas iguais com diferença de algumas oitavas e que cordas com comprimentos fracionários podiam produzir sons agradáveis ou não, dependendo da fração da corda.

Mas Pitágoras se viu vencido por suas próprias crenças. Diz a lenda que enquanto estudava o triângulo retângulo, ele notou que não era possível construir um triângulo retângulo com dois lados iguais e cuja hipotenusa fosse um número inteiro e, quando um de seus alunos tentou convencê-lo de que não era possível, seus outros discípulos o afogaram.

A irmandade dos pitagóricos perdurou por mais de 200 anos ainda produzindo conhecimento. Como era costume assinar a todos os trabalhos com o nome de Pitágoras, não se sabe ao certo quais resultados foram provados por Pitágoras ou por seus seguidores, dentre os quais figura o grande general *Árquitas de Tarento* (428 - 347 a.C.) como um dos últimos pitagóricos.

Com o fim da Escola Pitágorica surge uma nova escola: a *Escola Sofista*. Após a derrota dos persas sob o comando de *Xerxes*, cria-se uma liga para defender as cidades livres gregas, da qual Atenas, por se destacar, logo torna-se líder. Atenas incorpora o tesouro grego e sua população logo nota os efeitos. Os cidadão atenienses eram bem instruídos e dedicavam boa parte das suas vidas ao lazer. Com tantas pessoas sendo instruídas ao mesmo tempo, logo surge a figura do que hoje chamamos de *professor*. Os sofistas eram filósofos que ganhavam a vida ensinando a arte da retórica, e foram os primeiros filósofos a aceitarem ser pagos para transferir seus conhecimentos e, embora se dedicassem majoritariamente à lógica e retórica, também ensinavam matemática e geometria.

Pitágoras, assim como seus antecessores, não conseguia conceber um número que não representasse uma quantidade, isto é, um número não poderia ser um número se não representasse algo. Mas Arquimedes, foi mais além.

Arquimedes nasceu no ano de 287 a.C. em Siracusa, na Grécia, e era um aficcionado dos "jogos matemáticos". Gostava de investigar propriedades dos números, mesmo que não houvesse aplicações práticas, ainda que tenha também se ocupado de problemas reais. Esses jogos, por não terem o menor compromisso com a realidade, permitiram que Arquimedes pudesse elevar os números e a matemática ao plano do abstrato. Ele se preocupava com problemas que não tinham a menor conotação real, como por exemplo, como transformar uma esfera em um cilindro. Ao descobrir a solução, Arquimedes acabara de fornecer a teoria necessária para a criação dos mapas modernos que temos hoje.

Outras escolas foram criadas em seguida, como a *Primeira Escola de Alexandria*. Esta escola pode ter sido fundada por *Euclides*, e há indícios de que este foi discípulo de *Aristóteles*.

Os matemáticos gregos faziam distinção entre a *ciência dos números* e a *arte do cálculo* e as chamavam de *aritmética* e *logística*, respectivamente. Os cidadãos gregos costumavam ocupar-se principalmente do estudo da aritmética. Seu estudo era mais comum sendo a logística tida por Platão como infantil e vulgar. Era deixada a cargo das mulheres, escravos, comerciantes, agrimensores, etc.

Aos poucos o sistema Ático foi substituído por um outro sitema de numeração também usado em Atenas. O sitema *Greco-alfabético,* como é atualmente conhecido, foi um retrocesso do ponto de vista da prática do cálculo. Neste sistema eram usadas as letras do alfabeto grego juntamente com as três letras antigas **δ**, **φ**, **ϡ** e o símbolo **M**.

Figura 10 - O sistema Greco-Alfabético

α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	φ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900
͵α	͵β	͵γ	etc...					
1.000	2.000	3.000						
					M	$\overset{\beta}{M}$	$\overset{\gamma}{M}$	etc...
					10.000	20.000	30.000	

Fonte: Uma História da Matemática, 2007

Como pode ser notado, a partir de 1000 o alfabeto reinicia, mas um traço como uma vírgula antes do símbolo é acrescentado para evitar confusões. Os atenienses usavam também um traço horizontal sobre um número escrito durante uma frase para destacá-lo do resto da frase. O coeficiente **M** podia ser usado abaixo, antes ou depois do número, assim o número 43678 poderia ser escrito como **δM͵γχοη**. Vale ressaltar que trata-se de um sistema aditivo, isto é, para encontrarmos o valor de **δM͵γχοη** devemos somar os valores de **δM** = 40.000**,** **͵γ** = 3.000**,** **χ** = 600**,** **ο** = 70 e **η** = 8, onde **δM͵γχοη** é igual a 40.000 + 3.000 + 600 + 70 + 8 = 43678.

Também era possível escrever frações com esse sistema e para isso os gregos escreviam o numerador marcado com um acento em cada símbolo e o denominar, com dois acentos e escrito duas vezes. Dessa forma, o número **ι´γ´κθ´´κθ´´** significava 13/29. Se a fração tivesse numerador 1, o **α** era omitido e o denominador era escrito apenas uma vez. Desse modo, **μδ´´** significava 1/44.

Como dito, esse novo sistema se mostrava ineficiente para se fazer cálculos e somente os matemáticos mais capacitados recorriam a algoritmos para fazer contas. Os gregos comuns recorriam ao *ábaco*, provavelmente trazido da Ásia. É importante mencionar que, apesar de sofisticados, os gregos não tinham um símbolo para o zero.

Com a ascenção do império romano, os territórios gregos foram sendo aos poucos anexados à Roma. Em 212 a.C., Siracusa é invadida por Roma. Diz a lenda que Arquimedes estava em casa estudando quando nota a presença de um Centurião Romano e profere a frase “peço que não me importune nesse momento!”. Imediatamente o Cinturião o mata à espada.

A ascenção de Roma marca o fim da matemática abstrata na era clássica.

4 OS NÚMEROS EM ROMA

Os romanos, por sua vez, estavam muito preocupados em manter o dia a dia de suas cidades e tinham a matemática como uma ferramente que permitia isso. Aritmética e geometria já não eram mais objeto de estudo dos filósofos, sendo a maioria dos matemáticos romanos apenas *calculistas*.

Exímios estrategistas, os romanos davam muita importância à guerra e à conquista de territórios, de modo que a matemática empregada em seu império era apenas a suficiente para fins práticos e militares e isso fica claro quando observamos como era organizado o exército romano. Havia dez homens por seção e um conjunto de dez seções era chamado *Centúria* e duas Centúrias eram uma *Manípula* (que quer dizer "mão cheia"). Os romanos também usavam a matemática para calcular as punições militares, por exemplo, se um exército fosse derrotado de forma humilhante, um em cada dez soldados seria sacrificado, isto é, a legião perderia um décimo de seus soldados, dando origem à palavra *dizimar* (do latim *Decimari*).

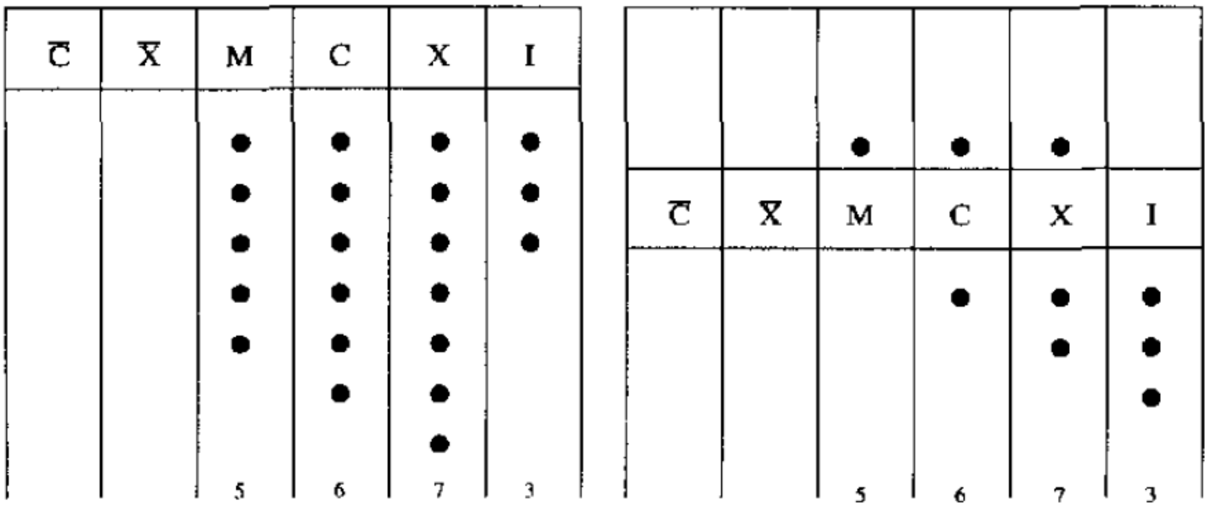
A exemplo dos sistemas de numerações grego e egípcio, o sistema de numeração romano também não era posicional, mas tinha uma peculiaridade, ele era ao mesmo tempo aditivo e subtrativo, isto é, se um símbolo de menor valor fosse posto à esquerda de um símbolo de maior valor, o número resultante era a subtração dos valores e não a soma, como acontecia nos outros sitemas, ao passo que se o símbolo de menor valor estivesse à direita, o número resultante seria a soma dos valores.

Outra semelhança entre os sistemas romano e grego é a dificuldade de se criar algoritmos que permitam realizar os cálculos e registrá-los. Era tarefa árdua dos calculistas romanos efetuar as contas e para isso eram usados os dedos e as *mesas de calcular*, uma espécie de ábaco bastante complexo. É bem provável que os calculistas romanos usassem também algumas tabelas de multiplicação para agilizar o procedimento quando os números eram muito grandes. Tamanha era a dificuldade de se utilizar esses instrumentos que somente os calculistas mais experientes conseguiam manipulá-los.

O Ábaco romano consistia em uma mesa na qual divisões em linhas paralelas traçadas preliminarmente, separavam as diferentes ordens de unidades da numeração latina. Em cada uma das linhas colocavam-se as *contas* ou *calculi*, como eram chamadas as *pedras de contar*.

Para fazer o número 5.673, colocavam-se 3 pedras na primeira linha, 7 na segunda, 6 na terceira e 5 na quarta, conforme a Figura 11.

Figura 11 - O Ábaco Romano



Fonte: História Universal dos Algarismos

Para simplificar, subdividiu-se cada uma dessas colunas em duas partes; uma peça na parte de baixo designou, então, uma unidade de ordem correspondente, enquanto que uma peça na parte de cima valeu a metade da ordem imediatamente superior (5 para a parte superior da primeira coluna, 50 para a segunda, 500 para a terceira, etc.)

Para adicionar um número a um outro, representava-se o primeiro no ábaco e em seguida faziam-se as devidas reduções. Se em uma coluna dada o número de peças fosse igual ou superior a dez, substituia-se as dez peças por uma única peça na coluna seguinte. Para o ábaco simplificado, além desta convenção, havia também a convenção de que duas peças na parte de cima correspondiam a uma peça na coluna seguinte.

Para as frações, os romanos usavam o sistema *duodecimal*, e também usavam as mesas de calcular para efetuar as contas. Nesse sistema, as frações teriam sempre como denominador, salvo simplificações, um múltiplo de 12.

Também era possível fazer contas de multiplicar e dividir com ábacos, mas a tarefa torna-se ainda mais complexa. Na divisão, os romanos usavam as tabelas de multiplicação para encontrar o quociente e usavam as mesas de calcular para determinar o resto da divisão.

Comparando o sistema romano com os primeiros artefatos matemáticos encontrados, podemos notar uma pequena diferença: começa-se fazendo barras verticais para representar a unidade, repetindo-a até o número 3. O número 5 é representado pela letra **V**, o 10 por **X**, e assim por diante, onde a cada número é atribuído uma letra do alfabeto. Acrescido a isso, a regra da adição e subtração mencionada e um traço horizontal acima de cada letra para multiplicar seu valor por 1.000 completam o sistema.

Figura 12 - O sistema de numeração Romano

1	I	10	X	100	C	900	CM
2	II	20	XX	200	CC	1000	M
3	III	30	XX	300	CCC	3000	MMM
4	IV	40	XL	352	CCCLII	4000	$\overline{IV}$
5	V	50	L	400	CD	5000	$\overline{V}$
6	VI	60	LX	500	D	5700	$\overline{V}$ DCC
7	VII	70	LXX	600	DC	10000	$\overline{X}$
8	VIII	80	LXXX	700	DCC	16500	$\overline{XVI}$ D
9	IX	90	XC	800	DCCC	1000000	$\overline{M}$

Fonte: http://coletaneadeatividadesbetim.blogspot.com.br/2012/03/
matematica-algarismos-romanos.html

Com um sistema tão primitivo, atrelado à inclinação romana à guerra e às necessidades cotidianas, não é de se espantar que nenhum ou quase nenhum matemático romano seja lembrado nos dias de hoje. De fato, durante a ascenção e o domínio do império romano houve poquíssimo avanço na aritmética e na geometria.

A ignorância matemática romana era tão significante que era comum os calculistas romanos utilizarem a fórmula $A = L^2/2$ para calcular a área de um triângulo equilátero ou multiplicar a medida de dois lados adjacentes de qualquer quadrilátero para determinar sua área. Sabe-se que esta última era usada até mesmo para calcular a área de cidades, oque, obviamente, produzia erros gigantes.

Ao longo de 500 anos, Roma dominou toda a Europa e o norte da África, da Espanha à Turquia e difundiu seu sistema de numeração por todo seu império e mesmo com o seu declínio, esse sistema de numeração ainda sobreviveu por muitos anos, até aproximadamente 500 d.C.

5 OS NÚMEROS NA AMÉRICA

Interrompendo a ordem cronológica, dedicaremos este capítulo à matemática americana e oriental.

No que diz respeito à matemática nas Américas, a civilização que se destaca são os Maias. Segundo Cajori (2007), os maias eram dotados de um sistema *vigesimal* e posicional e avançaram bastante na aritmética, talvez mais do que qualquer uma das civilizações já citadas neste trabalho, já que, ao contrário das outras, os maias tinham um símbolo para o zero.

A aritmética maia era avançada e seu sistema de numeração era bastante criterioso e muito bem definido. Esse feito se torna mais notável quando se nota que, por estarem há milhares de quilômetros das civilizações europeias, asiáticas e africanas, os maias muito provavelmente não tiveram contato com nenhuma dessas civilizações, tendo seu sistema de numeração sido uma criação totalmente espontânea e original.

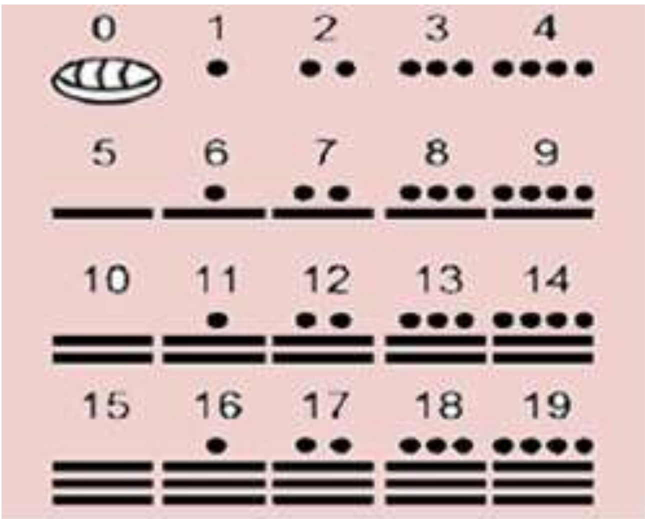
Como dito, o sistema maia era quase vigesimal, isto é, o aumento das unidades sucessivas não era feito de 10 em 10, como no nosso sistema, mas de 20 em 20, menos na terceira posição, logo, 20 unidades da mais baixa ordem (*kins*) formavam uma unidade da próxima ordem (*uinals*). Dezoito uinals formavam uma unidade da terceira ordem (*tun*); 20 tuns formavam 1 *katun* e 20 katun formavam 1 *cycle*. Havia uma outra unidade formada por 20 cycles que era um grande cycle.

As palavras kins, unials, tun, katun e cycle correspondem a 1 dia, 20 dias, 360 dias, 7.200 dias e 144.000 dias, respectivamente, isto é, os nomes das unidades eram associados à quantidade de dias que a correspondiam.

Nos "hieróglifos" maias foram encontrados símbolos para os números de 1 até 19 representados por retas e pontos, onde cada ponto correspondia a 1 unidade e cada barra valia 5 unidades.

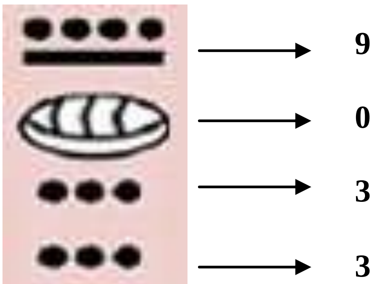
Segundo Ifrah (1995, p 613), o zero era simbolizado por um símbolo que se assemelhava a um olho. Para escrever o número 20, precisamos do princípio do valor posicional: escrevemos o símbolo para o número 1 (uma vintena) e um símbolo do zero (zero unidades).

Figura 13 - O sistema de numeração Maia



Fonte: http://www.mundoeducacao.com/matematica/
o-sistema-numeracao- maia.htm

Como pode-se notar, os símbolos eram agrupados de baixo para cima, do maior para o menor valor, de modo que o número escrito na n-ésima posição acima deveria ser multiplicado por 20^{n-1}. Desse modo, para escrevermos o número $72.063 = 3.20^0 + 3.20^1 + 0.18^2 + 9.20^3$ procederíamos da seguinte maneira:



Traduzindo para nossos algarismos atuais, o número 72.063 seria escrito como 9033.

6 OS NÚMEROS NA ÍNDIA

A matemática indiana estava muito associada à astronomia e era escrita não de forma direta e clara, mas na forma de poemas. Para aqueles que já estavam familiarizados com os conceitos isso não era um problema, mas era desastroso para aqueles que estavam aprendendo (CAJORI, 2007).

Quando Alexandria torna-se parte do império romano, provavelmente há um fluxo maior de informações entre a Grécia e a Índia. Nesta época, boa parte da geometria grega é importada pela Índia que praticamente não fez avanços nesta área, ainda que tenham produzido geometria independentemente dos gregos.

Os matemáticos indianos estavam realmente precupados com a aritmética, campo em que fizeram diversas publicações em diferentes épocas do desenvolvimento da matemática indiana. Sua preocupação com aritmética residia maiores do que os que qualquer outra civilização já tenha usado.

Ao contrário dos faraós egípcios que contavam escravos e prisioneiros, os sacerdotes hindus precisavam representar distâncias percorridas por deuses e o tempo necessário para se atingir a plenitude, o *Nirvana*, e para isso precisavam de números muito grandes. Por exemplo, um *Palya* é o tempo que alguém levaria para construir um cubo de lã de 10km de altura colocando um fio de lã a cada século! Para representar números tão grandes como este, os hindus precisavam desenvolver um sistema de numeração muito mais eficiente.

A exemplo da Babilônia e do Egito, na Índia a matemática estava na mão dos sacerdotes, o que dificultou um pouco os avanços indianos. Os sacerdotes indianos, assim como os Babilônios e Egípcios, estavam muito acostumados a fatos inexplicáveis ou com explicações divinas e não tinham a preocupação de demonstrar as proposições matemáticas, por isso, pouco se sabe sobre como os indianos chegaram a seus resultados, mas sabemos que eles tinham algum raciocínio argumentativo.

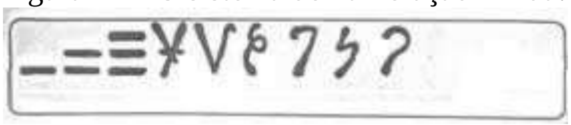
Outra diferença entre os gregos e os indianos era o tipo de pensamento: os gregos tinham um pensamento predominantemente *geométrico*, e os indianos, *aritmético*, de modo que os indianos trabalhavam com *números* e os gregos com *grandezas*.

Mas, diferente de todas as outras civilizações que os antecederam, os indianos criaram um sistema de numeração realmente eficiente:o nosso sistema de numeração. É bem verdade que este ainda não tinha evoluído completamente até à forma que temos hoje, mas a grosso modo, era bem similar ao que temos hoje.

Os indianos primeiramente inventaram símbolos diferentes para cada um dos números de 1 a 9, e representavam por um espaço vazio as classes vazias. Esses algarismos são chamados de *hindu-arábicos*, embora seja consenso atualmente que os indianos usam estes algarismos desde aproximadamente 500 a.C., tendo ficado a cargo dos árabes apenas sua divulgação para o resto do mundo.

O sitema posicional e as frações sexagesimais foram emprestados dos babilônicos, que já o vinham construindo desde 4.000 a.C. Em conjunto, esses símbolos e o sistema posicional formaram um poderoso sistema de numeração, mas que ainda estava incompleto.

Figura 14 – O sistema de numeração Hindu.



Fonte: http://www.mundoeducacao.com/matematica/a-origem-zero.htm

Na Índia, à época, era comum a escrita em placas de areia, isto é, os indianos, assim como os gregos, escreviam no chão arenoso ou em lousas de areia. Para facilitar o entendimento. Provavelmente em algum momento, um indiano começou a separar por um ponto as casas que não estavam ocupadas. Ora, um ponto feito com um dedo na areia é um pequeno círculo, e este era usado para representar o vazio, então os indianos haviam inventado o *zero*, sem dúvida, a maior contribuição que um povo fez à matemática desde que os Sumérios a inventaram.

Um dos primeiros exemplos da utilização do zero como número pode ser encontrado em um pequeno templo no norte da Índia. Neste templo encontra-se uma inscrição que diz que um jardim foi criado para que fossem plantadas flores para o templo, e para garantir que o jardim tivesse flores suficientes, ele deveria ter aproximadamente 8 hectares.

Figura 15 – O primeiro zero já escrito

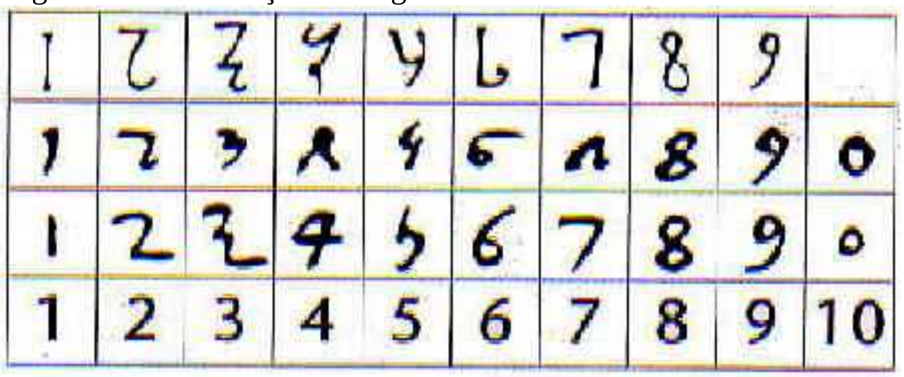
Fonte: A História do Número 1 (BBC) - Extraído do Youtube

Diferentemente de outras civilizações que também inventaram um símbolo para separar as classes vazias, os indianos aceitavam o zero como número, isto é, era possível somar, subtrair e multiplicar por zero.

Os indianos usavam a palavra *shunya* (que quer dizer “vazio”) para o zero, o que nos mostra que o símbolo referente ao zero não era mais apenas um símbolo que separava os números em um numeral, mas propriamente um número. Os indianos tiveram a ideia de atribuir ao “nada” um símbolo!

O sistema numérico hindu foi evoluindo até chegar à forma como conhecemos hoje, aproximadamente no século XVI, já na Europa.

Figura 16 – A evolução dos algarismos hindu



Fonte: http://www.prof2000.pt/users/hjco/numerweb/pg000150.htm

A aritmética indiana era bastante produtiva. Dentre os principais matemáticos, podemos citar *Brahmagupta* (598 – 670 d.C) e *Bhaskara II* (1114 – 1185 d.C.).

Brahmagupta foi um dos primeiros matemáticos a formalizar as regras da aritmética e estava tão à frente de seu tempo que chegou a considerar o embrião do que seria bem mais tarde, na idade média, conhecido como números negativos. Em seu trabalho, Brahmagupta usou a ideia de fortunas e débitos para explicar as regras da aritmética e escreveu o seguinte:

Um débito menos zero é um débito.

Uma fortuna menos zero é uma fortuna.

Zero menos zero é um zero.

Um débito subtraido de zero é uma fortuna.

Uma fortuna subtraida de zero é um débito.

O produto de zero multiplicado por um débido ou fortuna é zero.

O produto de zero multiplicado por zero é zero.

O produto ou quociente de duas fortunas é uma fortuna.

O produto ou quociente de dois débitos é uma fortuna.

O produto ou quociente de um débito e uma fortuna é um débito.
O produto ou quociente de uma fortuna ou débito e um débito é um débito.

Mas Brahmagupta falhou ao tentar definir as regras da divisão por zero, como era de se esperar. Esta ideia só pôde ser melhor estudada na Índia pelo matemático *Madhava de Sangamagrama*, no século XIV. Madhava percebeu que quanto menor era o denominador de uma fração, maior era o quociente e provavelmente deve ter usado a ideia de que dividir algo ao meio significa ter dois pedaços, assim, quanto menor o tamanho do pedaço, maior a quantidade de pedaços que conseguimos, de tal modo que dividindo um inteiro por algo de “tamanho zero” teremos “infinitos pedaços”.

Os indianos fizeram também grandes avanços na álgebra descobrindo soluções de equações de grau 2 e biquadradas. Sua trigonometria também é de grande valor, muito embora seja mais apoiada na álgebra do que na geometria propriamente dita.

7 OS NÚMEROS NA CULTURA ÁRABE

A civilização árabe surgiu no Oriente Médio, entre a Ásia e a África, em uma peninsula chamada *Península Arábica*.

Até aproximadamente 632 d.C, esta civilização era formada por tribos que viviam basicamente do pastoreio e do comércio, dentre as quais destaca-se a tribo dos *coraixitas*, onde nasceu o grande profeta islâmico *Maomé.*

Apesar de tribal, esta civilização ainda primitiva construiu as cidades importantes de Latribe, Taife e Meca. Nesta última ficava o antigo templo *Caaba* dedicado às divindades de todas as diferentes tribos e este, por sua vez, ficava sob os cuidados da tribo dos coraixitas.

Maomé nasceu no ano de 570 d.C. e dedicou boa parte da sua vida ao comércio e depois passou a ser guia de caravanas. Viajou pelo Egito, Palestina e Pérsia, onde teve contato com diversas religiões, como o judaísmo e o cristianismo e diversas culturas. Seus ensinamentos sobre cultuar um único Deus foram rejeitados por alguns de seus compatriotas, o que culminou com sua saída de Meca para a cidade de *Yathrib* (atual Medina). Este profeta influenciou toda uma civlização, unindo as tribos e transformando-as, por meio da religião, em uma nação forte.

Após sua morte, em 632 d.C, seus sucessores, os *Califas*, líderes religiosos e politicos, começam a expansão da civilização muçulmana, motivados pela conquista de terras férteis que seu crescimento exigia. Sob o pretexto religioso e com a espada em punho, os sarracenos conquistaram a Pérsia, a Mesopotâmia, parte da Índia e o norte da África, chegando até à península hispânica. Então, sua expansão além dos Pirineus foi barrada por Charles Martel em 732 d.C.

Os muçulmanos tinham a filosofia de respeitar os costumes dos povos conquistados, isto é, não os obrigavam a adotar seus costumes e práticas, menos a língua e a religião. A cada conquista, os árabes aprendiam tudo o que podiam, e com isso, anexavam a seu repertório novas técnicas de resolução de problemas matemáticos.

Sua capital, Bagdá, ficava próxima dos antigos centros de conhecimento: Índia no leste e Grécia no oeste. Isso favorecia o intercâmbio das ideias de ambos os lados o que logo tornou o império árabe um grande centro científico.

Os abássidas de Bagdá encorajavam a vinda de cientistas para a corte, independente de nacionalidade e religião, fato esse que propiciou aos árabes conhecer bastante da cultura grega e indiana e fundi-las numa única forma de conhecimento. Aos árabes havia sido confiada a missão de aprender dos gregos e dos hindus, guardar seus ensinamentos com esmero durante o período de confusão no Ocidente, criado pelo fim da civilização Greco-Romana, e, em seguida, passá-lo novamente à Europa. Provavelmente nesta época os árabes aprenderam dos indianos o sistema de numeração decimal já usado lá há séculos. Mas engana-se aquele que pensa que os árabes se contentaram em apenas traduzir, guardar e aprender com os textos dos antigos. Os estudiosos árabes foram muito eficientes em, à luz do que haviam aprendido, produzir matemática.

Um centro de estudo e pesquisa foi criado em Bagdá e seus ensinamentos chegavam a todo o império. Chamada de *Casa da Sabedoria*, seus estudantes traduziram muitos textos antigos e os difundiram por todo o império islâmico.

O primeiro autor notável de matemática foi *Mohammed ibn Musa Al-Khowarizmi*, que foi diretor da Casa da Sabedoria e cujo trabalho sobre aritmética e álgebra, o *Al-Kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wa-l-muqābala* ("livro do cálculo de restauração e redução"), é de suma importância. Boa parte do original não sobreviveu até hoje, mas em 1857 foi encontrado uma tradução deste trabalho em latim. Nesta tradução, o nome *Al-Khowarizmi* foi traduzido como *Algoritmi* do qual se originou nossa palavra "algoritmo", significando a maneira de calcular de um modo particular. Al-Khowarizmi é também conhecido como o primeiro autor a usar a palavra *Álgebra*. Hoje aceita-se por “restauração” a transposição de termos negatvos para o outro lado da equação e por “redução” a unificação dos termos semelhantes.

Conforme conquistavam os povos, os árabes iam adotando seus costumes, de modo que, com um império tão grande, não é de se espantar que diferentes algarismos tenham sido usados durante várias épocas. Por exemplo, tem-se conhecimento de um dicionário persa-arábico que registra a existência de um sistema de numeração em que cada uma das 28 letras do alfabeto árabe representa um numeral, por analogia ao sistema grego.

Um dos motivos para que os árabes tenham adotado o sistema numérico indiano pode ter sido a religião.

No primeiro século de existência do islã, Bagdá era controlado pelo califa *Al-Mansur*, que fazia questão que seu povo vivesse segundo o Alcorão. Isso exigia cálculos matemáticos muito precisos, como por exemplo, contar perfeitamente as horas do dia e em que direção fica a cidade sagrada de Meca, e mais, o livro sagrado muçulmano tem instruções complicadíssimas no que diz respeito à divisão de heranças entre homens, crianças e mulheres, dependendo da proximidade com a pessoa morta. Esses cálculos eram praticamente impossíveis de serem realizados contando nos dedos ou com qualquer outro método que os árabes possam ter aprendido que não seja usando o sistema de numeração hindu.

Os árabes logo se tornaram grandes mestres na geometria plana. Como o Alcorão proibia a confecção de imagens de seres humanos e divindades, os artistas muçulmanos decoravam suas mesquitas com padrões e simetrias geométricas, tendo atingido o notável feito de descobrir todas as possíveis simetrias presentes na geometria euclidiana plana.

Os matemáticos e astrônomos árabes logo se encantaram com a praticidade e agilidade dada pelos algarismos hindus, de tal forma que, fortemente impulsionados pelo trabalho de Al-Khowarizmi, não demoraram em escolhê-los como seus algarismos padrão e o espalharam por todo o império, de modo que em torno do ano 1000 d.C. eles já estavam completamente difundidos por todo o mundo árabe.

8 OS NÚMEROS NA EUROPA DA IDADE MÉDIA

A história da evolução dos números na atualidade começa na Itália, aproximadamente em 1200 d.C., quando *Leonardo de Pisa*, também conhecido como *Fibonacci*, introduz os algarismos hindus na Europa.

Enquanto o império Árabe se expandia, a Europa, sob o domínio romano, passava pela *Idade das Trevas*, período caracterizado pela ausência quase total de produção científica. Mas liderada pela Itália, no século XIII, a Europa começa a fazer comércio com os povos árabes, de modo que tornou-se inevitável que os europeus notassem a eficiência do sistema hindu, já amplamente difundido na Arábia.

Leonardo era filho de Bonaccio (por isso o nome Fibonacci, que significa "filho de Bonaccio"), um abastado mercador pisano e representante dos comerciantes da República de Pisa nas costas sul e leste do Mediterrâneo. Quando criança, Fibonacci viajou com seu pai e teve contato com a matemática muçulmana no entorno do Mediterrâneo, provavelmente em Bugia, na região de Cabília, Argélia, onde passou bastante tempo. Incentivado por seu pai desde criança à aprender a arte da contagem com o ábaco, Leonardo nota a eficiência dos algarismos usados na Arábia, de modo que, ao retornar à Europa, em 1202, escreve o livro *Liber Abaci*. Este texto contem o conhecimento que os matemáticos árabes tinham sobre aritmética e álgebra e sobre como usar a notação posicional.

Figura 17 – Uma página do livro Liber Abaci

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Liber_Abaci#mediaviewer/File:Liber_abbaci_magliab_f124r.jpg

O livro de Fibonacci era uma obra matemática voltada especificamente para os comerciantes, ensinando-lhes como trabalhar com os novos algarismos de modo a calcular seus lucros, despesas, dívidas e pagamentos. Isso fez com que ele se tornasse leitura obrigatória para todos os comerciantes italianos, que impulsionados pelo recém criado capitalismo, queriam aumentar seus lucros ainda mais.

Mas os algarismos hindus não foram bem aceitos pela população comum. De fato, a Europa já estava acostumada a trabalhar com os algarismos romanos e estes lhes serviam muito bem para os propósitos da vida em uma cidade simples. Além do mais, nesta época a Europa estava dividida em feudos e cada feudo tinha sua própria moeda, de modo que ao trocar de cidade, o viajante deveria procurar uma *Banca* onde trabalhavam os *banqueiros*, que eram treinados em aritmética para fazer a conversão das moedas, e trocar o dinheiro. É claro que os viajantes não confiavam em banqueiros que usassem os novos algarismos, pois por não aceitarem os novos algarismos, não compreendiam as contas e não tinham como saber se estavam ou não sendo enganados.

Tamanha era a desconfiança com relação aos novos algarismos que em 1299 d.C. a cidade de Florenza, na Itália, proibiu seu uso. Outra ilustração da desconfiança para com os algarismos hindus é o zero. A palavra usada para ele era *zephirum*, do árabe (“sfira” que quer dizer “vazio”), que mais tarde deu origem à palavra *cifra*. Ainda hoje, esta palavra é usada para significar códigos.

Embora se tenha notícia de que os novos algarismos já estivessem na Europa desde 976 d.C., foi somente depois de Fibonacci que eles começaram a ser usados de maneira efetiva e correta, já que anteriormente muitos erros eram cometidos por escritores inexperientes que já tentavam introduzir tais numerais na Europa.

Depois da primeira reforma religiosa promovida pela Igreja Católica, cobrar juros passou a não mais ser considerado pecado, de modo que todo banqueiro deveria saber calculá-los. Ora, é impossível, até para o mais habilidoso calculista, calcular juros usando o ábaco, e as autoridades e a própria Europa não viram outra opção se não adotar os novos algarismos.

O ábaco (e portato, os números romanos) foi usado até o século XV na Espanha e Itália. Na França ele resistiu até um pouco mais tarde e não deixou de ser usado na Alemanha e na Inglaterra antes do século XVII.

CONCLUSÃO

Vimos neste trabalho como a evolução da matemática e, em especial, a evolução dos sistemas de numeração e dos números, propriamente ditos, tem íntima relação com a evolução da espécie humana, das relações interpessoais e sociais e da vida em comunidade.

Nenhum algoritmo ou teorema foi concebido inutilmente, isto é, toda a matemática criada pela humanidade teve sua criação motivada por necessidades reais, quer sejam da vida quotidiana, quer sejam da própria ciência ou até mesmo por necessidades territoriais e militares, por isso, consideramos que conhecer a história da evolução da matemática e, sobretudo dos números, é bastante relevante para o professor de matemática, não apenas para contá-la e tampouco para usar como justificativa para a figuração de um ou de outro assunto no currículo escolar, mas sobretudo para fazer comparações e mostrar para o aluno como seria se tais conteúdos nunca tivessem sido inventados.

É fato que o advento do computador facilita bastante o trabalho do estudante e, acreditamos, deve também facilitar a vida do professor, no entanto, este não deve ser usado como propósito, mas como meio para se chegar ao conhecimento. Àqueles alunos mais familiarizados à utilização da tecnologia, sugerimos conhecer também os processos manuais que deram origem aos primeiros programas que, por sua vez, serviram de suporte para a criação da grande quantidade de *softwares* que hoje vemos disponíveis ao público.

REFERÊNCIAS

Ancient Philosophy and Mathematics. Massachusetts: MIT, 2009. Disponível em <http://ocw.mit.edu/courses/special-programs/sp-2h3-ancient-philosophy-and-mathematics-fall-2009/assignments/MITSP_2H3F09_ses5.pdf> Acesso em 04 jan 2015.

Arquitetura do Antigo Egito. Disponível em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Arquitetura_do_Antigo_Egito> Acesso em 04 jan 2015

CAJORI, Florian.**Uma História da Matemática.** Tradução de Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

CERRI, Cristina; MONTEIRO, Martha S. **História dos Números Complexos.** São Paulo: USP, 2001.

Civilização Árabe - A história dos Árabes. Disponível em <http://www.historiadomundo.com.br/arabe/arabes.htm> Acesso em 05 jan 2015.

Côvado ou Cúbito. Sabe o que é isso? Disponível em <http://atestemunhafiel.no.comunidades.net/index.php?pagina=1035471370> Acesso em 04 jan 2015.

Elisabete. **A Matemática na Grécia.** Disponível em <http://www.cefetsp.br/edu/guerato/mathist/apresentacoes/a_matematica_na_grecia.pdf> Acesso em 05 jan 2015.

História da Epistemiologia. Disponível em <http://www.fisica-interessante.com/aula-historia-e-epistemologia-da-ciencia-5-historia-da-epistemologia-3.html> Acesso em 04 jan 2015.

História da matemática desde o século IX a.C. Disponível em <http://www.somatematica.com.br/historia/seculoix.php> Acesso em 05 jan 2015.

IFRAH, Georges. **História Universal dos Algarismos:** A Inteligênia dos Homens Contada pelos Números e Pelos Cálculos. Tradução de Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

Islão. Disponível em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Isl%C3%A3o> Acesso em 05 jan 2015.

Maomé. Disponível <http://pt.wikipedia.org/wiki/Maom%C3%A9> Acesso em 04 jan 2015.

Numeração Egípcia. Disponível em <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm36/numeracao_egipcia.htm> Acesso em 04 jan 2015.

SCHUBRING, Gert. **Um Outro Caso de Obstáculos Epistemiológicos**: o princípio da permanência. Boletim de Educação Matemática, vol 20, núm 28, pp 1-20. Rio Claro, SP, 2007. Disponível em <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291221871002> Acesso em 04 jan 2015.

ROGERS, Leo. **The History of Negative Numbers**. Disponível em < nrich.maths.org>