Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Matemática e Estatística

Francisco Eduardo Faustino de Paula

Combinatória – abordagem precisa

Rio de Janeiro
2014

Francisco Eduardo Faustino de Paula

Combinatória – abordagem precisa

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientadora: Profª Dra. Patrícia Nunes da Silva
Coorientador: Prof. Dr. Augusto César de Castro Barbosa

Rio de Janeiro
2014

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

D979 de Paula, Francisco Eduardo Faustino

Combinatória – abordagem precisa / Francisco Eduardo Faustino de Paula. – Rio de Janeiro, 2014-

47 f.

Orientadora: Profª Dra. Patrícia Nunes da Silva

Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2014.

1. Análise Combinatória.. 2. Análise.. 3. Contagem.. I. Profª Dra. Patrícia Nunes da Silva. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. III. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título

CDU 02:141:005.7

Francisco Eduardo Faustino de Paula

Combinatória – abordagem precisa

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 24 de Setembro de 2014.
Banca Examinadora:

Profª Dra. Patrícia Nunes da Silva (Orientadora)
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dr. Augusto César de Castro Barbosa (Coorientador)
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dr. Ronaldo da Silva Busse
Departamento de Matemática e Estatística - UNIRIO

Prof. Dr. Helvécio Rubens Crippa
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Rio de Janeiro
2014

AGRADECIMENTOS

A minha família, Paula, Júlia e João, que pacientemente souberam me aguardar durante esses dois anos de estudos.

Aos meus pais que embora não mais presentes, mostraram durante a vida o orgulho que me motivou e impulsionou todo meu esforço.

Aos amigos que suportaram toda a tensão dos anos juntos comigo.

Aos meus mestres Marcos José Machado da Costa por todas as oportunidades e por me fazer acreditar que poderia; George Cardoso da Silva por colocar a minha disposição toda a sua sabedoria durante os anos juntos.

Ao melhor sogro do mundo, pois se não fosse ele como iria fazer o vestibular, que foi o início de tudo, por todos os dias que acordou cedo para me levar às provas.

A minha incansável orientadora, por me fazer acreditar no trabalho e tornar possível todos os encontros para que esse trabalho pudesse ser concebido, pelas aulas de Latex e toda a paciência do mundo. Obrigado Prof^{a} Dr^{a} Patricia Nunes.

DEDICATÓRIA

A Deus

Pelo milagre de transformar um repetente em mestre, só um Deus poderoso para tal feito.

Por tudo que sou e tenho na vida.

RESUMO

DE PAULA, Francisco Eduardo Faustino. *Combinatória – abordagem precisa*. 2014. 47 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

O objetivo central deste projeto é precisar matematicamente certos objetos combinatórios que servem como ponto de partida nas apresentações usuais da Análise Combinatória e são comumente apresentados de maneira informal e intuitiva. Estabelecido este referencial teórico preciso, pretendemos, a partir dele, reapresentar os conceitos de Análise Combinatória de modo mais rigoroso privilegiando sempre a apresentação mais natural possível. Mais precisamente, estaremos interessados em reapresentar os resultados referentes ao capítulo dois do livro do professor Augusto C. Morgado a partir de uma versão matematicamente mais precisa dos Princípios Aditivo e Multiplicativo. Além disso, pretendemos que os argumentos usados em nossas deduções usem predominantemente indução ou construção de bijeções, o que é um dos grandes objetos de estudo da combinatória moderna.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Análise. Contagem.

.

ABSTRACT

DE PAULA, Francisco Eduardo Faustino. *Combinatorial analysis – a precise approach*. 2014. 47 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

The principal objective of this project is to precise mathematically some combinatorial elements which are starting points in usual Combinatorial Analysis presentations and are commonly presented in an informal and intuitive way. Since this precise theoretical framework is stablished, we intend, from it, to restate the Combinatorial Analysis concepts in a rigourous way, always favouring the most natural presentation as possible. More precisely we will be interested in restating the results referring to chapter two of Professor Augusto C. Morgado's book from a mathematically more precise version of Addition and Multiplication Principles. Moreover, we want that the arguments showed in our deductions use predominantly induction or bijection constructiosn, which is one great object of study of modern combinatorial.

Keywords: Combinatorics. Analysis. Counting.

.

LISTA DE SÍMBOLOS

$A(\boldsymbol{x})$	conjunto de todos os anagramas de $\boldsymbol{x}$
$C(n,p)$	número binomial
$\mathfrak{C}(n,l)$	conjunto de todas as l-composições de n
$\Delta^p(X)$	conjunto $\{(x_1,x_2,\ldots,x_p)\in X^p : \exists\, i,j\in\{1,2,\ldots,p\},\ i\neq j,\ x_i=x_j\}$
$\Gamma_p(X)$	conjunto de todos os p-subconjuntos de X
$\Gamma(X)$	coleção de todos os subconjuntos de X; $\Gamma(X)=\bigcup_{p=0}^{n}\Gamma_p(X)$.
$\mathfrak{L}^l(X)$	conjunto de todas l-partições ordenadas de X,
$\mathfrak{L}_{\boldsymbol{k}}(X)$	conjunto de todas as l-partições ordenadas de X subordinadas a $\boldsymbol{k}$
$[n]$	conjunto dos números inteiros de 1 a n
$\mathfrak{P}^l(X)$	coleção de todas as l-partições de X
$\Pi^p(X)$	conjunto das p-permutações sem repetição de X
$S_{\boldsymbol{x}}$	conjunto de todos os elementos da p-permutação $\boldsymbol{x}$
$S(n,l)$	número de l-partições do conjunto X
$\sigma(n,l)$	número de elementos de $\mathfrak{L}^l(X)$
$\boldsymbol{x}_J$	$(x_{i_1},\ldots,x_{i_{\lvert J\rvert}})$, restrição de $(x_1,x_2,\ldots,x_p)$ a $J=\{i_1<i_2<\cdots<i_{\lvert J\rvert}\}\subset[p]$
$X\,.\,Y$	conjunto $\{\{x,y\} : x\in X,\ y\in Y\}$
$X\times Y$	conjunto $\{(x,y) : x\in X, y\in Y\}$
X^k	conjunto $X\times X\times\cdots\times X$ (k vezes)
$\lvert X\rvert$	quantidade de elementos do conjunto X

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Desde o ensino médio, estudar Análise Combinatória foi um dos grandes obstáculos que encontrei. Por ter dificuldade em alguns problemas, dediquei mais do meu tempo ao estudo dos mesmos. Muitos dos problemas que encontrei, nunca entendi o porquê de tal solução, mas por ser mecânico e de certo modo funcionar, via o funcionamento em exemplos pequenos, daí seguia aplicando e pronto! Ao entrar na graduação, comecei a me incomodar com problemas do tipo, é assim e pronto! Problemas que muitas vezes sabemos fazer mas não sabemos por que o fizemos de uma ou outra maneira. Foi com esse desejo, de aprofundar meus conhecimentos na área, que procurei escrever este trabalho, com o intuito de tentar esclarecer, não só para mim, mas também para qualquer outro que como eu esteja afrontado com o fato de saber fazer mas não saber o porquê, as técnicas de resolução de problemas de Análise Combinatória. Neste caminho, me foi apresentado o trabalho do professor Santos (2006), que percebi ser capaz de se aproximar em esclarecer o mecanismo matemático para a resolução de problemas. As ferramentas que iremos estudar neste trabalho, são precisas suficientemente para nos aproximarmos do método de resolução de problemas mais matemáticos, pois utilizam os conceitos de funções que estudamos, nos apropriando do uso de bijeções para demonstrarmos técnicas de resolução de problemas, agora sabendo o que estamos contando.

A dinâmica que iremos imprimir no trabalho é baseada no clássico livro de Análise Combinatória do professor Morgado (1991). Na medida que as técnicas de Análise Combinatória forem apresentadas pelo professor Morgado (1991), iremos apresentar suas demonstrações utilizando técnicas desenvolvidas pelo professor Santos (2006), tornando assim as mesmas mais próximas da Matemática, no que diz respeito às demonstrações dos conceitos. Procuramos apresentar para cada problema resolvido pelo professor Morgado (1991) uma resolução sob o olhar do professor Santos (2006).

Neste trabalho, apresentamos os conceitos e resultados apresentados no texto do professor Santos (2006) que correspondem ao conteúdo tratado no Capítulo 2 de Morgado (1991) nas Seções 2.1 a 2.5. O texto do professor Santos (2006) foi revisado, as demonstrações detalhadas e algumas delas que haviam sido apenas indicadas foram feitas. Para ilustrar e contrastar as técnicas apresentadas por Morgado (1991) e Santos (2006), todos os exemplos apresentados por Morgado (1991) no Capítulo 2 de seu livro foram resolvidos utilizando-se os conceitos e técnicas propostos por Santos (2006). Para facilitar a identificação, sempre indicaremos essas resoluções com o marcador *Solução (Santos).*

1 MOTIVAÇÃO

Neste primeiro momento, queremos ilustrar uma das motivações que nos levou ao estudo apresentado. Trata-se de um dos problemas mais comuns da análise combinatória: contar a quantidade de subconjuntos de um dado conjunto com n elementos.

Dado um conjunto com n objetos, sabemos que a quantidade de subconjuntos formados a partir do conjunto dado é 2^n. Se temos n objetos, para formar um subconjunto devemos analisar se um objeto fará parte ou não desse subconjunto, ou seja, duas possibilidades para cada um dos n objetos, ele faz ou não parte. Assim, como são n, teremos $2 \times 2 \times \ldots \times 2(n \text{ vezes}) = 2^n$

Ilustraremos agora o mesmo resultado a partir do ponto de vista que julgamos mais abstrato e que pode permitir a obtenção do resultado acima como também de outros resultados usuais de Análise Combinatória. Vamos seguir aqui a abordagem de Cameron (1994).

Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ um conjunto com n elementos. Vamos construir uma bijeção entre o conjunto $\mathfrak{X}$ das partes de X e o conjunto B das n-uplas cujas componentes são zero ou um. Note que cada elemento $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ de B pode ser "identificado" com um número binário

$$(b_1 b_2 \cdots b_n)_2 = b_1 \cdot 2^{n-1} + b_2 \cdot 2^{n-2} + \cdots + b_{n-1} \cdot 2 + b_n \cdot 2^0.$$

Para cada elemento C de $\mathfrak{X}$, isto é para cada subconjunto de X, associamos um elemento $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ de B de modo que $b_i = 1$ se $x_i \in C$ e $b_i = 0$, caso contrário. Equivalentemente, estamos associando a C o número binário $(b_1 b_2 \cdots b_n)_2$. Vamos ver um exemplo: o elemento $\{x_1, x_n\}$ corresponde ao número binário $(1000 \cdots 01)_2$ com $n - 2$ zeros. Desta forma fica fácil perceber que a quantidade de números binários que podem ser gerado a partir dos elementos de B coincidirá com a quantidade de subconjuntos de X. O menor número binário formado é o $(000 \cdots 0)_2$ que corresponde ao subconjunto vazio e o maior formado é o $(111 \cdots 1)_2$ que é o próprio conjunto. Além disso, todos os números intermediários estão presentes e correspondem a um único subconjunto de X. Temos $(000 \cdots 0)_2 = 0$ e

$$(111 \cdots 1)_2 = 2^{n-1} + \cdots + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = \text{a soma de uma PG de razão } 2 = 2^n - 1.$$

Para sabermos quantos números há, basta subtrairmos o último do primeiro e depois somar 1. Assim deduzimos que $\mathfrak{X}$ possui 2^n elementos.

2 NOTAÇÃO E RESULTADOS PRELIMINARES

2.1 Algumas noções e conjuntos básicos

Inicialmente, vamos apresentar todas as definições que serão utilizadas neste trabalho. Ao longo do trabalho também precisaremos ter claro o princípio de Indução e o que são classes de equivalência.

O terceiro axioma de Peano também é conhecido como o axioma da indução.

Axioma 1 (Axioma da Indução)**.** *Seja $p(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que*

(i) $p(1)$ é verdadeira, e que

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, a validade de $p(n)$ implica em $p(n+1)$ verdadeira.

Então $p(n)$ é válida qualquer que seja o número natural n.

Segue o enunciado do Princípio de Indução Matemática generalizado:

Teorema 1 (Princípio de Indução Matemática)**.** *Seja a um número natural e seja $p(n)$ uma sentença aberta em n. Suponha que*

(i) $p(a)$ é verdadeira, e que

(ii) $\forall n \geq a, p(n) \Rightarrow p(n+1)$ é verdade.

Então, $p(n)$ é verdade $\forall n \geq a$.

Demonstração. Seja $\mathcal{X} = \{n \in \mathbb{N}; p(n)\}$; ou seja, $\mathcal{X}$ é o subconjunto dos elementos de $\mathbb{N}$ para os quais $p(n)$ é verdade.

Considere o conjunto

$$S = \{m \in \mathbb{N}; a + m \in \mathcal{X}\}$$

que verifica trivialmente $a + S \subset \mathcal{X}$. Pela condição (i), $p(a)$ é verdadeira. Consequentemente, por (ii) temos que $a + 1 \in \mathcal{X}$, segue que $1 \in S$. Por outro lado, se $m \in S$, então $a + m \in \mathcal{X}$ e, por (ii), temos que $a + m + 1 \in \mathcal{X}$; logo $m + 1 \in S$. Assim, pelo Axioma de Indução, temos que $S = \mathbb{N}$, logo

$$\{m \in \mathbb{N}; m \geq a\} = a + \mathbb{N} \subset \mathcal{X},$$

o que prova o resultado. $\square$

Definição 1 (Relação de Equivalência)**.** *Uma relação binária que é reflexiva, simétrica e transitiva é chamada uma relação de equivalência.*

Segue o enunciado de classe de equivalência

Definição 2 (Classe de Equivalência)**.** *Dado um conjunto X, com uma relação de equivalência $\sim$, a classe de equivalência de um elemento $a \in X$ é o subconjunto de todos os elementos de X que são equivalentes a a. Simbolicamente*

$[a] = \{x \in X | x \sim a\}$

Propriedades:

- Se $x \sim y \Rightarrow [x] = [y]$;
- Classes de equivalência diferentes não tem elementos em comum: Se $[x] \neq [y]$ então $[x] \cap [y] = \varnothing$;
- Estas duas propriedades acima podem ser resumidas na seguinte: $\forall x, y \in X$ $([x] = [y] \;\vee\; [x] \cap [y] = \varnothing)$;
- A união de todas as classes de equivalência de um conjunto é igual ao próprio conjunto: $X = \cup_{\forall x \in X}[x]$.

Definição 3 (Produto de conjuntos)**.** *Sejam X e Y conjuntos não vazios, finitos e disjuntos. O produto de X por Y, denotado por $X \, . \, Y$ é o conjunto de todos os subconjuntos $\{x, y\}$ de $X \cup Y$ tais que $x \in X$ e $y \in Y$. Simbolicamente,*

$X \, . \, Y = \{\{x, y\} : x \in X, \, y \in Y\}.$

Observe que o produto de conjuntos é "comutativo", isto é, $X \, . \, Y = Y \, . \, X$.

Definição 4 (Produto Cartesiano)**.** *Sejam X e Y conjuntos. O produto cartesiano de X por Y, denotado por $X \times Y$, é o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) tais que $x \in X$ e $y \in Y$. Simbolicamente,*

$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \, , y \in Y\}.$

Um par (x_1, y_1) é igual a um par (x_2, y_2) se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

A definição acima, evidentemente, pode ser estendida a um número finito de conjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_k$. No caso em que $X_1 = X_2 = \cdots = X_k = X$, escrevemos simplesmente X^k no lugar de $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$.

Definição 5 (p-permutação)**.** *Uma p-permutação dos elementos de X é qualquer elemento do conjunto das p-uplas ordenadas de elementos de X. Simbolicamente, $\boldsymbol{x}$ é uma p-permutação de X se $\boldsymbol{x} \in X^p$, onde*

$$X^p = \{(x_1, x_2, \ldots, x_p) : x_i \in X,\ i = 1, 2, \ldots, p\}.$$

Definição 6 (p-diagonal do conjunto X)**.** *Se $p \geq 2$ definimos a p-diagonal do conjunto X como sendo o conjunto das p-uplas ordenadas de X nas quais pelo menos duas coordenadas coincidem, isto é,*

$$\Delta^p(X) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in X^p : \exists\, i, j \in \{1, 2, \ldots, p\},\ i \neq j,\ x_i = x_j\}$$

Definição 7 (p-subconjunto)**.** *Seja X um conjunto com n elementos. Um subconjunto S de X com p elementos é chamado de p-subconjunto de X. Denotamos por $\Gamma_p(X)$ o conjunto de todos os p-subconjuntos de X e por $\Gamma(X)$ a coleção de todos os subconjuntos de X, ou seja, $\Gamma(X) = \displaystyle\bigcup_{p=0}^{n} \Gamma_p(X)$.*

Os seguintes conjuntos ocorrerão com frequência ao longo do texto:

- $\mathbb{P} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, o conjunto dos números inteiros positivos.
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, o conjunto dos números naturais.

2.1.1 Conjuntos Finitos

O símbolo $[n]$ indicará o conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ dos números inteiros positivos desde 1 até n. Mais precisamente, dado $n \in \mathbb{P}$, temos

$$[n] = \{p \in \mathbb{P} : 1 \leq p \leq n\}.$$

Definição 8. *Um conjunto X chama-se finito quando é vazio ou quando existe, para algum $n \in \mathbb{P}$, uma bijeção*

$$\varphi : [n] \longrightarrow X.$$

No primeiro caso, diremos que X tem zero elementos. No segundo diremos que $n \in \mathbb{P}$ é o número de elementos de X.

É fácil ver que se existe uma bijeção entre dois conjuntos finitos X e Y então ambos tem o mesmo número de elementos. O símbolo $|X|$ denotará o número de elementos do conjunto X.

3 COMBINAÇÕES E PERMUTAÇÕES

3.1 Princípios Fundamentais

3.1.1 Princípio Aditivo

Teorema 2 (O Princípio Aditivo)**.** *Sejam X e Y conjuntos finitos disjuntos, com m e n elementos respectivamente. Então $X \cup Y$ é finito e possui $m+n$ elementos.*

Demonstração. Se X e Y forem vazios, não há o que demonstrar. Se apenas um deles, digamos X, for vazio, sabemos que existe uma bijeção $\psi : [n] \longrightarrow Y$, basta considerar $\xi : [n] \longrightarrow X \cup Y$, $\xi(x) = \psi(x)$. Para os demais casos, como X e Y são conjuntos finitos com m e n elementos respectivamente, existem bijeções $\varphi : [m] \longrightarrow X$ e $\psi : [n] \longrightarrow Y$. Considere a função $\xi : [m+n] \longrightarrow X \cup Y$ tal que

$$\xi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{se } 1 \leq x \leq m \\ \psi(x-m), & \text{se } 1 \leq x - m \leq n \end{cases}.$$

Inicialmente, observe que ξ está bem definida. De fato, seja $x \in [m+n]$. Temos $1 \leq x \leq m$ ou $m+1 \leq x \leq m+n$. No primeiro caso, temos $\xi(x) = \varphi(x)$ e no segundo, temos $1 \leq x - m \leq n$ e $\xi(x) = \psi(x-m)$. Vamos mostrar que ξ é sobrejetiva. Seja w um elemento de $X \cup Y$. Assim sabemos que $w \in X$ ou $w \in Y$. Logo, $w \in \varphi([n])$ (ou $w \in \psi([m])$. No primeiro caso, temos $w = \varphi(x)$ para algum $x \in [m]$. Logo, $w = \xi(x)$. No segundo caso, $w = \psi(y)$ para $y \in [n]$. Logo, $w = \xi(x)$ com $x = y + m$. (Observe que não utilizamos a hipótese $X \cap Y = \emptyset$.)

Para provar a injetividade, vamos considerar $w_1, w_2 \in [m+n]$ tais que $\xi(w_1) = \xi(w_2)$. Sabemos que $\xi(w_1) = \xi(w_2) \in X \cup Y$. Como $X \cap Y = \emptyset$, temos $\xi(w_1), \xi(w_2) \in X$ (ou $\xi(w_1), \xi(w_2) \in Y$). Sem perda de generalidade, vamos supor que $\xi(w_1), \xi(w_2) \in Y$. Nesse caso

$$\psi(w_1 - m) = \xi(w_1) = \xi(w_2) = \psi(w_2 - m)$$

Pela injetividade de ψ, podemos concluir que $w_1 = w_2$. □

Em seu trabalho o professor Morgado apresenta o princípio aditivo de forma bem simples e apenas considerando conjuntos disjuntos. Segue a apresentação do professor Morgado:

> Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $p+q$ elementos. (MORGADO, 1991, p. 18)

Podemos observar que tal principio é abordado pelos dois autores da mesma forma. Ambos tratam de conjuntos disjuntos e estabelecem que a quantidade de elementos da união de dois conjuntos como sendo a soma da quantidade de elementos de cada um dos dois conjuntos.

É claro que o resultado apresentado no Teorema 2 pode ser estendido a um número finito de conjuntos finitos $X_1, X_2, \ldots, X_k$, dois a dois disjuntos.

Teorema 3 (O Princípio Aditivo Generalizado)**.** *Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_k$ conjuntos finitos, dois a dois disjuntos, com $m_1, m_2, \ldots, m_k$ elementos respectivamente. Então o conjunto $\bigcup_{i=1}^{k} X_i$ possui $m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ elementos.*

Demonstração. A prova será feita por indução. Inicialmente, considere os seguintes conjuntos: X_1 com m_1 elementos e X_2 com m_2 elementos.

Por hipótese, os conjuntos X_1 e X_2 não têm elementos em comum. Pelo Princípio Aditivo (Teorema 2), o conjunto $X_1 \cup X_2$ tem $m_1 + m_2$ elementos.

Suponha que o princípio seja verdadeiro para a união de k conjuntos dois a dois disjuntos. Isto é, se $X_1, X_2, \ldots, X_k$ são conjuntos finitos, dois a dois disjuntos, com $m_1, m_2, \ldots, m_k$ elementos respectivamente, então

$$X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k$$

possui $m_1 + \cdots + m_k$ elementos.

Vamos mostrar agora que se $X_1, X_2, \ldots, X_{k+1}$ são conjuntos finitos, dois a dois disjuntos, com $m_1, m_2, \ldots, m_{k+1}$ elementos respectivamente, então

$$X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k \cup X_{k+1}$$

tem $m_1 + \cdots + m_k + m_{k+1}$ elementos. Inicialmente, observe que podemos reescrever essa união como resultado da união dos conjuntos $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k$ e X_{k+1}. Isto é

$$X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k \cup X_{k+1} = (X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k) \cup X_{k+1}.$$

Como todos os X_i, onde $i = 1, 2, \ldots k$, são disjuntos, pela hipótese de indução, podemos afirmar que $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k$ tem $m_1 + \cdots + m_k$ elementos. Observe ainda que os conjuntos $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k$ e X_{k+1} são disjuntos. Logo, pelo Princípio Aditivo (Teorema 2), o conjunto $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k \cup X_{k+1}$ tem $m_1 + \cdots + m_k + m_{k+1}$ elementos. $\square$

3.1.2 Princípio Multiplicativo

Teorema 4 (O Princípio Multiplicativo)**.** *Sejam X e Y conjuntos não vazios, finitos e disjuntos com m e n elementos respectivamente. Então o número de elementos de $X\,.Y$ é exatamente mn.*

Demonstração. Definimos para cada $x \in X$ o conjunto

$$Z_x = \{\{x, y\} : y \in Y\}$$

e observamos que

- O número de elementos de Z_x coincide com o de Y. De fato, a própria estrutura de Z_x permite construir uma bijeção entre Y e Z_x. Por exemplo, $\varphi : Y \to Z_x$ dada por $\varphi(y) = \{x, y\}$.
- Para $x \neq x'$, quaisquer conjuntos $\{x, y\}$ e $\{x', y'\}$ $(\forall y, y' \in Y)$ são diferentes. Consequentemente, Z_x e $Z_{x'}$ são disjuntos.
- Como $Z_{x'}$ e $Z_{x''}$ não possuem elementos em comum (para $x' \neq x''$), a união em x de Z_x corresponde a todos os conjuntos $\{x, y\}$ onde $x \in X$ e $y \in Y$.

Em resumo:

- $|Z_x| = |Y|$
- $Z_x \bigcap Z_{x'} = \emptyset$ se $x \neq x'$
- $\{\{x, y\} : x \in X \text{ e } y \in Y\} = \bigcup\limits_{x \in X} Z_x.$

Então, das observações acima e do Princípio Aditivo Generalizado (Teorema 3), temos

$$|\{\{x, y\} : x \in X \text{ e } y \in Y\}| = \left|\bigcup_{x \in X} Z_x\right| = \sum_{x \in X} |Z_x| = \sum_{x \in X} |Y| = |X||Y| = mn.$$

$\square$

Já o professor Morgado apresenta o princípio multiplicativo da seguinte forma.

> **O Princípio Multiplicativo** Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é xy. (MORGADO, 1991, p. 18)

Nesse momento, vale a observação de que o professor Santos (2006) utiliza o Princípio Aditivo (Teorema 2) para provar o seu Princípio Multiplicativo (Teorema 4).

Em seguida, em seu livro, Morgado apresenta alguns exemplos de aplicação do Princípio Multiplicativo. Cada um deles será discutido com os conceitos e resultados apresentados nesse trabalho.

Exemplo 1. *Para fazer uma viagem Rio-S. Paulo-Rio, posso usar como transporte o trem, o ônibus ou o avião. De quantos modos posso escolher os transportes se não desejo usar na volta o mesmo meio de transporte usado na ida? (MORGADO, 1991, Exemplo 2.1, p. 19)*

Solução (Morgado). Há 3 modos de escolher o transporte de ida e depois disso, há duas alternativas para a volta. A resposta é $3 \times 2 = 6$. □

Solução (Santos). Seja $X_i = \{T_i, O_i, A_i\}$ que representa as opções de meios de transporte escolhidos para a ida. Logo $|X_i| = 3$ e seja $X_v = \{T_v, O_v, A_v\}$ que representa as opções de meios de transporte escolhidos para a volta, onde $|X_v| = 3$. Como na volta não podemos utilizar o mesmo meio de transporte que na ida, construímos os conjuntos abaixo, diferenciando cada meio de transporte da ida e da volta.

Considere

$$
\begin{aligned}
Z_{T_i} &= \{\{T_i, T_v\}, \{T_i, O_v\}, \{T_i, A_i\}\}, \\
Z_{O_i} &= \{\{O_i, T_v\}, \{O_i, O_v\}, \{O_i, A_v\}\}, \\
Z_{A_i} &= \{\{A_i, T_v\}, \{A_i, O_v\}, \{A_i, A_v\}\}.
\end{aligned}
$$

Como por hipótese não podemos voltar no mesmo transporte que fomos, excluiremos de $Z_{T_i} \cup Z_{O_i} \cup Z_{A_i}$ os elementos $\{T_i, T_v\}$, $\{O_i, O_v\}$, $\{A_i, A_v\}$. Assim como $|Z_{T_i} \cup Z_{O_i} \cup Z_{A_i}| = 9$ ficaremos com o total $9 - 3 = 6$ □

Exemplo 2. *Uma bandeira é formada por quatro listras, que devem ser coloridas usando-se apenas as cores amarelo, branco e cinza, não devendo listras adjacentes ter a mesma cor. De quantos modos pode ser colorida a bandeira? (MORGADO, 1991, Exemplo 2.2, p. 19)*

Solução (Morgado). A primeira listra pode ser colorida de 3 modos, a segunda de 2 modos (não podemos usar a cor empregada na primeira listra), a terceira de 2 modos (não podemos usar a cor empregada na segunda listra) e a quarta de 2 modos (não podemos usar a cor empregada na terceira listra). A resposta é $3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$. □

Solução (Santos). Este problema pode ser generalizado para k listras e n cores e ficaria com o seguinte enunciado:

> De quantos modos uma bandeira com k listras pode ser pintada com n cores distintas de modo que listras adjacentes tenham cores diferentes?

Uma bandeira listrada pode ser representada por uma k-lista ordenada $(x_1, x_2, \dots, x_k)$. Seja o conjunto

$$X(k, n) = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) : x_1 \neq x_2, \dots, x_{k-1} \neq x_k\}$$

o conjunto de todas as bandeira listradas que satisfazem às condições do problema. O conjunto

$$X(k+1,n) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}) : x_1 \neq x_2, \ldots, x_k \neq x_{k+1}\}$$

tem claro seu significado no contexto.

Observe que toda bandeira com $k+1$ listras pode ser obtida a partir de uma bandeira com k listras com a condição que a k-ésima e a $k+1$-ésima listras sejam diferentes. Isto é,

$$X(k+1,n) = \bigcup_{\boldsymbol{x} \in X(k,n)} \{(\boldsymbol{x}, x_{k+1}) : x_k \neq x_{k+1}\}$$

em que $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Observe que esta reunião é disjunta e que cada membro da reunião possui exatamente $n-1$ elementos (lembre que fixado $\boldsymbol{x}$, como x_{k+1} deve ser diferente de x_k, ele pode assumir $n-1$ valores).

Denotando por $S(k,n) = |X(k,n)|$, temos

$$S(k+1,n) = \sum_{\boldsymbol{x} \in X(k,n)} |\{(\boldsymbol{x}, x_{k+1}) : x_k \neq x_{k+1}\}| = \sum_{\boldsymbol{x} \in X(k,n)} (n-1) = (n-1)S(k,n).$$

Isto é, obtem-se uma relação de recorrência para o problema. Obviamente $S(1,n) = n$. Daí $S(2,n) = n(n-1), S(3,n) = n(n-1)^2, \ldots, S(k,n) = n(n-1)^{k-1}$. Em particular $S(4,3) = 3 \cdot 2^3 = 24$ □

Exemplo 3. *Quantos números naturais de três algarismos distintos (na base* 10*) existem? (MORGADO, 1991, Exemplo 2.3, p. 19)*

Solução (Morgado). O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos (não podemos usar o zero!), o segundo algarismo de 9 modos (não podemos usar o algarismo utilizado anteriormente) e o terceiro de 8 modos (não podemos usar os dois algarismos já empregados anteriormente)Assim a resposta é $9 \times 9 \times 8 = 648$. □

Solução (Santos). Este problema pode ser apresentado genericamente com o seguinte enunciado:

> Quantos números naturais de $k \leq 10$ algarismos distintos (na base 10) existem ($k \leq 10$)?

Seja $A = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Um número natural com k algarismos pode ser representado como uma k-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ tal que $x_i \in A$, $1 \leq i \leq k$ e $x_1 \neq 0$. Seja o conjunto

$$X(k,A) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) : x_i \in A, x_i \neq x_j, 1 \leq i, j \leq k, i \neq j\}$$

Uma breve reflexão mostra que

$$X(k+1, A) = \bigcup_{\boldsymbol{x} \in X(k,A)} \{(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}) : x_{k+1} \in A - \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}\}$$

em que $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Observe que esta reunião é disjunta e que cada membro da reunião possui exatamente $|A - \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}| = 10 - k$ elementos.

Denotando por $S(k, A) = |X(k, A)|$, temos

$$S(k+1, A) = S(k, A)(10 - k).$$

Isto é, obtem-se uma relação de recorrência para o problema. Obviamente $S(1, A) = 10$. Daí $S(2, A) = 10(10 - 1), S(3, A) = 10 \cdot 9 \cdot 8$.

Para contar números naturais de k algarismos distintos (na base 10 e $k > 1$), basta excluir do total $S(k, A)$ a quantidade de k-uplas de $X(k, A)$ cujo primeiro elemento é nulo. Note que essa quantidade coincide com $S(k-1, A')$ onde $A' = A - \{0\}$.

Temos $S(2, A') = (9 - 1)S(1, A') = 9 \cdot 8$. Portanto, existem

$$S(3, A) - S(2, A') = 10 \cdot 9 \cdot 8 - 9 \cdot 8 = 9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$$

números naturais de três algarismos distintos (na base 10) □

É claro que podemos estender o Princípio Multiplicativo a um número finito de conjuntos finitos $X_1, X_2, \ldots, X_k$, dois a dois disjuntos.

Teorema 5 (O Princípio Multiplicativo Generalizado)**.** *Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_k$ conjuntos finitos não-vazios, dois a dois disjuntos, com $m_1, m_2, \ldots, m_k$ elementos respectivamente. Então o número de elementos de $X_1 . X_2 . \ldots . X_k$ é $m_1.m_2.\ldots.m_k$.*

Demonstração. Para a demonstração, iremos usar indução finita sobre o número k de conjuntos. Sejam o conjunto X_1 com m_1 elementos e o conjunto X_2 com m_2 elementos. Pelo Teorema 4, sabemos que $X_1 \cdot X_2 = m_1 \cdot m_2$. Por hipótese de indução, admita que se $X_1, X_2, \ldots, X_k$ são conjuntos finitos não-vazios, dois a dois disjuntos, com $m_1, m_2, \ldots, m_k$ elementos respectivamente, então o número de elementos de $X_1 . X_2 . \ldots . X_k$ é dado por

$$|X_1 . X_2 . X_3 . \ldots . X_k| = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \cdots \cdot m_k.$$

Queremos mostrar que $X_1 . X_2 . \ldots . X_{k+1}$ tem $m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_{k+1}$ elementos. Se X_{k+1} tem $m_k + 1$ elementos vamos usar o princípio aditivo. Vamos representar X_{k+1} da seguinte maneira: $\{x_1, x_2, \ldots, x_{m_{k+1}}\}$. Podemos obter o produto $X_1 . \ldots . X_k$ com X_{k+1} como a união dos conjuntos

$$X_1 . \ldots . X_k . \{x_1\}, \quad X_1 . \ldots . X_k . \{x_2\}, \quad \ldots, \quad X_1 . \ldots . X_k . \{x_{m_{k+1}}\}$$

que corresponde a um total de

$$(m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdots m_k) + (m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdots m_k) + (m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdots m_k) + \cdots + (m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdots m_k)$$

conjuntos. Note que temos $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdots m_k$ somado m_{k+1} vezes o que resulta em $m_1 \cdot \cdots \cdot m_k \cdot m_{k+1}$ como queríamos demonstrar. □

3.1.3 Produtos Cartesianos e Princípio Multiplicativo Ordenado

Com a técnica anteriormente usada para provar o Princípio Multiplicativo, mostra-se que $|X \times Y| = |X||Y|$. Isto prova o teorema a seguir:

Proposição 1 (Número de elementos de um produto cartesiano)**.** *Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_k$ conjuntos finitos não-vazios, não necessariamente disjuntos, com $m_1, m_2, \ldots, m_k$ elementos respectivamente. Então, o número de elementos do produto cartesiano $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$ é $m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_k$. Consequentemente, se $X_1 = X_2 = \cdots = X_k = X$ e $m_1 = m_2 = \cdots = m_k = n$, então X^k tem n^k elementos.*

Demonstração. Queremos mostrar que o cartesiano $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_{k+1}$ tem $m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_{k+1}$ elementos, para tanto iremos usar indução. Vamos representar o conjunto X_{k+1} da seguinte maneira: $\{x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}\}$. O produto cartesiano $X_1 \times \ldots X_k$ com X_{k+1} corresponde à união disjunta dos conjuntos

$$X_1 \times \ldots X_k \times \{x_1\}, \quad X_1 \times \ldots X_k \times \{x_2\}, \quad \ldots, \quad X_1 \times \ldots X_k \times \{x_{k+1}\}.$$

Pelo Princípio Aditivo (Teorema 3), há um total de

$$(m_1 \cdot \cdots \cdot m_k) + (m_1 \cdot \cdots \cdot m_k) + \cdots + (m_1 \cdot \cdots \cdot m_k)$$

elementos. O termo $m_1 \cdot \cdots \cdot m_k$ foi somado $k+1$ vezes o que resulta em $m_1 \cdot \cdots \cdot m_k \cdot m_{k+1}$. Imediatamente ao resultado, se cada m_i, com $1 \leq i \leq k+1$, for igual a m e cada $X_1 = X_2 = \ldots = X_{k+1} = X$ então X^{k+1} tem n^{k+1} elementos. como queríamos demonstrar. □

Exemplo 4. *Quantos números naturais de 4 algarismos (na base 10), que sejam menores que 5.000 e divisíveis por 5, podem ser formados usando-se apenas os algarismos* 2, 3, 4 *e* 5. *(MORGADO, 1991, Exemplo 2.4, p. 21)*

Solução (Morgado). Temos:

último algarismo	$\longrightarrow$	1 modo (tem que ser o 5)
primeiro algarismos	$\longrightarrow$	3 modos (não pode ser o 5)
segundo algarismos	$\longrightarrow$	4 modos
terceiro algarismo	$\longrightarrow$	4 modos

Com isso chegamos a conlcusão que a resposta é $1 \times 3 \times 4 \times 4 = 48$ □

Solução (Santos). Para ser menor que 5.000 tem que começar com 2,3 ou 4. Vamos montar as quádruplas ordenadas (x, y, z, p) onde teremos que $x \in \{2, 3, 4\}, y \in \{2, 3, 4, 5\}, z \in \{2, 3, 4, 5\}$ e $p \in \{5\}$. Devemos observar que cada quádrupla (x, y, z, p) é o resultado do cartesiano $\{x \cdot y \cdot z \cdot p\}$. Pela Proposição 1 sabemos que o total de quádruplas (x, y, z, p) é

$3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1 = 48.$

□

> **Exemplo 5.** *As placas dos automóveis são formadas por duas letras (K, Y e W inclusive) seguidas por quatro algarismos. Quantas placas podem ser formadas? (MORGADO, 1991, Exemplo 2.5, p. 21)*
>
> *Solução (Morgado).* Cada letra pode ser escolhida de 26 modos e cada algarismo de 10 modos distintos. A resposta é
>
> $26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 6.760.000$ □

Solução (Santos). Para calcularmos todas as placas iremos contar todas as sextuplas ordenadas (x, y, z, p, q, r) onde

$$\begin{aligned} x, y \in \mathcal{L} = \{A, B, \ldots, Z\}, &\quad |\mathcal{L}| = 26 \\ z, p, q, r \in \mathcal{A} = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}, &\quad |\mathcal{A}| = 10 \end{aligned}$$

Pela Proposição 1, sabemos que o total de sextuplas (x, y, z, p, q, r) é

$26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 6.760.000.$

Esse quantitativo corresponde ao total de elementos do cartesiano $\{L \cdot L \cdot L \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot\}$

□

Também é óbvio o teorema que segue.

Teorema 6 (O Princípio Multiplicativo Ordenado)**.** *Sejam X e Y conjuntos não vazios, finitos, disjuntos com m e n elementos respectivamente. Então o número de elementos do conjunto $[(X \times Y) \cup (Y \times X)]$ é $2mn$.*

Demonstração. Sejam $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ e $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Com isso, temos pela Definição 8, temos $|X| = m$ e $|Y| = n$. Pela Proposição 1, sabemos que

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y| = m \cdot n \qquad \text{e} \qquad |Y \times X| = |Y| \cdot |X| = n \cdot m.$$

Como X e Y são disjuntos, os pares (x_1, y_1) e (y_2, x_2) com $y_1, y_2 \in Y$ e $x_1, x_2 \in X$ são todos distintos, pelo Princípio Aditivo (Teorema 2)

$$|(X \times Y) \cup (Y \times X)| = |X \times Y| + |Y \times X| = mn + nm = 2mn.$$

□

Neste ponto, seria natural tentar estender o Princípio Multiplicativo Ordenado, entretanto o faremos mais adiante, por não ser imediato.

3.2 Permutações

Sejam X um conjunto finito com n elementos e p um número natural tal que $1 \leq p$.

Definição 9 (p-permutação). *Uma p-permutação dos elementos de X é qualquer elemento do conjunto das p-uplas ordenadas de elementos de X. Simbolicamente, $\boldsymbol{x}$ é uma p-permutação de X se*

$$\boldsymbol{x} \in X^p = \{(x_1, x_2, \ldots, x_p) : x_i \in X,\ i = 1, 2, \ldots, p\}.$$

Para uma p-permutação $\boldsymbol{x}$ o símbolo $\boldsymbol{x}_J$ representa a restrição de $\boldsymbol{x}$ a $J \subset [p]$, isto é, se $J = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_{|J|}\}$ então $\boldsymbol{x}_J = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_{|J|}})$. Se $x_{i_1} = \cdots = x_{i_{|J|}} = t$, escreveremos simplesmente $\boldsymbol{x}_J = t$. Neste caso dizemos que $\boldsymbol{x}_J$ é *constante* ou que $\boldsymbol{x}$ é *constante sobre J*.

Definição 10 (p-diagonal do conjunto X). *Se $p \geq 2$, definimos a p-diagonal do conjunto X como sendo o conjunto das p-uplas ordenadas de X nas quais pelo menos duas coordenadas coincidem, isto é,*

$$\Delta^p(X) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in X^p : \exists\, i, j \in \{1, 2, \ldots, p\},\ i \neq j,\ x_i = x_j\}$$

Todo elemento de $\Delta^p(X)$ conta com pelo menos uma coordenada repetida, desse modo se $\boldsymbol{x} \in X^p \sim \Delta^p(X)$, não há repetição em suas coordenadas.

Definição 11 (p-permutação sem repetição). *Chamaremos $\boldsymbol{x}$ de p-permutação sem repetição dos elementos de X. Em outras palavras, uma p-permutação é dita ser sem repetição se nenhuma de suas coordenadas coincidirem. Representaremos o conjunto $X^p \sim \Delta^p(X)$ simplesmente por $\Pi^p(X)$. Note que, para $p > n$, $\Pi^p(X) = \emptyset$.*

Calcularemos o número de elementos do conjunto $\Pi^p(X)$. Para fixar alguma idéia, começamos supondo $p = 2$. Para $p = 2$, a 2-diagonal de X é exatamente o conjunto $\Delta^2(X) = \{(x_1, x_2) \in X^2 : x_1 = x_2\}$ e, consequentemente, tem-se $\Pi^2(X) = \{(x_1, x_2) \in X^2 : x_1 \neq x_2\}$.

Para cada $x \in X$, definimos

$$Y_x := X \sim \{x\} \qquad \text{e} \qquad Z_x := \{(x, y) \in X^2 : y \in Y_x\}$$

e agora observemos que:

- $|Z_x|$ coincide com $|Y_x| = |X| - 1$
- Caso $x \neq x'$, então as duplas de Z_x e Z'_x são diferentes
- O conjunto de todas as duplas formadas por elementos distintos de X é a união de Z_x para $x \in X$

Em resumo:

- $|Z_x| = n - 1$
- $Z_x \cap Z_{x'} = \emptyset$ se $x \neq x'$
- $\Pi^2(X) = \bigcup\limits_{x \in X} Z_x$

Segue destes três fatos e do Princípio Aditivo (Teorema 3) que

$$|\Pi^2(X)| = \left|\bigcup_{x \in X} Z_x\right| = \sum_{x \in X} |Z_x| = \sum_{x \in X} (n-1) = n(n-1).$$

Afirmamos que $\Pi^p(X)$ tem $n(n-1)\cdots(n-p+1)$ elementos. Usaremos indução sobre p para provar a afirmação.
Hipótese de Indução: Se $m < n$, $2 \leq l \leq m$ e Y é um conjunto com m elementos então $\Pi^l(Y)$ tem $m(m-1)\cdots(m-l+1)$ elementos.

É claro que a aplicação $\varphi : X^p \longrightarrow X^{p-1} \times X$ definida por

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_p) = ((x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}), x_p)$$

é uma bijeção. Este simples fato é a chave da demonstração apresentada.

Para cada $x \in X$, definimos

- $Y_x = X \sim \{x\}$ e
- $Z_x = \{(\boldsymbol{x}, x) : \boldsymbol{x} \in \Pi^{p-1}(Y_x)\}$.

Observamos que,

- $|Y_x| = n - 1$
- $Z_x \cap Z_{x'} = \emptyset$ se $x \neq x'$ e
- $\Pi^p(X) = \bigcup\limits_{x \in X} \varphi^{-1}(Z_x)$

e em vista da hipótese de indução, que garante que $|Z_x| = |\Pi^{p-1}(Y_x)| = (n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$ e do Princípio Aditivo (Teorema 3), segue que

$$|\Pi^p(X)| = \left|\bigcup_{x\in X} \varphi^{-1}(Z_x)\right| = \sum_{x\in X} |Z_x| = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1),$$

o que prova a afirmação feita. Com isto provamos o Teorema 7.

Teorema 7 (Número de permutações sem repetição)**.** *Se X é um conjunto com n elementos e p um número natural tal que $1 \leq p$, então o número de p-permutações sem repetição de elementos de X é dado por* $\dfrac{n\,!}{(n-p)\,!}$.

Outra demonstração: Denote por $P(n,p)$ o número de p-permutações sem repetição de elementos de X. Na demonstração anterior, observe que $|Z_x| = P(n-1,p-1)$ e que $|\Pi^p(X)| = n\,P(n-1,p-1)$. Daí tem-se

$$\begin{aligned}
P(n,p) &= n\,P(n-1,p-1) = n\,(n-1)P(n-2,p-2)\\
&= n\,(n-1)\,(n-2)\,P(n-3,p-3)\\
&= \cdots = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots\,(n-(p-1))\,P(n-(p-2),1)
\end{aligned}$$

sempre que $p \geq 2$ e consequentemente $P(n,p) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$. □

Exemplo 6. *Quantos são os números naturais pares que se escrevem (na base* 10*) com três algarismos distintos? (MORGADO, 1991, Exemplo 2.6, p. 21)*

Solução (Morgado). O último algarismo do número pode ser escolhido de 5 modos $(0,2,4,6,8)$. O primeiro algarismo pode ser escolhido ... depende! Se o zero foi usado como último algarismo, o primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos (não podemos usar o algarismo já empregado na última casa). Se o zero não foi usado como último algarismo, o primeiro algarismo só pode ser escolhido de 8 modos (não podemos usar nem o zero nem o algarismo empregado na última casa).

Para vencer este impasse, temos duas alternativas:

a) "abrir" o problema em casos (que é a alternativa mais natural). Contamos separadamente os números que têm zero como último algarismo e aqueles cujo último algarismo é diferente de zero. Terminando em zero temos 1 modo de escolher o último algarismo, 9 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o do meio, num total de $1\cdot 9\cdot 8 = 72$ números. Terminando em um algarismo diferente de zero temos 4 modos de escolher o último algarismo $(2,4,6,8)$,8 modos de escolher o primeiro algarismo (nem podemos usar nem o zero nem o algarismo já usado na última casa) e 8 modos de escolher o algarismo do meio (não podemos usar os dois algarismos já empregados nas casas extremas). Logo, temos $4\cdot 8\cdot 8 = 256$ números terminados em um algarismo diferente de zero. A resposta é, portanto $72 + 256 = 328$.

b) Ignorando uma das restrições (que é uma alternativa mais sofisticada). Ignorando o fato de zero não poder ser primeiro algarismo, teríamos 5 modos de escolher o último algarismo, 9 modos de escolher o primeiro algarismo e 8 modos de escolher o do meio, num total de $5\cdot 8\cdot 9 = 360$ número. Esses 360 números incluem números começados em zero, que devem ser descontados. Começando em zero temos 1 modo de escolher o primeiro algarismo (0), 4 modos de escolher o último algarismo $(2,4,6,8)$ e 8 modos de escolher o do meio (não podemos usar os dois algarismos já empregados nas casas extremas), num total de $1\cdot 4\cdot 8 = 32$ números. A resposta é, portanto,

$360 - 32 = 328$ É claro também que poderíamos ter resolvido o problema determinando todos os números de 3 algarismos distintos ($9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ e abatendo os números ímpares de 3 algarismos distintos (5 na última casa, 8 na primeira e 8 na segunda, num total de $5 \cdot 8 \cdot 8 = 320$ números). A resposta seria $648 - 320 = 328$. □

Solução (Santos). Considere os conjuntos $P = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $P' = \{2, 4, 6, 8\}$ e $N = P \cup \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Para cada $p \in P$, seja $N_p = N \sim \{p\}$. A cardinalidade da união disjunta $\bigcup_{p \in P} \Pi^2(N_p)$ coincide com o total de triplas pertencentes a N^3 com componentes todas distintas e tais que sua terceira componente sempre é um elemento de P. Se eliminarmos desse total o correspondente àquelas cuja primeira componente é nula, temos a quantidade de números pares de três algarismos distintos. Para cada $p \in P'$, seja $N'_p = N \sim \{0, p\}$. Portanto, a quantidade de números naturais pares que se escrevem (na base 10) com três algarismos distintos é dada por

$$\left| \bigcup_{p \in P} \Pi^2(N_p) \right| - \left| \bigcup_{p \in P'} (N'_p \times \{p\}) \right| = \frac{9!}{7!} \cdot |P| - 8 \cdot |P'| = 9 \cdot 8 \cdot 5 - 8 \cdot 4 = 8 \cdot 41 = 328.$$

□

Para o estudo das permutações sem repetição de elementos (simples), o professor Morgado considera.

> **Permutação simples** Dados n objetos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. De quantos modos é possível ordená-los? Neste caso temos n modos de escolher o objeto para o primeiro lugar, $n - 1$ modos de escolher o objeto para o segundo lugar ... e 1 modo de escolher o objeto que ocupará o último lugar. Assim temos que o número de modos de ordenar n objetos distintos é $n(n-1)\ldots 1 = n!$ (MORGADO, 1991, p. 27)

Exemplo 7. *Quantos são os anagramas da palavra PRÁTICO. (MORGADO, 1991, Exemplo 2.7, p. 27)*

Solução (Morgado). Cada anagrama de PRÁTICO nada mais é do que uma ordenação das letras P, R, A, T, I, C, O. Assim o número de anagramas de PRÁTICO é $P_7 = 7! = 5.040$. □

Solução (Santos). Seja $X = \{P, R, A, T, I, C, O\}$ onde $n = 7$. Queremos calcular a 7-permutação sem repetição dos elementos de X. Para isso vamos usar o Teorema 7. Assim sabemos que o total será

$$|\Pi^7(X)| = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{7!}{(7-7)!} = 7! = 5.040.$$

□

Exemplo 8. *Quantos são os anagramas da palavra PRÁTICO que começam e terminam com consoante? (MORGADO, 1991, Exemplo 2.8, p. 27)*

Solução (Morgado). A consoante inicial pode ser escolhida de 4 maneiras. A consoante final pode ser escolhida de 3 maneiras, uma vez que não pode haver repetição das letras. As 5 letras restantes podem ser arrumadas entre essas duas consoantes de $P_5 = 5! = 120$. Assim a resposta é $4 \times 3 \times 5! = 1.440$ □

Solução (Santos). Queremos calcular os anagramas da palavra PRÁTICO que começam e terminam com consoante. Sejam $X = \{P, R, A, T, I, C, O\}$, $C = \{P, R, T, C\}$ e $c = (c_1, c_2) \in \Pi^2(C)$. Para cada $c \in \Pi^2(C)$, seja $S_c = X - \{c_1, c_2\}$. É possível obter uma bijeção entre o conjunto I dos anagramas da palavra PRÁTICO que começam e terminam com consoante e o conjunto $\cup_{c\in\Pi^2(C)}\{(c_1, c_2)\} \times \Pi^5(S_c)$ e pelo Teorema 7, que calcula o número de permutações sem repeticões,

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{c\in\Pi^2(C)} \{(c_1, c_2)\} \times \Pi^5(S_c)\right| &= \sum_{c\in\Pi^2(C)} |\{(c_1, c_2)\} \times \Pi^5(S_c)| \\ &= \sum_{c\in\Pi^2(C)} |\Pi^5(S_c)| = 5! \sum_{c\in\Pi^2(C)} \\ &= 5!|\Pi^2(C)| = 4 \times 3 \times 5!.\end{aligned}$$

Isto é, há $4 \times 3 \times 5! = 1.440$ anagramas. □

Teorema 8 (Número de permutações com repetição). *Se X é um conjunto com n elementos e p um número natural tal que $1 \leq p \leq n$, então o número de p-permutações com repetição de elementos de X é dado por* $n^p - \dfrac{n\,!}{(n-p)\,!}$.

Demonstração. Como X^p tem n^p elementos e é a reunião disjuntas das partes $\Pi^p(X)$ e $\Delta^p(X)$, tem-se imediatamente do Princípio Aditivo a conclusão do teorema. □

Já o professor Morgado apresenta as permutações de n elementos quando há elementos repetidos. Ele especifica (através das letras gregas $\alpha, \beta, \ldots, \kappa, \lambda$) quantas vezes cada elemento se repete.

> **Número de permutações com repetição** No caso geral, temos, para $\alpha+\beta+\cdots+\kappa+\lambda = n$, o total de permutações será $P_n^{\alpha,\beta,\ldots,\kappa,\lambda} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!}$ (MORGADO, 1991, p. 50)

Exemplo 9. *De quantos modos 5 rapazes e 5 moças podem se sentar em 5 bancos de dois lugares cada, de modo que em cada banco fiquem um rapaz e uma moça. (MORGADO, 1991, Exemplo 2.9, p. 29)*

Solução (Morgado). O primeiro rapaz pode escolher seu lugar de 10 modos, o segundo rapaz de 8 modos, o terceiro de 6 modos, o quarto de 4 modos e o quinto de 2 modos. Colocados os rapazes, temos que colocar as 5 moças nos 5 lugares que sobraram, o que pode ser feito de 5! modos.

A resposta é $10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2 \times (5!) = 460.800$ □

Para apresentar a solução com os argumentos e técnicas de Santos (2006), precisaremos introduzir dois conceitos.

Definição 12 (Cruzamentos). *Sejam X e Y conjuntos disjuntos tais que $|X| = |Y| = n$. Um cruzamento entre X e Y, denotado por $X \oplus Y$ é uma família de conjuntos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ tais que*

1. $A_i \in X \,.\, Y$

2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ *para* $i \neq j$.

Observe que cada elemento da família de cruzamentos entre X e Y define naturalmente uma bijeção de $X \oplus Y$ sobre $\Pi^n(Y)$ (e reciprocamente). Por exemplo, seja $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, sabemos que cada elemento da família de cruzamentos de x e y é da forma $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Sem perda de generalidade, vamos assumir que $x_i \in A_i$. Considere a bijeção $\varphi : X \oplus Y \to Y$ definida por

$$\varphi(\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}) = (y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_n}), \quad y_{j_i} \in A_i.$$

Desta forma, pelo Teorema 7, $|X \oplus Y| = n!$.

Agora temos tudo para tratar a generalização do Princípio Multiplicativo Ordenado.

Teorema 9 (O Princípio Multiplicativo Ordenado Generalizado). *Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_k$ conjuntos não vazios, finitos, dois a dois disjuntos, com $m_1, m_2, \ldots, m_k$ elementos respectivamente. Seja X o conjunto definido por*

$$X = \bigcup_{\boldsymbol{x} \in\, \Pi^k(K)} X(\boldsymbol{x}), \qquad \text{onde } X(\boldsymbol{x}) = X_{x_1} \times X_{x_2} \times \cdots \times X_{x_k}$$

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ e $K = \{1, 2, \ldots, k\}$. Então, o número de elementos de X é dado por $k\,!\, m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_k$. O conjunto X será denotado por $\boxtimes_{i=1}^k X_i$

Demonstração. Como $X(\boldsymbol{x}) \cap X(\boldsymbol{x}') = \emptyset$, se $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}'$ e

$$|X(\boldsymbol{x})| = |X(\boldsymbol{x}')| = m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_k,$$

para quaisquer $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \Pi^k(K)$, então, pelo Princípio Aditivo (Teorema 3),

$$|X| = \sum_{\boldsymbol{x} \in \Pi^k(K)} |X(\boldsymbol{x})| = (m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_k) \cdot |\Pi^k(K)|,$$

donde segue o desejado. □

Solução (Santos). O problema anterior pode ser generalizado da seguinte forma:

> De quantas formas n homens e n mulheres podem ser dispostos em n bancos de 2 lugares cada um, enfileirados de modo que em cada banco figure um casal?

Vamos representar respectivamente o conjunto dos homens e das mulheres por H e M. Temos: H e M conjuntos disjuntos e $|H| = |M| = n \geq 1$. Denote por $F = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ um cruzamento entre H e M. A formulação abstrata do problema acima, isto é, o conjunto relacionado ao problema é:

$$X = \cup_{\mathcal{F} \in H \oplus M} \{\boxtimes_{i=1}^{n} \Pi^2(A_i) | \mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}\}$$

em que a reunião é disjunta. De acordo com o Teorema 9, cada conjunto da reunião acima possui $n!2^n$, pois $|\Pi^2(A_i)| = 2$, de modo que, pelo princípio aditivo,

$$|X| = (n!2^n) \cdot |H \oplus M| = (n!)^2.2^n.$$

Como no nosso problema temos $n = 5$ teremos como resposta que

$$|X| = (5!)^2 \cdot 2^5 = 120^2 \cdot 32 = 460.800.$$

□

3.3 Permutações Circulares

Seja X um conjunto finito com n elementos. Uma aplicação $T : X^n \longrightarrow X^n$ é chamada de *shift* em X se

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1)$$

para qualquer $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$. Se $j \geq 2$ é um número inteiro positivo, o símbolo $T^{(j)}$ denota o operador definido por $T^{(j)} = T \circ T^{(j-1)}$. Com isto definido, observe que $T^{(n)}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$, isto é, $T^{(n)}$ é a identidade de X^n. A *permutação circular* ou *órbita* de um elemento $\boldsymbol{x} \in \Pi^n(X)$ é o conjunto

$$O(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{x}, T(\boldsymbol{x}), T^{(2)}(\boldsymbol{x}), \ldots, T^{(n-1)}(\boldsymbol{x})\}$$

Diremos que duas n-permutações *sem repetição* $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{x}'$ são *O-relacionadas* se existe $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $T^{(j)}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'$, isto é, se uma delas pertence à órbita da outra. Neste caso escrevemos, $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x}'$. É fácil ver que esta é uma relação de equivalência, isto é,

- $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x}$ (simétrica)
- $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x}' \Rightarrow \boldsymbol{x}' \sim \boldsymbol{x}$ (reflexiva)
- $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x}'$ e $\boldsymbol{x}' \sim \boldsymbol{x}'' \Rightarrow \boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x}''$ (transitiva)

Como se vê, a permutação circular $O(\boldsymbol{x})$ de uma n-permutação sem repetição $\boldsymbol{x}$ é a sua classe de equivalência $\widehat{\boldsymbol{x}}$ segundo a relação acima, e o número de elementos de $\widehat{\boldsymbol{x}}$ é portanto e igual a n. Vale lembrar que se $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{x}'$ não são equivalentes, isto é, $\boldsymbol{x} \nsim \boldsymbol{x}'$ então $\widehat{\boldsymbol{x}} \cap \widehat{\boldsymbol{x}}' = \emptyset$ e que as classes de equivalência determinadas pela relação formam uma partição do conjunto $\Pi^n(X)$.

Seja agora $\varepsilon(X)$ o conjunto de todas as classes de equivalências de $\Pi^n(X)$ e determinemos seu número de elementos. Bem, mas isto é simples, pois

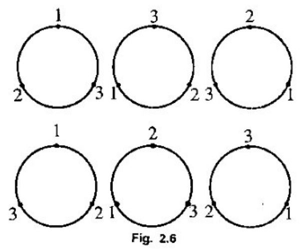
$$n\,! = |\Pi^n(X)| = |\bigcup_{\widehat{\boldsymbol{x}} \in\, \varepsilon(X)} \widehat{\boldsymbol{x}}| = \sum_{\widehat{\boldsymbol{x}} \in\, \varepsilon(X)} |\widehat{\boldsymbol{x}}| = n \cdot |\varepsilon(X)|$$

donde segue que $\varepsilon(X)$ tem $(n-1)\,!$ elementos.

Com isso, podemos observar o Teorema a seguir que permite calcular o número de permutações circulares para um dado conjunto X com n elementos.

Teorema 10 (Número de permutações circulares sem repetição)**.** *Seja X um conjunto com n elementos. Então o número de permutações circulares dos elementos de $\Pi^n(X)$ é dado por $(n-1)\,!$*

Já o professor Morgado apresenta as permutações circulares da seguinte forma:

> De quantos modos podemos colocar n objetos distintos em n lugares equiespaçados em torno de um círculo, se consideramos equivalentes disposições que possam coincidir por rotação?
>
> A resposta desse problema será representada por $(PC)_n$, o número de permutações circulares de n objetos distintos. É fácil ver que $(PC)_n$ é em geral diferente de P_n. Por exemplo, no caso $n = 3$ temos $P_3 = 3! = 6$ modos de colocar 3 objetos distintos em 3 lugares. No entanto as três
>
> 
>
>
> Fig. 2.6
>
> primeiras disposições podem coincidir entre si por rotação e o mesmo ocorre com as três últimas, de modo que $(PC)_3 = 2$. Repare que nas permutações simples importam os lugares que os objetos ocupam ao passo que nas permutações cirulares o que importa é apenas a posição relativa dos objetos entre si. Nas três primeiras figuras, olhando os circulos em sentido anti-horário, 1 precede 2, que procede 3, que procede 1; portanto, a posição relativa dos objetos é a mesma. Nas três últimas figuras, 1 precede 3, que precede 2, que precede 1; portanto, a posição relativa dos objetos é a mesma. Podemos verificar que $(PC)_n = (n-1)!$ de dois modos:

a) Se não considerássemos equivalentes as diposições que possam coincidir por rotação, teríamos $n!$ disposições. Considerando a equivalência, cada permutação circular é gerada por n disposições. Logo,
$(PC)_n = \dfrac{n!}{n} = (n-1)!$

b) Como o que importa é a posição relativa dos objetos, há 1 modo de colocar o 1^o objeto no círculo (onde quer gue o coloquemos, ele será o único objeto no círculo); há 1 modo de colocar o 2^o objeto (ele será o objeto imediatamente após o primeiro); há 2 modos de colocar o 3^o objeto (imediatamente após o 1^o ou imediatamente após o 2^o); ;há 3 modos de colocar o 4^o objeto (imediatamente após o 1^o ou imediatamente após o 2^o ou imediatamente após o 3^o) ...; há $n-1$ modos de colocar o n-ésimo e último objeto. Logo
$(PC)_n = 1.1.2.3\ldots(n-1) = (n-1)!$ (MORGADO, 1991, p. 42)

Vejamos agora um exemplo simples, elaborado pelo autor, para aplicarmos a fórmula de permutação circular.

Exemplo 10. *De quantos modos podemos colocar 4 pessoas em redor de uma mesa circular?*

Solução (Morgado). Como temos 4 pessoas, precisamos fixar uma delas e permutar as outras, logo devemos permutar 3 pessoas. Assim $P_3 = 3! = 6$. □

Solução (Santos). Seja $X = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$. da definição acima temos que calcular $\Pi^4(X) = (4-1)! = 3! = 6$ □

Exemplo 11. *Quantas rodas de ciranda podem ser formadas com n crianças? (MORGADO, 1991, Exemplo 2.16, p. 42)*

Solução (Morgado). Como a roda gira, o que importa não é o lugar de cada criança e sim a posição relativa das crianças entre si. A resposta é $(PC)_n = (n-1)!$. □

Solução (Santos). Seja $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ o conjunto das crianças. Temos que calcular $|\varepsilon(\Pi^n(C))| = (n-1)!$ □

Exemplo 12. *De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 7 crianças, de modo que duas determinadas dessas crianças não fiquem juntas? (MORGADO, 1991, Exemplo 2.17, p. 43)*

Solução (Morgado). Podemos formar $(PC)_5 = 4!$ rodas com as cinco outras crianças.

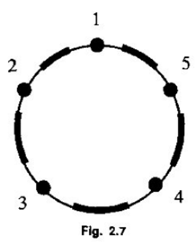


Fig. 2.7

Há cinco modos de colocar a criança A na roda.

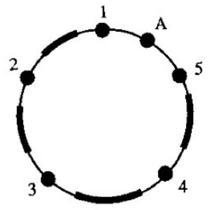


Fig. 2.8

Há agora 4 modos de colocar a criança B na roda sem colocá-la junto de A. A resposta é $4! \times 5 \times 4 = 480$. □

Solução (Santos). Sejam A e B as crianças que não devem ficar juntas. Considere o conjunto $C = \{c_1, \ldots, c_5\}$ das demais crianças. O problema pode ser resolvido se do total de cirandas formadas com $C \cup \{A, B\}$ descontarmos o total das cirandas formadas a partir do conjunto $X = C \cup \{AB\}$ onde AB representa as crianças A e B juntas na ciranda. Como faz diferença A estar a esquerda ou direita de B, o número de cirandas pedido é dado por

$$|\varepsilon(\Pi^7(C \cup \{A, B\}))| - 2|\varepsilon(\Pi^6(X))| = 6! - 2 \cdot 5! = 5!(6-2) = 4! \times 5 \times 4 = 480.$$

□

3.4 Combinações

Sejam X um conjunto finito com n elementos e p um número natural tal que $1 \leq p$. Seja $\boldsymbol{x}$ uma p-permutação de elementos de X. Denotaremos o conjunto de todos os elementos da p-permutação $\boldsymbol{x}$ por $S_{\boldsymbol{x}}$, isto é, se $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ então $S_{\boldsymbol{x}}$ é o menor subconjunto de X tal que $x_i \in S_{\boldsymbol{x}}$ para $i = 1, 2, \ldots, p$.

É patente que toda p-permutação *sem repetição* de elementos de X induz naturalmente um p-subconjunto de X:

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p),\ p\text{-permutação} \qquad \longrightarrow \qquad S_{\boldsymbol{x}} = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\},\ p\text{-subconjunto}$$

Diremos que duas p-permutações sem repetição $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{x}'$ são S-*relacionadas* se elas induzem o mesmo p-subconjunto de X, isto é, se $S_{\boldsymbol{x}} = S_{\boldsymbol{x}'}$. Neste caso escrevemos, $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x}'$. É fácil ver que esta é uma relação de equivalência em $\Pi^p(X)$.

Seja $\widehat{\boldsymbol{x}}$ a classe de equivalência da p-permutação $\boldsymbol{x}$ segundo a relação acima. É claro que cada p-subconjunto S de X está associado a $p\,!$ p-permutações sem repetição de elementos de S. Em consequência disto, a classe de equivalência $\widehat{\boldsymbol{x}}$ tem precisamente $p\,!$ elementos (permutações), mais precisamente, $\widehat{\boldsymbol{x}} = \Pi^p(S_{\boldsymbol{x}})$.

Representaremos por $\varepsilon(X)$ o conjunto de todas as classes de equivalência de $\Pi^p(X)$. Agora, definimos uma aplicação

$$\varphi : \varepsilon(X) \longrightarrow \Gamma_p(X)$$

por $\varphi(\widehat{\boldsymbol{x}}) = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$, se $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$. Notamos que φ está bem definida e que φ é uma bijeção, como é fácil ver. Segue imediatamente deste fato que o número de elementos de $\Gamma_p(X)$ é o mesmo que do conjunto $\varepsilon(X)$.

Finalmente, como

$$\Pi^p(X) = \bigcup_{\widehat{\boldsymbol{x}} \in \varepsilon(X)} \widehat{\boldsymbol{x}},$$

temos

$$|\Pi^p(X)| = \sum_{\widehat{\boldsymbol{x}} \in \varepsilon(X)} |\widehat{\boldsymbol{x}}| = \sum_{\widehat{\boldsymbol{x}} \in \varepsilon(X)} p\,! = |\,\varepsilon(X)|\,p\,!$$

e daí segue que o número de elementos de $\Gamma_p(X)$ é dado por $\dfrac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p\,!}$.

Exemplo 13. *Quantas saladas contendo exatamente 4 frutas podemos formar se dispomos de 10 frutas diferentes? (MORGADO, 1991, Exemplo 2.12, p. 32)*

Solução (Morgado). Para formar uma salada basta escolher das 10 frutas 4, o que pode ser feito de $C(10,4) = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4!} = 210$ modos. □

Solução (Santos). Seja $X = \{f_1, f_2, \ldots, f_{10}\}$ o conjunto de todas as frutas disponíveis, logo $|X| = 10$. Queremos montar os 4-subconjuntos de X. Pelo que segue do estudo, temos que calcular o número de elementos de $\Gamma_4(X)$.

$$|\Gamma_4(X)| = \frac{10(10-1)\cdots(10-4+1)}{4\,!} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4!} = 210.$$

□

Exemplo 14. *Marcam-se* 5 *pontos sobre uma reta* R *e* 8 *pontos sobre uma reta* R' *paralela a* R*. Quantos triângulos existem com vértices em* 3 *desses* 13 *pontos? (MORGADO, 1991, Exemplo 2.13, p. 32)*

Solução (Morgado). Para formar um triângulo ou tomamos um vértice em R e dois em R' ou tomamos um vértice em R' e dois em R. O número de triângulos do primeiro tipo é $5.C(8,2)$ e o do segundo tipo é $8.C(5,2)$. A resposta é

$$5.C(8,2) + 8.C(5,2) = 5.\frac{8.7}{2!} + 8.\frac{5.4}{2!} = 140 + 80 = 220$$

Poderíamos também pensar assim: Para formar um triângulo devemos escolher três pontos, não situados na mesma reta, entre os treze pontos dados. O número de modos de escolher 3 dos 13 pontos é $C(13,3)$. Desse total devemos retirar as $C(5,3)$ escolhas de 3 pontos em R e as $C(8,3)$ escolhas possíveis de 3 pontos em R'. A resposta é

$C(13,3) - C(5,3) - C(8,3) = 286 - 10 - 56 = 220$

□

Solução (Santos). Sejam $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_5\}$ e $P' = \{p'_1, p'_2, \ldots, p'_8\}$ os conjuntos dos pontos selecionados nas retas R e R'. Os vértices dos triângulos podem ser vistos como elementos de $\Gamma_3(P \cup P')$. No entanto, é preciso eliminar os 3-subconjuntos que correspondem a 3 pontos colineares. Isto é, vamos eliminar os conjuntos $\Gamma_3(P)$ e $\Gamma_3(P')$. Portanto, há

$$|\Gamma_3(P \cup P')| - |\Gamma_3(P)| - |\Gamma_3(P')| = \frac{13 \cdot 12 \cdots 11}{3\,!} - \frac{5 \cdot 4 \cdots 3}{3\,!} - \frac{8 \cdot 7 \cdots 6}{3\,!} = 220.$$

triângulos. □

3.4.1 Número Bimomial

O número $\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p\,!} = \frac{n\,!}{p\,!(n-p)\,!}$ será denotado por $C(n,p)$. Este número é conhecido por *número binomial*, por motivos a serem justificados logo adiante. Convencionaremos que $C(n,0) = 1$ e com isto o resultado a seguir será válido para todo número natural menor ou igual a n.

Teorema 11 (Número de p-subconjuntos de um conjunto)**.** *Se X é um conjunto com n elementos e p um número natural tal $0 \leq p \leq n$, então o número de p-subconjuntos de X é dado por $C(n,p)$.*

Exemplo 15. *De quantos modos podemos escolher 6 pessoas, incluindo pelo menos duas mulheres, em um grupo de 7 homens e 4 mulheres? (MORGADO, 1991, Exemplo 2.14, p. 33)*

Solução (Morgado). As alternativas são:

4 homens,	2 mulheres
3 homens,	3 mulheres
2 homens,	4 mulheres

A resposta é

$C(7,4) \cdot C(4,2) + C(7,3) \cdot C(4,3) + C(7,2) \cdot C(4,4) = 35 \cdot 6 + 35 \cdot 4 + 21 \cdot 1 = 371$

Poderíamos também contar todas as escolhas de de 6 pessoas ($C(11,6)$) e abater as escolhas sem mulheres ($C(7,6)$) e com apenas uma mulher ($4 \cdot C(7,5)$). A resposta é

$C(11,6) - C(7,6) - 4 \cdot C(7,5) = 462 - 7 - 84 = 371$

Um erro muito comum é o seguinte: Como o grupo de 6 pessoas deve conter pelo menos duas mulheres, primeiramente escolhem-se duas mulheres ($C(4,2)$), e depois escolhem-se 4 pessoas quaisquer entre as 9 que sobraram ($C(9,4)$). Assim, obtemos a resposta (errada) $C(4,2) \cdot C(9,4) = 6 \cdot 126 = 756$. A explicação é simples. Considere, por exemplo, uma seleção com 3 mulheres e 3 homens, $M_1, M_2, M_3, H_1, H_2, H_3$. Essa seleção foi contada 3 vezes. Uma quando M_1 e M_2 foram as mulheres escolhidas inicialmente, outra quando M_1 e M_3 foram as mulheres escolhidas inicialmente etc ... Já uma seleção com as 4 mulheres, por exemplo, $M_1, M_2, M_3, M_4, H_1, H_2$ foi contado 6 vezes e obtem-se uma resposta errada muito maior que a resposta correta.

□

Solução (Santos). Sejam $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ e $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_7\}$ os conjuntos de mulheres e homens. O conjunto pedido pode escrito como a união disjunta:

$\Gamma_2(M) \,.\, \Gamma_4(H) \cup \Gamma_3(M) \,.\, \Gamma_3(H) \cup \Gamma_4(M) \,.\, \Gamma_2(H).$

Portanto, há

$C(4,2) \cdot C(7,4) + C(4,3) \cdot C(7,3) + C(4,4) \cdot C(7,2) = 371$

grupos. □

Aproveitamos o momento para dar uma fórmula de recorrência para calcular $C(n,p)$. Para isto, seja $x \in X$ e definamos em $\Gamma_p(X)$ duas classes disjuntas: a primeira delas, $\mathfrak{B}$, definida de modo que um p-subconjunto B está em $\mathfrak{B}$ se $x \in B$ e a segunda, $\mathfrak{B}'$, por $\Gamma_p(X) \sim \mathfrak{B}$. É claro que $|\mathfrak{B}| = C(n-1, p-1)$ e que $|\mathfrak{B}'| = C(n-1,p)$. Podemos portanto enunciar o seguinte resultado:

Proposição 2 (Fórmula de recorrência para o número binomial)**.** *Sejam n e p números inteiros positivos tais que $p \leq n$. Então*

$$C(n,p) = C(n-1,p) + C(n-1,p-1).$$

3.4.1.1 Algumas propriedades do número binomial

O quadro abaixo é formado com os diversos valores de $C(n,p)$ é chamado de triângulo aritmético de Tartaglia-Pascal

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Por indução, pode-se facilmente provar as seguintes propriedades:

- Teorema das Colunas: A soma dos elementos de qualquer coluna, do 1º elemento até um qualquer, é igual ao elemento situado na coluna à direita da considerada e na linha imediatamente abaixo.

  $$C(p,p)+C(p,p+1)+\cdots+C(p,p+n)=C(p+1,p+n+1) \quad \text{(teorema das colunas)}$$

- Teorema das Diagonais: A soma dos elementos situados na mesma diagonal desde o elemento da 1ª coluna até o de uma qualquer é igual ao elemento imediatamente abaixo deste.

  $$C(n,0)+C(n+1,1)+\cdots+C(n+p,p)=C(n+p+1,p) \quad \text{(teorema das diagonais)}$$

Proposição 3 (Número de subconjuntos de um conjunto)**.** *Se X é um conjunto com n elementos então o conjunto $\Gamma(X)$ tem 2^n.*

Demonstração. Denote por ξ_n o número de subconjuntos de X; o índice n se deve ao fato de X ter n elementos. Escolha $x \in X$ e definamos em X duas classes disjuntas de subconjuntos de X; $\mathfrak{B} = \{B \subset X : x \in B\}$, e $\mathfrak{B}' = \Gamma(X) \sim \mathfrak{B}$. É claro que $\mathfrak{B}' = \Gamma(X \sim x)$ e $\mathfrak{B} = \{\{x\} \cup C : C \in \Gamma(X \sim x)\}$. Segue diretamente disto que $|\mathfrak{B}| = |\mathfrak{B}'| = \xi_{n-1}$ e, consequentemente, $\xi_n = 2\,\xi_{n-1}$. Daí, concluimos facilmente que $\xi_n = 2^n$, usando-se a condição inicial $\xi_0 = 1$. □

Como subproduto deste resultado tem-se a bela igualdade $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} C(n,p) = 2^n$. De fato, temos

$\Gamma(X) = \cup_{p=0}^{n} \Gamma_p(X).$

Portanto,

$$2^n = |\Gamma(X)| = \sum_{p=0}^{n} |\Gamma_p(X)| = \sum_{p=0}^{n} C(c,p).$$

Tal resultado também é conhecido como Teorema da Linhas do triângulo aritmético de Tartaglia-Pascal.

3.5 Anagramas

Definição 13 (Partições de um conjunto)**.** *Seja X um conjunto com n elementos. Dizemos que qualquer família $\mathfrak{J} = \{J_1, J_2, \ldots, J_l\}$ de subconjuntos não-vazios de X, dois a dois disjuntos, tal que $X = \bigcup_{i=1}^{l} J_i$, é uma partição de X. Cada subconjunto J_i é chamado de bloco. Uma partição de X com l membros é chamada de l-partição de X; nesta definição tem-se necessariamente $l \leq n$. A coleção de todas as l-partições de X será denotada por $\mathfrak{P}^l(X)$.*

Teorema 12 (Número de l-partições de um conjunto)**.** *Seja X um conjunto com n elementos e denote o número de l-partições do conjunto X pelo símbolo $S(n,l)$. Evidentemente tem-se $S(n,1) = 1$ e $S(n,n) = 1$. Se $1 < l < n$ então vale a fórmula recursiva*

$$S(n,l) = S(n-1,l-1) + l\,S(n-1,l).$$

Demonstração. Seja $x \in X$. Decomporemos $\mathfrak{P}^l(X)$, o conjunto de todas l-partições de X, em duas classes disjuntas. A primeira, $\mathfrak{B}$, será definida de modo que uma l-partição $\mathfrak{F}$ de X pertence a $\mathfrak{B}$ se o bloco $J = \{x\}$ compõe $\mathfrak{F}$; a segunda classe, $\mathfrak{B}'$, definida de modo que uma partição $\mathfrak{F}$ pertence a $\mathfrak{B}'$ se bloco $J = \{x\}$ não compõe $\mathfrak{F}$. Calculemos primeiramente o número de elementos de $\mathfrak{B}$. Se $\mathfrak{F}$ é um membro de $\mathfrak{B}$, então $\mathfrak{F} = \{\{x\}, J_2, \ldots, J_l\}$, onde $\{J_2, \ldots, J_l\}$ constitui uma partição de $X \sim \{x\}$. Em vista disto, tem-se claramente que $\mathfrak{B}$ tem $S(n-1,l-1)$ elementos. Determinemos agora o número de elementos de $\mathfrak{B}'$. Seja $\mathfrak{G} = \{J_1, J_2, \ldots, J_l\}$ uma partição de $X \sim \{x\}$. Observamos que para cada $i = 1, 2, \ldots, l$, agregando-se x ao conjunto J_i e pondo-se $J_i' = J_i \cup \{x\}$, obtemos uma partição $\mathfrak{F}_i = \{J_1, J_2, \ldots, J_i', \ldots, J_l\}$ de X. É claro que toda partição de X nesta classe pode ser obtida por este processo, e que existem exatamente $lS(n-1,l)$ elementos neste caso. Como as classes $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ formam uma partição de $\mathfrak{P}^l(X)$, segue que $S(n,l) = S(n-1,l-1) + l\,S(n-1,l)$, como queríamos provar. □

Definição 14 (Partições ordenadas)**.** *Diremos que um membro $\boldsymbol{J} = (J_1, J_2, \ldots, J_l)$ de $[\Gamma(X)]^l$ é uma l-partição ordenada de X se o conjunto $\mathfrak{J}_{\boldsymbol{J}} = \{J_1, J_2, \ldots, J_l\}$ for uma l-partição de X.*

Definição 15 (Composição)**.** *Se n é um número inteiro positivo qualquer, diremos que uma l-upla $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_l)$ de números inteiros positivos tais que $k_1 + k_2 + \cdots + k_l = n$ é uma l-composição de n. É claro que tem-se $2 \leq l \leq n$. O conjunto de todas as l-composições de n será denotado por $\mathfrak{C}(n, l)$.*

Definição 16 (Partições ordenadas e subordinadas)**.** *Sejam X um conjunto com n elementos e $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_l)$ uma composição de n. Diremos que uma l-partição ordenada $\boldsymbol{J} = (J_1, J_2, \ldots, J_l)$ de X é subordinada à composição $\boldsymbol{k}$ se para cada $i = 1, 2, \ldots, l$ o conjunto J_i tem exatamente k_i elementos. Denotaremos o conjunto de todas as l-partições ordenadas de X subordinadas a $\boldsymbol{k}$ por $\mathfrak{L}_{\boldsymbol{k}}(X)$. Simbolicamente,*

$$\mathfrak{L}_{\boldsymbol{k}}(X) = \left\{ (J_1, J_2, \ldots, J_l) \in [\Gamma(X)]^l : \bigcup_{i=1}^{l} J_i = X \ \ e \ \ |J_i| = k_i \ \ para \ \ i = 1, 2, \ldots, l \right\}.$$

No que segue, calcularemos o número de elementos de $\mathfrak{L}_{\boldsymbol{k}}(X)$.

Começamos com o mais simples dos casos, ou seja, $l = 2$. Uma rápida reflexão mostra que

$$\mathfrak{L}_{\boldsymbol{k}}(X) = \{(J_1, J_2) : J_1 \in \Gamma_{k_1}(X) \ \ e \ \ J_2 = X \sim J_1\}$$

e que $\mathfrak{L}_{\boldsymbol{k}}(X)$ tem exatamente $C(n, k_1) = \dfrac{n\,!}{k_1\,!\,k_2\,!}$, correspondendo ao número de subconjuntos de X com $k1$ elementos.

Afirmamos que o conjunto $\mathfrak{L}_{\boldsymbol{k}}(X)$ tem exatamente

$$C(n, k_1) \cdot C(n - k_1, k_2) \cdot \cdots \cdot C(n - k_1 - \cdots - k_{l-1}, k_l) = \frac{n\,!}{k_1\,!\,k_2\,! \,\ldots\, k_l\,!}$$

elementos.

Provaremos a afirmação usando indução sobre l, ou seja, o tamanho de $\boldsymbol{k}$.

Hipótese de Indução: Se $m < n$, $2 \leq l \leq m$, Y é um conjunto com m elementos e $\boldsymbol{k}$ é uma composição de m, então o número de elementos do conjunto $\mathfrak{L}_{\boldsymbol{k}}(Y)$ é exatamente $\dfrac{m\,!}{k_1\,!\,k_2\,! \,\ldots\, k_l\,!}$.

Seja $\boldsymbol{k}' = (k_1, k_2, \ldots, k_{l+1})$ uma composição de n e denote por $\boldsymbol{k}$ a composição $(k_1, k_2, \ldots, k_l)$ de $n - k_{l+1}$.

Para cada $J \in \Gamma_{k_{l+1}}(X)$ definimos

- $Y_J = X \sim J$, e
- $Z_J = \{(\mathbf{J}, J) : \mathbf{J} \in \mathfrak{L}_{\boldsymbol{k}}(Y_J)\}$.

Observamos que,

- $Z_J \cap Z_{J'} = \emptyset$ se $J \neq J'$, e

- $|Z_J| = |\mathfrak{L}_{\boldsymbol{k}}(Y_J)| = \dfrac{(n-k_{l+1})\,!}{k_1\,!\,k_2\,!\,\ldots\,k_l\,!}$ (em virtude da hipótese de indução)

Agora, notando-se que a aplicação

$$(J_1, J_2, \ldots, J_l, J) \in \mathfrak{L}_{\boldsymbol{k}'}(X) \longrightarrow ((J_1, J_2, \ldots, J_l), J) \in \bigcup_{J \in\, \Gamma_{k_{l+1}}(X)} Z_J$$

é uma bijeção, segue que

$$|\mathfrak{L}_{\boldsymbol{k}'}(X)| = \sum_{J \in\, \Gamma_{k_{l+1}}(X)} |Z_J| = \frac{(n-k_{l+1})\,!}{k_1\,!\,k_2\,!\,\ldots\,k_l\,!}\,.\,C(n, k_{l+1}) = \frac{n\,!}{k_1\,!\,k_2\,!\,\ldots\,k_{l+1}\,!},$$

como havíamos afirmado. Provamos então o seguinte teorema:

Teorema 13 (Número de partições ordenadas e subordinadas)**.** *Sejam X um conjunto com n elementos e $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_l)$ uma composição de n. Então o conjunto $\mathfrak{L}_{\boldsymbol{k}}(X)$ tem exatamente $\dfrac{n\,!}{k_1\,!\,k_2\,!\,\ldots\,k_l\,!}$ elementos.*

Exemplo 16. *De quantos modos podemos dividir 8 pessoas em dois grupos de 4 pessoas cada? (MORGADO, 1991, Exemplo 2.11, p. 29; Exemplo 2.15, p. 34)*

Solução (Morgado). O primeiro grupo pode ser escolhido de $C(8,4)$ modos. Escolhido o primeiro grupo, sobram 4 pessoas e só há 1 modo de formar o segundo grupo. A resposta parece ser $C(8,4)\cdot 1$. Entretanto, contamos cada divisão duas vezes. Por exemplo, $\{a,b,c,d\}$ e $\{e,f,g,h\}$ é identica a $\{e,f,g,h\}$ e $\{a,b,c,d\}$ e foi contada como se fosse diferente. A resposta é

$$\frac{C(8,4)\cdot 1}{2} = 35$$

□

Solução (Santos). Seja $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_8\}$ o conjunto de pessoas. Cada maneira de dividir P em dois grupos de 4 pessoas cada, pode ser associada a duas partições ordenadas de P subordinadas a $\boldsymbol{k} = (4,4)$. De fato, se P foi dividida em dois grupos G_1 e G_2, podemos associar essa divisão às duas partições de P: (G_1, G_2) e (G_2, G_1). Portanto, há

$$\frac{1}{2}\cdot|\mathfrak{L}_{\boldsymbol{k}}(P)| = \frac{1}{2}\cdot\frac{8!}{4!\,4!} = 35$$

maneiras de dividir 8 pessoas em dois grupos de 4 pessoas cada.

□

Se $\mathfrak{L}^l(X)$ é o conjunto de todas l-partições ordenadas de X, isto é,

$$\mathfrak{L}^l(X) = \bigcup\{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{k}}(X) : \boldsymbol{k} \in \mathfrak{C}(n,l)\},$$

então o número de elementos de $\mathfrak{L}^l(X)$, denotado por $\sigma(n,l)$, é dado por

$$\sigma(n,l) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \ \mathfrak{C}(n,l)} \frac{n\,!}{k_1\,!\,k_2\,!\,\ldots\,k_l\,!}.$$

Considere a relação binária definida em $\mathfrak{L}^l(X)$ na qual $\mathbf{J}$ e $\mathbf{J}'$ estão relacionados se $\mathbf{J}$ e $\mathbf{J}'$ induzem a mesma partição, isto é, $\mathfrak{J}_{\mathbf{J}} = \mathfrak{J}_{\mathbf{J}'}$. É claro que esta relação é de equivalência e que a classe de equivalência $\widehat{\mathbf{J}}$ de $\mathbf{J} = (J_1, J_2, \ldots, J_l)$ é o conjunto das permutações $\Pi^l(\mathfrak{J}_{\mathbf{J}})$, que tem exatamente $l\,!$ elementos como já sabemos. Denote por $\varepsilon(X)$ a coleção das classes de equivalência de $\mathfrak{L}^l(X)$ segundo a relação definida acima e considere a aplicação

$$\varphi : \varepsilon(X) \longrightarrow \mathfrak{P}^l(X)$$

, que corrsponde a $S(n,l)$ definida por $\varphi(\widehat{\mathbf{J}}) = \mathfrak{J}_{\mathbf{J}}$. É evidente que se trata de uma bijeção. Levando-se em conta que

$$\mathfrak{L}^l(X) = \bigcup_{\widehat{\mathbf{J}} \in \ \varepsilon(X)} \widehat{\mathbf{J}}$$

é uma reunião disjunta, segue que $\sigma(n,l) = \sum_{\widehat{\mathbf{J}} \in \ \varepsilon(X)} |\,\varepsilon(X)||\widehat{\mathbf{J}}| = l\,!|\,\varepsilon(X)|$ e, portanto, tem-se $S(n,l) = |\varepsilon(X)| = \dfrac{\sigma(n,l)}{l\,!}$.

3.5.1 Número de anagramas de uma permutação

Seja X um conjunto com n elementos e p um número natural tal que $p \geq 2$. Uma aplicação $T : X^p \longrightarrow X^p$ é dita ser um *operador de posição* em X^p se existem *exatamente dois* índices i e j tais que $1 \leq i < j \leq p$ e

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p) = (x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_p)$$

para todo $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in X^p$. Um tal operador será, às vezes, denotado por $T^{(i,j)}$ para indicar a troca de posição feita. Observe que um operador de posição preserva o indíce de repetição $I(x)$ do elemento x de uma dada p-permutação $\boldsymbol{x}$, isto é, se $x \in S_{\boldsymbol{x}}$, então $I(x) = |J|$, onde $J \subset [p]$ é o maior subconjunto com a propriedade de que $\boldsymbol{x}_J$ é constante.

Se $\boldsymbol{x}$ é uma p-permutação, diremos que $\boldsymbol{y}$ está relacionado a $\boldsymbol{x}$ se existe uma sequência *finita* $T_1, T_2, \ldots, T_k$ de operadores de posição em X^p tal que

$$\boldsymbol{y} = (T_1 \circ T_2 \circ \cdots \circ T_k)(\boldsymbol{x})$$

Neste caso, diremos que $\boldsymbol{y}$ é um *anagrama* de $\boldsymbol{x}$; é claro que esta é uma relação de equivalência. A classe de equivalência da permutação $\boldsymbol{x}$ será denotada por $A(\boldsymbol{x})$, ou seja, $A(\boldsymbol{x})$ é o conjunto de todos os anagramas de $\boldsymbol{x}$.

Observamos que se $\boldsymbol{x}$ é uma p-permutação sem repetição, então $A(\boldsymbol{x})$ tem exatamente $p\,!$ elementos, pois neste caso tem-se $A(\boldsymbol{x}) = \Pi^p(S_{\boldsymbol{x}})$. O caso mais interessante, é claro, acontece quando $\boldsymbol{x}$ tem repetições.

Seja $\boldsymbol{x}$ a p-permutação definida por $\boldsymbol{x}_{J_i} = t_i$ para $i = 1, 2, \ldots, l$, onde $\mathbf{J} = (J_1, J_2, \ldots, J_l)$ é uma l-partição ordenada de $[p]$. Uma p-permutação $\boldsymbol{y}$ é um anagrama de $\boldsymbol{x}$ se, e somente se, existe uma l-partição ordenada de $[p]$, digamos $\mathbf{J}' = (J'_1, J'_2, \ldots, J'_l)$ tal que $|J_i| = |J'_i|$ e $\boldsymbol{y}_{J'_i} = t_i$ para $i = 1, 2, \ldots, l$.

Antes de demonstrar essa afirmação, vamos ilustrá-la através de um exemplo. Considere $\boldsymbol{x} = (M, A, T, E, M, A, T, I, C, A)$. Temos

$$\mathbf{J} = (J_1, J_2, \ldots, J_6) = (\{1, 5\}, \{2, 6, 10\}, \{3, 7\}, \{4\}, \{8\}, \{9\})$$

e $\boldsymbol{t} = (M, A, T, E, I, C)$. Observe que quaisquer que sejam as trocas efetuadas nas posições dos elementos de $\boldsymbol{x}$, não haverá alteração na quantidade de M's, A's, T's, E's, I's ou C's. Percebemos assim que o indíce de repetição é invariante por operações de troca. Se $\boldsymbol{z} = (M, M, A, A, A, T, T, E, I, C)$, considere

$$\mathbf{J}' = (J'_1, J'_2, \ldots, J'_6) = (\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{6, 7\}, \{8\}, \{9\}, \{10\}),$$

temos $\mathbf{J}' = (J'_1, J'_2, \ldots, J'_6)$ tal que $|J_i| = |J'_i|$ e $\boldsymbol{z}_{J'_i} = t_i$ para $i = 1, 2, \ldots, 6$. Esse exemplo ilustra o fato de que para $\boldsymbol{y}$ seja um anagrama de $\boldsymbol{x}$, é necessário que exista uma l-partição ordenada de $[10]$, digamos $\mathbf{J}' = (J'_1, J'_2, \ldots, J'_l)$ tal que $|J_i| = |J'_i|$ e $\boldsymbol{y}_{J'_i} = t_i$ para $i = 1, 2, \ldots, l$.

Para ilustrar que tal condição também é suficiente, vamos agora mostrar como efetuar trocas sobre $\boldsymbol{x}$ a fim de obter $\boldsymbol{z}$, mostrando assim que $\boldsymbol{x}$ é um anagrama de $\boldsymbol{z}$. Para isto sejam $\beta_1 : J_1 \longrightarrow J'_1$ uma bijeção dada por $\beta_1(1) = 1$ e $\beta_1(5) = 2$ e

$$T_1 = T^{(1,\beta(1))} \circ T^{(5,\beta(5))} = T^{(1,1)} \circ T^{(5,2)}.$$

Seja

$$\boldsymbol{x}^1 = T_1(\boldsymbol{x}) = (M, M, T, E, A, A, T, I, C, A).$$

Considere a partição

$$\mathbf{J}^{(1)} = (J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, \ldots, J_l^{(1)}) = (\{1, 2\}, \{5, 6, 10\}, \{3, 7\}, \{4\}, \{8\}, \{9\}),$$

temos $\boldsymbol{x}^1_{J_i^{(1)}} = t_i$. Observe que $\boldsymbol{x}^1_{J_1'} = \boldsymbol{z}_{J_1'}$.

Sejam agora $\beta_2 : J_2^{(1)} \longrightarrow J_2'$ uma bijeção[1] dada por $\beta_2(5) = 5, \beta_2(6) = 3$ e $\beta_2(10) = 4$ e

$$T_2 = T^{(5,\beta(2))} \circ T^{(6,\beta(6))} \circ T^{(10,\beta(10))} = T^{(5,5)} \circ T^{(6,3)} \circ T^{(10,4)}.$$

$$\boldsymbol{x}^2 = T_2(\boldsymbol{x}_1) = (M, M, A, A, A, T, T, I, C, E).$$

Considere a partição

$$\mathbf{J}^{(2)} = (J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, \ldots, J_l^{(2)}) = (\{1,2\}, \{3,4,5\}, \{6,7\}, \{10\}, \{9\}, \{8\}),$$

temos $\boldsymbol{x}^2_{J_i^{(2)}} = t_i$. Observe que $\boldsymbol{x}^1_{J_1' \cup J_2'} = \boldsymbol{z}_{J_1' \cup J_2'}$. Como também já temos, $\boldsymbol{x}^1_{J_3'} = \boldsymbol{z}_{J_3'}$, vamos tomar $\beta_3 : J_3^{(2)} \longrightarrow J_3'$ como a identidade, $\boldsymbol{x}^3 = T_3(\boldsymbol{x}_2) = (M, M, A, A, A, T, T, I, C, E)$ e $\mathbf{J}^{(3)} = \mathbf{J}^{(2)}$. Sejam $\beta_4 : J_4^{(3)} \longrightarrow J_4'$ dada por $\beta_4(10) = 8$ e $T_4 = T^{(10,\beta(10))} = T^{(10,8)}$. Temos

$$\boldsymbol{x}^4 = T_4(\boldsymbol{x}^3) = (M, M, A, A, A, T, T, E, C, I)$$

Considere a partição

$$\mathbf{J}^{(4)} = (J_1^{(4)}, J_2^{(4)}, \ldots, J_l^{(4)}) = (\{1,2\}, \{3,4,5\}, \{6,7\}, \{8\}, \{10\}, \{9\}).$$

Finalmente, sejam $\beta_5 : J_5^{(4)} \longrightarrow J_5'$ dada por $\beta_5(10) = 9$ e $T_5 = T^{(10,\beta(10))} = T^{(10,9)}$. Temos

$$\boldsymbol{x}^5 = T_5(\boldsymbol{x}^4) = (M, M, A, A, A, T, T, E, I, C) = \boldsymbol{z}.$$

De fato, genericamente, como o indíce de repetição é invariante por operações de troca, tem-se que a condição necessária. Reciprocamente, considere a l-composição $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_l)$, onde $k_i = |J_i|$ para $i = 1, 2, \ldots, l$ e seja $\boldsymbol{z}$ a permutação definida por

---

[1] Observe que nem toda bijeção obtida pelacomposição de trocas de elementos dois a dois pode ser considerada. Por exemplo, se tomássemos a bijeção $\beta_2 : J_2^{(1)} \longrightarrow J_2'$ dada por $\beta_2(5) = 3, \beta_2(6) = 4$ e $\beta_2(10) = 5$ e

$$T_2 = T^{(5,\beta(2))} \circ T^{(6,\beta(6))} \circ T^{(10,\beta(10))} = T^{(5,3)} \circ T^{(6,4)} \circ T^{(10,5)},$$

teríamos

$$\begin{aligned} T_2(\boldsymbol{x}_1) &= (T^{(5,3)} \circ T^{(6,4)})(M, M, T, E, A, A, T, I, C, A) = T^{(5,3)}(M, M, T, A, A, E, T, I, C, A) \\ &= (M, M, A, A, T, E, T, I, C, A). \end{aligned}$$

A fim de evitar esse problema, basta considerar bijeções que matenham fixos elementos que já estiverem na posição "correta". Nesse caso, o A da quinta posição.

$\boldsymbol{z}_{J_{P_i}} = t_i$, onde $\mathbf{J}_p = (J_{P_1}, J_{P_2}, \ldots, J_{P_l})$ é a partição

$$\left(\{1, \ldots, k_1\}, \{k_1 + 1, \ldots, k_1 + k_2\}, \ldots, \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{l-1} k_j, \ldots, p \right\} \right)$$

e mostremos que $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ são anagramas de $\boldsymbol{z}$.

Inicialmente iremos mostrar para $\boldsymbol{x}$. Para isto seja, $\beta_1 : J_1 \longrightarrow \{1, \ldots, k_1\}$ uma bijeção qualquer[2] e defina T_1 como a composição dos k_1 operadores de posição $T^{(r,s)}$, onde o par (r, s) é tal que $r \in J_1$ e $s = \beta_1(r)$. Ponha $\boldsymbol{x}^1 = T_1(\boldsymbol{x})$. Então, como o índice de repetição é preservado por T_1, existe uma partição $\mathbf{J}^{(1)} = (J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, \ldots, J_l^{(1)})$, com $J_1^{(1)} = \{1, \ldots, k_1\}$ e certos $J_2^{(1)}, \ldots, J_l^{(1)}$, tais que $\boldsymbol{x}^1_{J_i^{(1)}} = t_i$. Observe que $\boldsymbol{x}^1_{J_{P_1}} = \boldsymbol{z}_{J_{P_1}}$. Agora seja $\beta_2 : J_2^{(1)} \longrightarrow \{k_1 + 1, \ldots, k_1 + k_2\}$ uma bijeção qualquer e como antes defina T_2 como a composição dos k_2 operadores de posição $T^{(r,s)}$, onde o par (r, s) é tal que $r \in J_2^{(1)}$ e $s = \beta_2(r)$. Ponha $\boldsymbol{x}^2 = T_2(\boldsymbol{x}^1)$. Claramente, $\boldsymbol{x}^2_{J_{P_1} \cup J_{P_2}} = \boldsymbol{z}_{J_{P_1} \cup J_{P_2}}$. É claro que esse processo é finito e depois de, no máximo, l passos ele termina gerando $\boldsymbol{x}^l$ que é próprio $\boldsymbol{z}$. O mesmo argumento mostra que $\boldsymbol{y}$ é anagrama de $\boldsymbol{z}$ e portanto de $\boldsymbol{x}$. Isto prova a afirmação.

Teorema 14 (Número de anagramas de uma permutação)**.** *Sejam X um conjunto com n elementos, p um número inteiro positivo tal que $p \geq 2$ e $(G_1, G_2, \ldots, G_l)$ uma l-partição ordenada de $[p]$. Se $\boldsymbol{x}$ é a p-permutação de X dada por $\boldsymbol{x}_{G_i} = t_i$ e $|G_i| = k_i$ para $i = 1, 2, \ldots, l$, então o número de anagramas de $\boldsymbol{x}$ é dado por $\dfrac{p\,!}{k_1\,!\,k_2\,!\,\ldots k_l\,!}$.*

Demonstração. Seja $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_l)$, onde $k_i = |G_i|$ para $i = 1, 2, \ldots, l$ e construa a aplicação $\varphi : \mathfrak{L}_{\boldsymbol{k}}([p]) \longrightarrow A(\boldsymbol{x})$, tal que $\varphi(J_1, J_2, \ldots, J_l) = \boldsymbol{y}$, onde $\boldsymbol{y}$ é dado por $\boldsymbol{y}_{J_i} = t_i$ para $i = 1, 2, \ldots, l$. Esta aplicação é claramente uma bijeção e por conseguinte temos $|A(x)| = |\mathfrak{L}_{\boldsymbol{k}}([p])| = \dfrac{p\,!}{k_1\,!\,k_2\,!\,\ldots k_l\,!}$, conforme afirmado. □

Exemplo 17. *Quantos são os anagramas da palavra MATEMÁTICA? (MORGADO, 1991, Exemplo 2.18, p. 46)*

Solução (Morgado). Como temos 3 letras A, 2 letras M, 2 letras T, 1 letra C, 1 letra I e 1 letra E, a resposta é

$$P_{10}^{3,2,2,1,1,1} = \frac{10!}{3!2!2!1!1!1!} = 151.200.$$

□

[2] Vimos no exemplo que caso $m \in J_i^{(k-1)} \cap J_i'$, considerar $\beta_k(m) = m$ garante que todos os elementos seja rearranjados em no máximo, l passos.

Solução (Santos). Sejam $X = \{M, A, T, E, I, C\}$ e $p = 10$. Observe que $\boldsymbol{x} = (M, A, T, E, M, A, T, I, C, A)$ é uma 10-permutação de X e queremos contar o número de anagramas de $\boldsymbol{x}$. Como $\boldsymbol{x}$ é uma permutação com repetição, precisamos identificar uma partição ordenada $\boldsymbol{G}$ de [10] que descreva a repetição dos elementos de $S_{\boldsymbol{x}} \subset X$ em $\boldsymbol{x}$. Temos

$$\boldsymbol{G} = \{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6\} = \{\{1, 5\}, \{2, 6, 10\}, \{3, 7\}, \{4\}, \{8\}, \{9\}\}$$

que associada ao vetor $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \dots, t_6) = (M, A, T, E, I, C)$ nos diz que a restrição de $\boldsymbol{x}$ a cada bloco G_i da partição coincide com t_i. Por exemplo, quando fazemos $\boldsymbol{x}_{G_2}$, consideramos a segunda, sexta e décima componentes de $\boldsymbol{x}$. Isto é, $\boldsymbol{x}_{G_2} = A$. Genericamente, temos $\boldsymbol{x}_{G_i} = t_i$ para $i = 1, \dots, 6$. Qualquer anagrama de $\boldsymbol{x}$ envolverá um reordenamento de seus elementos que preserve o índice de repetição de cada um de seus elementos. Isto é, terá que ser uma 10-permutação em que o M apareça $2 = |G_1|$ vezes, o A apareça $3 = |G_2|$ vezes, o T apareça $2 = |G_3|$ vezes, o E apareça $1 = |G_4|$ vez, o I apareça $1 = |G_5|$ vez e o C apareça $1 = |G_6|$ vez. Consequentemente, basta contarmos as 10-permutações ordenadas de [10] subordinadas à composição $\boldsymbol{k} = (|G_1|, |G_2|, \dots, |G_6|) = (2, 3, 2, 1, 1, 1)$. Por exemplo, considere $\boldsymbol{m} = (\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{6, 7\}, \{8\}, \{9\}, \{10\})$. Note que $\boldsymbol{m}$ é uma partição odernada de [10] subordinada a $\boldsymbol{k}$. Ela induz um anagrama $\boldsymbol{y}$ de $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{y} = (M, M, A, A, A, E, T, T, I, C)$$

Portanto, o número de anagramas de $\boldsymbol{x}$ coincide com o total de $\mathfrak{L}_{\boldsymbol{k}}([10])$. Isto é, coincide com

$$|\mathfrak{L}_{\boldsymbol{k}}([10])| = \frac{10!}{2!3!2!1!1!1!} = 151.200.$$

□

Exemplo 18. *Quantos são os anagramas de URUGUAI que começam por vogal? (MORGADO, 1991, Exemplo 2.19, p. 46)*

Solução (Morgado). Temos $P_6^{2,1,1,1,1}$ começados em U, $P_6^{3,1,1,1}$ começados em A e $P_6^{3,1,1,1}$ começados em I. A resposta é:
$P_6^{2,1,1,1,1} + 2P_6^{3,1,1,1} = 360 + 2 \times 120 = 600$ □

Solução (Santos). Para resolver este problema, vamos usar a seguinte estratégia: como necessário é que o anagrama comece com vogal e temos repeticões de U além de A e I, vamos calcular o total de anagramas da palavra URUGUAI e depois calcular o total de anagramas que começam com consoante, uma vez que por não haver repetição de consoante, o cálculo será mais fácil. Assim, como temos só duas opções para começar com consoante, vamos excluir uma das letras e calcular o total de anagramas sem a letra excluída. Depois basta multiplicar por dois.

Sejam $X = \{U, R, G, A, I\}$ e $p = 7$. Observe que $\boldsymbol{x} = (U, R, U, G, U, A, I)$ é uma 7-permutação de X e queremos contar o número de anagramas de $\boldsymbol{x}$. Como $\boldsymbol{x}$ é uma permutação com repetição, precisamos identificar uma partição ordenada $\boldsymbol{G}$ de [7] que descreva a repetição dos elementos de $S_{\boldsymbol{x}} \subset X$ em $\boldsymbol{x}$. Temos

$$\boldsymbol{G} = \{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5\} = \{\{1, 3, 5\}, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{7\}\}$$

que associada ao vetor $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_5) = (U, R, G, A, I)$ nos diz que a restrição de $\boldsymbol{x}$ a cada bloco G_i da partição coincide com t_i.

Genericamente, temos $\boldsymbol{x}_{G_i} = t_i$ para $i = 1, \ldots, 5$. Qualquer anagrama de $\boldsymbol{x}$ envolverá um reordenamento de seus elementos que preserve o índice de repetição de cada um de seus elementos. Isto é, terá que ser uma 7-permutação em que o U apareça $3 = |G_1|$ vezes, o restante das letras $|G_2| = |G_3| = |G_4| = |G_5| = 1$ vez. Consequentemente, basta contarmos as 7-permutações ordenadas de [7] subordinadas à composição $\boldsymbol{k} = (|G_1|, |G_2|, \ldots, |G_5|) = (3, 1, 1, 1, 1)$.

Portanto, o número de anagramas de $\boldsymbol{x}$ coincide com o total de $\mathfrak{L}_{\boldsymbol{k}}([7])$. Isto é, coincide com

$$|\mathfrak{L}_{\boldsymbol{k}}([7])| = \frac{7!}{3!1!1!1!} = 840$$

Assim, temos o total de anagramas da palavra URUGUAI.

Agora, vamos fazer o mesmo processo só que excluindo uma das consoantes para colocá-la no começo. Digamos R. Seguindo o mesmo raciocínio para o cálculo do total de anagramas teremos, sem o R no total de letras, a seguinte questão:

Sejam $X = \{U, G, A, I\}$ e $p = 6$. Observe que $\boldsymbol{x} = (U, U, G, U, A, I)$ é uma 6-permutação de X e queremos contar o número de anagramas de $\boldsymbol{x}$. Como $\boldsymbol{x}$ é uma permutação com repetição, precisamos identificar uma partição ordenada $\boldsymbol{G}$ de [6] que descreva a repetição dos elementos de $S_{\boldsymbol{x}} \subset X$ em $\boldsymbol{x}$. Temos

$$\boldsymbol{G} = \{G_1, G_2, G_3, G_4\} = \{\{1, 2, 4\}, \{3\}, \{5\}, \{6\}\}$$

que associada ao vetor $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, t_3, t_4) = (U, G, A, I)$ nos diz que a restrição de $\boldsymbol{x}$ a cada bloco G_i da partição coincide com t_i.

Genericamente, temos $\boldsymbol{x}_{G_i} = t_i$ para $i = 1, \ldots, 4$. Qualquer anagrama de $\boldsymbol{x}$ envolverá um reordenamento de seus elementos que preserve o índice de repetição de cada um de seus elementos. Isto é, terá que ser uma 6-permutação em que o U apareça $3 = |G_1|$ vezes, o restante das letras $|G_2| = |G_3| = |G_4| = 1$ vez. Consequentemente, basta contarmos as 6-permutações ordenadas de [6] subordinadas à composição

$\boldsymbol{k} = (|G_1|, |G_2|, |G_3|, |G_4|) = (3, 1, 1, 1)$.

Consequentemente, o número de anagramas de $\boldsymbol{x}$ coincide com o total de $\mathfrak{L}_{\boldsymbol{k}}([6])$. Isto é, coincide com

$$|\mathfrak{L}_{\boldsymbol{k}}([6])| = \frac{6!}{3!1!1!} = 120$$

Mas como precisamos que comece com vogal e temos 2 possibilidades para o começar com consoante, são elas o R e o G, basta multiplicarmos o resultado acima por $120 \times 2 = 240$. Logo o total de angramas da palvra URUGUAI que começam por vogal será

$$840 - 240 = 600.$$

$\square$

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o estudo apresentado, fica claro que nem sempre o mais correto, no ponto de vista matemático, é o mais óbvio ou lógico, muito menos prático. No entanto, como matemáticos, não podemos nos furtar do estudo, muito menos não ter clareza do que estamos fazendo ou calculando. Esperamos com o estudo realizado, tornar os principais instrumentos da Análise Combinatória, mais formal, a partir do momento que sabemos o que estamos contando, de um ponto de vista mais rigoroso.

REFERÊNCIAS

CAMERON, P. *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms.* Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

MORGADO, A. *Análise combinatória e probabilidade.* Rio de Janeiro: SBM, 1991. (Coleção do Professor de Matematica).

SANTOS, A. Fundamentos de Análise Combinatória. 33 p. Trabalho não publicado. 2006.