Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Rafael Skaetta Nunes

Máximos e Mínimos na Geometria Euclidiana

Rio de Janeiro

2015

Rafael Skaetta Nunes

Máximos e Mínimos na geometria Euclidiana

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Matemática e Estatística, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Helvecio Rubens Crippa.

Rio de Janeiro

2015

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

S626 Skaetta, Rafael.
Problemas de máximo e mínimo na geometria Euclidiana / Rafael Skaetta. – 2015.
42f.

Orientador: Helvecio Rubens Crippa
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Geometria euclidiana - Teses. I. Crippa, Helvecio Rubens. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU 514.12

Rafael Skaetta

Máximos e Mínimos na geometria Euclidiana

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Matemática e Estatística, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 17 de Julho de 2015.

Banca Examinadora:

____

Prof. Dr. Helvecio Rubens Crippa (Orientador)

Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

____

Prof.ª Dra. Patricia Nunes da Silva

Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

____

Prof.ª Dra. Maria Darci Godinho da Silva

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Rio de janeiro

2015

DEDICATÓRIA

Dedico a minha mãe por ter sido uma heroína, fazendo papel de pai e mãe, cuidando muito bem de mim e das minhas irmãs, nos preparando para a vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus nosso Senhor, pois sem ele em nossas vidas não somos nada. Agradeço a minha mãe por ter me dado uma boa educação e ter sido um exemplo de força pra mim.

Agradeço a capes pela ajuda, aos meus professores do Profmat e aos meus colegas de turma pelo prazer da companhia deles e por nossa troca de experiência. E agradeço especialmente ao meu querido professor orientador: Dr. Helvécio Rubens Crippa, pela sua ajuda e paciência que teve comigo ao longo deste trabalho.

Queira, basta ser sincero e desejar profundo,

você será capaz de sacudir o mundo, tente outra vez.

Raul Seixas

RESUMO

SKAETTA, Rafael. *Máximos e Mínimos na Geometria Euclidiana*. 2015. 42f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

Neste estudo abordam-se problemas clássicos de máximos e mínimos na Geometria Euclidiana envolvendo áreas e perímetros de triângulos e polígonos. Primeiramente, estudamos alguns resultados preliminares e apresentamos suas demonstrações usando apenas conceitos básicos da Geometria Euclidiana. Entre os problemas aqui estudados, destacamos a Desigualdade Isoperimétrica para polígonos e o Problema Isoperimétrico geral no plano, historicamente associado a lenda da princesa Dido e a fundação de Cartago. A teoria de máximos e mínimos do Cálculo Diferencial é uma ferramenta poderosa para a resolução dos problemas apresentados. Porém, sempre que possível, ela foi substituída por recursos da geometria elementar**,** com o intuito de tornar a leitura do texto compreensível mesmo para estudantes do ensino médio. Provaremos ainda, no apêndice deste trabalho, uma propriedade particular da elipse aproveitando resultados mostrados anteriormente. O trabalho como um todo é voltado para os professores do ensino fundamental e médio, que podem selecionar um ou outro tópico para motivar os seus alunos e enriquecer as suas aulas.

Palavras-chave: Triângulos. Polígonos. Áreas e Perímetros. Máximos e Mínimos. Desigualdade Isoperimétrica.

ABSTRACT

SKAETTA , Rafael . *Maximum and minimum in Euclidean Geometry*. 2015. 42f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

In this study we address classical problems of maxima and minima in Euclidean geometry involving areas and perimeters of triangles and polygons. First, we study some preliminary results and present their demonstrations using only basic concepts of Euclidean geometry. Among the problems studied here, we highlight the Isoperimetric Inequality for polygons and the general Isoperimetric Problem in the plane, historically associated with the legend of Princess Dido and the founding of Carthage. The maximum and minimum theory of Differential Calculus is a powerful tool for solving the problems presented. However, whenever possible, it has been replaced by features of elementary geometry, in order to make reading comprehensible even for high school students. We will also prove, in the appendix of this work, a particular property of the ellipse taking advantage of results shown previously. The work as a whole is targeted at elementary and middle school teachers who can select one or another topic to motivate their students and enrich their classes.

Keywords: Triangles. Polygons. Areas and perimeters. Maximum and Minimum. isoperimetric inequality.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Segundo o matemático e historiador Dirk Jan Struick, como consta na página 49 de seu livro, o primeiro problema resolvido envolvendo a busca de máximo que é do nosso conhecimento veio da geometria euclidiana e diz “de todos os retângulos de um mesmo perímetro, o quadrado é o que tem a maior área”. Sua solução pode ser encontrada na proposição 27, livro VI de Os Elementos de Euclides, século III a.C.

Nosso objetivo neste trabalho é apresentar e resolver problemas conhecidos de máximos e mínimos envolvendo áreas e perímetros de triângulos e polígonos, utilizando sempre que possível, argumentos da geometria euclidiana. Entre estes problemas aqui estudados, encontra-se o que é conhecido como a Desigualdade Isoperimétrica, restrita ao caso dos polígonos. O lendário problema de Dido, “entre todas as curvas planas fechadas de mesmo comprimento, qual é a que engloba maior área”, também conhecido como Problema Isoperimétrico geral no plano, é aqui resolvido através de uma prova geométrica, de fácil compreensão, devida a Jakob Steiner (1796-1863).

Nossa abordagem dos problemas, sempre que possível, será feita via geometria euclidiana em detrimento da teoria de máximos e mínimos do cálculo diferencial e tem por objetivo tornar o trabalho acessível e inteligível para os estudantes do ensino médio de nossos colégios.

Apresentamos, primeiramente, alguns resultados preliminares, seguidos de suas respectivas demonstrações fundamentadas na geometria Euclidiana. O objetivo de apresentar e provar tais resultados é tornar o texto autossuficiente. Eles serão essenciais para o completo entendimento dos problemas envolvendo triângulos e polígonos considerados nesse trabalho, facilitando a leitura do texto por parte do leitor. Com o auxílio de um destes resultados, estuda-se detalhadamente no apêndice do trabalho, uma propriedade interessante da elipse.

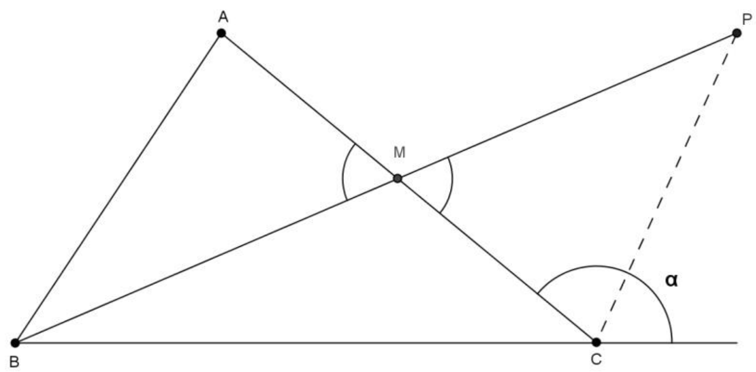
A principal referência bibliográfica na elaboração deste texto é o artigo do professor Djairo Figueiredo.

1 **RESULTADOS PRELIMINARES**

Para facilitar o desnvolvimento dos problemas a serem estudados, veremos alguns resultados preliminares.

Proposição1. Um ângulo externo de um triângulo é maior do que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes.

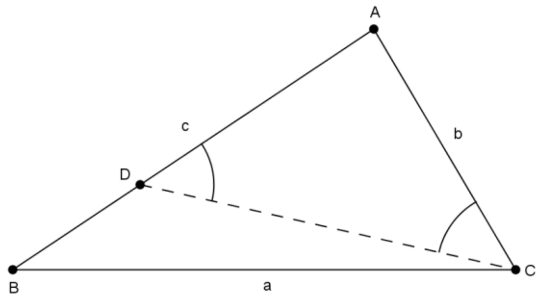
Figura 1- O teorema do ângulo externo.



Prova. Seja ABC um triângulo de ângulos internos $\hat{A}, \hat{B} e\ \hat{C}$ e um ângulo externo $\alpha,$ adjacente ao ângulo interno $\hat{C}$. Sendo M o ponto Médio de $\overline{AC}$ e P pertencente a semirreta $\overrightarrow{BM}$ tal que $\overline{BM} \equiv \overline{MP}$, pelo caso LAL , o $\Delta AMB \equiv \Delta CMP$ e portanto $B\hat{A}M$ = $P\hat{C}M$, assim , $\alpha > \hat{A}$. Analogamente, tomando o ponto médio de $\overline{BC}$ e usando ângulos opostos pelo vértice, temos que $\alpha > \hat{B}$. (veja Figura 1)

Proposicão 2. Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a eles não são congruentes e o maior ângulo está oposto ao maior lado. Se $c > b$ então, $\hat{C} > \hat{B}$.

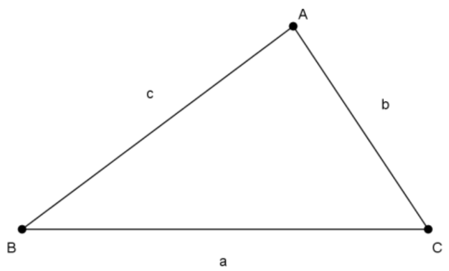
Figura 2 - O maior ângulo é oposto ao maior lado.



Prova.Considere o triângulo ABC de modo que $\overline{AB} > \overline{AC}$ e D em $\overline{AB}$ tal que $\overline{AD} \equiv \overline{AC}$.
Como D é interno a $A\hat{C}B$, conclui-se que $A\hat{C}B > A\hat{C}D$. (veja Figura 2)
Além disso, o ΔADC é isósceles por construção, logo, $A\widehat{D}C \equiv A\hat{C}D$. Mas $A\widehat{D}C$ é externo ao ΔBDC , assim $A\widehat{D}C > C\hat{B}D = C\hat{B}A$ e $A\hat{C}B > A\hat{C}D = A\widehat{D}C$, dai $A\hat{C}B > A\widehat{D}C > C\hat{B}A$.

Proposição 3. Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a eles não são congruentes e o maior lado é oposto ao maior ângulo, isto é, se $\hat{A} > \hat{B}$ então, $a > b$.

Figura 3 - O maior lado é oposto ao maior ângulo.



Prova. Sejam $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = C$, os lados do triângulo. Há três possibilidades: (veja Figura 3).

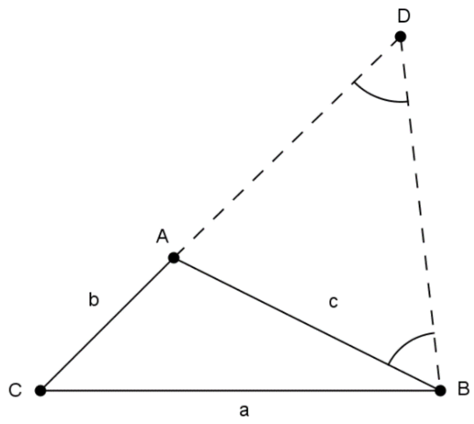
$\overline{BC} < \overline{AC}$ ou $\overline{BC} \equiv \overline{AC}$ ou $\overline{BC} > \overline{AC}$.

Note que se $\overline{BC} < \overline{AC}$, pela proposição anterior $\hat{A} < \hat{B}$, o que é um absurdo.

Se $\overline{BC} \equiv \overline{AC}$, então pelo teorema do triângulo isósceles $\hat{A} \equiv \hat{B}$, absurdo. Logo, $\overline{BC} > \overline{AC}$.

Proposição 4. **A desigualdade triangular.** Em qualquer triângulo, o comprimento de um dos lados é sempre inferior a soma dos comprimentos dos outros dois lados.

Figura 4 - A desigualdade triangular.



Prova. Consideremos um ponto D na semirreta $\overrightarrow{CA}$ talque que $\overline{AD} \equiv \overline{AB}$. (veja Figura 4). Logo, $\overline{DC}$ = $\overline{AC}$ + $\overline{AD}$ = $\overline{AC}$ + $\overline{AB}$. Como o triângulo ABD é isósceles, $A\hat{D}B \equiv A\hat{B}D$ e como A é interno ao ângulo $C\hat{B}D$, temos que $C\hat{B}D > A\hat{B}D = A\hat{D}B = C\hat{D}B$. Portanto, como $C\hat{B}D > C\hat{D}B$, aplicando a proposição anterior, no triângulo DBC , segue que $\overline{BC} < \overline{CD}$. Mas , $\overline{CD} = \overline{AC} + \overline{AD} = \overline{AC} + \overline{AB}$ o que implica $\overline{BC} < \overline{AC}$ + $\overline{AB}$. De maneira análoga, se prova os outros dois casos.

A desigualdade triangular também pode ser enunciada da seguinte maneira:
Em todo triângulo cada lado é maior que o módulo da diferença dos outros dois.
Se a, b e c são os lados de um triângulo, então sabemos que:

$$a < b + c\ ,\ \ b < a + c \quad e \quad c < a + b$$

Reescrevendo a segunda e a terceira desigualdade, temos $b - c < a$ e $c - b < a$, implicando que $|b - c| < a$. Da mesma forma , $|b - a| < c$ e $|a - c| < b$.

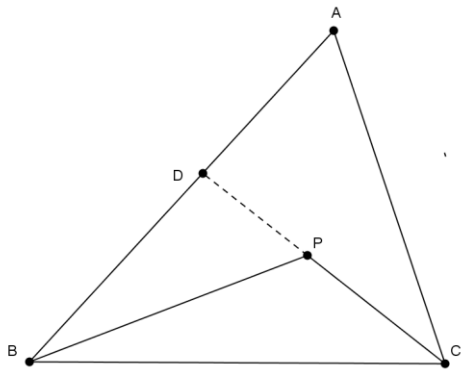
A seguir, mostra-se um resultado que segue da desigualdade triangular.

Corolário 1. Seja um triângulo ABC e P um ponto em seu interior, então

$$PB + PC < AB + AC .$$

Prova. Basta prolongar a semirreta $\overline{CP}$ até que ela intercecte o lado AB em D. (veja Figura 5)

Figura 5 - uma consequência da desigualdade triangular.



Agora é só usar a desigualdade triangular nos triângulos $ADC\ e\ BDP$ para obter

$$DC < AD + AC \quad \text{e} \quad BP < BD + DP.$$

Somando ambos os lados das desigualdades, conclui-se que

$$DC + BP < AD + AC + BD + DP$$

subtraindo DP de ambos os lados

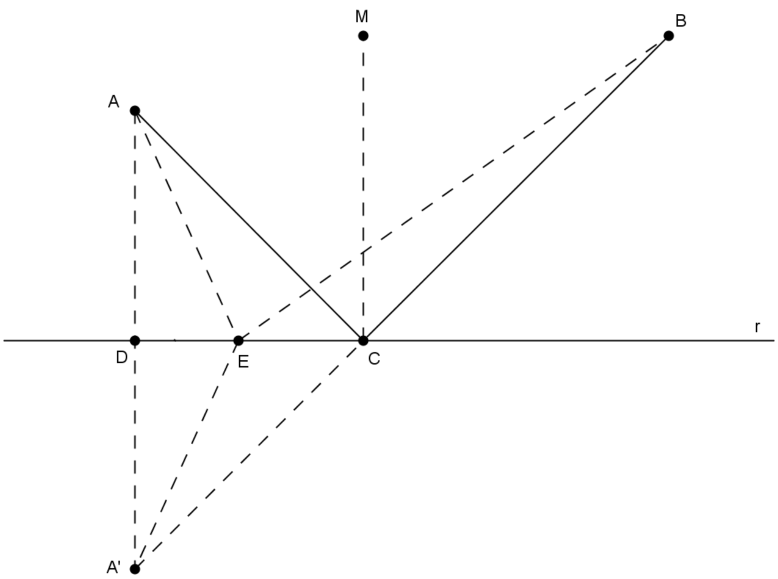
$$BP + DC - DP < AD + BD + AC + DP - DP$$

mas, $DC = DP + PC$ e $AB = AD + DB$, então segue que $PB + PC < AB + AC$.

Sabemos que existem infinitas curvas que ligam dois pontos quaisquer. Assim, dada uma reta r e dois pontos A e B do mesmo lado da reta no plano, qual é a curva de menor comprimento que parte de A toca em r e chega a B **?**
A resposta desta pergunta é o assunto do resultado abaixo.

Proposição 5. Considere uma reta r e dois pontos A e B do mesmo lado da reta no plano. A curva de menor comprimento ligando A com B tocando a reta r é formada pelos segmentos de reta $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$, onde C pertence a r. Além disso, se $\overline{CM}$ é a perpendicular a r do mesmo lado de A e B, então os ângulos $A\hat{C}M$ e $M\hat{C}B$ são iguais. (veja Figura 6)

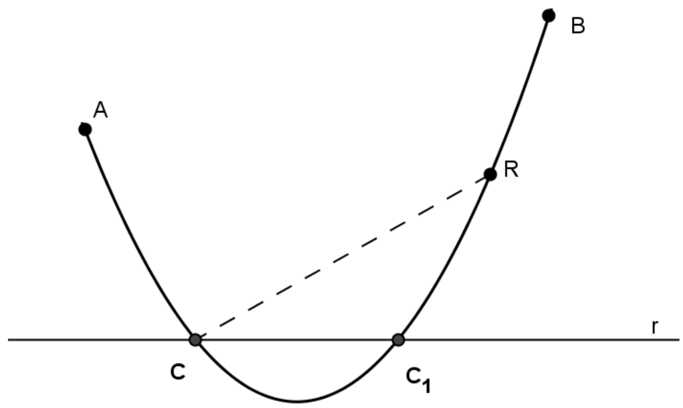
Figura 6 - Curva de menor comprimento que liga A a B tocando em r.



Demostração: A justificativa da primeira parte tem como base o seguinte argumento: a curva de menor comprimento que liga dois pontos A e B é um segmento de reta com extremos nesses pontos e será feita em três passos.

(i) A curva δ de menor comprimento procurada toca r em apenas um ponto. De fato suponhamos por contradição, que δ toca r em dois pontos C e C_1. Seja R um ponto de δ fora de r, tal que ao percorrer a curva de C para R, passa-se por C_1. Então a curva $\bar{\delta}$ obtida a partir de δ pela substituição do trecho CR pelo segmento de reta $\overline{CR}$ tem comprimento menor que a curva δ .(veja Figura 7)

Figura 7 - Curva ligando A a B intercectando r em dois pontos.



ii) A curva δ deve ser formada por dois segmentos de reta. Sendo C o ponto onde δ toca r, então necessariamente os trechos AC e CB da curva são segmentos de reta, pois devem ser de comprimento mínimo.

iii) O ponto C é obtido pela interseção da reta r com o segmento $A'B$ onde A' é o simétrico de A em relação a r. De fato se o ponto de contato de δ com r fosse um outro ponto, teríamos uma outra curva de maior comprimento do que aquela tocando C. Para comprovar isso, basta ver que os triângulos ADE e $A'DE$ são congruentes , bem como os triângulos ADC e $A'DC$. Assim, temos que

$$AC = A'C \quad e \quad AE = A'E$$

Mas pela desigualdade triangular aplicada no triângulo $A'BE$

$$A'B = A'C + CB < A'E + EB$$

logo, conclui-se que

$$AC + CB < AE + AB.$$

Enfim, veremos que os ângulos $A\hat{C}M$ e $C\widehat{M}B$ são iguais. Como os triângulos ADC e $A'DC$ são congruentes, implica que os ângulos $C\hat{A}D$ e $C\widehat{A'}D$ também são congruentes.

Agora, pelo teorema das paralelas cortadas por uma transversal: ângulos alternos internos são iguais e ângulos correspondentes são iguais, concluímos que Os ângulos $C\hat{A}D$ e $A\hat{C}M$ são iguais, pelo fato de serem alternos internos e os ângulos $C\widehat{A'}D$ e $M\hat{C}B$ são iguais, por serem correspondentes. Segue então, que $A\hat{C}M = M\hat{C}B$.

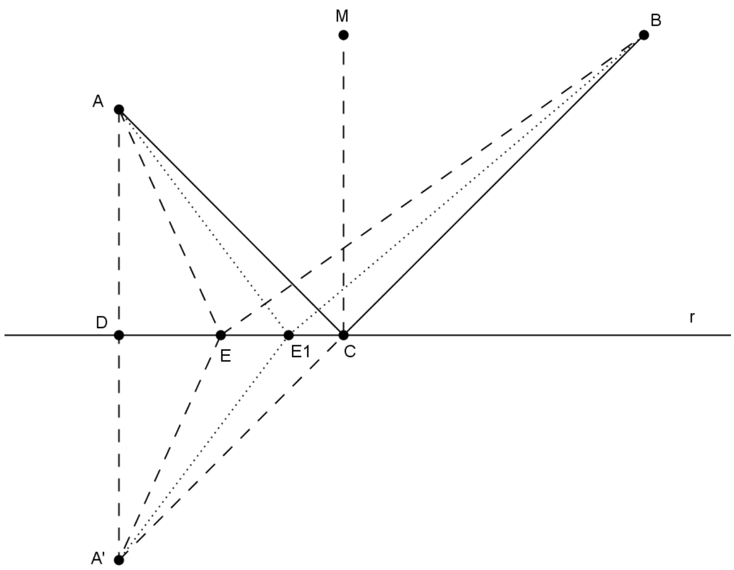
Vamos apresentar um resultado que é um reforço da Proposição 5 e também será de grande utilidade ao longo do trabalho.

Proposição 6. Seja C a solução do problema de minimização estudado na Proposição 5. Agora, considere na reta r os pontos E e E_1 de modo que E_1 está estritamente entre E e C, então vale a desigualade:

$$\overline{AE} + \overline{EB} > \overline{AE_1} + \overline{E_1B}$$

Demonstração: Assim como na proposição 5, seja A' o simétrico de A em relacão a reta r. (veja Figura 8)

Figura 8 - Ponto E_1 entre os pontos E e C.



Então a desigualdade acima a se provar é equivalente a:

$$A'E + EB > A'E_1 + E_1$$

Agora é só reparar que E_1 é um ponto que está no interior do triângulo $A'EB$. Então, pelo corolário 1 está provada a desigualdade.

2 MAXIMIZANDO A ÁREA E MINIMIZANDO O PERÍMETRO DE TRIÂNGULOS

Este capítulo é dedicado a responder às seguintes questões:

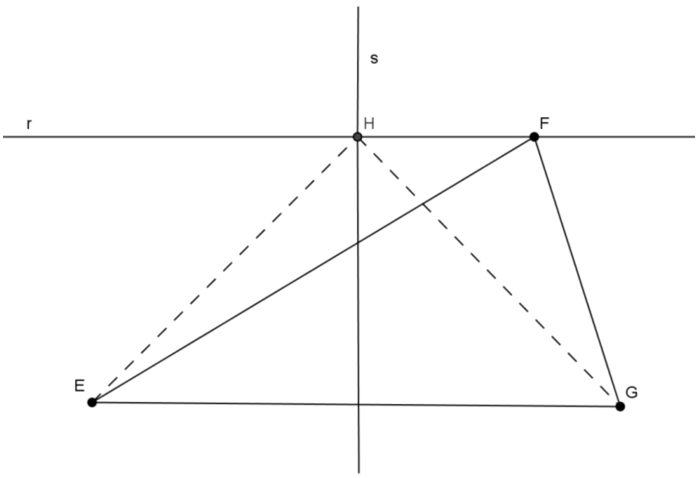
Problema 1. Considerando todos os triângulos de mesma área, qual é o de menor perímetro?
Problema 2. Considerando todos os triângulos de mesmo perímetro, qual é o de maior área?

A solução do problema 1 é apresentada no resultado abaixo.

Teorema 1: Entre todos os triângulos de mesma área o de menor perímetro é o triângulo equilátero.

Demostração: Suponhamos que o triângulo EFG tenha o menor perímetro entre todos aqueles que têm a mesma área e não seja equilátero. Logo, possui dois lados, por exemplo, EF e FG, de comprimentos diferentes. Considere a reta r paralela ao lado EG.
(veja Figura 9)

Figura 9 - Fixando a área e minimizando o perímetro.



Pela Proposição 5, o triângulo isósceles EHG possui o perímetro menor do que o do triângulo EFG. Além disso os triângulos têm mesma área, uma vez que possuem a mesma base e a mesma altura. O que é uma contradição, já que no início fizemos a suposição de que o triângulo EFG tem o menor perímetro entre os triângulos de área fixada. Portanto, o triângulo equilátero é de fato o de menor perímetro.

Observação 1. Na demonstração acima, admitimos implicitamente a existência de um triângulo de menor perímetro, que é um fato razoável no contexto deste trabalho. Esta atitude será adotada outras vezes neste trabalho. A rigor, a existência do triângulo de menor perímetro deveria ser provada.

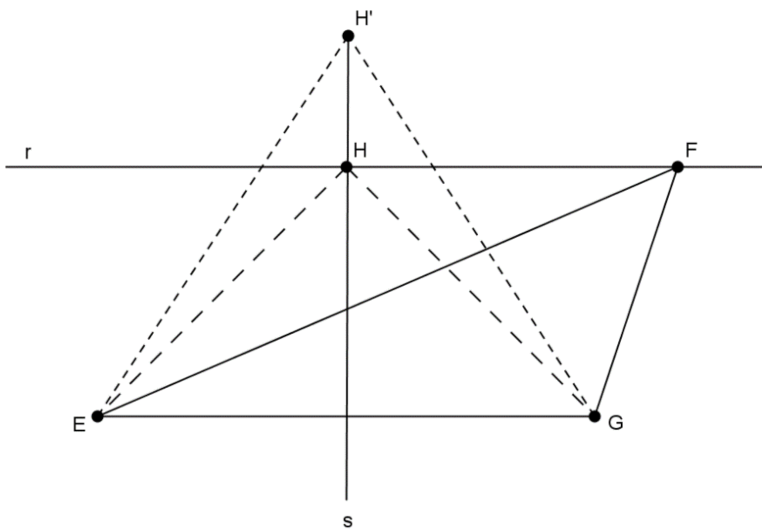
A solução do problema 2 é apresentada no resultado abaixo.

Teorema 2: Entre todos os triângulos de mesmo perímetro, o de maior área é o triângulo equilátero.

Demosntração: Vamos supor que EFG é o triângulo com maior área entre os triângulos com perímetro fixo e que não seja equilátero (veja Figura 10). Suponhamos que os lados $EF\ e\ FG$ tenham comprimentos diferentes. Aqui usaremos a construção do problema 1 acrescentando um ponto H', sobre a reta s, acima de H, tal que

$$\overline{EH'} + \overline{H'G} = \overline{EF} + \overline{FG}$$

Figura10 - Fixando o perímetro e maximizando a área.



Assim, os triângulos $EH'G$ e EFG possuem o mesmo perímetro. E o triângulo isósceles $EH'G$ tem maior área do que o triângulo EFG, pois EG é base comum a ambos triângulos e a altura de $EH'G$ é maior que a altura de EFG. Mas isto contradiz a hipótese feita acima, o que prova o teorema.

A seguir vamos apresentar uma solução alternativa para o problema 2 baseada na fórmula de Heron para o cálculo da área do triângulo, no estudo de um trinômio do segundo grau e no cálculo diferencial.

Prova alternativa do teorema 2: Considere o triângulo ABC de lados a, b e c, com perímetro $2p = a + b + c$. Pela fórmula de Heron a área do triângulo ABC é dada por $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Fixando o lado a, como o perímetro é constante, $p - a = k$ é outra constante. Desde que $p + p - a = b + c$, obtém-se $p + k = b + c$ e $c = p + k - b$. Nosso objetivo é maximizar a área S, que é o mesmo que maximizar a função

$S^2 = pk(p-b)(p-p-k+b) = pk(p-b)(b-k) = pk\ [-b^2 + (p+k)b - pk]$

após substituir $p - a$ e c na fórmula de Heron. Observe que a função é um trinômio do segundo grau em b, que tem máximo quando $b = \frac{p+k}{2} = \frac{b+c}{2}$. Logo, $2b = b + c$ ou $b = c$. Assim, mostramos que entre todos os triângulos de mesmo perímetro com base fixa, o de maior área é o isósceles. Considere o triângulo isósceles de lados a, b e b e perímetro $2p = a + 2b$, o que implica $2p - 2b = a$ e daí $p - b = \frac{a}{2}$. Assim, $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-b) = p(p-a)(p-b)^2 = \frac{p}{4}(p-a)a^2$.

Agora, vamos encontrar o ponto que maximiza a função $f(a) = (p-a)a^2$. Para isso, derivamos a função e procuramos o valor de $a > 0$, para o qual $f'(a) = 0$. Visto que $f'(a) = 2a(p-a) - a^2 = -3a^2 + 2pa = a(-3a + 2p)$, no ponto $a = \frac{2}{3}p$ a função atinge o seu valor máximo. Como $2p = a + 2b$, obtém-se $3a = 2p = a + 2b$ de onde segue que $a = b$. Portanto, $a = b = c$, ou seja, o triângulo de perímetro fixo e área máxima, é o equilátero.

3 MAXIMIZANDO A ÁREA MINIMIZANDO O PERÍMETRO ENTRE OS POLÍGONOS

No estudo deste capítulo, estenderemos os problemas 1 e 2 estudados no capítulo 2 para o caso dos polígonos.

Problema 3. Considerando todos os polígonos de n lados e de mesma área, qual possui o menor perímetro?

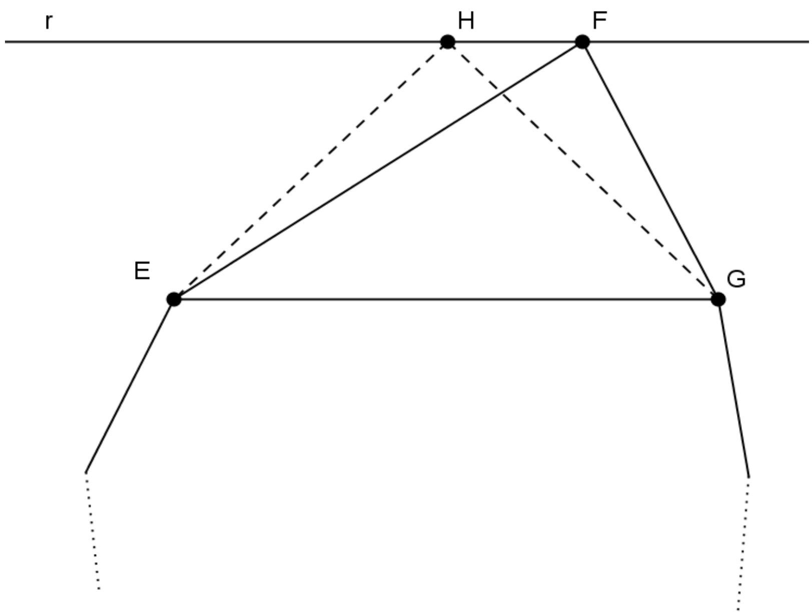
Problema 4. Considerando todos os polígonos de n lados e de mesmo perímetro, qual possui a maior área?

Relembremos aqui que um polígono de n lados é dito regular, se possui todos os lados e todos os ângulos iguais. A solução dos problemas acima enunciados é dada a seguir.

Teorema 3. Entre todos os polígonos de n lados e de mesma área, o que possui o menor perímetro é o polígono regular.

Demonstração: Suponhamos por absurdo que o polígono de n lados que possui o menor perímetro tem dois lados EF e FG de comprimentos diferentes (veja Figura 11). Seja a reta r paralela a EG.

Figura 11 - Poligono regular.



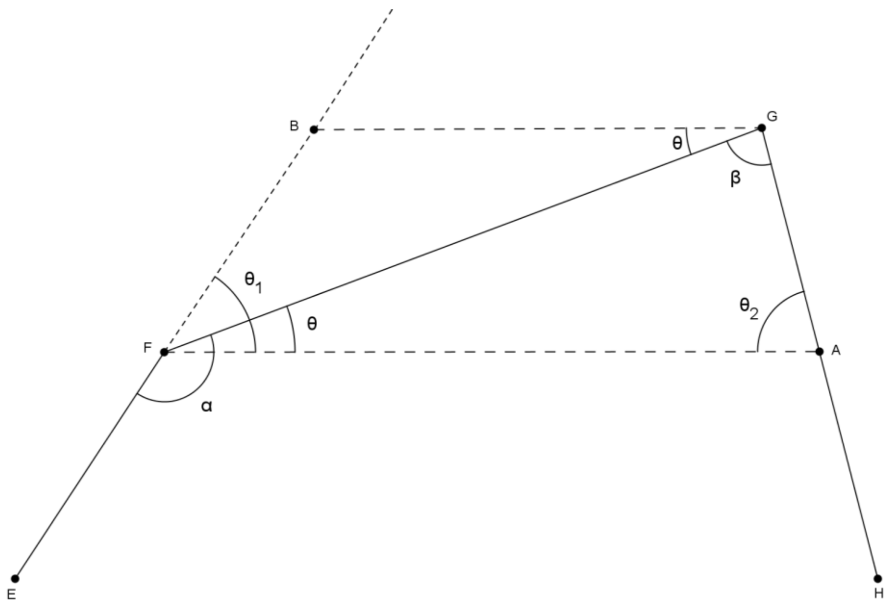
Pela proposição 5, existe H sobre r talque:

$$\overline{EH} + \overline{HG} < \overline{EF} + \overline{FG}$$

Note que os triângulos EHG e EFG possuem a mesma área, visto que possuem a mesma base e a mesma altura. Assim, o polígono obtido quando substituímos os lados $EF\ e\ FG$ por EH e HG , possui a mesma área do polígono original e perímetro menor. Isto é uma contradição, logo, o polígono deve ter todos os lados de mesmo comprimento, ou seja, é equilátero.

Provaremos agora que o polígono equilátero é também equiângulo. Considere três lados consecutivos $\overline{EF}\ ,\ \overline{FG}\ e\ \overline{GH}$ do polígono todos iguais, como acabamos de provar. Agora, suponhamos que os ângulos $E\hat{F}G$ e $F\hat{G}H$ sejam diferentes, sendo o primeiro ângulo de medida α maior do que o segundo ângulo de medida β (veja Figura12).

Figura 12 - Polígono equiângulo



Agora, escolha um ponto A sobre $\overrightarrow{GH}$ de modo que o ângulo $G\hat{F}A$ de medida θ seja tal que $2\theta < \alpha - \beta$. Note que tal A existe, basta toma-lo suficientemente próximo de G. A seguir pega-se um ponto B sobre o prolongamento de $\overline{EF}$ de modo que $\overline{BG}$ seja paralelo a $\overline{FA}$. Sejam $B\hat{F}A = \theta_1$ e $G\hat{A}F = \theta_2$, assim temos que

$$\alpha + \theta_1 - \theta = 180^{\circ} \qquad \text{e} \qquad \theta + \theta_2 + \beta = 180^{\circ} .$$

Logo, $\alpha + \theta_1 - \theta = \theta + \theta_2 + \beta$ ou $\theta_2 - \theta_1 = \alpha - \beta - 2\theta$.

Como por hipótese $\alpha - \beta - 2\theta > 0$, conclui-se que $\theta_2 > \theta_1$.

Afirmação: $\theta_2 > \theta_1$ implica que $\overline{FB} + \overline{BA} < \overline{FG} + \overline{GA}$.

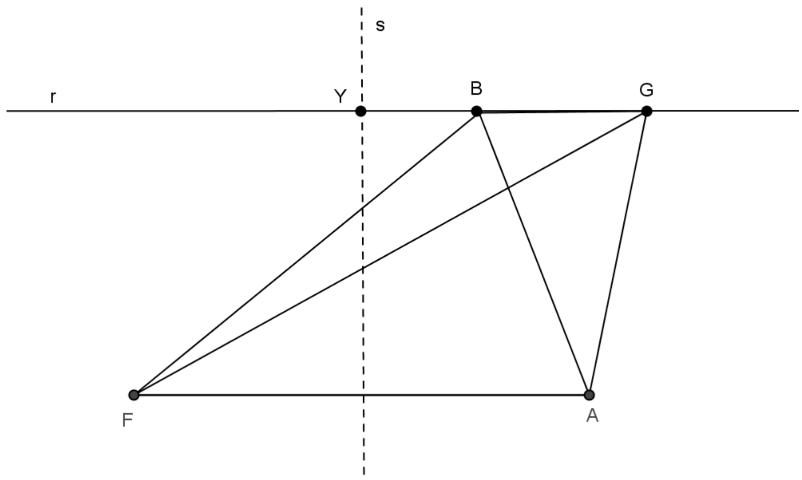
Logo, substituindo a parte $EFGH$ do polígono por $EBAH$, teremos um outro polígono de mesma área e perímetro menor que o primeiro, mas isso contradiz a hipótese que nosso polígono equilátero de ângulos diferentes era o de menor perímetro. Para concluir a demonstração resta provar a afirmação acima.

Como o ângulo θ_2 pode ser obtuso, vamos reformular a afirmação, que passa a ser a seguinte: se $FBGA$ é um quadrilátero onde os lados $\overline{BG}$ e $\overline{FA}$ são paralelos e os ângulos $\theta_1 = B\hat{F}A$ e $\theta_2 = G\hat{A}F$ são tais que $\theta_1 < \theta_2$, então $\overline{FB} + \overline{BA} < \overline{FG} + \overline{GA}$.

Para demonstrar este fato, seja Y a interseção da reta s perpendicular a $\overline{FA}$ que passa pelo seu ponto médio, com a reta que passa pelos pontos B e G (veja Figura 13). Assim teremos duas possibilidades:

i) B e G estão ambos a direita de Y, na reta que passa por eles. Neste caso, o resultado segue imediatamente da proposição 6.

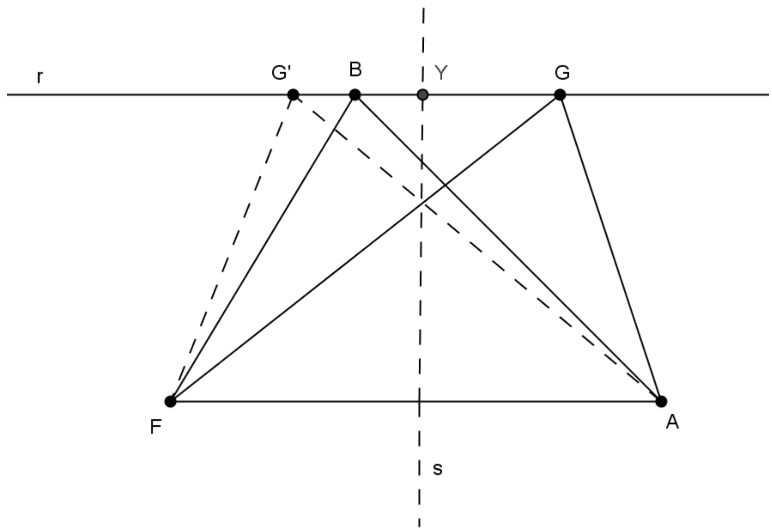
Figura 13 - Quadrilátero $FBGA$ com B entre Y e G



ii) Y está entre B e G. Neste caso se chamarmos de G' o simétrico de G em relação a reta s (veja Figura 14) então a desigualdade a ser provada é equivalente a

$$FB + BA < FG' + G'A$$

Figura 14 - Quadrilátero $FBGA$ com Y entre B e G.



Mas como agora , $G'e$ B estão do mesmo lado em relação a Y, recaímos no caso (i) para o polígono$FG'BA$, o que completa a prova .

O resultado seguinte soluciona o Problema 4.

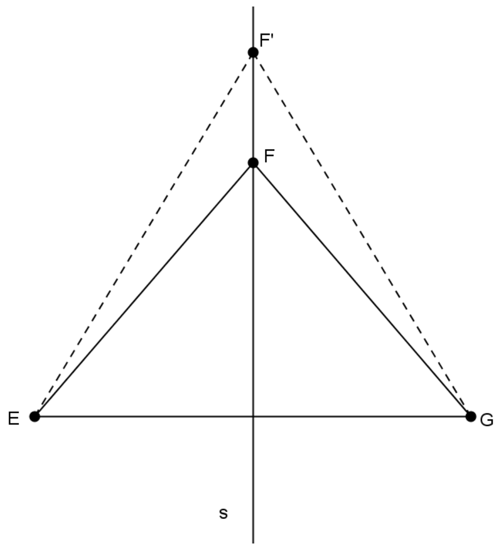
Teorema 4. Entre todos os polígonos de n lados e de mesmo perímetro o de maior área é o polígono regular.

Demonstração: Seja P o n - polígono de maior área entre todos os n - polígonos de mesmo perímetro p e seja A a sua área. Se P não for regular, existe pelo Teorema 3, um n - polígono regular P_1 de mesma área A e perímetro $p_1 < p$.

Agora, considere dois lados consecutivos $\overline{EF}$ e $\overline{FG}$ do n – polígono P_1 e escolha um ponto F' sobre a reta s, perpendicular a $\overline{EG}$ passando por F (veja Figura 15), de modo que

$$(\overline{EF'} + \overline{F'G}) - (\overline{EF} + \overline{FG}) = p - p_1$$

Figura 15 - Polígono P_2 obtido de P_1.



O n - polígono P_2 , obtido de P_1 , substituindo os lados $EF\ e\ FG$ por EF' e $F'G$ possui o mesmo perímetro de P e área $A_2 > A$, isto é , área maior do que a área de P , o que é um absurdo. Assim o teorema está provado.

4 A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA

4.1 A Lenda de Dido

Dido era uma princesa que vivia na cidade de Tiro no século IX a.C. Seu irmão, o rei Pigmaleão, assassinou o seu marido, que era um grande sacerdote, para confiscar os seus tesouros. Temendo pela sua vida, Dido fugiu com os seus seguidores para o norte da África com o propósito de fundar uma nova cidade, Cartago, as margens do Mar Mediterrâneo. Para realizar o seu projeto, foi-lhe prometido pelo rei local a extensão de terra que pudesse cercar com o couro de um boi. Dido e seu grupo decidiram então cortar o couro em tiras tão finas quanto possível, emendar todas e cercar um terreno beirando o mar, na forma de um semicírculo. Essa é a legendária estória da fundação de Cartago. O problema de Dido, em sua homenagem, é o seguinte:

“Entre todas as curvas planas fechadas de mesmo comprimento dado L, qual é aquela que engloba a maior área”?

Analisaremos o problema acima nos restringindo aos polígonos e mostraremos mais adiante que a princesa Dido conseguiu a maior extensão de terra possível naquela circunstância.

4.2 A Desigualdade Isoperimétrica para Polígonos.

Nesta secção usaremos um pouco de trigonometria e também resultados de cálculo diferencial e integral.

Teorema 5: Dados dois polígonos regulares de mesmo perímetro L, um com j lados e outro com k lados, com áreas dadas respectivamente por $A(j)$ e $A(K)$. $j < k$, então $A(j) < A(k)$. Além disso,

$$A(n) < \frac{L^2}{4\pi} \quad \text{para } n > 2\,.$$

Observação 2. A última desigualdade nos diz que designando por A e L respectivamente a área e o perímetro de um polígono (regular ou não) temos

$$A < \frac{L^2}{4\pi}$$

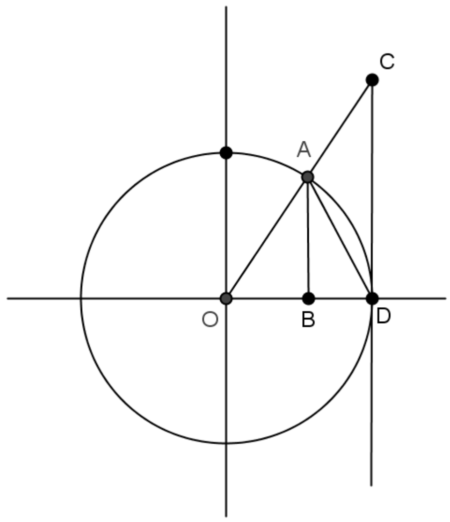
que é conhecida como a Desigualdade Isoperimétrica para polígonos.

Antes de provar o teorema mostraremos que $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, usando argumentos geométricos.

Considere o círculo trigonométrico com centro na origem. Como x pode tender a zero pela direita ou pela esquerda, temos dois casos:

Tomemos primeiramente x no primeiro quadrante, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ onde $senx > 0$. (veja Figura 16)

Figura 16 - Demonstração de limite.



Note que a área do triângulo AOD é menor do que a área do setor circular OAD que por sua vez é menor do que a área do triângulo OCD. Como a área do triângulo AOD é $\frac{senx}{2}$, a área do setor circular OAD é $\frac{x}{2}$ e a área do triângulo COD é $\frac{tgx}{2}$, obtém-se

$\frac{senx}{2} < \frac{x}{2} < \frac{tgx}{2}$. Portanto , $senx < x < \frac{senx}{cosx}$, o que implica $cosx < \frac{senx}{x} < 1$.

Como $\lim_{x\to 0} cosx = 1$ e $\lim_{x\to 0} 1 = 1$, pelo terema do confronto conclui-se que

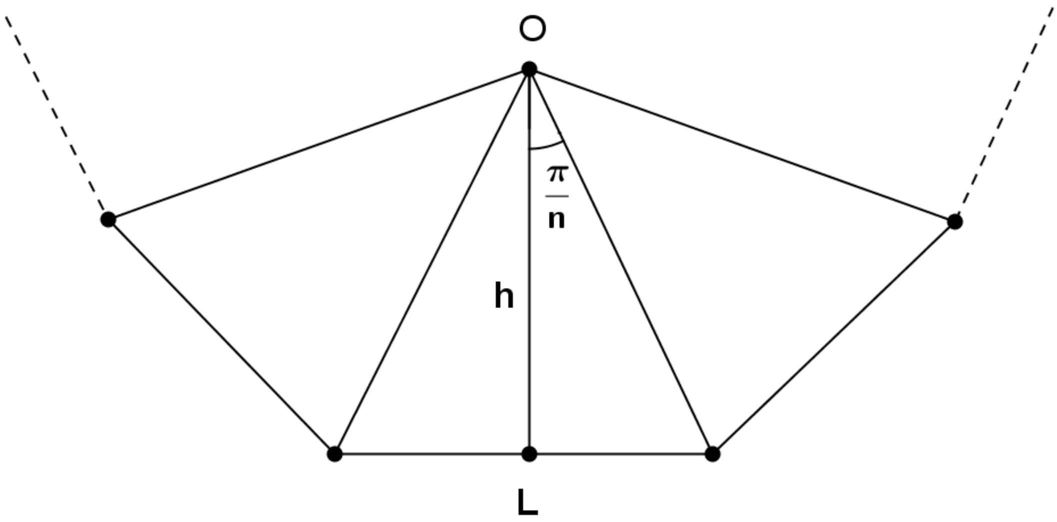
$$\lim_{X\to 0^+} \frac{senx}{x} = 1$$

Quando x está no quarto quadrante , $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ e $senx < 0$. Assim

$\frac{senx}{2} > \frac{x}{2} > \frac{tgx}{2}$, de onde segue que, $1 < \frac{x}{senx} < \frac{1}{cosx}$. Logo $cosx < \frac{x}{senx} < 1$, de novo , pelo teorema do confronto, obtemos o resultado.

Demonstração do teorema 5. Primeiramente vamos expressar a área $A(n)$ de um n – polígono regular em função do perímetro P dado. Assim o lado l do polígono é $l = \frac{P}{n}$. O n – polígono regular é formado pela união de n triângulos isósceles iguais de base l e altura h. (veja Figura17).

Figura 17: Poligno regular de n lados.



Portanto , $A(n) = n\frac{lh}{2}$. Observando o triângulo isósceles, temos que $tg\,\frac{\pi}{n} = \frac{\frac{l}{2}}{h} = \frac{l}{2h}$, de onde segue que $h = \frac{l}{2\,tg\,\frac{\pi}{n}}$. Substituindo em $A(n)$, obtém-se $A(n) = \frac{n\,l^2}{4\,tg\,\frac{\pi}{n}}$. Lembrando que $l = \frac{P}{n}$,

conclui-se $A(n) = \frac{n\,\frac{p^2}{n^2}}{4\,tg\frac{\pi}{n}} = \frac{P^2}{4n} \cdot \frac{1}{tg\frac{\pi}{n}}$ que pode ser reescrita na forma $A(n) = \frac{P^2}{4\pi}\,\frac{\frac{\pi}{n}}{tg\frac{\pi}{n}}$

multiplicando o numerador e o denominador por $\frac{\pi}{n}$.

Para sabermos como $A(n)$ varia em termos de n , basta estudar a função $f(x) = \frac{x}{tgx}$, e analisar o seu comportamento quando $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ e tomar $x = \frac{\pi}{n}$, $n > 2$. Observe que :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{tgx} = 1. \quad \text{e} \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{x}{tgx} = 0$$

Sabemos também, que f é contínua e que a sua derivada $f'(x) = \frac{tgx - x\,sec^2x}{tg^2x} =$

$\frac{1}{tgx} - \frac{x}{sen^2x} = \frac{cosx}{senx} - \frac{x}{sen^2x} = \frac{sen2x-2x}{2sen^2x} < 0$, pois $para\, x \in (0, \frac{\pi}{2})$ temos $sen2x < 2x.$

Assim f é estritamente decrescente em $(0, \frac{\pi}{2})$ e consequentemente $A(n)$ é estritamente crescente. De fato, $n_1, n_2 > 2\ e\ n_1 < n_2$, então $x_1 = \frac{\pi}{n_1} > x_2 = \frac{\pi}{n_2}$. Como f é estritamente decrescente, obtém-se $f\left(\frac{\pi}{n_1}\right) < f\left(\frac{\pi}{n_2}\right)$, implicando que $A(n_1) < A(n_2)$. Portanto , a área de um polígono regular de j lados será menor do que a área de um polígono regular de k lados se j < k. Além disso, como $A(n) = \frac{L^2}{4\pi} \frac{\frac{\pi}{n}}{tg\frac{\pi}{n}}$ é estritamente crescente e $\lim_{n\to\infty} A(n) = \frac{L^2}{4\pi} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{n}}{tg\frac{\pi}{n}} = \frac{L^2}{4\pi} \lim_{x\to o} \frac{x}{tgx} = \frac{L^2}{4\pi}$, conclui-se que $A(n) < \frac{L^2}{4\pi}$

Observação 3. Note que um círculo de comprimento (perímetro) L, possui raio $r = \frac{L}{2\pi}$. Portanto a sua área $A = \pi r^2 = \frac{L^2}{4\pi}$. Assim concluímos que a área cercada por um círculo de comprimento L é maior do que a área de um polígono de perímetro L, qualquer que seja o número de lados do polígono.

4.3 A Desigualdade Isoperimétrica Geral

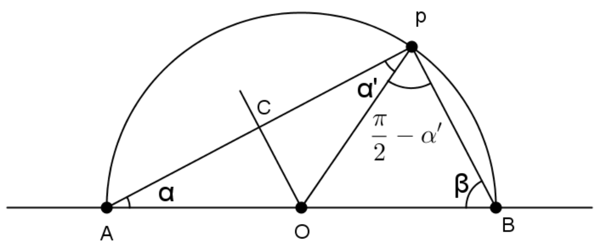
Nosso próximo objetivo é apresentar uma prova geométrica, de fácil compreensão, devida a Jakob Steiner que assegura que o círculo é a solução ótima do problema isoperimétrico geral

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi} \ .$$

Antes de prosseguir provamos uma propriedade da geometria plana.

Proposição 7. Considere uma figura formada por uma curva convexa γ e um segmento $\overline{AB}$ (veja Figura18). Suponha que, dado qualquer ponto P sobre γ, o ângulo $A\hat{P}B$ é reto. Então γ é um semi-círculo.

Figura18 - semi-círculo 1



Demonstração: Seja O o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Devemos então provar que $\overline{OA} = \overline{OP}$. Para isso basta mostrar que $\alpha = \alpha'$. Agora tracemos uma paralela a $\overline{PB}$ passando por O. Então, pelo teorema de Tales, a interseção C dessa reta com $\overline{AP}$ é o ponto médio do segmento $\overline{AP}$. Logo os triângulos ACO e PCO são congruentes, pelo caso LAL. Assim $\alpha = \alpha'$.

Retomando o nosso objetivo, apresentamos o resultado final deste trabalho.

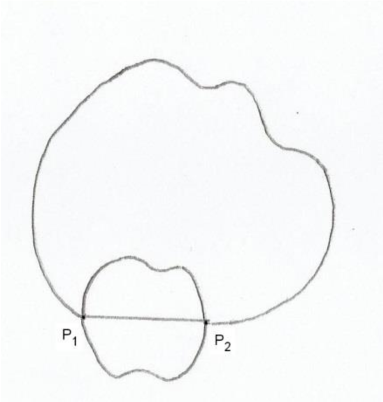
Teorema 6. Entre todas as curvas planas, simples e fechadas de comprimento L, o círculo é a que engloba a maior área A.

Demonstração: A prova de Steiner admite previamente que existe uma curva γ que é a solução do problema, isto é, engloba a maior área. Mostraremos em três etapas que essa curva é um círculo.

1. A curva γ é convexa.

Suponha que γ não é convexa, logo ela possui uma reentrância, isto é, existem dois pontos P_1 e P_2 em γ de modo que o segmento $\overline{P_1P_2}$ está fora da região delimitada por γ.

Figura 19 - Curva não convexa.



Usando o segmento $\overline{P_1P_2}$ como um espelho, considere C a reflexão do trecho de γ entre P_1 e P_2 (veja Figura19). A curva $\bar{\gamma}$ obtida a partir de γ , substituindo o trecho entre os pontos P_1 e P_2 por C, tem o mesmo comprimento de γ porém engloba uma área maior do que γ. Portanto γ tem que ser convexa.

2. A área A consiste de duas partes iguais.

Agora, escolha dois pontos $Q_1\ e\ Q_2$ sobre γ . Enquanto Q_1 é escolhido livremente, Q_2 é o ponto que bissecta a curva γ em dois arcos $\gamma_1\ e\ \gamma_2$ de mesmo comprimento. Isto significa que caminhando na curva γ começando em Q_1, chega-se a Q_2 após percorrer $\frac{L}{2}$. Traçando uma reta de $Q_1\ a\ Q_2$ nós obtemos duas novas áreas $A_1\ e\ A_2$ de modo que $A = A_1 + A_2$. Afirmamos que $A_1 = A_2$. Supondo que, sem perda de generalidade, $A_1 > A_2$ nós podemos outra vez usar o segmento $\overline{Q_1Q_2}$ para refletir A_1 para o outro lado e substituir A_2. Assim, obtém-se uma nova curva de mesmo comprimento de γ e área maior, o que é uma contradição.

3 **As curvas $\boldsymbol{\gamma_1\ e\ \gamma_2}$ são semi-círculos.**

Como já mostramos que $A_1 = A_2$, é suficiente mostrar que γ_1 é um semi-círculo. Novamente vamos supor que γ_1 não seja um semi-círculo (veja figura 20)

Figura 20 - Curva convexa

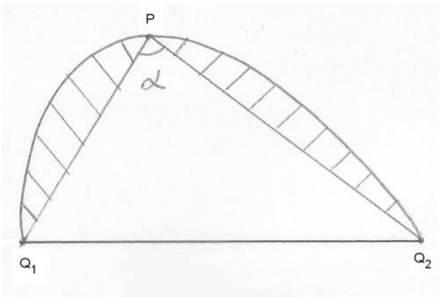
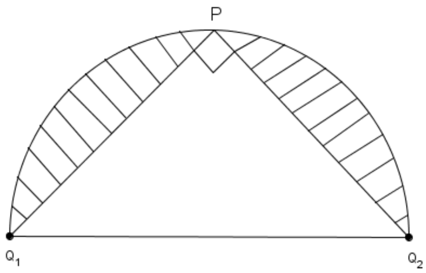


Figura 21 - Semi-Círculo 2



Então existe, pela proposição 7, um ponto P em γ_1 tal que o ângulo $Q_1\hat{P}Q_2$ denominado α não é igual a 90 graus. A idéia agora é manter Q_1 fixo e deslocar Q_2 sobre a reta que passa por Q_1 e Q_2 mantendo os comprimentos Q_1P e Q_2P inalterados. Esta operação deformará a curva γ_1 , deixando o seu comprimento e as áreas hachuradas da figura 20 intocadas. Assim a variação da área englobada pela curva γ_1 e o segmento Q_1Q_2 ficará por conta do triângulo Q_1PQ_2 , cuja área será máxima quando ele for retângulo. Logo deslocando Q_2 até o ângulo α ser igual a 90 graus, obtemos uma nova curva $\bar{\gamma}$ que juntamente com o segmento Q_1Q_2 engloba uma área maior que antes. Mas isto é uma contradição a nossa suposição que γ_1 e o segmento Q_1Q_2 cerca a maior área. Assim γ_1 tem que ser um semi-círculo, e o teorema está provado.

Observação: A prova de Jakob Steiner, embora tenha uma construção intuitivamente acessível, ela não pode ser vista como um prova matematicamente completa do problema isoperimétrico. Ela simplesmente dá um modo de construir a curva, de comprimento fixo, que engloba a maior área. De fato é assumido que o problema tem solução e que a solução é única. Uma prova rigorosa, devido a Erhad Schmidt, pode ser vista em [1] .

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho desenvolvido nesta dissertação, mostra à aplicação de resultados teóricos da geometria plana na resolução de diversos problemas concretos. A idéia de apresentar conceitos abstratos e, sempre que possível, relacioná-los com problemas práticos, é uma forma de aumentar o interesse dos alunos no estudo e na aprendizagem da matemática.

Nem todo o conteúdo aqui apresentado é factível ao ensino médio, como por exemplo alguns resultados em que o conceito de limite é utilizado. Porém, uma grande parte dos problemas discutidos no texto podem servir para enriquecer as aulas dos colegas que ensinam geometria plana em nossos colégios.

Outra possibilidade de utilização do texto seria como atividade complementar as desenvolvidas em sala de aula com um grupo pequeno de alunos ou ainda num programa de iniciação científica junior.

REFERÊNCIAS

[1] ANDREAS HEHL. *The Isoperimetric Inequality* . Eberhard Karls Universitaet Tuebingen. Disponível em: <
http://www.math.un.tuebingen.de/ab/geometricworks/att/isoperimetricmequality.pdf >
Acesso em: 29 maio 2015.

[2] DELGADO, J , FRENSEL, K , CRISSAF, L. . *Geometria Analítica*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Coleção Profmat

[3] FIGUEIREDO, D.G. Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria Euclidiana , *Matemática Universitaria* , Rio de Janeiro, n. 9/10, p. 69-108, 1989.

[4] STEWART, J. *Calculo*, vol. I e II. 4 ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2001.

[5] STRUIK, D.J. *História concisa das matemáticas*. 3.ed. Tradução de João C.S. Gerreiro. Lisboa: Gradiva, 1997.

APÊNDICE – Uma propriedade da elipse.

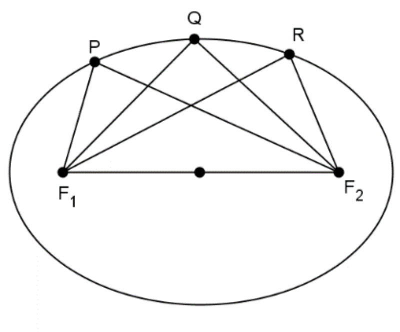
Apresentamos no início de nosso trabalho alguns resultados de geometria que foram usados posteriormente na resolução de problemas de máximos e mínimos. Aqui utilizaremos a Proposição 5 para provar uma propriedade interessante da Elipse.

Uma elipse é uma cônica obtida pela intersecão de um cone com um plano que não seja paralelo a sua base e nem intercepta as suas duas folhas. Na geometria euclidiana podemos definir a elipse como o conjunto de todos os pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante. Os pontos fixos são chamados de focos da elipse. Mais precisamente, se F_1 e F_2 são os focos, a elipse é o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que

$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a$$

onde a constante $2a > 0$ é maior que a distância entre os focos.

Figura 22 - Elipse 1

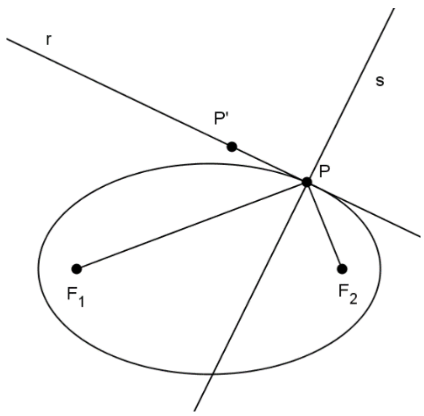


Mais detalhes sobre a elipse pode ser encontrada em [2].

A propriedade da elipse acima mencionada é a seguinte:

Teorema 7 . A reta perpendicular à elipse num ponto P, divide o ângulo $F_1\hat{P}F_2$ em dois ângulos iguais , onde F_1 e F_2 são os focos da elipse. (veja Figura 23)

Figura 23 - Retas tangentes e perpendicular a elipse num ponto P.



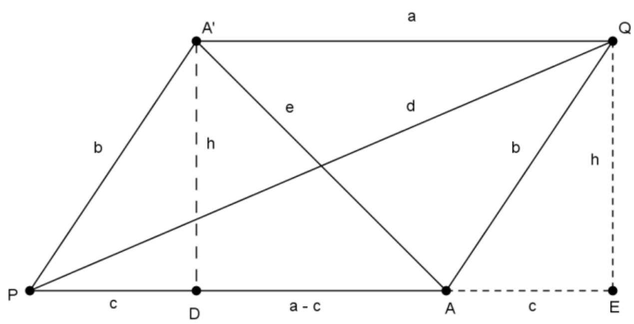
A demonstração da proposição necessita de alguns resultados que serão apresentsdos a seguir com o objetivo de tornar o texto auto suficiente.

Proposição 8. (Identidade do paralelogramo**).** Seja o paralelogramo $APA'Q$, então é válida a igualdade

$$(\overline{PQ})^2 + (\overline{AA'})^2 = 2(\overline{AP})^2 + 2(\overline{AQ})^2 .$$

Prova. Observe o desenho do paralelogramo (ver Figura 24), as construções nele feitas e a letra atribuída a cada segmento, isto é, $\overline{A'Q} = \overline{PA} = a$, $\overline{AQ} = \overline{PA'} = b$, $\overline{PD} = \overline{AE} = c$, $\overline{PQ} = d$ e $\overline{AA'} = e$.

Figura 24 - Identidade do paralelogramo.



Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos AEQ , QPE e ADA', temos que

$b^2 = c^2 + h^2$ (1)

$d^2 = (a + c)^2 + h^2$ (2)

$e^2 = (a - c)^2 + h^2$ (3)

Substituindo (1) em (2) e (1) em (3) obtém-se, respectivamente, que

$d^2 = a^2 + 2ac + c^2 + h^2 = a^2 + 2ac + b^2$ (4)

$e^2 = a^2 - 2ac + c^2 + h^2 = a^2 - 2ac + b^2$ (5)

Somando (4) e (5) , concluímos que

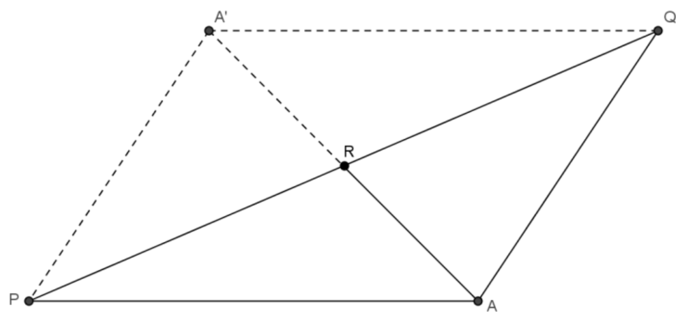
$d^2 + e^2 = 2a^2 + 2b^2$.

Lembrando que $d = \overline{PQ}$, $e = \overline{AA'}$, $a = \overline{PA}$ e $b = \overline{AQ}$, conclui-se a prova.

Proposição 9. Sejam APQ um triângulo e R o ponto médio do lado $\overline{PQ}$, (veja Figura 25) então vale a desigualdade

$$\overline{RA} < \frac{1}{2} (\overline{PA} + \overline{QA}) .$$

Figura 25 - Triângulo APQ com R ponto médio de $\overline{PQ}$.



Prova. Pela desigualdade triangular , $|\overline{AP} - \overline{AQ}| < \overline{PQ}$. Assim, elevando ao quadrado esta desigualdade, obtemos

$(\overline{AP})^2 + (\overline{AQ})^2 - 2(\overline{AP})(\overline{AQ}) < (\overline{PQ})^2$.   Como

$2(\overline{AQ})^2 + 2(\overline{AP})^2 = (\overline{PQ})^2 + (\overline{AA'})^2$,

multiplicando a inequação por -1 e somando com a igualdade acima, conclui-se que

$(\overline{AQ})^2 + (\overline{AP})^2 + 2(\overline{AP})(\overline{AQ}) > (\overline{AA'})^2$ que é o mesmo que

$(\overline{AP} + \overline{AQ})^2 > (\overline{AA'})^2$.   Extraindo a raíz quadrada e lembrando que R é ponto médio de $\overline{AA'}$ segue que

$$2\overline{RA} < \overline{AP} + \overline{AQ} \;\;,$$

que é a desigualdade procurada.

Proposição 10. A elipse é uma curva estritamente convexa .

Demonstração: Por definição, um conjunto $\boldsymbol{\tau}$ é dito convexo, quando satisfaz à condição: $se\;\; P\; e\; Q$ pertencem a $\boldsymbol{\tau}$, então o ponto médio R do segmento $\overline{PQ}$ também pertence a $\boldsymbol{\tau}$**.** Então basta mostrar que o conjunto $\boldsymbol{\tau}$ dos pontos do plano tais que

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} \leq 2a$$

satisfaz à condição acima. E também vamos mostrar que se $P\; e\; Q$ estão sobre a elipse, então R é talque

$$\overline{RF_1} + \overline{RF_2} < 2a$$

Agora considerando $A\; e\; B$ os focos da elipse e mais a Proposição 9, temos

$$\overline{RF_1} < \frac{1}{2}(\overline{PF_1} + \overline{QF_1}) \quad \text{e} \quad \overline{RF_2} < \frac{1}{2}(\overline{PF_2} + \overline{QF_2})$$

Dai, basta somar ambos os lados das desigualdades e obtemos

$$\overline{RF_1} + \overline{RF_2} < \frac{1}{2}(\overline{PF_1} + \overline{PF_2} + \overline{QF_1} + \overline{QF_2})$$

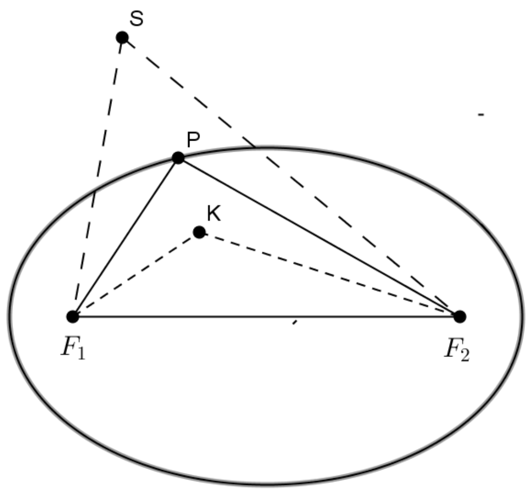
Como $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{QF_2} + \overline{QF_2} = 2a,$ segue que

$$\overline{RF_1} + \overline{RF_2} < \frac{1}{2}\ (4a)$$

Corolário 2. Sejam a elipse de focos F_1 e F_2 , K um ponto em seu interior e S um ponto em seu exterior. Então valem as desigualdades:

$$KF_1 + KF_2 < 2a \qquad e \qquad SF_1 + SF_2 > 2a$$

Figura 26 - Elipse 3



Prova.Seja um ponto P pertence a elipse, sabemos que $PF_1 + PF_2 = 2a$. Agora observe que K é um ponto interior ao triângulo F_1PF_2 , (veja Figura 26) então pelo corolário1, temos que:

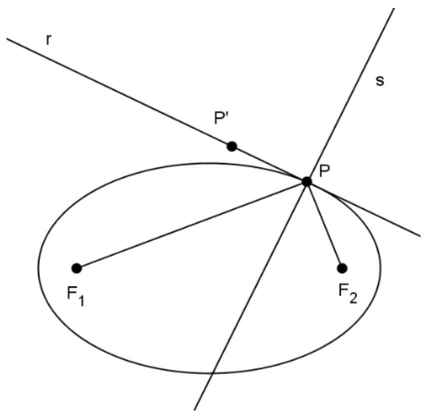
$$KF_1 + KF_2 < PF_1 + PF_2 = 2a$$

Note que P é um ponto interior ao triângulo F_1SF_2 , logo, pelo corolário1 segue que:

$$SF_1 + SF_2 > PF_1 + PF_2 = 2a$$

De posse dos resultados acima, vamos agora fazer a prova da propriedade enunciada da elipse.

Figura 27 - Retas tangente e perpendicular a elipse num ponto P.



Prova do Teorema 7: Considere a reta tangente a elipse em P e um ponto P' pertencente a tangente, diferente de P. (veja Figura 27). Note que P' está fora da elipse e isto se deve ao fato de a elipse ser estritamente convexa. Então pelo corolário 2, temos que

$$P'F_1 + P'F_2 > 2a$$

Assim, de todos os pontos da tangente, o que possui a mínima soma das distâncias aos focos é P. Logo, pela proposição 5, a reta perpendicular a tangente em P, divide o ângulo $F_1\hat{P}F_2$ em dois ângulos iguais.