



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Paulo Francisco Mota

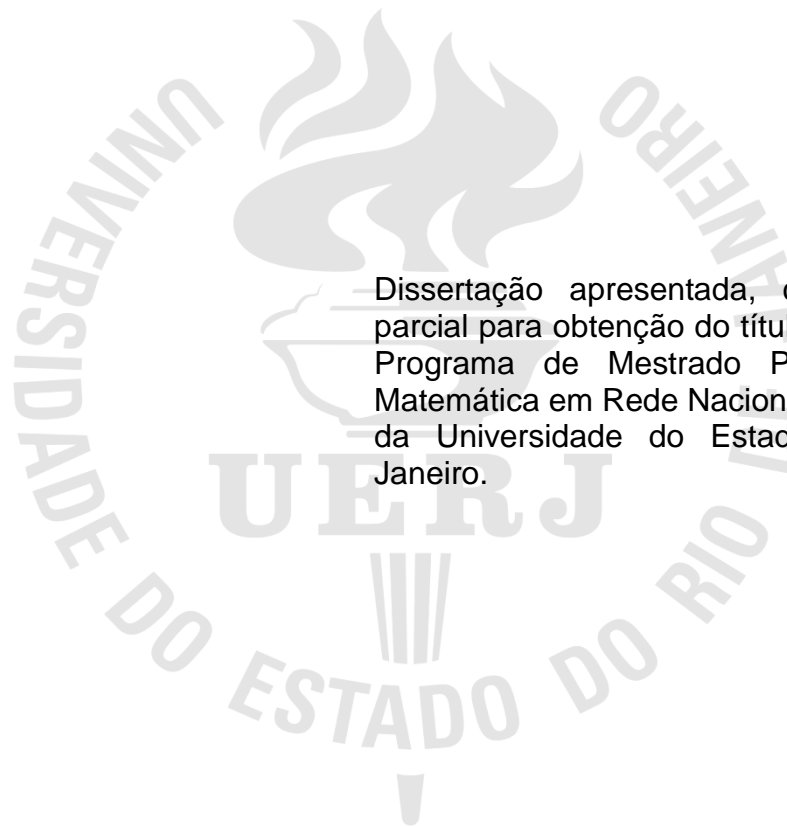
**A Matemática do Ensino Básico aplicada na indústria do petróleo
referente às atividades de transferência entre Navios e Terminais**

Rio de Janeiro

2016

Paulo Francisco Mota

A Matemática do Ensino Básico aplicada na indústria do petróleo referente às atividades de transferência entre Navios e Terminais



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Roberto Pinto Mattos

Rio de Janeiro

2016

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

M921 Mota, Paulo Francisco.
A Matemática do Ensino Básico aplicada na indústria do petróleo referente às atividades de transferência entre Navios e Terminais / Paulo Francisco Mota – 2016.
78f. : il.
Orientador: Francisco Roberto Pinto Mattos.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT)-Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.
1. Matemática (Ensino médio). 2. Petróleo - Transporte. I. Mattos, Francisco R.P.II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.
CDU 51.07

Autorizo para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Paulo Francisco Mota

A Matemática do Ensino Básico aplicada na indústria do petróleo referente às atividades de transferência entre Navios e Terminais

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional– PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 26 de fevereiro de 2016.

Banca Examinadora:

Prof. Dr Francisco Roberto Pinto Mattos (Orientador)

Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Augusto César de Castro Barbosa

Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Silas Fantin

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRIO

Rio de Janeiro

2016

DEDICATÓRIA

À minha esposa Alexia Mota pelo seu apoio e paciência durante todo o curso realizado.

AGRADECIMENTOS

À Deus, por ser a razão do meu viver.

À minha esposa, Alexia pela sua compreensão, dedicação e carinho que muito contribuiu para conclusão desta jornada .

À minha mãe, Ana Maria, pelo amor e cuidado e pela sua dedicação na minha vida

Ao Pastor Alúcio, que tem sido um amigo e intercessor nas horas difíceis e alegres.

Ao meu orientador Prof. Dr Francisco Roberto Pinto Mattos, pela sua paciência e competência.

Ao corpo docente do PROFMAT/UERJ por toda colaboração.

Aos companheiros de trabalho Ricardo Ferreira Cordeiro, Eider Raulino dos Santos, Renata Hassen Laffitte da Silva e Carlos Augusto Ribeiro, pela contribuição na execução desse trabalho.

Ao CAPES que me ajudou nessa jornada com a bolsa de estudo durante o curso.

Não somos o que deveríamos ser, não somos o que queríamos ser; mas graças a Deus, não somos o que éramos.

Martin Luther King

RESUMO

MOTA, Paulo Francisco. *A Matemática do Ensino Básico aplicada na indústria do petróleo referente às atividades de transferência entre Navios e Terminais*. 2016. 78f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

Esta dissertação tem como objetivo principal apresentar aos professores a matemática que é utilizada em diversas atividades da indústria do petróleo para serem apresentadas em sala de aula como aplicações práticas de diversos conceitos que são ministrados desde o ensino fundamental até o médio. Assim, possui o intuito de desenvolver no aluno a percepção da importância de se aprender matemática, criando um estímulo a mais em seus estudos. O trabalho se refere especificamente ao Terminal Aquaviário da Baía de Guanabara (*TABG*), pertencente à empresa de petróleo Petrobras Transporte S/A (*TRANSPETRO*), no qual labora o autor. São apresentados os diversos cálculos utilizados nas variadas atividades do dia a dia do *TABG*. Por fim, são sugeridas algumas atividades que podem ser aplicadas em sala de aula.

Palavras- chave: Indústria de petróleo. Aplicações práticas. Sala de aula.

ABSTRACT

MOTA, Paulo Francisco. *Applied mathematics in the petroleum industry*. 2016. 78 p. Essay (Professional Magistrate in Mathematics in National Network – PROFMAT) – Mathematics and Statistics Institute, Rio de Janeiro State University, Rio de Janeiro, Brazil, 2016.

This essay's main target is to introduce the mathematics used in several activities among the petroleum industry to teachers so that they can be shown in classrooms as of practical use of a wide diversity of concepts which are taught from junior school to university classes. Therefore, its intent is to develop the pupil's perception of the importance of learning mathematics, creating an additional way to stimulate their study. The matter refers specifically to the Guanabara Bay Marine Terminal (*TABG*), a unit of the Petrobras Transporte S/A (*TRANSPETRO*) Corporation, the author's workplace, showing wide variety of calculations used in the diverse day-by-day activities at the *TABG*. Finally, there are a few suggestions for activities to be carried out in classroom.

Keywords: Petroleum industry. Practical use. Classroom.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1-	Representação da Reta Real.....	26
Figura 2-	Múltiplos e submúltiplos do metro.....	27
Figura 3-	Triângulo Retângulo.....	33
Figura 4-	Triângulo exemplo.....	34
Figura 5-	Triângulo qualquer.....	35
Figura 6-	Triângulo formado por dois triângulos retângulos.....	36
Figura 7-	Triângulo qualquer para a lei dos cossenos.....	38
Figura 8-	Triângulo exemplo para a lei dos cossenos.....	38
Figura 9-	Múltiplos e submúltiplos do metro cúbico.....	39
Figura10-	Paralelepípedo retângulo.....	40
Figura11-	Sólidos de mesmo volume.....	41
Figura12-	Cilindro gerado pela rotação de um retângulo.....	42
Figura13-	Conceito de pressão.....	43
Figura14-	Conceito de vazão.....	44
Figura15-	Composição do <i>TABG</i>	47
Figura16-	Esquema de transferência com 2 linhas.....	55
Figura17-	Esquema de transferência com 1 linha.....	55
Figura18-	Primeiro exemplo de bombeio com 2 linhas.....	56
Figura19-	Primeiro exemplo de bombeio com 1 linha.....	57
Figura20-	Segundo exemplo de bombeio com 2 linhas.....	58
Figura21-	Segundo exemplo de bombeio com 1 linha.....	58
Figura22-	Vista frontal de um tanque de bordo nivelado.....	67
Figura23-	Vista frontal de um tanque de bordo não nivelado.....	68
Figura24-	Esquema de transferência REDUC, Ilha para o NT com 1 linha...	69
Figura25-	Esquema de transferência REDUC, Ilha para o NT com 2 linhas..	69
Figura26-	Paralelepípedo representando um tanque de Navio.....	73
Figura27-	Vista frontal de um tanque de um Navio.....	74
Figura28-	Paralelepípedo representando um tanque de um Navio.....	74

LISTA DE FOTOGRAFIAS

Foto 1-	Centro de Matemática e Estatística Aplicadas à Indústria (<i>CeMEAI</i>)- São Carlos- <i>SP</i>	24
Foto 2-	Ilha D'água(<i>ID</i>).....	48
Foto 3-	Ilha Redonda(<i>IR</i>).....	49
Foto 4-	Pier Principal (<i>PP</i>).....	50
Foto 5-	Pier Secundário (<i>PS</i>).....	51
Foto 6-	Braços de conexão do <i>PP</i>	52
Foto 7-	Braços de conexão do <i>PS</i>	53
Foto 8-	Braço de conexão do <i>PP</i>	72

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

APO Local onde os dutos saem da *ID*
CCET Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
CCO Centro de Controle Operacional
CeMEAI Centro de Matemática e Estatística Aplicadas à Indústria
CEPID Centro de Pesquisa, Inovação e Difusão
CNPq Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
DPS Duto de nafta petroquímica que interliga *ID* e *PS*
EIMI Educação na interface entre Matemática e Indústria
EMBRAER Empresa Brasileira de Aeronáutica S/A
FAPESP Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo
FCT Faculdade de Ciências e Tecnologia
FP Fator de potência da instalação elétrica
FURNAS Empresa brasileira de energia elétrica
GLP GásLiquefeito de Petróleo
GT Grupos de Trabalho
IAE Instituto de Aeronáutica e Espaço
IBILCE Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
ICMC Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
ICMI Comissão Internacional de Instrução Matemática
ICIAM Conselho Internacional da Indústria e Matemática Aplicada
ID Ilha D água
IME Instituto de Matemática e Estatística
IMECC Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
IMPA Instituto de Matemática Pura e Aplicada
IPC Comitê Internacional de Programas
IR Ilha Redonda
NT Navio Tanque
OCA1 Óleo Combustível tipo 1A
PETROBRÁS Petróleo Brasileiro S/A
PIER Local onde atracam os Navios
PP Píer Principal

PS Píer Secundário

REDUC Refinaria de Duque de Caxias

REDUC Local onde os dutos saem da *REDUC*

TABG TerminalAquaviárioda Baía de Guanabara

TRANSPETRO Petrobrás Transporte S/A

UFScar Universidade Federal de São Carlos

UNESP Universidade Estadual Paulista

UNICAMP Universidade Estadual de Campinas

UNILEVER Empresa Multinacional produtora de bens de consumo

USP Universidade de São Paulo

VEI Localaondeos dutos chegam à Ilha D água

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	14
1	REFERÊNCIAS MATEMÁTICA E INDÚSTRIA	16
2	CONTEÚDOS ABORDADOS	25
2.1	Matemática	25
2.1.1	<u>Números reais</u>	25
2.1.2	<u>Medidas de comprimento</u>	27
2.1.3	<u>Medidas de tempo</u>	28
2.1.4	<u>Razões e Proporções</u>	29
2.1.5	<u>Porcentagem</u>	30
2.1.6	<u>Médias</u>	30
2.1.6.1	Média aritmética.....	31
2.1.6.2	Média aritmética ponderal.....	31
2.1.7	<u>Expressões algébricas</u>	31
2.1.8	<u>Trigonometria</u>	32
2.1.8.1	Razões trigonométricas.....	32
2.1.8.2	Arco duplo.....	35
2.1.8.3	Lei dos cossenos.....	37
2.1.9	<u>Geometria Espacial</u>	39
2.1.9.1	Conceito de volume.....	39
2.1.9.2	Volume do cilindro reto.....	42
2.2	Física	43
2.2.1	<u>Mecânica dos fluidos</u>	43
2.2.1.1	Pressão.....	43
2.2.1.2	Vazão.....	44
2.2.1.3	Peso específico.....	45
3	A MATEMÁTICA NO TABG	45
3.1	TABG	45
3.2	Operações entre Navios e Terminais com 1 e 2 linhas.....	53
3.3	Previsões das operações.....	63
3.4	Cálculo da média ponderada para amostra e densidade.....	63
3.5	Fechamento de Navio.....	65

3.6	Medições dos tanques de bordo.....	66
4	SEQUÊNCIA DIDÁTICA.....	68
4.1	Atividade 1.....	68
4.2	Atividade 2.....	70
4.3	Atividade 3.....	70
4.4	Atividade 4.....	71
4.5	Atividade 5.....	71
4.6	Atividade 6.....	72
4.7	Atividade 7.....	72
4.8	Atividade 8.....	73
4.9	Atividade 9.....	74
4.10	Atividade 10.....	74
	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	75
	REFERÊNCIAS.....	76
	APÊNDICE-Soluções dos exercícios.....	77

INTRODUÇÃO

Não apenas no campo da educação, mas especialmente nele, há um sentimento já bem aprofundado, quase unânime, de que urge a necessidade de se quebrar esse círculo vicioso do mau ensino. Aquele em que professor e aluno se colocam em postura diametralmente opostas, distanciando-se por idéias e ideais, por conteúdo e forma, por valores e práticas efetivas, minando e desagregando todo o sistema de ensino, que deveria ser uniforme e convergente.

Bem sabido é que o Brasil precisa crescer economicamente de maneira sólida, sem depender das técnicas desenvolvidas pelos de fora para vencer os desafios internos da nação. É inegável que para atingir esse macro objetivo deve-se ter a consciência de que a micro análise da educação, aquela que não só enxerga, mas analisa as condições do professor e do aluno em sala de aula, esteja definitivamente focada nesse mister, a fim de dar praticidade e efetividade a transferência de conhecimento. Isto porque a lógica do crescimento de qualquer nação passa por seu parque industrial de base e pela criação e gerenciamento da energia. Afastar-se dessa verdade é trazer risco ao futuro do país, tornando-o cada vez mais vulnerável ao sistema econômico em vigor.

Seguindo este raciocínio o autor desse trabalho, conhecendo de perto as muitas inquietações dos alunos quanto à compreensão da praticidade física daquilo que lhe é ensinado, e ainda pelo fato de laborar na indústria do petróleo, entendeu ser bastante pertinente mostrar como a matemática ensinada em sala de aula pode ser aplicada no dia a dia de suas atividades industriais, criando um estímulo a mais em seu aprendizado.

Expressões como: “*Professor, para que serve isso?*”, “*Onde utilizamos isso?*” e “*Qual a importância disso?*” foram muitas vezes ouvidas nos anos de experiência em sala de aula e constituíram-se em fonte inspiradora do desenvolvimento dos elementos aqui apresentados, cujo objetivo é o de entregar aos professores de Física, e principalmente aos de Matemática, diversas aplicações práticas dos muitos conceitos estudados em todas as fases do ensino, como ferramenta motivadora de suas aulas.

Esse trabalho é apresentado em cinco capítulos:

O capítulo 1 traz a introdução da idéia que norteou o conjunto apresentado. Nele se valoriza o conteúdo histórico das diversas reuniões, multidisciplinares e de

caráter internacional, havida entre representantes acadêmicos e profissionais da indústria com o escopo de estreitar o liame entre o ensino que hoje se disponibiliza em sala de aula e a aplicação prática dos conceitos desse aprendizado no cotidiano das empresas. Pode-se perceber que o Brasil acompanha de perto o desenvolvimento desses mecanismos, havendo em nosso país empresas e universidades envolvidas diretamente com a questão de encontrar sempre o melhor caminho para levar o conhecimento adquirido nos centros acadêmicos ao processo industrial.

O capítulo 2 se preocupa em trazer alguns conceitos básicos da Física e da Matemática, desde a idéia de números reais, conjuntos, razões e proporções, até noções de tempo, de volume, pressão, vazão, dentre outras. Todo esse material torna-se útil na compreensão dos elementos apresentados no capítulo seguinte.

O capítulo 3 é central, pois nele converge as interações anteriores e o principal ambiente de trabalho. Ele é introduzido com uma apresentação, apesar de sucinta, muito fiel do local de trabalho do autor, eis que ilustrado com diversas figuras e fotos muito elucidadoras. Neste capítulo se vê mais patente a presença da Matemática nas funções industriais, no caso mais específico nas atividades referentes ao transporte e armazenamento de petróleo e seus derivados nos píers de atracação de Navios.

Vale ressaltar que cada atividade apresentada é complementada com diversos exemplos reais de cálculo.

O capítulo 4 trata de dar praticidade ao objeto do trabalho trazendo ao aluno a compreensão de que os conceitos ministrados em sala de aula, até os mais elementares, são úteis e muito aplicados na indústria. Neste capítulo são propostos diversos exercícios de fixação, sempre envolvendo temas práticos, buscando criar o hábito de relacionar o aprendizado formal a um objetivo que, enfim, dê a justificativa material dos motivos pelos quais aqueles conceitos são ministrados.

O Apêndice fecha todo o ciclo apresentando as soluções e respostas dos exercícios de fixação do capítulo anterior, dessa forma apontando para a correção da forma do raciocínio usada pelo aluno ou auxiliando-o no modo de como deve se conduzir.

O presente estudo técnico tem como base referencial um relatório intitulado “*Educação na interface entre Matemática e Indústria(EIMI)*”, dos autores Alain Damlamian, José Francisco Rodrigues e Rudolf Straber. Esse trabalho foi organizado em conjunto entre a Comissão Internacional de Instrução Matemática(*ICMI*) e o Conselho Internacional da Indústria e Matemática Aplicada(*ICIAM*). Essas Instituições internacionais estavam interessadas em entender melhor as conexões entre o ensino e a aprendizagem da matemática em todos os níveis e o seu papel na Indústria.

O relatório explica as razões para a elaboração desse trabalho e também como foi organizado e desenvolvido todo o processo para a realização desse documento. Para se ter uma noção das nações envolvidas nessa atividade, o Comitê Internacional de Programas(*IPC*) foi nomeado com membros dos seguintes países: Singapura, Alemanha, Austrália, EUA, Chile, Holanda, China, Japão, Espanha, Canadá e Portugal, que foi o país sede.

O trabalho teve início a partir de duas hipóteses: a primeira, que existe forte ligação entre a inovação, a ciência, a matemática e a produção de bens e serviços na sociedade e a segunda, que existe necessidade de uma análise e reflexão sobre as estratégias para a educação e formação dos alunos.

O texto disserta que em um mundo moderno e tecnológico a matemática está presente em quase todos os lugares e às vezes não percebemos sua grande presença. Muitos estudos já foram feitos sobre a matemática sendo utilizada no local de trabalho e diversos problemas industriais práticos já foram solucionados através do seu detalhamento usando modelagem com visão científica, principalmente em níveis mais avançados da matemática, além de campos como física, ciências naturais, engenharia e finanças. Esse trabalho buscou aprofundar essa discussão.

O *IPC* apontou para a insatisfação dos empregadores da indústria com a qualidade observada na educação matemática da força de trabalho, pois perceberam que os alunos se mostraram incapazes de fazer uso dela no seu ambiente de atividade laboral. Informa ainda que em todos os níveis da formação do aluno existe pouca ou nenhuma menção à sua aplicabilidade no seu futuro local de trabalho. Vale destacar que em tempos hodiernos, num mundo globalizado e em constante transformação, gerando a cada minuto diversas inovações tecnológicas

praticamente obriga uma verificação e atualização da aprendizagem matemática nas escolas para atender as indústrias de uma maneira geral.

De se dizer que a evolução tecnológica, com programas de computadores modernos que tantos problemas solucionam, requer a atuação do ser humano, não bastando por si só a máquina. Por isso, a análise, a inovação, a perspicácia, o raciocínio, a sensibilidade humana precisam estar juntos com essa nova tecnologia.

O trabalho também examina as implicações para a educação, onde duas áreas aparentemente distintas interagem: a indústria e a matemática. Aqui enfatiza a necessidade do equilíbrio entre as reais necessidades da indústria, por uma educação relevante no terreno da matemática, e a necessidade dos alunos, por uma educação matemática profunda e duradoura num ambiente globalizado.

O *IPC* indica os beneficiários deste estudo, que são, entre outros, alunos matriculados no sistema educacional formal em todos os níveis, incluindo o profissional, futuros professores, trabalhadores da indústria, matemáticos que trabalham na indústria e, eventualmente, todos os que gerenciam as indústrias.

Os objetivos desse estudo são assim descritos:

“Ampliar a consciência pública do papel fundamental que a matemática desempenha na sociedade no que diz respeito às indústrias de baixa e alta tecnologia;

Ampliar a consciência da indústria em relação ao que a matemática pode e não pode realmente realizar nas atuais circunstâncias;

Ampliar a consciência da indústria em relação ao que a escola e a universidade graduada podem e não podem fazer de forma realista em termos de matemática;

Ampliar a conscientização de professores e educadores matemáticos no que diz respeito às práticas industriais e necessidades no que diz respeito à educação;

Melhorar o uso adequado da matemática na sociedade e na indústria apresentando exemplos de boas práticas;

Atrair e reter mais alunos, incentivando-os a continuar os seus estudos matemáticos de todos os níveis de educação por meio significativo e relevantes exemplos contextualizados, melhorando os currículos de matemática em todos os níveis de ensino;

Criar práticas educativas inovadoras e apoiar as boas práticas existentes;

Garantir que, quando usada como uma ferramenta de seleção de emprego, a matemática seja utilizada apropriadamente;

Desenvolver nos alunos o raciocínio matemático e o raciocínio lógico necessário em indústrias melhorando o diálogo e o entendimento entre as comunidades de matemática, os trabalhadores e os tomadores de decisão da indústria, política e educação.”

(DAMLAMIAN;RODRIGUES;STRABER, 2013, p.19, tradução nossa).

Com essas justificativas e com esses objetivos apresentados, o *IPC* preparou um documento para discussão, onde os títulos dos capítulos ficaram assim definidos:

- O papel da matemática - visibilidade e caixas pretas.
- Exemplos de uso da tecnologia e matemática.
- Comunicação e colaboração.
- Ensino de matemática industrial para torna-la mais visível.
- Aprendendo com a tecnologia de modelagem e simulação.
- Ensino e aprendizagem para a comunicação e colaboração.
- Currículo e questões curriculares.
- A formação de professores.

Esse estudo aconteceu na cidade de Óbidos, Portugal, em outubro de 2010. Após a publicação do documento decorrente desse trabalho, o *IPC* recebeu 70 textos de todos os cinco continentes que foram considerados para inclusão no estudo. Autores propuseram seus textos até o final de outubro de 2009. O *IPC* reuniu-se em Paris no início de novembro de 2009, além de decidir sobre as possíveis contribuições à conferência, o grande desafio desse encontro foi encontrar uma maneira eficiente de organizar a conferência e estruturar as discussões. O *IPC* finalmente concordou em ter seis palestras plenárias durante a conferência, enquanto o grande trabalho era para ser feito em seis grupos de trabalho (*GT*) com temas a serem discutidos durante a conferência de estudo. Os temas dos grupos foram os seguintes:

GT 1: A interface de matemática na indústria.

GT 2: Questões de tecnologia.

GT 3: Comunicação matemática-indústria.

GT 4: Educação nas escolas.

GT 5: Universidade e formação acadêmica técnica e profissional.

GT 6: Educação / formação com a participação da indústria.

Com o objetivo de contribuir para esse estudo em curso, para melhorar as suas recomendações e conclusões para o livro de estudos da *EIMI*, um *workshop* de dois dias foi organizado pela Universidade de Macau, na China, nos dias 3 e 4 de novembro de 2011, em vista das crescentes conexões entre a inovação e a ciência, além da necessidade global de reflexão sobre estratégias para a educação e formação das novas gerações.

A importância de avaliar o tema “*A matemática aplicada às indústrias*” é muito grande e tal circunstância pode ser percebida por esse estudo internacional e as conclusões dele decorrentes, posto envolver representantes de diversas nações alinhados ao mesmo propósito temático. E essa questão também atinge o Brasil.

Nesse diapasão existem alguns cursos criados no Brasil com o objetivo de atender essa necessidade mundial.

No site <https://sites.google.com/a/dema.ufc.br/mi/historia>, observa-se a origem do curso de Matemática Industrial na Universidade Federal do Ceará.

É relevante trazer à lume interessante consideração sobre o surgimento de um novo profissional, nascido das novas interações encontradas no cenário industrial, ou seja, das inovações tecnológicas, da globalização e do desenvolvimento sócio econômico. Trata-se do Matemático Industrial, profissional oriundo do curso de Matemática Industrial criado em 30/09/2010 pela Resolução de número 27/2010 do Conselho Universitário da Universidade Federal do Ceará, que tem a função de detectar problemas insertos no ambiente industrial em que atua, correlacionando-o com o mercado, propondo métodos de abordá-los matematicamente. Essa nova atividade possui escopo diverso, tais como: a otimização dos recursos, da produção e dos serviços, a redução de custos, a melhoria da relação com os clientes, a otimização dos lucros e a melhoria do desempenho da empresa e dos empregados. A atuação desse novo profissional

pode até seguir rumos diferentes, mas o que permanece é “*como resolver problemas?*”, ou dizendo melhor, “*como tratar de forma mais inteligente os problemas reais que diariamente surgem nas empresas?*”. Hoje o estado do Ceará apresenta-se em excepcional situação de crescimento industrial, lastreado por diversos projetos, como se pode destacar: os pólos petroquímico e siderúrgico em implantação na região do Pecém, os investimentos em setores como turismo, energias eólicas e térmicas, biodiesel, gás natural, transportes, recursos hídricos, entre outros, que permitem situar o Estado com uma nova infra-estrutura que viabiliza a instalação de novas indústrias e, conseqüentemente, fomentando o seu crescimento sócio econômico. Estas e outras ações demandam e continuarão a demandar recursos humanos qualificados capazes de auxiliar as empresas que já estão instaladas e as que surgirão, não só neste espaço geográfico, mas também em outras regiões do país.

Nesse ponto, cabe a indagação: Qual o conhecimento específico que esse novo profissional necessita?

De acordo com o currículo do curso de Matemática Industrial da Universidade do Federal Ceará, encontrado no site <https://sites.google.com/a/dema.ufc.br/mi/>, para lidar com os desafios industriais e empresariais, ter conhecimentos de matemática pura e aplicada é fundamental para o melhor exercício profissional. A integralização curricular engloba disciplinas de cálculo, probabilidade, álgebra linear e matricial, computação e estatística. Tratando-se do viés computacional, as ênfases devem estar voltadas a disciplinas de programação linear, inteira e não-linear, otimização combinatória, laboratório de programação, construção, análise de algoritmos e controle de qualidade, dentre outras, todas formando a espinha dorsal de formação profissional. A interdisciplinaridade é um elemento inerente à profissão, desta forma, o futuro matemático industrial poderá realizar estudos voltados para economia, administração, matemática financeira e estatística, através de disciplinas optativas ou livres.

Vê-se, então, que este profissional colabora para atender a necessidade da interface entre matemática e indústria. A informática, cada vez mais presente em todas as áreas do cotidiano, pode auxiliá-lo para este fim, tanto na utilização de programas apropriados como nas informações dispostas na internet. Hoje, existem muitos alunos já inseridos no acesso aos computadores e à internet, sendo esta

uma realidade irreversível e que deve ser aproveitada, buscando ter esse novo profissional efetivamente ativo no cenário industrial.

No site do Ministério da Educação e Cultura (MEC), cujo endereço é <http://emec.mec.gov.br/>, observar-se que o curso de Matemática Industrial já é fornecido pelas universidades federais dos estados do Ceará, Goiás, Espírito Santo e Paraná.

Deve ainda ser citado o curso do Centro Educacional Profissional do Sindicato dos Metalúrgicos de São Paulo, com o título “*Matemática aplicada a Indústria*” (http://escolatecnica.metalurgicos.org.br/curso.asp?id_con=88).

Interessante dizer que dito curso tem como pré-requisito apenas o ensino fundamental completo. Possui carga horária de 60 horas e visa desenvolver competências relativas à matemática básica e aplicada à indústria, preparando o aluno para melhor entendimento dos conteúdos referentes aos cursos técnicos, sendo auxiliar nas atividades rotineiras da Indústria. É interessante citar aqui o conteúdo para este curso, onde os principais pontos do ensino fundamental que ajudam na realização desse objetivo são:

- Operações básicas;
- Expressões numéricas;
- Exponenciação;
- Frações e números decimais;
- Potenciais de frações;
- Equações;
- Regra de três;
- Porcentagem;
- Figuras geométricas.

No ambiente desse estudo pode também ser citado a atuação do Centro de Pesquisa em Matemática aplicada à Indústria, localizado em São Carlos-SP. As informações de sua história de criação e o trabalho que desenvolve podem ser mais bem conhecidas através do site <http://www.cemeai.icmc.usp.br/>.

Algumas instituições brasileiras chegaram a níveis internacionais de excelência no ensino e na pesquisa, apresentando produção científica muito similar aos melhores centros do mundo. Podem ser citadas, dentre outras, algumas instituições como o Instituto de Matemática e Estatística (*IME*), o Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (*ICMC*) ambos da Universidade de São Paulo (*USP*); o Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (*IMECC*) da Universidade Estadual de Campinas(*UNICAMP*); e o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (*IMPA*) do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (*CNPq*). Assim, a matemática profissional brasileira alcançou um estágio notável de desenvolvimento quando avaliada por parâmetros internacionais.

Nesse contexto, em maio de 2010, por iniciativa de um grupo de docentes do Departamento de Matemática Aplicada e Estatística, o colegiado do *ICMC* aprovou a criação do Centro de Matemática e Estatística Aplicadas à Indústria (*CeMEAI*). A proposta de criação do *CeMEAI* decorreu da experiência desse grupo de docentes com projetos de pesquisa envolvendo grandes empresas como *EMBRAER*, *PETROBRÁS*, *UNILEVER*, *FURNAS* etc. A necessidade de expandir a pesquisa aplicada se tornou evidente a partir de experiências anteriores, motivando a criação de uma estrutura a partir da qual outras empresas pudessem se beneficiar. Além disso, uma estrutura de apoio à pesquisa aplicada também beneficiaria estudantes, incentivando sua participação na solução de problemas práticos, contribuindo assim para a formação de recursos humanos de qualidade.

O programa Centro de Pesquisa, Inovação e Difusão (*CEPID*) foi lançado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (*FAPESP*) em 1999 e, em 2000, aprovou o apoio a 10 centros de excelência em diversas áreas de conhecimento – posteriormente desdobrados em 11 – por um período de até 11 anos. Os centros aprovados atuam nas áreas de pesquisa e tratamento do câncer, óptica e fotônica, estudos da metrópole e da violência, sono, genoma humano, terapia celular, desenvolvimento de materiais cerâmicos, biologia molecular estrutural e toxilogia.

Em 2011, a *FAPESP* publicou um novo edital para o programa *CEPID* visando a seleção de até 15 propostas para a criação de novos centros. Com isso, foi proposta a criação do *CEPID – CeMEAI*, buscando a expansão do *CeMEAI*,

sendo seu projeto submetido a *FAPESP* em 2011 pelo Prof. Dr. José Alberto Cuminato, docente do Departamento de Matemática Aplicada e Estatística do *ICMC* e aprovado em junho de 2013.

O *CEPID – CeMEAI*, com sede no *ICMC* da *USP* São Carlos, é um centro de pesquisa especialmente adaptado e estruturado para promover o uso de ciências matemáticas (em particular matemática aplicada, estatística e ciência da computação) como um recurso industrial. As atividades do Centro serão realizadas dentro de um ambiente interdisciplinar, enfatizando-se a transferência de tecnologia, a educação e a difusão do conhecimento para as aplicações industriais .

Os primeiros *CEPIDs* foram criados pela *FAPESP* em 2000 com o objetivo de estabelecer um novo paradigma para a organização da pesquisa científica. Os Centros desenvolvem pesquisas na fronteira do conhecimento e, ao mesmo tempo, realizam a transferência dos seus resultados para diferentes níveis da administração pública, de forma a subsidiar políticas para o setor privado, na forma de novas tecnologias; para os docentes e discentes do ensino médio, por meio de cursos de extensão, graduação e pós-graduação. Na base de suas atividades, um *CEPID* tem como missão central ao longo da sua existência constituir um centro de classe mundial em pesquisa na área de seu interesse.

Com foco nas atividades de pesquisa, inovação e difusão, o *CEPID – CeMEAI* contará com investimentos da ordem de 17 milhões de reais no decorrer dos cinco anos de duração do projeto. Após esse prazo, o *CEPID* pode ser renovado por mais dois períodos de três anos cada. As atividades serão desenvolvidas nas áreas de otimização aplicada e pesquisa operacional, mecânica de fluidos computacional, avaliação de risco, inteligência computacional e engenharia de software.

Além do *ICMC*, o *CEPID – CeMEAI* conta com outras cinco instituições associadas: Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal de São Carlos (*CCET – UFSCar*); Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas (*IMECC – UNICAMP*); Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista (*IBILCE – UNESP*); Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista (*FCT – UNESP*); Instituto de Aeronáutica e Espaço (*IAE*) e Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (*IME – USP*).

O *CeMEAI* conta com recursos humanos especializados e infraestrutura avançada para compartilhar conhecimento com os setores industrial, de serviços, educativo, tecnológico e administrativo. Tem como meta transferir o conhecimento matemático para outras áreas da Ciência e para a indústria. Para tanto, sua principal estratégia é a construção de uma infra-estrutura robusta no que diz respeito a recursos humanos, equipamentos computacionais e oportunidades de colaboração.

Nos últimos anos, o crescimento da ciência no Brasil, e da matemática em particular, foi notável. Contudo, a aplicação tecnológica, muitas vezes medida pelas patentes registradas, não obteve o mesmo sucesso. Para suprir essa lacuna, é necessário criar estruturas institucionais que estabeleçam pontes entre as ciências matemáticas e suas aplicações, de modo a fluir harmonicamente dos centros acadêmicos até ao ambiente industrial.

Não se trata apenas de orientar os trabalhos teóricos a áreas potencialmente aplicáveis, mas de avançar nas aplicações até as últimas conseqüências, ou seja, buscar uma efetiva implementação na indústria, em sentido amplo.

O plano do *CeMEAI* envolve, em primeiro lugar, a aglutinação de grupos destacados nas áreas mais aplicáveis da matemática em São Paulo, visando seu direcionamento a aplicações efetivas. Os grupos selecionados têm demonstrado excelência na atividade científica convencional e, em muitos casos, em aplicações relevantes. A foto 1 mostra um equipamento do *CeMEAI*.

Foto 1- *CeMEAI* –São Carlos-SP:



Fonte: site <http://cepid.fapesp.br/centro/15/>

Pode-se perceber através deste capítulo que a matemática é fundamental nas práticas industriais, diminuindo os custos, apresentando inovações que auxiliam na segurança do trabalho e no bem estar dos trabalhadores. Um aluno bem preparado no ensino da matemática durante o período escolar dos ensinos fundamental, médio e superior, se torna um colaborador importante na Indústria.

Através desse estudo técnico : “Educação na interface entre Matemática e Indústria” (EIMI), como também do curso de formação superior de Matemático Industrial, e a criação desses Centros de Pesquisa da Matemática desenvolvidos a partir de 2010, percebe-se que a Indústria tinha e tem essa necessidade do apoio da matemática de uma maneira mais efetiva e atualizada. O mundo em constante mudança e os avanços tecnológicos cada vez mais intensos exigem que o ensino matemático contribua de maneira prática, atual e intensa nas Indústrias .

O grande desafio desses Centros de Pesquisa será vencer a falta de tradição que as ciências matemáticas em geral enfrentam no Brasil. Aqui, as ciências aplicadas são outras, como engenharia, que é muito mais valorizada, enquanto que as ciências matemáticas são sempre vistas apenas como uma atividade acadêmica, ainda que estejam presentes em algumas grandes empresas, como a *PETROBRAS*.

2. CONTEÚDOS ABORDADOS:

Neste capítulo será abordados os conceitos da Matemática e da Física utilizados no corpo deste trabalho.

2.1. Matemática:

Nesta seção será abordados diversos assuntos que são ensinados no ensino fundamental, médio, técnico e superior.

2.1.1. Números reais:

Segundo Lima et al. (1998, v.1, p.58), o conjunto dos números reais, representado por \mathbb{R} é aquele formado por todos os números com representação decimal, ou seja, as decimais exatas ou periódicas (que são números racionais) e as

decimais não exatas e não periódicas (que são os números irracionais). Esse conjunto é representado por \mathbb{R} .

Sabe-se que todo número racional pode ser expresso por uma fração irredutível $\frac{p}{q}$, onde p e q são números inteiros com $\text{mdc}(p, q) = 1$.

Todos esses números possuem casas decimais exatas ou periódicas, porém existem números que não podem ser representados por essa fração irredutível. O número $\sqrt{2}$ é um exemplo desse fato. Como prova, admite-se que $\sqrt{2}$ é representado por $\frac{p}{q}$. Assim $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$, sendo p e q inteiros positivos com $\text{mdc}(p, q) = 1$. Elevando ao quadrado ambos os membros obtém-se $\frac{p^2}{q^2} = 2$, o que implica que $p^2 = 2q^2$. Assim, p^2 é par implicando p par. Se p é par então $p = 2n$, onde n é natural, o que implica que $p^2 = 4n^2 = 2q^2$, ou seja, $q^2 = 2n^2$. Portanto q também é par, que é um absurdo, pois $\text{mdc}(p, q) = 1$.

Conclui-se então que o número $\sqrt{2}$ é irracional. Esse número possui casas decimais não exatas e não periódicas.

Existem infinitos números irracionais tais como $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi, e \dots$ dentre outros.

Pode-se então dizer que o conjunto dos números reais é a união entre o conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais.

Todos os números reais podem ser representados em uma reta chamada de reta real com cada um de seus infinitos pontos sendo um número real.

A figura 1 mostra uma reta real, onde os pontos A, B, C e D estão representando os números $\frac{-5}{2}, -1, 1$ e π , respectivamente.

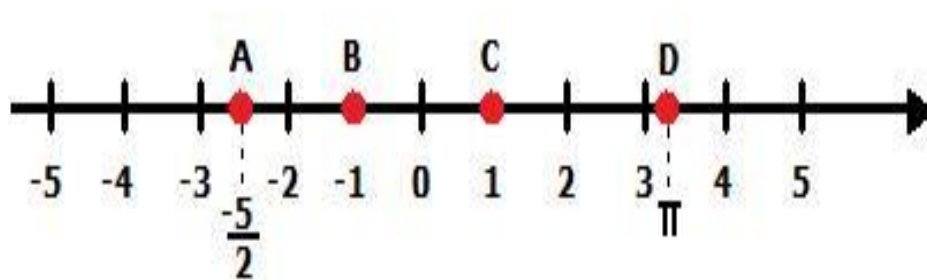


Figura 1 - Representação da reta real:

Fonte: silviagnery. blogs.com

2.1.2. Medidas de comprimento:

Define-se comprimento como a grandeza física que expressa a distância entre dois pontos. Comumente chama-se de altura a um comprimento vertical e largura a um comprimento horizontal.

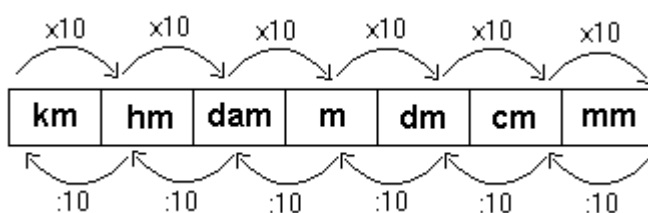
Desde a Antiguidade os povos foram criando suas unidades de medidas. Cada povo possuía sua própria unidade padrão. Com o desenvolvimento do comércio as negociações foram ficando inviáveis com tantas medidas diferentes. Houve então a necessidade de se adotar um padrão de medida único.

Em 1791 foi criado o sistema métrico decimal e o metro(*m*)ficou sendo a unidade padrão.

A palavra metro vem do grego métron. Foi inicialmente estabelecido que a medida do metro fosse a décima milionésima parte da distância do Pólo Norte ao Equador, no meridiano que passa por Paris, em 1983 a Conferência Internacional de Pesos e Medidas definiu o metro como sendo o comprimento do trajeto percorrido no vácuo pela luz no intervalo de tempo de $\frac{1}{299792458}$ de segundo (FERRARO, SOARES, 1998, p.7).

Além do metro foram criados seus múltiplos e submúltiplos cujos nomes são quilômetro (*km*), hectômetro (*hm*), decâmetro (*dam*), decímetro (*dm*), centímetro (*cm*) e milímetro (*mm*) apresentados na figura 2.

Figura 2 – Múltiplos e submúltiplos do metro:



Fonte: www.somatematica.com.br

Os múltiplos são utilizados para medir grandes distâncias e os submúltiplos para pequenas distâncias.

Para converter de um múltiplo ou submúltiplo para outro se utiliza multiplicações e/ou divisões sucessivas por 10 de acordo com sua posição ocupada.

Assim, para converter uma medida em metros para milímetros multiplica-se por 10 três vezes e para converter uma medida em centímetros para quilômetros divide-se por 10 cinco vezes.

Por exemplo, a conversão de 5,4 metros para centímetros e para quilômetros se dará da seguinte maneira:

$$5,4 \text{ m} = 5,4 \cdot 10^2 \text{ cm} = 540 \text{ cm} \text{ e } 5,4 \text{ m} = 5,4 \cdot 10^{-3} \text{ km} = 0,0054 \text{ km}$$

Existem outras unidades não pertencentes ao sistema métrico decimal que são usualmente usadas nos países de língua inglesa que são o pé (*ft*) e a polegada (*pol*). Tem-se que 1 pé corresponde a 30,48 *cm* e que 1 polegada corresponde a 2,54 *cm*. Logo 1 pé corresponde a 12 polegadas.

2.1.3. Medidas de tempo:

A definição de tempo é cercada de vários mistérios para a humanidade e ainda hoje é motivo de debate entre filósofos e cientistas. Não faz parte do escopo deste trabalho entrar nesse debate. Por isso, será considerado simplesmente que tempo, segundo Ferraro e Soares (1998, p.6), é a duração de um determinado evento.

O Sol foi o primeiro relógio do homem e o intervalo de tempo decorrido entre as suas sucessivas passagens sobre um dado meridiano deu origem ao chamado dia solar.

A unidade padrão adotada para medir o tempo é o segundo (*s*), que é definido como sendo o tempo equivalente a $\frac{1}{86400}$ do dia solar médio, (FERRARO, SOARES, 1998, p.6).

Além do segundo foram criados seus múltiplos cujos nomes são minuto (*min*), hora (*h*) e dia (*d*).

Uma observação importante é que as medidas de tempo não pertencem ao sistema métrico decimal. Sabe-se que 1 dia corresponde a 24 horas, 1 hora corresponde a 60 minutos e 1 minuto corresponde a 60 segundos.

Portanto, 2,40 horas não são 2 horas e 40 minutos e sim 2 horas e $\frac{40}{100}$ de 1 hora ou $\frac{40}{100}$ de 60 minutos, ou seja, 24 minutos. Logo, $2,40h = 2h\ 24min$.

Existem também outros múltiplos da unidade de tempo como a semana, que corresponde a 7 dias, o mês, que corresponde a 30 ou 31 dias, o ano, que corresponde a 365 dias ou 12 meses, dentre outros.

Em várias situações tem-se a necessidade de obter a duração de um determinado evento através de operações com tempo.

Como exemplo, a duração de um evento que teve início às $15h\ 35min\ 42s$ de um determinado dia e terminou às $22h\ 42min\ 35s$ desse mesmo dia é obtida diminuindo esses horários, ou seja, $22h\ 42min\ 35s - 15h\ 35min\ 42s$. Para tornar possível o cálculo, deve-se considerar o horário de $22h\ 42min\ 35s$ como $22h\ 41min\ 95s$, ou seja, soma-se aos segundos o valor 60 e abate-se dos minutos o valor 1, visto que 1 minuto equivale a 60 segundos. Diante do que foi exposto, o cálculo se torna $22h\ 41min\ 95s - 15h\ 35min\ 42s$, que fornece $7h\ 6min\ 53s$.

Outro exemplo é obter a previsão de um determinado evento que teve início às $20h\ 15min\ 41s$ de certo dia e teve $5h\ 10min\ 23s$ de duração. Para tal deve-se somar ao horário de início o tempo de duração, ou seja, $20h\ 15min\ 41s + 5h\ 10min\ 23s$. Efetuando cada múltiplo separadamente obtém-se $25h\ 25min\ 64s$. Como 60 segundos vale 1 minuto tem-se $25h\ 26min\ 4s$. Como o dia possui somente 24 horas, o horário de término desse evento será $1h\ 26min\ 4s$ do dia seguinte.

2.1.4. Razões e Proporções:

Segundo Centurión, Marília (2012, p 135) denomina-se razão entre dois números inteiros p e q , com $q \neq 0$, o quociente $\frac{p}{q}$. A palavra razão vem do latim “ratio”, que significa divisão. Em diversas situações utiliza-se o conceito de razão. Como exemplo, sabendo-se que uma turma possui 24 meninos e 36 meninas, a razão entre o número de meninos e o de meninas será $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.

Denomina-se proporção à sentença matemática que exprime a igualdade entre duas razões. Assim diz-se que os números inteiros não nulos p_1, q_1, p_2 e q_2

formam uma proporção se $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$. Os números q_1 e p_2 são chamados de meios da proporção e os números p_1 e q_2 extremos da proporção.

Em toda proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos, ou seja, $q_1 \cdot p_2 = p_1 \cdot q_2$. É fácil verificar que se $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$, tem-se que $\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} = 0$, ou ainda $\frac{p_1 \cdot q_2 - q_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2} = 0$. Como $q_1 \cdot q_2 \neq 0$, se conclui que $p_1 \cdot q_2 - q_1 \cdot p_2 = 0$, ou seja, $q_1 \cdot p_2 = p_1 \cdot q_2$. Portanto, se três números de uma proporção forem conhecidos, pode-se determinar o quarto número.

Como exemplo, o valor de x na proporção $\frac{x}{5} = \frac{12}{15}$ será determinado multiplicando os meios e os extremos, ou seja, $15 \cdot x = 5 \cdot 12$. Assim, $x = 4$.

2.1.5. Porcentagem:

Segundo Andrini, Álvaro (2012, p 225), toda razão que possui denominador 100 é chamada de razão centesimal. Têm-se como exemplos as razões centesimais $\frac{15}{100}$, $\frac{9}{100}$, $\frac{23}{100}$.

Essas razões são representadas pelo símbolo (%), que significa “por cento”. Assim, as razões dos exemplos acima são representadas pelas expressões 15%, 9% e 23%, respectivamente. Essas expressões são comumente chamadas de taxas percentuais e o valor obtido quando aplica-se uma taxa percentual a um determinado valor chama-se de porcentagem.

Como exemplo, o valor de 40% de 200 será calculado multiplicando a razão centesimal $\frac{40}{100}$ por 200, ou seja, $\frac{40}{100} \cdot 200 = 80$.

Porcentagem é muito usada na matemática financeira no cálculo de descontos, lucros na venda de um produto e determinação de taxas de juros.

Outro exemplo seria calcular a taxa percentual do lucro em relação ao preço de compra que um lojista obteve quando comprou um produto por 200 reais na fábrica e vendeu em sua loja por 250 reais. O lucro obtido foi de 50 reais. Esse lucro corresponde a $x\%$ de 200, que foi o preço de compra. Assim, tem-se $\frac{x}{100} \cdot 200 = 50$, ou ainda, $200 \cdot x = 5000$, que resulta em $x = 25\%$.

2.1.6. Médias:

Uma média de uma lista de números é um valor que substitui todos os valores dessa lista sem alterar certa característica. Serão abordadas nesta seção a média aritmética e a média aritmética ponderal.

2.1.6.1. Média aritmética:

Quando a característica da lista de números é a soma de seus elementos, obtém-se a mais simples de todas as médias chamada de média aritmética (*ma*). Assim, a média aritmética da lista de números $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ é um valor tal que $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = n \cdot ma$. Assim, tem-se que:

$$ma = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Como exemplo, a média aritmética entre os números 5, 8, 10 e 15 será:

$$ma = \frac{5 + 8 + 10 + 15}{4} = \frac{38}{4} = 9,5$$

2.1.6.2. Média aritmética ponderada:

Se a lista de números se caracterizarem por p_1 números iguais a x_1 , p_2 números iguais a x_2 , p_3 números iguais a x_3 , e assim sucessivamente, até p_n números iguais a x_n , tem-se a média aritmética desses números denominada média aritmética ponderal (*map*). Os números $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ são chamados de pesos dos números $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, respectivamente. Assim, tem-se que:

$$map = \frac{p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + p_3 \cdot x_3 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n}$$

Como exemplo, pode-se considerar um aluno que obteve as notas 5,5; 7,0; 8,0; 2,5 e 4,0 nas matérias Geografia, História, Português, Matemática e Física, respectivamente. A média desse aluno considerando que as matérias na ordem dada possuem os pesos 2, 2, 5, 6 e 4, respectivamente, será:

$$map = \frac{2 \cdot 5,5 + 2 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 2,5 + 4 \cdot 4}{2 + 2 + 5 + 6 + 4} = \frac{11 + 14 + 40 + 15 + 16}{19} = \frac{96}{19} \cong 5,05$$

2.1.7. Expressões algébricas:

São definidas como expressões matemáticas que indicam termos algébricos ou soma entre termos algébricos. O termo algébrico, também chamado de monômio, é o produto de números reais indicados por letras e números. Temos como exemplos de monômios: $2ab$, $4b^3c$, $\frac{5a^2b^3}{3c}$, $2\sqrt{abc}$. As letras constituem a parte variável do monômio, pois podem assumir qualquer valor numérico.

Quando a expressão algébrica indica a soma de dois monômios é chamada de binômio, quando indica a soma de três monômios é chamada de trinômio e quando indica a soma de mais de três monômios é chamada de polinômio. Os binômios e os trinômios também podem ser chamados de polinômios.

Em diversas situações emprega-se a igualdade ou a desigualdade entre expressões algébricas para resolver diversos problemas e estabelecer fórmulas em outros campos do conhecimento como, por exemplo, na Física e Química.

Como exemplo, o valor de a na igualdade $a = \frac{bc^3}{3}$, sendo $b = 2$ e $c = 4$ será $a = \frac{2 \cdot 4^3}{3} = \frac{128}{3}$.

Outro exemplo é determinar o maior valor inteiro p , tal que seja verdadeira a desigualdade $p \leq \frac{ab^2}{c}$, sendo $a = 3$, $b = 2$ e $c = 7$. Substituindo os valores de a , b e c , tem-se que $p \leq \frac{3 \cdot 2^2}{7}$, ou seja, $p \leq 1,714$. Logo, o maior inteiro é 1.

2.1.8. Trigonometria:

É um ramo da matemática que estuda e estabelece métodos de resolução de diversos problemas relacionados às medidas de triângulos.

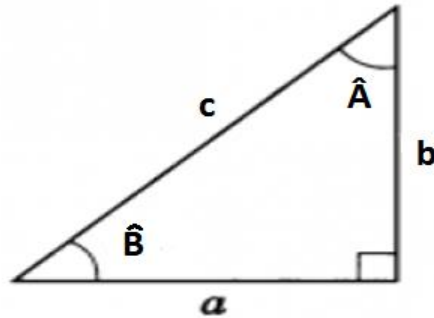
Serão abordados nesta seção as razões trigonométricas, o arco duplo e a Lei dos cossenos.

2.1.8.1. Razões trigonométricas:

Segundo Paiva, Manoel (2009, vol 1 p 73) as razões trigonométricas estão intrinsecamente relacionadas às medidas dos ângulos agudos de um triângulo

retângulo. A figura 3 mostra um triângulo retângulo de catetos de medidas a e b e hipotenusa de medida c , bem como os ângulos agudos de medidas \hat{A} e \hat{B} .

Figura 3 - Triângulo Retângulo:



Fonte: O autor, 2015

Considera-se que o cateto de medida a está oposto ao ângulo \hat{A} e adjacente ao ângulo \hat{B} e o cateto de medida b está oposto ao ângulo \hat{B} e adjacente ao ângulo \hat{A} .

A primeira razão trigonométrica é chamada de seno (*sen*) e é definida como a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo e a medida da hipotenusa. Assim, em relação à figura 3, tem-se que:

$$\text{sen } \hat{A} = \frac{a}{c} \text{ e } \text{sen } \hat{B} = \frac{b}{c}$$

A segunda razão trigonométrica é chamada de cosseno (*cos*) e é definida como a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo e a medida da hipotenusa. Assim, em relação à figura 3, tem-se que:

$$\text{cos } \hat{A} = \frac{b}{c} \text{ e } \text{cos } \hat{B} = \frac{a}{c}$$

A terceira razão trigonométrica é chamada de tangente (*tg*) e é definida como a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo e a medida do cateto adjacente ao mesmo ângulo. Assim, em relação à figura 3, tem-se que:

$$\text{tg } \hat{A} = \frac{a}{b} \text{ e } \text{tg } \hat{B} = \frac{b}{a}$$

Existe uma relação entre essas razões que se verifica dividindo a razão seno pela razão cosseno de um determinado ângulo. Considerando o ângulo \hat{A} da figura 3, tem-se que $\frac{\text{sen } \hat{A}}{\text{cos } \hat{A}} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \text{tg } \hat{A}$. Portanto, se conclui que $\text{tg } \hat{A} = \frac{\text{sen } \hat{A}}{\text{cos } \hat{A}}$.

Qualquer ângulo agudo possui um valor determinado de cada razão trigonométrica. Por exemplo, o ângulo de 30° possui os seguintes valores de suas razões trigonométricas: $\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$; o ângulo de 60° possui os valores: $\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$ e $\text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$ e o ângulo de 45° possui os valores: $\text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{cos } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\text{tg } 45^\circ = 1$.

Existem também as razões trigonométricas que derivam dessas três dadas que são secante (*sec*), cossecante (*cossec*) e cotangente (*cotg*). Elas estão relacionadas da seguinte maneira: $\text{sec } x = \frac{1}{\text{cos } x}$, $\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}$ e $\text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x}$, sendo x um ângulo agudo tal que $0 < x < 90^\circ$.

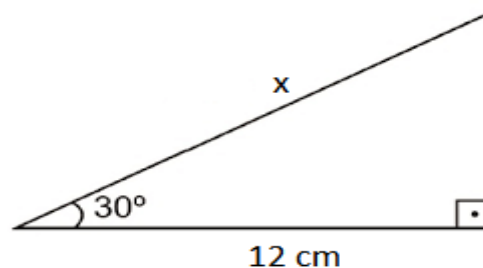
Existe uma relação fundamental entre o seno e o cosseno de um determinado ângulo. Para mostrar tal relação utiliza-se o triângulo retângulo da figura 3. Com relação ao ângulo agudo \hat{A} tem-se que $a = \text{sen } \hat{A} \cdot c$ e $b = \text{cos } \hat{A} \cdot c$.

Pelo Teorema de Pitágoras, sabe-se que $a^2 + b^2 = c^2$. Assim, tem-se que $(\text{sen } \hat{A} \cdot c)^2 + (\text{cos } \hat{A} \cdot c)^2 = c^2$, ou ainda, $(\text{sen } \hat{A})^2 \cdot c^2 + (\text{cos } \hat{A})^2 \cdot c^2 = c^2$. Como $c \neq 0$, pode-se dividir toda a igualdade por c^2 ficando $(\text{sen } \hat{A})^2 + (\text{cos } \hat{A})^2 = 1$, que é chamada de relação fundamental da Trigonometria.

As razões trigonométricas são de grande utilidade na solução de diversos problemas relacionados aos triângulos.

Como exemplo, considerando o triângulo da figura 4, o valor de x será:

Figura 4 – Triângulo exemplo:



Fonte: O autor, 2015

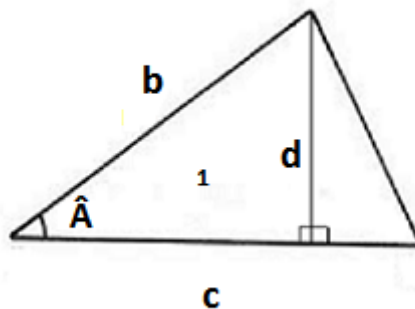
Primeiramente deve-se escolher a razão trigonométrica adequada em cada situação. No triângulo da figura 4 tem-se que o cateto de medida 12 cm é adjacente ao ângulo de 30° e se quer determinar a medida da hipotenusa. Portanto, a razão trigonométrica adequada é o cosseno, pois é a razão que relaciona o cateto adjacente com a hipotenusa. Assim, tem-se que $\cos 30^\circ = \frac{12}{x}$, ou seja, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{12}{x}$, ou ainda $x \cdot \sqrt{3} = 24$, o que determina que $x = 8\sqrt{3}\text{ cm}$.

2.1.8.2. Arco duplo:

Em vários problemas há a necessidade de se determinar as razões trigonométricas dos arcos duplos, ou seja, $\sin 2\hat{A}$, $\cos 2\hat{A}$ e $\text{tg } 2\hat{A}$. Determina-se então, as fórmulas que calculam essas razões em função das razões vistas na seção anterior.

Inicialmente, determina-se uma fórmula bem interessante que calcula a área de um triângulo qualquer em função da razão trigonométrica seno. Utiliza-se para tal o triângulo da figura 5.

Figura 5 – Triângulo qualquer:

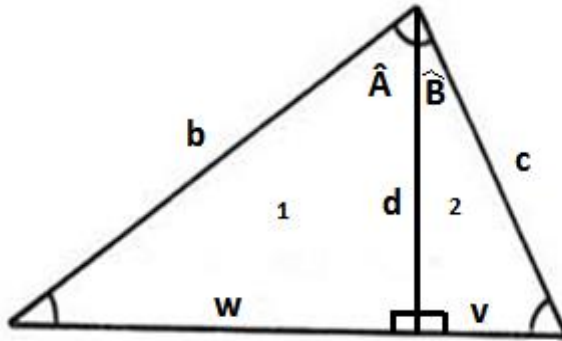


Fonte: O autor, 2015

Sabe-se que a área de qualquer triângulo ($A\Delta$) é a metade do produto de sua base pela altura respectiva a essa base. Assim, no triângulo da figura 5, tem-se que $A\Delta = \frac{c \cdot d}{2}$. No triângulo retângulo "1" sabe-se que $\sin \hat{A} = \frac{d}{b}$, ou seja, $d = b \cdot \sin \hat{A}$. Assim, tem-se que $A\Delta = \frac{b \cdot c \cdot \sin \hat{A}}{2}$. Obtém-se, então, a fórmula da área de um triângulo qualquer utilizando a razão trigonométrica seno.

Considera-se agora o triângulo formado por dois triângulos retângulos representado na figura 6:

Figura 6 – Triângulo formado por dois triângulos retângulos:



Fonte: O autor, 2015

Como foi visto, a área desse triângulo ($A\Delta$) será determinada por $A\Delta = \frac{b.c.\text{sen}(\hat{A}+\hat{B})}{2}$. Por outro lado, tem-se que a mesma área será determinada por $A\Delta = \frac{(w+v).d}{2}$. Igualando as duas expressões obtém-se que $b.c.\text{sen}(\hat{A} + \hat{B}) = w.d + v.d$. Arrumando a igualdade obtém-se que $\text{sen}(\hat{A} + \hat{B}) = \frac{w}{b} \cdot \frac{d}{c} + \frac{v}{c} \cdot \frac{d}{b}$. Sabe-se ainda que no triângulo retângulo "1" $\text{sen } \hat{A} = \frac{w}{b}$ e $\text{cos } \hat{A} = \frac{d}{b}$ e no triângulo retângulo "2" $\text{sen } \hat{B} = \frac{v}{c}$ e $\text{cos } \hat{B} = \frac{d}{c}$. Assim, obtém-se a igualdade $\text{sen}(\hat{A} + \hat{B}) = \text{sen } \hat{A} \cdot \text{cos } \hat{B} + \text{sen } \hat{B} \cdot \text{cos } \hat{A}$. Se $\hat{A} = \hat{B}$, tem-se finalmente a expressão $\text{sen } 2\hat{A} = \text{sen } \hat{A} \cdot \text{cos } \hat{A} + \text{sen } \hat{A} \cdot \text{cos } \hat{A}$, ou ainda, $\text{sen } 2\hat{A} = 2 \cdot \text{sen } \hat{A} \cdot \text{cos } \hat{A}$, que é a fórmula do arco duplo para a razão seno.

Elevando ao quadrado essa igualdade e desenvolvendo:

$$(\text{sen } 2\hat{A})^2 = 4 \cdot (\text{sen } \hat{A})^2 \cdot (\text{cos } \hat{A})^2;$$

$$1 - (\text{cos } 2\hat{A})^2 = 4 \cdot [1 - (\text{cos } \hat{A})^2] \cdot (\text{cos } \hat{A})^2;$$

$$1 - (\text{cos } 2\hat{A})^2 = 4 \cdot (\text{cos } \hat{A})^2 - 4 \cdot (\text{cos } \hat{A})^4;$$

$$(\text{cos } 2\hat{A})^2 = 4 \cdot (\text{cos } \hat{A})^4 - 4 \cdot (\text{cos } \hat{A})^2 + 1;$$

$$(\text{cos } 2\hat{A})^2 = [2 \cdot (\text{cos } \hat{A})^2 - 1]^2;$$

$$\cos 2\hat{A} = 2 \cdot (\cos \hat{A})^2 - 1;$$

$$\cos 2\hat{A} = 2 \cdot (\cos \hat{A})^2 - (\sin \hat{A})^2 - (\cos \hat{A})^2;$$

$$\cos 2\hat{A} = (\cos \hat{A})^2 - (\sin \hat{A})^2$$

Obtém-se, então, a fórmula do arco duplo da razão cosseno.

Só falta agora a determinação da fórmula da $\text{tg } 2\hat{A}$, que será obtida através da relação $\text{tg } 2\hat{A} = \frac{\text{sen } 2\hat{A}}{\cos 2\hat{A}}$. Desenvolvendo:

$$\text{tg } 2\hat{A} = \frac{2 \cdot \text{sen } \hat{A} \cdot \cos \hat{A}}{(\cos \hat{A})^2 - (\sin \hat{A})^2};$$

$$\text{tg } 2\hat{A} = \frac{\frac{2 \cdot \text{sen } \hat{A} \cdot \cos \hat{A}}{(\cos \hat{A})^2}}{\frac{(\cos \hat{A})^2 - (\sin \hat{A})^2}{(\cos \hat{A})^2}};$$

$$\text{tg } 2\hat{A} = \frac{\frac{2 \cdot \text{sen } \hat{A}}{\cos \hat{A}}}{1 - \left(\frac{\text{sen } \hat{A}}{\cos \hat{A}}\right)^2};$$

$$\text{tg } 2\hat{A} = \frac{2 \cdot \text{tg } \hat{A}}{1 - (\text{tg } \hat{A})^2}.$$

Obtém-se, então, a fórmula do arco duplo da razão tangente.

Assim, as fórmulas que calculam as razões trigonométricas dos arcos duplos ficam determinadas. Como exemplo, vê-se o cálculo de $\text{sen } 60^\circ$, $\cos 60^\circ$ e $\text{tg } 60^\circ$:

$$\text{sen } 60^\circ = \text{sen}(2 \cdot 30^\circ) = 2 \cdot \text{sen } 30^\circ \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

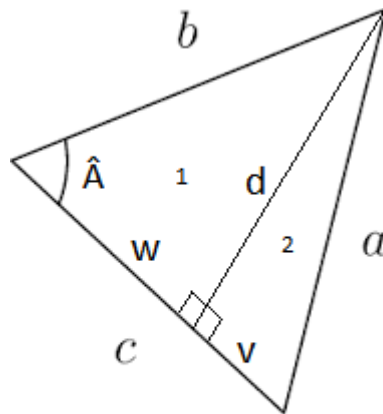
$$\cos 60^\circ = \cos(2 \cdot 30^\circ) = (\cos 30^\circ)^2 - (\sin 30^\circ)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$$

$$\text{tg } 60^\circ = \text{tg}(2 \cdot 30^\circ) = \frac{2 \cdot \text{tg } 30^\circ}{1 - (\text{tg } 30^\circ)^2} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{3}{9}} = \frac{\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}}{\frac{6}{9}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \frac{9}{6} = \sqrt{3}.$$

2.1.8.3. Lei dos cossenos:

A lei dos cossenos relaciona os lados de um triângulo qualquer com a razão trigonométrica cosseno de um de seus ângulos internos. Para determiná-la considera-se o triângulo qualquer da figura 7:

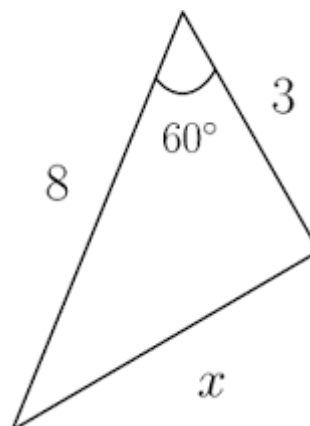
Figura 7 – Triângulo qualquer para a lei dos cossenos:



Fonte: O autor, 2015

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos “1” e “2” obtém-se, respectivamente, $d^2 = b^2 - w^2$ e $a^2 = d^2 + v^2$. Daí, segue-se que $a^2 = b^2 - w^2 + v^2$. Como $v = c - w$, tem-se que $a^2 = b^2 - w^2 + (c - w)^2$, ou ainda, $a^2 = b^2 - w^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot w + w^2$, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot w$. Sabe-se que no triângulo retângulo “1” $\cos \hat{A} = \frac{w}{b}$, ou seja, $w = b \cdot \cos \hat{A}$. Assim, tem-se que $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$, que é a fórmula da lei dos cossenos. Como exemplo, considerando o triângulo da figura 8, o valor de x será:

Figura 8 – Triângulo exemplo para a lei dos cossenos:



Fonte: www.matika.com.br

Aplicando a lei dos cossenos tem-se que:

$$x^2 = 8^2 + 3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 64 + 9 - 2 \cdot 24 \cdot \frac{1}{2} = 64 + 9 - 24 = 49; x = 7$$

2.1.9. Geometria Espacial:

Nesta seção serão abordados o conceito de volume e as fórmulas de cálculo dos volumes do cilindro reto :

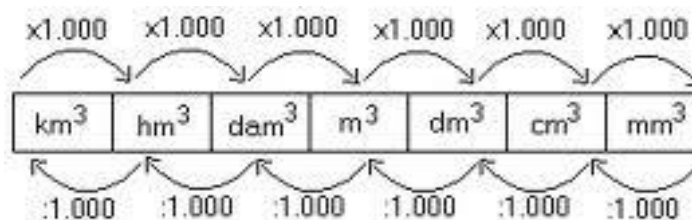
2.1.9.1. Conceito de volume:

Segundo Paiva Manuel (Matemática Paiva ,vol 2 p.218) o volume de um sólido é definido intuitivamente como a quantidade de espaço ocupado por ele. Essa quantidade é expressa por um número real que se deve comparar com uma unidade de medida. O resultado dessa comparação é chamado de volume. A unidade de medida padrão é o volume ocupado por um cubo de aresta 1 metro.

Portanto, a unidade correspondente de volume será chamada de metro cúbico (m^3).

Essa unidade também possui seus múltiplos e submúltiplos cujos nomes são quilômetro cúbico (km^3), hectômetro cúbico (hm^3), decâmetro cúbico (dam^3), decímetro cúbico (dm^3), centímetro cúbico (cm^3) e milímetro cúbico (mm^3) apresentados na figura 9.

Figura 9 – Múltiplos e submúltiplos do metro cúbico:



Fonte: www.somatematica.com.br

Os múltiplos são utilizados para medir grandes volumes e os submúltiplos para pequenos volumes.

Para converter de um múltiplo ou submúltiplo para outro utiliza-se multiplicações e/ou divisões sucessivas por 1000 de acordo com sua posição ocupada.

Assim, para converter uma medida em metros cúbicos para milímetros cúbicos multiplica-se por 1000 três vezes e para converter uma medida em centímetros cúbicos para quilômetros cúbicos divide-se por 1000 cinco vezes.

Por exemplo, converta 8,6 metros cúbicos para centímetros cúbicos e para decâmetros cúbicos:

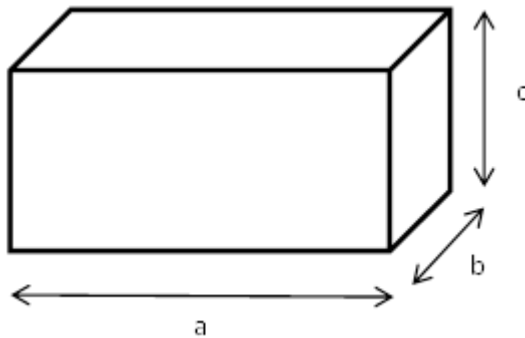
$$8,6 \text{ m}^3 = 8,6 \cdot 1000^3 \text{ cm}^3 = 8,6 \cdot 10^9 \text{ cm}^3 \text{ e } 8,6 \text{ m}^3 = 8,6 \cdot 1000^{-3} \text{ dam}^3 = 8,6 \cdot 10^{-3} \text{ dam}^3$$

Uma unidade de volume bastante usada é o litro (*l*) que corresponde a 1 dm^3 .

Existem métodos de se obter as fórmulas para o cálculo de diversos sólidos na Matemática.

Como exemplo, pode-se citar o paralelepípedo retângulo, que é um poliedro formado por 6 faces retangulares, mostrado na figura 10.

Figura 10 – Paralelepípedo retângulo:



Fonte: O autor, 2015

Esse sólido é determinado por três medidas representadas por números reais: comprimento (*a*), largura (*b*) e altura (*c*).

Seu volume pode ser representado por $V(a, b, c)$. Portanto, o cubo de aresta 1, que possui volume unitário será representado por $V(1, 1, 1)$.

Para se obter o volume desse sólido deve-se observar que ele é proporcional a cada uma de suas dimensões, ou seja, mantidas constantes duas dimensões e multiplicando-se a terceira por um número real (*w*), o volume ficará também multiplicado por *w*. Tem-se então que:

$$V(w \cdot a, b, c) = w \cdot V(a, b, c)$$

Desenvolvendo:

$$\begin{aligned} V(a, b, c) &= V(a \cdot 1, b, c) = a \cdot V(1, b, c) = a \cdot V(1, b \cdot 1, c) = a \cdot b \cdot V(1, 1, c) = a \cdot b \cdot V(1, 1, c \cdot 1) \\ &= a \cdot b \cdot c \cdot V(1, 1, 1) \end{aligned}$$

Como $V(1, 1, 1) = 1$, tem-se que $V(a, b, c) = a \cdot b \cdot c \cdot 1 = a \cdot b \cdot c$.

Portanto, o volume do paralelepípedo retângulo (V_{par}) é definido pelo produto de suas dimensões, ou seja:

$$V_{par} = a \cdot b \cdot c$$

Considerando a base do paralelepípedo retângulo de medidas a e b e a altura de medida c , o volume pode ser descrito como o produto da área da sua base pela sua altura.

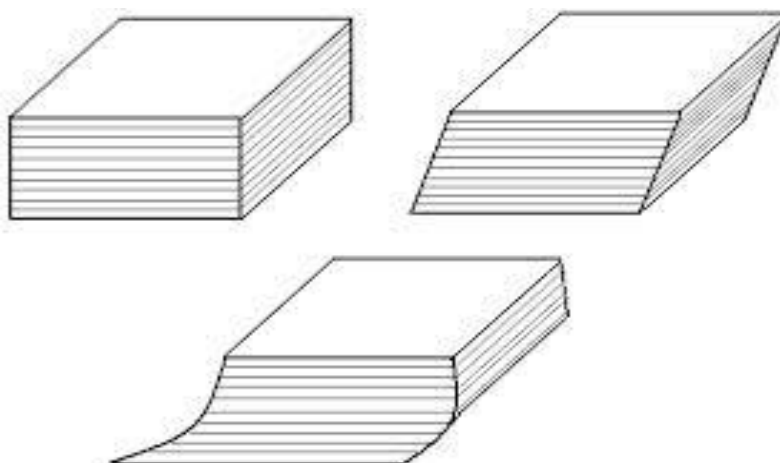
Como exemplo o volume de um paralelepípedo de 3 m de comprimento, 5 m de largura e 6 m de altura será:

$$V_{par} = a \cdot b \cdot c = 3 \cdot 5 \cdot 6 = 90 \text{ m}^3$$

Para a obtenção das fórmulas do volume de diversos sólidos utiliza-se como axioma um resultado conhecido como Princípio de Cavalieri, que estabelece que dois sólidos, nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de mesma área, são sólidos que possuem mesmo volume.

Para melhor entender esse princípio imagina-se uma resma de papel sobre uma mesa. Estando perfeitamente bem arrumada, a resma corresponde a um paralelepípedo retângulo, cujo volume é de fácil determinação. Pode-se com a utilização das mãos obter vários sólidos diferentes de mesmo volume, pois cada um deles possui 500 folhas de papel, todas iguais. Qualquer plano secante paralelo ao plano da mesa determina sobre todos esses sólidos, superfícies de mesma área representadas pela área de cada folha de papel. A figura 11 mostra três desses sólidos.

Figura 11 – Sólidos de mesmo volume:



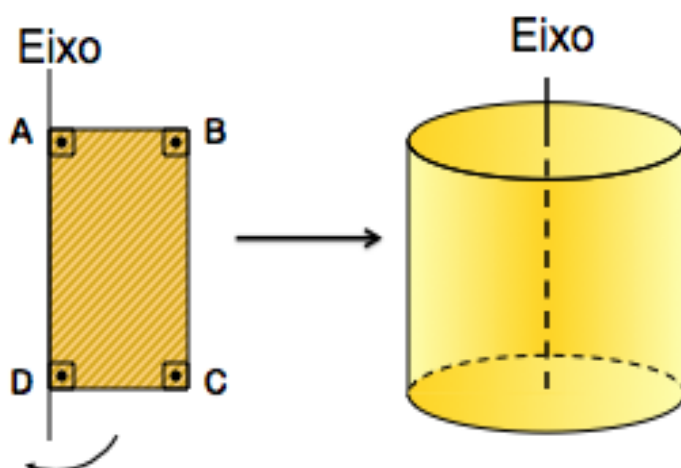
Fonte: gopixpic.com

O volume de todos esses sólidos será obtido pelo produto entre a área da base, representada pela área da folha de papel, e a altura, representada pela altura das 500 folhas.

2.1.9.2. Volume do cilindro reto:

O cilindro reto é um sólido gerado pela rotação de um retângulo em torno de um eixo que contém um de seus lados mostrado na figura 12.

Figura 12 – Cilindro gerado pela rotação de um retângulo:



Fonte: soumaisenem.com.br

O cilindro da figura 12 foi obtido da rotação do retângulo $ABCD$ em torno do eixo que contém o lado AD . Ele possui duas bases circulares congruentes cujo raio é a medida AB e uma altura que corresponde à medida AD que é a distância entre essas bases.

Para determinar o volume do cilindro reto deve-se verificar que toda seção paralela à base é congruente com essa base. Esse fato permite concluir, pelo Princípio de Cavalieri, que o volume do cilindro reto (V_{cil}) é o produto da área da sua base pela sua altura.

Considerando a base do cilindro de raio (r) e a altura (H) e sabendo-se que a área de um círculo de raio (r) vale $\pi \cdot r^2$, tem-se o volume do cilindro reto dado pela fórmula:

$$V_{cil} = \pi \cdot r^2 \cdot H$$

Como exemplo, o volume de um cilindro reto de raio (r) da base igual a 15 m e altura (H) igual a 10 m será:

$$V_{cil.} = \pi \cdot r^2 \cdot H = \pi \cdot 15^2 \cdot 10 = 2250 \cdot \pi \cong 7068,58 \text{ m}^3$$

2.2. Física

Nesta seção serão abordados diversos assuntos que são ensinados no ensino fundamental, médio e técnico.

2.2.1. Mecânica dos fluidos:

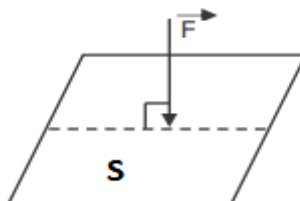
É um ramo da Física que estuda as propriedades de um fluido em repouso e em movimento. Chama-se fluido qualquer substância que possui a capacidade de escoar. Consideram-se como fluidos os líquidos e os gases.

Serão definidos nesta seção os conceitos de pressão, vazão e peso específico.

2.2.1.1. Pressão:

Considera-se uma superfície plana de área (S) sobre a qual se distribui perpendicularmente um sistema de forças cuja resultante é a força (F), conforme mostra a figura 25.

Figura 13 – Conceito de pressão:



Fonte: O autor, 2015

Define-se pressão (P_s) como sendo a relação entre a intensidade da força (F) e a área (S) da superfície, ou seja:

$$P_s = \frac{F}{S}.$$

A unidade de pressão é o Newton por metro quadrado (N/m^2). Uma unidade bastante usada é o quilograma força por centímetro quadrado (kgf/cm^2), sendo que $1N/m^2 = 0,000102 kgf/cm^2$.

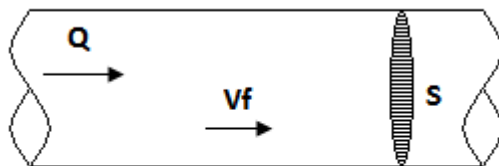
Como exemplo, a pressão de um líquido que exerce sobre o fundo de um recipiente cilíndrico de raio da base (r) igual a $1m$ uma força (F) de $10N$ será:

$$P_s = \frac{F}{S} = \frac{F}{\pi \cdot r^2} = \frac{10}{\pi \cdot 1^2} = \frac{10}{\pi} \cong 3,183 N/m^2 = 3,25 \cdot 10^{-5} kgf/cm^2.$$

2.2.1.2. Vazão:

Vazão (Q) é o volume de determinado fluido que atravessa uma determinada superfície de área (S) na unidade de tempo, ou seja, é a rapidez com a qual um volume escoar, conforme mostra a figura 26.

Figura 14 – Conceito de vazão:



Fonte: O autor, 2015

Define-se vazão (Q) como sendo o produto da velocidade de fluxo do fluido (V_f) pela área (S), ou seja:

$$Q = V_f \cdot S$$

A unidade de vazão é metro cúbico por segundo (m^3/s). Uma unidade bastante usada é o metro cúbico por hora (m^3/h), sendo que $1m^3/s = 3600 m^3/h$.

Como exemplo, a vazão (Q) de um fluido que escoar dentro de uma tubulação cilíndrica de raio interno (Ri) igual a $15cm$ com uma velocidade (Vf) de $1m/s$ será:

$$Q = Vf.S = Vf.\pi.Ri^2 = 1.\pi.(0,15)^2 \cong 0,07068 m^3/s.3600 = 254,47m^3/h$$

2.2.1.3. Peso específico:

Em uma amostra de uma substância, define-se peso específico (ρ) dessa substância como sendo a relação entre a intensidade da força peso (Fp) aplicada e o seu volume (Vol). Como $Fp = m.g$, onde m é a massa em gramas (g) e g é a aceleração da gravidade em metros por segundo ao quadrado (m/s^2), tem-se que:

$$\rho = \frac{Fp}{Vol} = \frac{m.g}{Vol}$$

A unidade do peso específico é o Newton por metro cúbico (N/m^3). Uma unidade bastante usada é o quilograma força por litro (kgf/l), sendo que $1N/m^3 = 0,000102 kgf/l$.

Como exemplo, o peso específico (ρ) de uma amostra de uma determinada substância de volume (Vol) igual a $0,01 m^3$ sob influência da força peso (Fp) de $80 N$ será:

$$\rho = \frac{Fp}{Vol} = \frac{80}{0,01} = 8000 N/m^3.0,000102 = 0,816 kgf/l.$$

3. A MATEMÁTICA NO TABG:

Neste capítulo serão abordados diversos cálculos efetuados no dia a dia do Terminal Aquaviário da Baía de Guanabara (*TABG*).

Será feita uma apresentação do Terminal, bem como de seus diversos equipamentos e operações.

3.1TABG: Digite a equação aqui.

O *TABG* é um terminal marítimo da indústria do petróleo pertencente à empresa Petrobrás Transporte S/A (*TRANSPETRO*), localizado na Baía de

Guanabara no município do Rio de Janeiro que exerce a atividade de transferência de petróleo e derivados realizando operações de cabotagem, importação, exportação e fornecimento de produtos para abastecimento de navios.

O *TABG* é composto por duas ilhas denominadas Ilha D'água (*ID*) e Ilha Redonda (*IR*) e dois píeres denominados Píer Principal (*PP*) e Píer Secundário (*PS*) interligados através de uma malha de dutos com a Refinaria de Duque de Caxias (*REDUC*), conforme figura 15.

A *ID* (foto 2) é uma unidade industrial que opera com derivados de Petróleo e a *IR* (foto 3) com *GLP*.

Nos píeres *PP* (foto 4) e *PS* (foto 5) atracam os navios tanque (*NTs*) para operações de carga e descarga de petróleo e seus derivados. Cada píer possui dois berços de atracação comportando dois navios. Cada berço do *PP* possui seis braços de conexão aos navios (foto 6) e do *PS* cinco braços de conexão (foto 7).

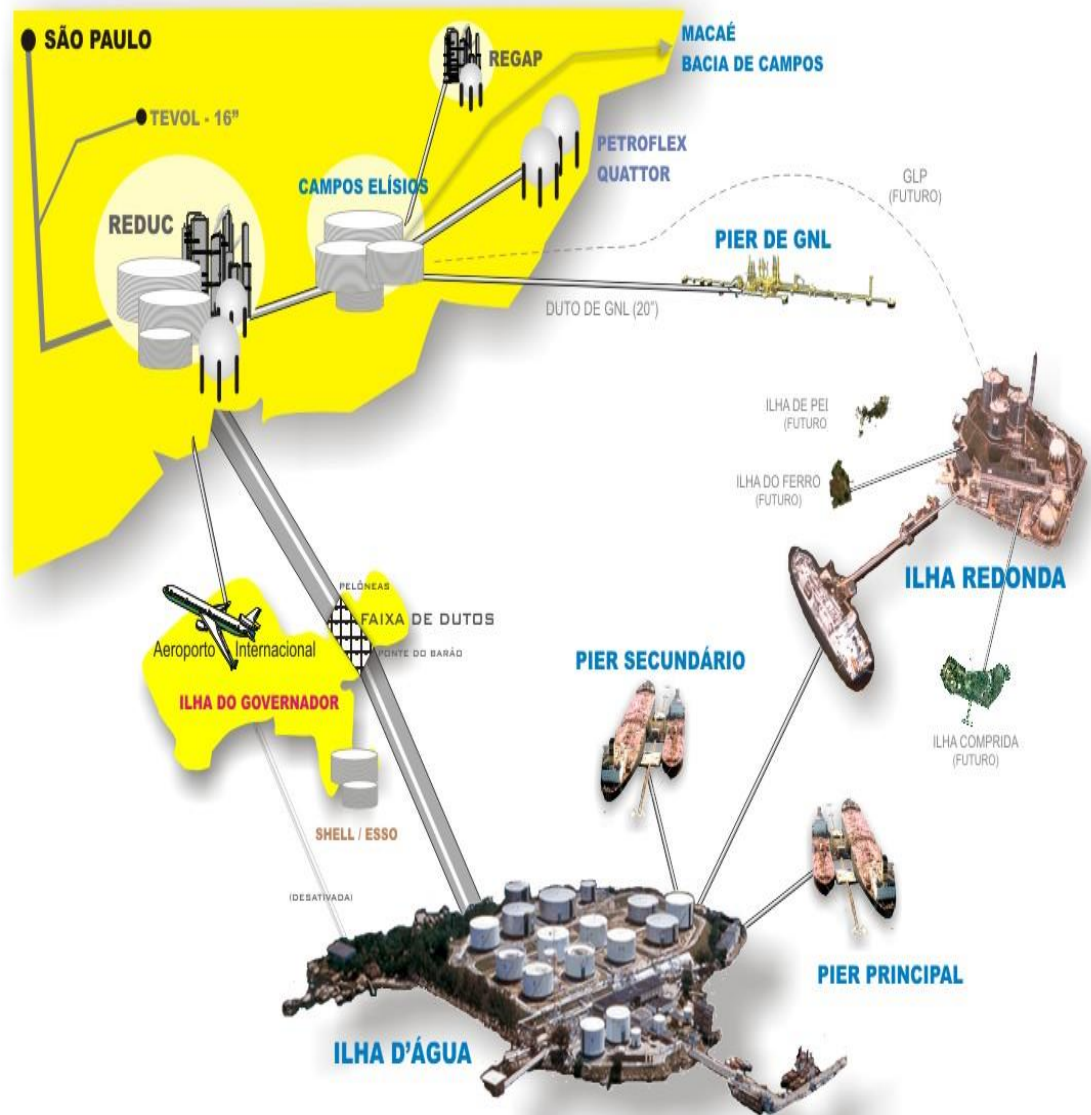
As duas ilhas possuem equipamentos de estocagem dos derivados de petróleo havendo vinte tanques na *ID*, três tanques refrigerados e quatro esferas, estes na *IR*.

As principais operações realizadas no *TABG* são:

- 1) Transferência de derivados de Petróleo da *REDUC* para a *ID*;
- 2) Transferência de derivados de Petróleo da *ID* para a *REDUC*;
- 3) Transferência de derivados entre tanques da *ID*;
- 4) Transferência de *GLP* da *REDUC* para a *IR*;
- 5) Transferência de *GLP* da *IR* para a *REDUC*;
- 6) Transferência de Petróleo e derivados da *REDUC* para um *NT*;
- 7) Transferência de Petróleo e derivados de um *NT* para a *REDUC*;
- 8) Transferência de derivados de Petróleo da *ID* para um *NT*;
- 9) Transferência de derivados de Petróleo de um *NT* para a *ID*;
- 10) Transferência de derivados de Petróleo da *REDUC* para um *NT*;

Todas essas operações são monitoradas no Centro de Controle Operacional (*CCO*) através de interpretação de dois gráficos (vazão x tempo) e (pressão x tempo) visando segurança, eficácia e preservação do meio ambiente.

Figura 15- Composição do TABG:



Fonte: Arquivo *TRANSPETRO*, 2011

Foto 2 –Ilha D'água(ID):



Fonte: Arquivo *TRANSPETRO*, 2014

Foto 3 –Ilha Redonda(IR):



Fonte: Arquivo *TRANSPETRO*, 2014

Foto 4 –Pier Principal (PP):



Fonte: Arquivo *TRANSPETRO*, 2014

Foto 5 –Pier Secundário (PS):



Fonte: Arquivo *TRANSPETRO*, 2014

Foto 6 – Braços de conexão do *PP*:



Fonte: Arquivo *TRANSPETRO*, 2013

Foto 7 – Braços de conexão do PS:



Fonte: Arquivo *TRANSPETRO*, 2014

3.2 Operação entre Navios e Terminais com 1 ou 2 linhas

Para este trabalho, será focado a parte de Navios do TABG, onde será apresentado exemplos reais do uso da matemática aplicada à indústria.

Será apresentado o desenvolvimento e dedução de uma fórmula, que quando aplicada auxilia na tomada de decisão correta para realizar uma transferência de produtos derivados do petróleo, da Refinaria de Duque de Caxias para o Píer do TABG, aos menores custos. O desenvolvimento dessa fórmula foi possível, graças a atuação de profissionais da Matemática dentro do Corpo técnico do TABG. Dessa forma, pode-se mostrar que a presença da Matemática na Indústria é de fundamental importância para as empresas de uma maneira geral.

O objetivo do TABG é possibilitar a transferência de derivados do petróleo, da Refinaria de Duque de Caxias, REDUC, para os Navios que atracam nos píeres do Terminal, sem agredir o meio ambiente e aos menores custos. A permanência de um Navio Petroleiro atracado no Terminal é uma despesa diária muito alta, como também a energia consumida pelas bombas de transferência do óleo, por isso é necessário uma operação de carregamento de Navio com o menor tempo possível e com segurança.

Quando um Navio atraca no píer do TABG, para ser carregado com produto da REDUC, esta transferência é realizada através de oleodutos que atravessam a Ilha D'Água, passam por debaixo das águas da Baía da Guanabara e chegam no Píer, onde se encontra o Navio.

Normalmente uma parte do volume a ser carregado fica estocado nos tanques da ilha D'Água, antes do Navio chegar no Píer.

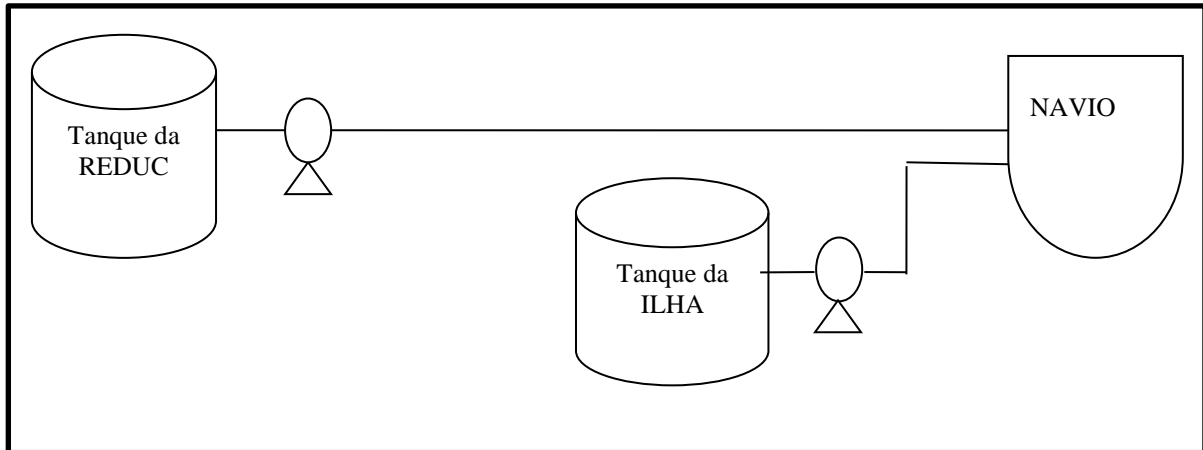
A distância da Ilha D'Água até o Navio é de 1 km, enquanto a distância da REDUC até o navio é de 17 quilômetros, e ainda uma cota de 33 metros, na Ilha do Governador por onde o oleoduto passa, a ser vencida pelas bombas da REDUC, por isso a vazão das bombas da REDUC é menor do que as da Ilha D'Água.

Para esta transferência do volume do óleo dos tanques da REDUC e da Ilha D'Água para o Navio, nós temos duas opções para sua realização:

1º caso: utilizando 2 linhas, quando a REDUC bombeia o volume do seu tanque através de uma linha para o Navio, e a Ilha D'Água bombeia o volume do seu tanque através de outra linha para o Navio.

É possível visualizar este esquema de transferência na figura que segue, onde são apresentados o tanque da REDUC, o tanque da Ilha D'Água, as suas respectivas bombas e o navio que recebe o óleo.

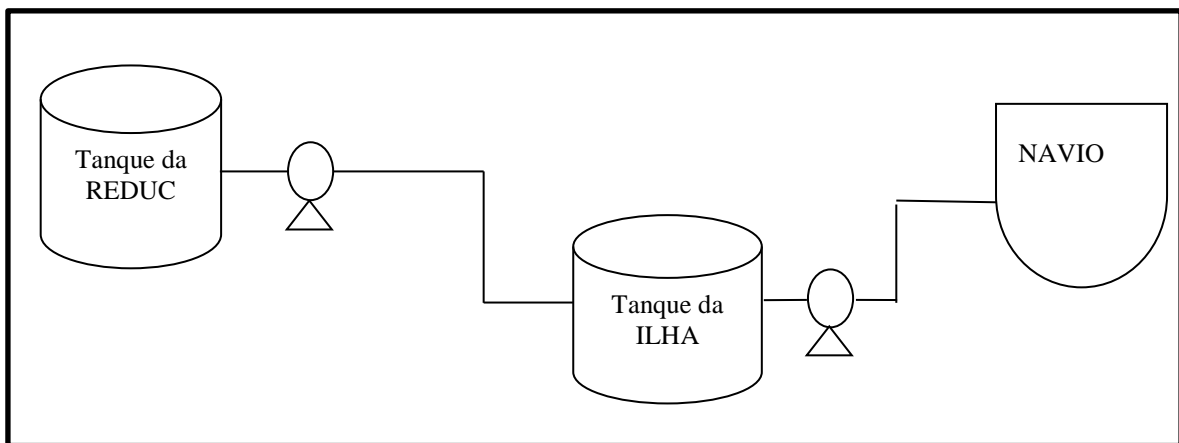
Figura 16 – Esquema de transferência com 2 linhas



Fonte; o autor, 2015

2º caso: utilizando 1 linha, quando a REDUC bombeia o volume de óleo do seu tanque para o tanque da Ilha D'Água e simultaneamente a ilha D'Água bombeia este seu tanque para o Navio. Este tipo de operação é chamada de pulmão.

Figura 17 – Esquema de transferência com 1 linha



Fonte, o autor 2015

De acordo com as condições de carregamento, que são: Volume dos tanques da REDUC e da Ilha D'Água, pode-se optar por uma ou outra alternativa.

Em vista do que foi apresentado, este trabalho tem a finalidade de apresentar uma fórmula matemática, na qual se possa avaliar a opção mais vantajosa de realizar a transferência do óleo.

Antes da elaboração deste estudo, havia uma grande dificuldade de perceber de maneira direta, qual era o tipo de operação mais apropriada, ou seja, com o menor tempo de operação, com uma linha ou com duas linhas. Para se ter uma noção do problema apresentado, segue-se dois exemplos reais de carregamento de Navio e o cálculo do tempo de operação para uma linha e duas linhas.

Exemplo 1 : Carga de 45.000 m³ de nafta para o Navio Lavras, sendo:

Volume do tanque da Ilha D'Água – 23.000 m³

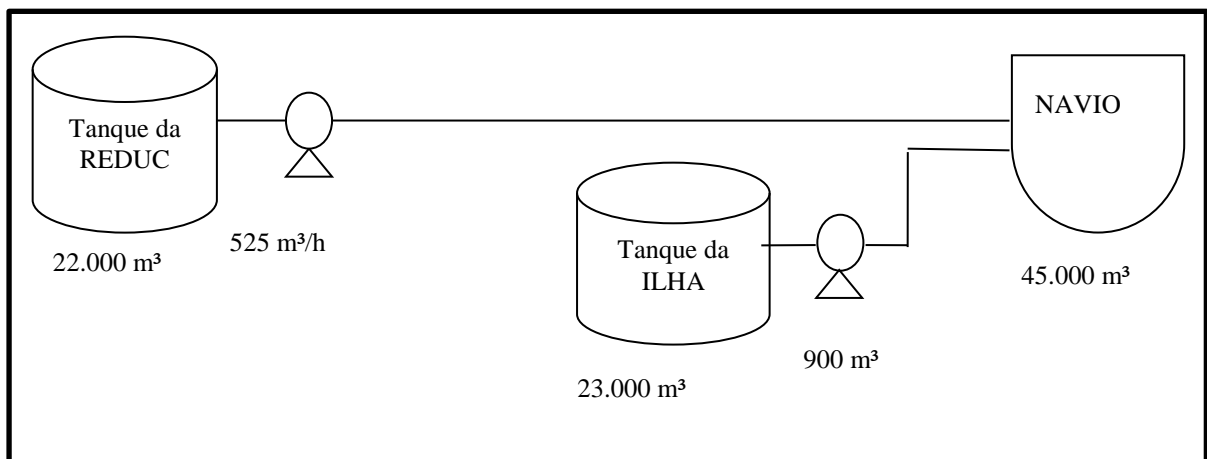
Volume do tanque da REDUC – 22.000 m³

Vazão aplicada pela bomba da Ilha D'Água – 900 m³/h

Vazão aplicada pela bomba da REDUC – 525 m³/h

1º caso : 2linhas

Figura 18 – Primeiro exemplo de bombeio com 2 linhas



Fonte, o autor 2015

Tempo da bomba da Ilha D'Água ligada, seria o volume do tanque da Ilha dividido pela vazão da bomba da Ilha: $\frac{23.000}{900} = 25,55$, o qual esse resultado significa 25 horas e 0,55 da hora, o que equivale a $0,55 \times 60 = 33$, ou seja 25 horas e 33 minutos.

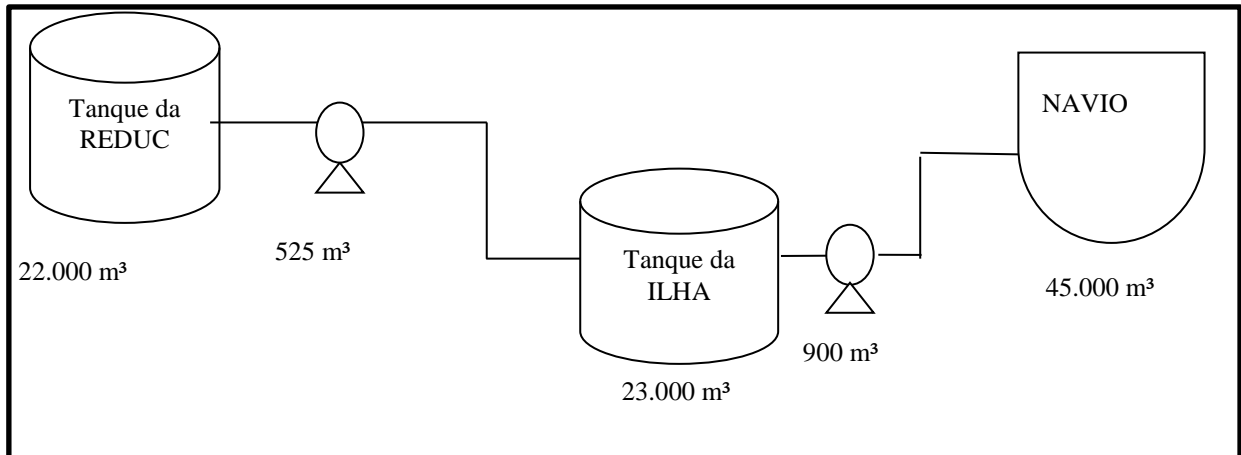
Tempo da bomba da REDUC, da mesma maneira, seria o volume do tanque da REDUC dividido pela vazão da bomba da REDUC $\frac{22.000}{525} = 41,90$, que significa 41 h e 0,90 da hora, ou seja 41 horas e 54 minutos.

Logo, o tempo de operação do Navio será de 41 horas e 54 minutos, pois as duas operações iniciaram simultaneamente, e 25 horas e 33 minutos depois o

volume do tanque da Ilha teria terminado de bombear para o Navio , e a REDUC concluiria o restante do carregamento.

2º caso : 1 linha:

Figura 19- Primeiro exemplo de bombeio com 1 linha



Fonte, o autor 2015

Nesse caso, o tanque da Ilha estaria recebendo produto da REDUC com uma vazão de 525 m³/h e ao mesmo tempo enviando para o Navio com a vazão de 900 m³ /h, operação pulmão. Sendo assim, o volume do óleo dentro do tanque da Ilha estaria diminuindo com uma vazão que seria a diferença entre a vazão aplicada pela bomba da Ilha e a vazão da bomba da REDUC , cujo valor é : $900 - 525 = 375$ m³/h. O tempo de duração da operação pulmão seria de : $23.000 \div 375 = 61$ horas e 20 minutos. Entretanto a REDUC ficaria com a bomba ligada pelo tempo de 41 horas e 54 minutos, conforme calculado no primeiro caso, e o restante do tempo de bombeio seria realizado somente pela bomba da Ilha. Logo o tempo total desta operação será calculado pelo volume total dos dois tanques dividido pelo valor da vazão da bomba da Ilha $\frac{45.000}{900} = 50$ horas.

Como no primeiro caso, usando duas linhas, o tempo de operação foi de 41 horas e 54 minutos, e neste segundo, o tempo calculado foi de 50 horas, conclui-se que, para esta operação, nessas condições de carga, é mais vantajoso trabalhar com duas linhas.

Exemplo 2: Carga de 13.300 m³ de OCA1 para o Navio Carioca, sendo:

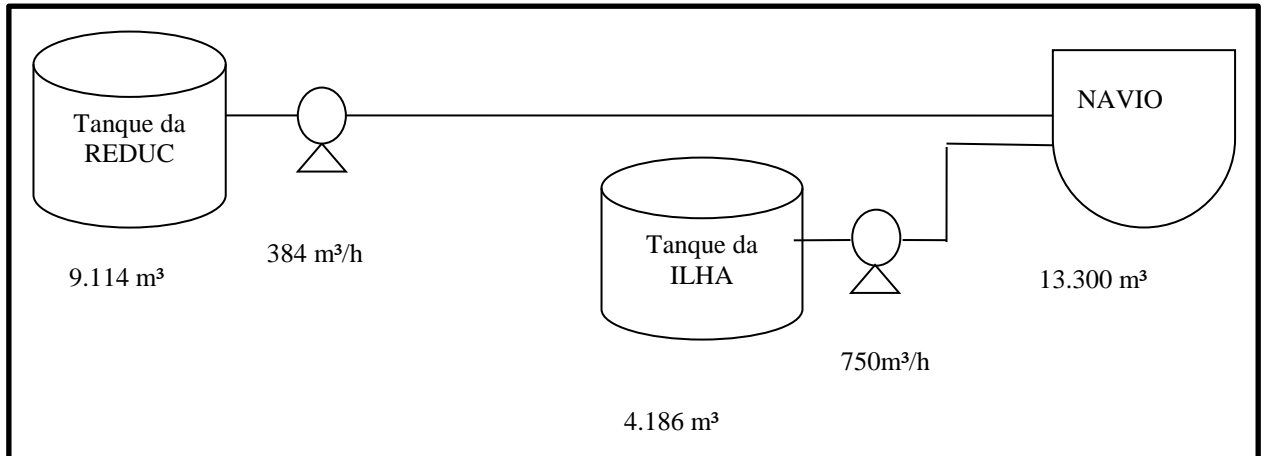
Volume do tanque da Ilha D'Água – 4.186 m³

Volume do tanque da REDUC – 9.114 m³

Vazão aplicada pela bomba da Ilha D'Água – 750 m³/h

Vazão aplicada pela bomba da REDUC – 384 m³/h

Figura 20 – Segundo exemplo de bombeio com 2 linhas



Fonte, o autor 2015

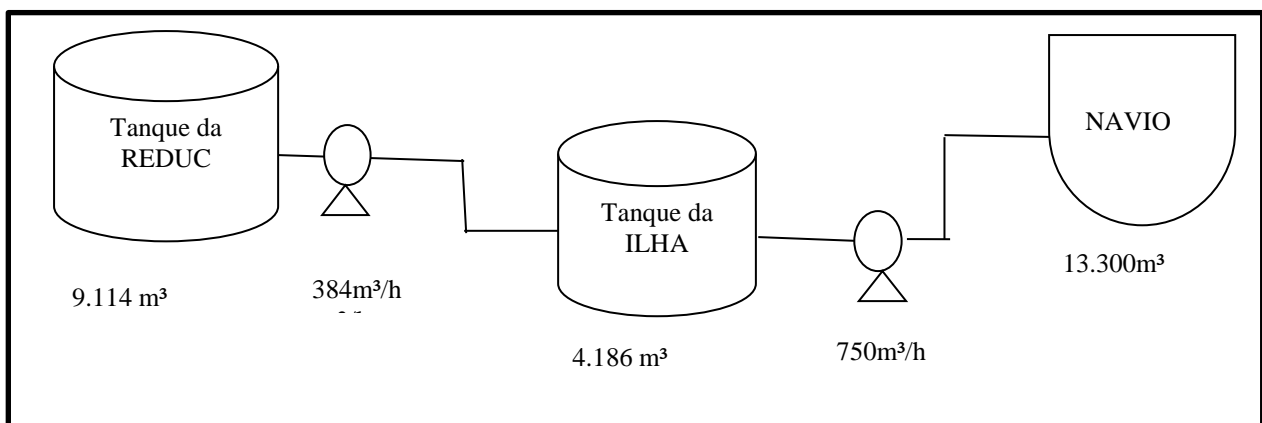
Tempo da bomba da Ilha ligada $\frac{4.186}{750} = 5,5813$, 5 horas e 35 minutos

Tempo da bomba da REDUC ligada $\frac{9114}{384} = 23,7343$ 23 horas e 44 minutos

Neste caso, o tempo de operação será de 23 horas e 44 minutos, pois a REDUC é a Unidade que terminará de bombear por último.

2º Caso: 1 linha

Figura 21 – Segundo exemplo de bombeio com 1 linha



Fonte, o autor 2015

O tempo de operação do pulmão será encontrado dividindo o volume do tanque da Ilha pela diferença da vazão da Ilha pela vazão da REDUC, que é de 23 horas e 44 minutos. Sendo assim, quando a operação pulmão terminar, o tanque da Ilha estará vazio, e a operação será concluída somente com o tanque da REDUC.

O volume bombeado pela REDUC durante o pulmão será conhecido multiplicando a vazão da bomba da REDUC pelo tempo do pulmão que foi de 11 horas e 26 minutos, passando para número decimal será igual 11,43. O valor é de $384 \times 11,43 = 4.389 \text{ m}^3$, logo faltará bombear $9.114 - 4.389 = 4.725 \text{ m}^3$. O tempo da bomba da REDUC sozinha será de $\frac{4.725}{384} = 12,304$, 12 horas e 18 minutos.

Para este 2º caso, o tempo de operação do Navio será a soma do tempo do pulmão com o tempo da bomba da REDUC sozinha, que será de $11:26 + 12:18 = 23:44$, o mesmo tempo do 1º caso. Para esta situação, é melhor operar com 1 linha, pois poupa-se esforço desnecessário.

Como foi visto, no primeiro exemplo a operação com 2 linhas é mais conveniente, e no segundo exemplo a operação com 1 linha.

O problema a ser resolvido, é saber em que condições de carga, volumes e vazão, é mais vantajoso operar com uma ou duas linhas.

Para chegar a uma fórmula para que se possa responder a esta questão, faz-se necessário identificar as variáveis que serão trabalhadas.

Sejam:

V Volume total a ser carregado pelo Navio

V_i Volume da Ilha para o Navio

V_r Volume da REDUC para o Navio

Q_r Vazão da bomba da REDUC

Q_i Vazão da bomba da Ilha

T Tempo total da carga do Navio

Pode-se dizer que $V = V_i + V_r$ e $Q_i > Q_r$

Analisando o primeiro caso, para 2 linhas:

T_r Tempo de operação da REDUC $T_r = \frac{V_r}{Q_r}$

T_i Tempo de operação da Ilha $T_i = \frac{V_i}{Q_i}$

$T = \text{máximo} \{ T_r , T_i \}$. o tempo de operação do Navio será igual ao maior valor entre T_i e T_r .

Logo, tem-se nesse caso duas possibilidades: 1ª $T = T_r$, 2ª $T = T_i$

Fazendo agora uma análise do segundo caso, para 1 linha.

$$T_p \text{ tempo de duração do pulmão } T_p = \frac{V_i}{Q_i - Q_r}$$

Primeira possibilidade: T_p não é suficiente para carregar o Navio, ou seja, o volume do tanque da Ilha esvazia e a bomba da Ilha é desligada, logo $T = T_p + T_{rs}$.

T_{rs} é o tempo da REDUC bombeando sozinha, após o término do pulmão.

$$T_{rs} = \frac{V_r - (Q_r \cdot T_p)}{Q_r} , \text{ sendo } (Q_r \cdot T_p) \text{ o volume da REDUC durante o pulmão.}$$

$$\begin{aligned} \text{Então, } T = T_p + T_{rs} &= \frac{V_i}{Q_i - Q_r} + \frac{V_r - Q_r \cdot T_p}{Q_r} = \frac{V_i}{Q_i - Q_r} + \frac{V_r - Q_r \left(\frac{V_i}{Q_i - Q_r} \right)}{Q_r} \\ &= \frac{V_i}{Q_i - Q_r} + \frac{V_r - \left(\frac{V_i Q_r}{Q_i - Q_r} \right)}{Q_r} = \frac{V_i}{Q_i - Q_r} + \frac{\frac{V_r Q_i - V_r Q_r - V_i Q_r}{Q_i - Q_r}}{Q_r} = \frac{V_i}{Q_i - Q_r} + \frac{V_r Q_i - V_r Q_r - V_i Q_r}{Q_r (Q_i - Q_r)} \\ &= \frac{V_i Q_r + V_r Q_i - V_r Q_r - V_i Q_r}{Q_r (Q_i - Q_r)} = \frac{V_r Q_i - V_r Q_r}{Q_r (Q_i - Q_r)} = \frac{V_r (Q_i - Q_r)}{Q_r (Q_i - Q_r)} = \frac{V_r}{Q_r} = T_r \Rightarrow T = T_r \end{aligned}$$

Nessa situação apresentada, pode-se concluir que o tempo total da carga do Navio é igual ao tempo de operação da bomba da REDUC.

Segunda possibilidade: O tempo do pulmão (T_p) é suficiente para carregar o Navio. Sendo assim, a bomba da Ilha fica ligada direto, até o final do carregamento do Navio, o volume do tanque da REDUC termina, mas a Ilha continua o bombeio. Ou seja, obrigatoriamente o volume do tanque da REDUC e o volume do tanque da Ilha D'Água passam pela bomba da Ilha D'Água, então o tempo total da operação (T) é dado pelo volume total a ser carregado pelo Navio (V), dividindo pela vazão da bomba da Ilha D'Água (Q_i). $T = \frac{V}{Q_i}$.

Resumindo, tem-se nesse caso 1º $T = T_r$ ou 2º $T = \frac{V}{Q_i}$.

Em cada caso teremos duas possibilidades, para 2 linhas : 1º $T_2 = T_r$ ou 2º $T_2 = T_i$, e para 1 linha: 1º $T_1 = T_r$ ou 2º $T_1 = \frac{V}{Q_i}$, onde T_1 é o tempo total da carga para 1 linha e T_2 , o tempo total da carga para 2 linhas. Logo pode se verificar quatro comparações , que serão chamadas de A, B, C e D.

Para chegar a uma fórmula que seja possível resolver de maneira direta e simples a melhor alternativa a ser escolhida: 1 linha ou 2 linhas, precisa-se desenvolver as condições de cada comparação para chegar numa equação comum.

Comparação A , para 2 linhas $T_2 = Tr$ e para 1 linha $T_1 = Tr$, nessa comparação $T_1 = T_2$, ou seja, o tempo total para 1 linha é igual ao tempo total para 2 linhas, sendo assim é melhor operar com 1 linha pois é utilizado um número menor de equipamentos. Nessa comparação A , $T_2 = Tr$, significa dizer que $Tr > Ti$, sendo assim $\frac{Vr}{Qr} > \frac{Vi}{Qi} \Rightarrow Vr \cdot Qi > Vi \cdot Qr$. Agora para 1 linha $T_1 = Tr$, significa dizer que o tempo da operação pulmão não é suficiente para carregar o Navio, ou seja o volume do tanque da Ilha D'Água termina antes do tanque da REDUC, a bomba da Ilha é desligada e a REDUC conclui o carregamento sozinha. Nessa situação Trs , o tempo da bomba da REDUC sozinha, é maior que zero.

$$\begin{aligned} Trs > 0 &\Rightarrow \frac{Vr - (Qr \cdot Tp)}{Qr} > 0 \Rightarrow Vr - Qr \cdot Tp > 0 \Rightarrow Vr - Qr \cdot \left(\frac{Vi}{Qi - Qr}\right) > 0 \\ &\Rightarrow Vr - \frac{Qr \cdot Vi}{Qi - Qr} > 0 \Rightarrow \frac{Vr Qi - Vr Qr - Vi Qi}{Qi - Qr} > 0 \Rightarrow Vr \cdot Qi - Vr \cdot Qr - Vi \cdot Qi > 0 \\ &\Rightarrow Vr \cdot Qi > Vr \cdot Qr + Vi \cdot Qi \Rightarrow Vr \cdot Qi > (Vr + Vi) \cdot Qi \Rightarrow Vr \cdot Qi > V \cdot Qi . \end{aligned}$$

Então, nessa comparação fica assim $Vr \cdot Qi > Vi \cdot Qr$ e $Vr \cdot Qi > V \cdot Qi$, mas se $Vr \cdot Qi > V \cdot Qi$, então certamente $Vr \cdot Qi > Vi \cdot Qr$, pois $V \cdot Qi > Vi \cdot Qr$, lembrando que $V = Vi + Vr$.

Logo basta ter : $Vr > \frac{V \cdot Qr}{Qi}$ para que se garanta a escolha da operação por 1 linha para esta comparação tipo A.

Comparação B, para 2 linhas $T_2 = Tr$, ou seja $Tr > Ti$, e para 1 linha $T_1 = \frac{V}{Qi}$

Nessa comparação pode operar o Navio com 1 linha só se o tempo de operação com 2 linhas for maior que o tempo de operação com 1 linha, ou seja se $T_2 > T_1$. Sendo assim $Tr > \frac{V}{Qi} \Rightarrow \frac{Vr}{Qr} > \frac{V}{Qi} \Rightarrow Vr > \frac{V \cdot Qr}{Qi}$. Precisa-se também obedecer a condição de $Tr > Ti$, pois a operação com 2 linhas $T_2 = Tr$. Logo $Tr > Ti \Rightarrow \frac{Vr}{Qr} > \frac{Vi}{Qi} \Rightarrow Vr \cdot Qi > Vi \cdot Qr$. Resumindo esta comparação, é necessário atender duas sentenças $Vr \cdot Qi > V \cdot Qi$ e $Vr \cdot Qi > Vi \cdot Qr$. Conforme comparação A, $V > Vi$, logo basta ter $Vr > \frac{V \cdot Qr}{Qi}$ para que se garanta a operação por 1 linha para esta comparação tipo B.

Comparação C, para 2 linhas $T_2 = T_i$, ou seja $T_i > T_r$, e para 1 linha $T_1 = T_r$, ou seja, o tempo da operação pulmão não é suficiente para concluir o carregamento, a bomba da Ilha D'Água é desligada, pois o tanque da Ilha seca, e a REDUC continua a carga até o fim. Este tempo da utilização da bomba da REDUC sozinha, sem a bomba da Ilha, é apresentado como T_{rs} , conforme desenvolvido na comparação A: $T_{rs} > 0 \Rightarrow V_r \cdot Q_i > V \cdot Q_r$.

Logo, essa comparação terá que seguir duas inequações: $V_r \cdot Q_i < V_i \cdot Q_r$ e $V_r \cdot Q_i > V \cdot Q_r$, ou seja, $V \cdot Q_r < V_r \cdot Q_i < V_i \cdot Q_r \Rightarrow V \cdot Q_r < V_i \cdot Q_r \Rightarrow V < V_i$, absurdo, pois para desenvolver este problema partimos da hipótese que V (volume total) = V_i (volume da Ilha) + V_r (volume da REDUC), logo $V > V_i$. Sendo assim essa comparação C nunca vai existir.

Comparação D, para 2 linhas $T_2 = T_i$, ou $T_2 = \frac{V_i}{Q_i}$, e para 1 linha $T_1 = \frac{V}{Q_i}$, ou seja a bomba da Ilha fica ligada direto até o final da operação, isto quer dizer o volume da REDUC (V_r) e o volume da Ilha (V_i) serão bombeados pela bomba da Ilha.

Nessa comparação $T_1 > T_2$, pois $\frac{V}{Q_i} > \frac{V_i}{Q_i}$ ou $V > V_i$. Sendo assim, como o tempo para 1 linha é maior do que o tempo para 2 linhas, é mais vantajoso operar com 2 linhas, sendo que para esta comparação a operação com duas linhas $T_2 = T_i$ ou $T_i > T_r \Rightarrow \frac{V_i}{Q_i} > \frac{V_r}{Q_r}$ ou $V_r \cdot Q_i < V_i \cdot Q_i$, como $V_i \cdot Q_r < V \cdot Q_r$, conforme demonstrado na comparação C, pode-se dizer que $V_r \cdot Q_i < V_i \cdot Q_r < V \cdot Q_r \Rightarrow V_r \cdot Q_i < V \cdot Q_r$ ou $V_r < \frac{V \cdot Q_r}{Q_i}$.

Sendo assim, como somente esta última comparação permite que eu opere com duas linhas, pode-se concluir que para operar com duas linhas é necessário que aconteça o seguinte: $V_r < \frac{V \cdot Q_r}{Q_i}$.

Observa-se que para operar com uma linha, as condições de carregamento deve obedecer a seguinte sentença: $V_r > \frac{V \cdot Q_r}{Q_i}$, conforme demonstrado nas comparações A e B. Agora, para operar com duas linhas é preciso que $V_r < \frac{V \cdot Q_r}{Q_i}$, conforme demonstrado na comparação D.

Se acontecer de $V_r = \frac{V \cdot Q_r}{Q_i}$, O tempo gasto para operar com 1 linha ou 2 linhas seria o mesmo. Neste caso, a opção seria para operar com 1 linha pois seria envolvido um número menor de equipamentos.

Então, pode-se concluir que em cargas de Navios com utilização dos tanques da REDUC e da Ilha D'Água, pode-se operar com 1 linha sem prejuízo de estadia se e somente se: $V_r \geq \frac{V \cdot Q_r}{Q_i}$.

Além da demonstração da descoberta dessa fórmula, que auxilia na tomada de decisão para uma operação mais eficiente, a atividade operacional no TABG está muito ligada com a aplicação da matemática no seu ambiente de trabalho.

3.3- Previsões das operações

Na chegada ao trabalho, a primeira informação é sobre as operações em Curso e as suas previsões.

Exemplo 1: Navio Livramento carregando 27.000 m³ de Nafta da Reduc, com uma vazão de 450m³/h e com 25.483 m³ carregado às 8h. Calcula-se então a previsão de término para essa operação de carregamento, $27.000 - 25.483 = 1.517$ m³ que ainda falta carregar, assim faz a divisão do volume que falta pela vazão de 450 e encontra-se o valor de 3,37. Ou seja a previsão é de mais 3 horas e mais alguns minutos que corresponde a 37% da hora, que para isso, basta multiplicar 0,37 por 60 = 22 minutos. Previsão de término para às 11 h e 22 min.

Exemplo 2 : Navio Rio Grande descarregando 90.000 m³ de petróleo com uma vazão de 2.400 m³/h. Volume descarregado às 8 h era de 5.300 m³, qual é a previsão de término?

Primeiro se verifica a quantidade que falta carregar, que é $90.000 - 5.300 = 84.700$, agora divide-se esse volume pela vazão horária, ou seja 84.700 dividido por 2.400 é igual a 35,29. Assim, até às 8 h do outro dia, passarão 24 horas, depois mais 11 horas e 0,29 da hora. Somando $8+11=19$ h e mais $0,29 \times 60$ minutos = 17 minutos. Assim, a previsão de término deste Navio está para às 19 horas e 17 minutos do outro dia.

3.4 – Cálculo da média ponderada para amostra e densidade.

Outra atividade que é aplicada a matemática no Píer do TABG é o cálculo da quantidade a ser amostrada para a obtenção da amostra composta ponderal, que é uma amostra que representa o produto carregado nos tanque do Navio de acordo com o volume em cada um deles, ou seja, precisa-se obter uma amostra que tenha o produto de todos os tanques, obedecendo o mesmo percentual carregado em cada tanque.

Antes do término da operação, precisa-se calcular a quantidade de amostra que será retirada de cada tanque, após o término da operação de Nafta às 11:22. Conforme exemplo 1, o Navio Livramento carregará 27.000 m³ em 5 tanques, tanque 1 vai carregar 2.500 m³; tanque 2, 5.500 m³; tanque 3, 7.500 m³; tanque 4, 5.500, e tanque 5, 6000 m³. Precisa-se obter 8 garrafas de 1.000 ml cada, que contenha o produto dos 5 tanques obedecendo aos mesmos percentuais dos tanques.

Primeiro calcula-se o percentual do volume de cada tanque em relação a carga total. Divide-se o volume de cada tanque pelo volume total do carregamento que é 27.000 m³. Sendo assim, o tanque 1 contribui com 9 %, o tanque 2 tem 20,4%, tanque 3 com 28%, tanque 4 com 20,4% e o tanque 5 com 22,2%. Como vai precisar de 8 garrafas de 1000 ml cada, ou seja, precisa-se do volume de 8000 ml. Então, eu aplico o percentual correspondente de cada tanque no volume de 8000 ml para se saber a quantidade de mililitros que vai ser retirado de cada tanque. Tanque 1, 9% de 8000 = 720 ml, tanque 2 e 4, 20,4% de 8000 = 1632 ml, tanque 3, 28% de 8000 = 2240 ml e tanque 5, 22,2% de 8.000 = 1776 . Como 1 garrafa de amostra possui a capacidade de 1000 ml, precisa-se separar as seguintes quantidades de garrafas de amostra para atender a composição de 8 amostras composta ponderal, tanque 1 vai precisar de 1 garrafa, tanque 2 e 4 serão preciso 2 garrafas, já que há a necessidade 1632 ml, para o tanque 3 serão necessários 3 garrafas, pois o volume requerido é de 2240 ml e tanque 5 serão necessárias 2 garrafas.

Outra maneira mais simples de aplicar a média ponderada é no cálculo da densidade final do Navio.

Exemplo 3: Navio Lages recebeu 40000 m³ de Nafta, sendo 5000 m³ do tq 400, 12500 m³ do tanque 401 e 22500 m³ do tanque 402. A densidade do tanque 400 é 0,7413, do tanque 401 é 0,7502 e do tanque 402 é 0,7656. Para encontrar a densidade final da mistura de Nafta recebida no Navio, deve-se calcular a média ponderada da densidade dos tanques, em que os volumes que cada tanque enviou, correspondem aos pesos da média ponderada a ser calculada.

Pelo nosso exemplo eu vou multiplicar cada densidade pelo volume do tanque. Para o tanque 400 temos $5000 \times 0,7413 = 3706,5$, para o tanque 401 temos $12500 \times 0,7502 = 9377,5$ e para o tanque 402 temos $22500 \times 0,7656 = 17226$. Após isso, soma-se os três produtos $3706,5 + 9377,5 + 17226 = 30310$ e esse valor é dividido pela soma dos pesos correspondente aos volumes de cada tanque, que é

carga total recebida do Navio, 40000 m³. Ou seja $\frac{30310}{40000} = 0,7576$ é o valor da densidade da carga de Nafta do Navio Lages.

3.5–Fechamento de Navio

Após a amostragem do Navio, segue-se a medição e apuração do volume de bordo e a sua comparação com o volume apurado em terra, e o cálculo percentual desse volume da diferença em relação ao volume medido nos tanques de terra. Esse valor percentual deve ser inferior a 0,30 % .

Exemplo 4: O Navio Livramento realizou a medição dos seus tanques e apurou o volume de 27.085 m³ em seus tanques. O Terminal mediu os seus tanques e encontrou o valor de 27.183 m³, logo a diferença foi de 98 m³ . Esse volume em relação ao volume de terra é de $\frac{98}{27183} = 0,36\%$. Esse percentual ultrapassa o valor máximo permitido, que é de 0,30%. Entretanto, o Navio possui um fator, que é chamado de FEN, fator de experiência do Navio, onde ele verifica a diferença observada entre os volumes de Terra e de bordo nas últimas 20 viagens. Ele soma todo o volume de bordo dessas últimas viagens e divide pelos volumes de terra também dessas viagens, e assim o Navio encontra o FEN, que é um fator que quando aplicado no volume do Navio, faz com que a diferença encontrada entre as quantidades de terra e de bordo diminua, pois se o Navio repete o mesmo erro de medição durante as últimas viagens, esse fator corrige esse erro.

Seguindo o nosso exemplo, o Navio Livramento possui um fator de experiência no valor de 0,9986. Como calcula-se esse fator? Basta verificar o fechamento das quantidades apuradas de bordo e de terra das últimas 20 viagens, exemplo: o somatório de todos os volumes de bordo , 876.908 m³ e o somatório de todos os volumes de Terra, 878.156 m³, agora dividi o volume total de bordo pelo volume total de terra $\frac{876908}{878156} = 0,9986$. Então para realizar o fechamento do Navio precisa-se aplicar o FEN. Para aplicar este fator, deve-se dividir o volume de bordo pelo FEN. Ou seja, $27.085/0,99835 = \frac{27085}{0,9986} = 27123$ m³, que é o volume que se deve comparar para fechamento do Navio.

Volume de bordo aplicado o FEN, 27.123, volume de terra 27.183 . Diferença calculada $27.183 - 27.123 = 60\text{m}^3$. Percentual da diferença em relação ao volume de Terra: $\frac{60}{27183} = 0,22\%$, agora sim enquadrado.

A comparação desses volumes de bordo e de terra deve-se levar em consideração também o volume a uma determinada temperatura, pois o volume apurado em Terra, normalmente está com uma temperatura maior do que a do tanque de bordo, então precisa-se converter o volume para uma temperatura padrão, que se convencionou a temperatura a 20°C . Ou seja, após a verificação do volume na temperatura ambiente, multiplica-se pelo fator de correção a 20°C . Esse fator é calculado levando em consideração a temperatura do tanque de bordo e o valor da densidade a 20° , busca-se na tabela o fator de correção do volume a 20° .

3.6- Medições dos tanques de bordo

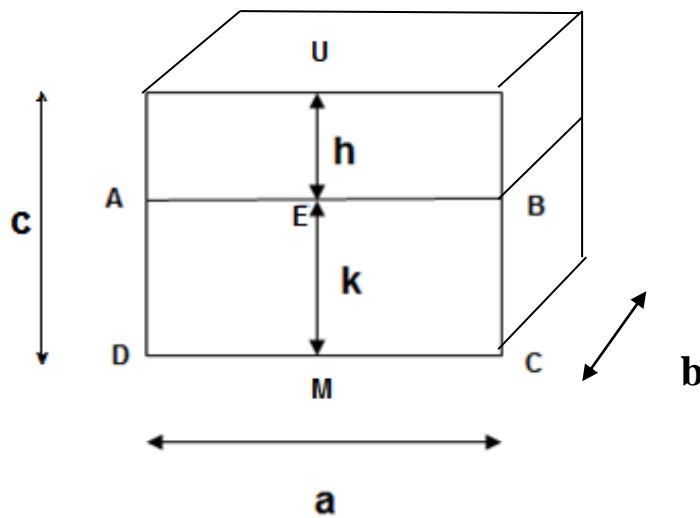
Normalmente os tanques dos navios petroleiros são da forma de um paralelepípedo retângulo, conforme figura 22.

Tanto na liberação inicial como na final é necessário medir o volume de produto contido em cada tanque de bordo. Para tal mede-se o nível de produto de forma indireta, ou seja, é medido o espaço vazio de cada tanque.

Essa medição é extremamente simples quando o navio está nivelado, ou seja, seu comprimento está totalmente paralelo ao nível do mar.

Na figura 22 abaixo está representada a vista frontal de um tanque de bordo nivelado:

Figura 22 - Vista frontal de um tanque de bordo de um NT nivelado.



Fonte, o autor 2015

O nível do produto no interior do tanque é representado por (k) e sua base tem medidas (a) e (b). A altura do tanque tem medida (c).

A medição indireta determina o valor de (h), que corresponde à altura correspondente ao espaço vazio do tanque.

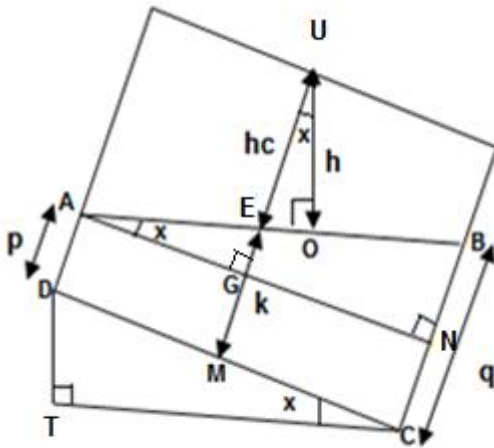
Assim, conforme visto na seção 2.1.9.1, o volume de produto (V_t) contido no tanque será calculado da seguinte forma: $V_t = a \cdot b \cdot k$.

Como a medição indireta nos fornece o valor de (h), tem-se que: $V_t = a \cdot b \cdot (c - h)$. Os valores de a, b e c são valores fixos, que são as dimensões do tanque.

Portanto, cada valor de (h) corresponde a um determinado volume. Normalmente existe uma tabela de cada tanque que associa o valor medido (h) com o correspondente volume (V_t). Quando o Navio não se encontra nivelado ao nível do mar, ou seja, quando a popa está mais funda que a proa ou vice-versa, é preciso haver uma correção da medição indireta chamada de correção de trim.

Na figura 23 abaixo está representada a vista frontal de um tanque de bordo não nivelado:

Figura 23 - Vista frontal de um tanque de bordo de um NT não nivelado.



Fonte, o autor 2015

Vê-se na figura 23 o mesmo tanque da figura 22 desnivelado, ou seja, o comprimento do NT e o nível do mar estão sob um ângulo de medida x° .

Sendo M o ponto médio do segmento DC, tem-se que o valor (k) é a base média do trapézio ABCD, assim: $k = \frac{p+q}{2}$

Portanto o volume de produto (Vt) contido no tanque será a área do trapézio ABCD multiplicada pela profundidade (b). Logo se têm que: $Vt = \left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot a \cdot b$. Lembrando que as medidas de a, b e c são fixas e estão representadas na figura anterior.

Ou ainda: $Vt = k \cdot a \cdot b$. Assim, tem-se que $Vt = a \cdot b \cdot (c - hc)$. Entretanto o valor medido na trena é (h) e não (hc).

Na figura 23, como AB é paralelo a TC, e AN é paralelo a DC, temos que o ângulo $\hat{N}AB$ também vale (x).

Como os triângulos AEG e UEO são retângulos e os ângulos $\hat{A}EG$ e $\hat{U}EO$ são congruentes por serem opostos pelo vértice, temos que o ângulo $\hat{E}UO$ também vale (x).

Assim, como visto na seção 2.1.8.1, no triângulo UEO tem-se que: $\frac{h}{hc} = \cos x$.

Ou ainda $hc = \frac{h}{\cos x}$.

Portanto, o volume de produto (Vt) num tanque de bordo de um NT desnivelado sob um ângulo (x) será dado por: $Vt = a \cdot b \cdot \left(c - \frac{h}{\cos x}\right)$.

Como os valores de a, b e c são fixos, e o ângulo x é obtido pelo trim, que é a diferença da profundidade a vante e a ré do Navio, e a medida do espaço vazio h é

conhecida através da medição do tanque. Conclui-se, então, que através dessa fórmula podemos obter o volume do tanque com o Navio desnivelado em relação ao nível do mar.

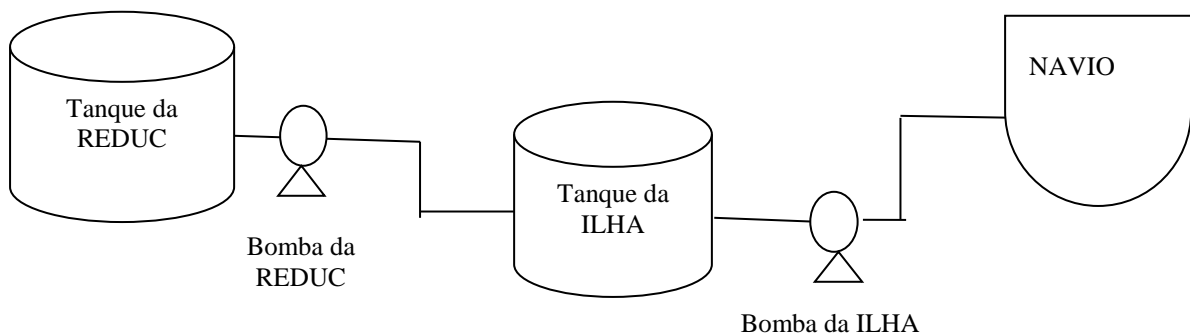
4- SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo é apresentado alguns exercícios para ajudar o professor em suas atividades em sala. No capítulo 3 foi apresentado a contribuição do estudo da matemática na Indústria, com o propósito de mostrar a aplicação real do que é aprendido na Escola, principalmente na transferência de petróleo e derivados entre Navio e os tanques em terra, nos píers de atracação do TABG.

Para esse capítulo a contribuição tem o valor inverso, ou seja, mostra-se a contribuição da Indústria do Petróleo para o Estudo da Matemática em sala de aula para Ensino fundamental e médio, através dos exemplos de atividades seguintes.

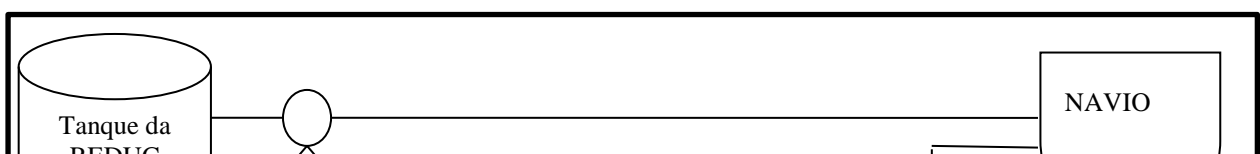
Atividade 1: De acordo com as duas figuras abaixo ,reponda os itens solicitados

Figura 24 - Esquema de transferência Reduc e Ilha para o Navio com 1 linha



Fonte, o autor 2015

Figura 25 - Esquema de transferência Reduc e Ilha para o Navio com 2 linhas



Bomba da
REDUC

Bomba da ILHA

Fonte, o autor 2015

Precisamos transferir 50.000 m^3 para o Navio, sendo que 20.000 m^3 está no tanque da REDUC e 30.000 m^3 está no tanque da ILHA. A vazão da bomba da REDUC é de $500 \text{ m}^3/\text{h}$ e a vazão da bomba da ILHA é de $1000 \text{ m}^3/\text{h}$.

Seja a situação da figura 2 , onde é utilizado o bombeio com duas linhas para o Navio, responda as perguntas abaixo:

- a) Quanto tempo dura o bombeio da REDUC?
- b) Quanto tempo dura o bombeio da Ilha?

Agora, na situação da figura 1 com uma linha para o Navio, onde o tanque da Ilha recebe da REDUC e ao mesmo tempo envia para o Navio:

- c) Qual é vazão que o produto do tanque da Ilha está se movimentando em relação ao volume do seu interior?
- d) Após 40 horas de bombeio, que volume haverá no tanque da REDUC e da Ilha?
- e) Após o término do bombeio da REDUC, quanto tempo depois a Ilha vai continuar bombeando para o Navio até o término da transferência?

Atividade 2: Seja agora um novo carregamento para o Navio, onde o volume do tanque da REDUC é de 30000 m^3 e a vazão da bomba da REDUC é de $500 \text{ m}^3/\text{h}$ e o volume do tanque da Ilha é de 10000 m^3 e a vazão da bomba da Ilha é de $1000 \text{ m}^3/\text{h}$, responda os itens abaixo de acordo com a figura 25 , onde é utilizado 2 linhas para realizar a transferência para o Navio.

- a) Qual é o tempo de duração do bombeio do tanque da REDUC?
- b) Qual é o tempo de duração do bombeio da Ilha?

Agora, na situação da figura 1 com uma linha para o Navio, onde o tanque da Ilha recebe da REDUC e ao mesmo tempo envia para o Navio, responda abaixo:

- c) Com que vazão, o tanque da Ilha está esvaziando?
- d) Quanto tempo depois após o início do bombeio os tanques da Ilha e da REDUC ficarão vazios?

Atividade 3 Seja agora um carregamento onde o volume do tanque da REDUC é de 20000 m³ e a vazão da bomba da REDUC é de 300 m³/h e o volume do tanque da Ilha é de 40000 m³ e a vazão da bomba da Ilha é de 900 m³/h. responda os itens abaixo de acordo com a figura 2 , onde é utilizado 2 linhas para realizar a transferência para o Navio.

- a) Qual é o tempo de duração do bombeio do tanque da REDUC?
- b) Qual é o tempo de duração do bombeio da Ilha?

Agora, na situação da figura 1 com uma linha para o Navio, onde o tanque da Ilha recebe da REDUC e ao mesmo tempo envia para o Navio, responda abaixo:

- c) Com que vazão, o tanque da Ilha está esvaziando?
- d) Quanto tempo depois após o início do bombeio os tanques da Ilha e da REDUC ficarão vazios?

Atividade 4 : Após cálculos matemáticos chegou-se a uma fórmula, onde podemos verificar em que situação de transferência é mais vantajoso financeiramente operar um carregamento de um Navio, com 1 linha conforme figura 24 ou 2 linhas, conforme figura 25. Seja, V_r o volume do tanque da REDUC, V_i o volume do tanque da Ilha, Q_r a vazão da bomba da REDUC Q_i a vazão da bomba da Ilha e V o volume total a ser carregado o Navio, ou seja $V = V_r + V_i$.

Essa fórmula diz que é mais vantajoso operar com 1 linha se e somente se:
 $V_r \geq \frac{V \cdot Q_r}{Q_i}$. caso contrário é mais vantajoso operar com 2 linhas , conforme modelo da figura 1.

- a) Aplique a fórmula para atividade 1 e diga qual modelo é mais vantajoso realizar a transferência para o Navio, com 1 linha ou com 2 linhas?
- b) Aplique a fórmula para atividade 2 e diga qual modelo é mais vantajoso realizar a transferência para o Navio, com 1 linha ou com 2 linhas?

- c) Aplique a fórmula para atividade 3 e diga qual modelo é mais vantajoso realizar a transferência para o Navio, com 1 linha ou com 2 linhas?

Atividade 5 :Qual é a previsão de término de um carregamento de um Navio de 32.000 m^3 , cujo volume às 13:00 do dia 20/10 era de 15.642 m^3 , já carregado, e a vazão de bombeio $1.150 \text{ m}^3/\text{h}$?

Foto 8 – Braço de conexão do PP



Fonte: Arquivo *TRANSPETRO*, 2013

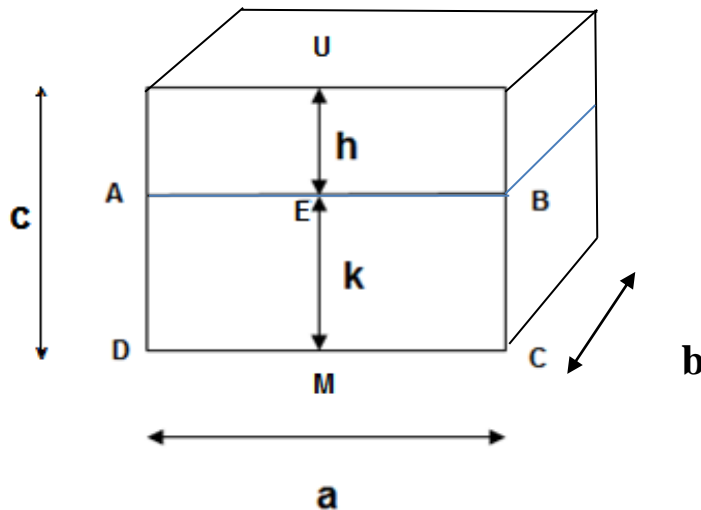
Atividade 6: Média ponderal

O Navio Cantagalo recebeu de 3 tanques de terra, tanque 100 recebeu 5000 m³, tanque 101 recebeu 13000 m³ e do tanque 102 recebeu 2000 m³. Cada tanque de terra tem uma densidade diferente, tanque 100 a densidade é 0,9832, tanque 101 a densidade é 0,9901 e tanque 102 a densidade é 1,003. O Navio recebeu o total de 20.000 m³. Após misturar os produtos dos três tanques, qual será a densidade final nos tanques do Navio. Será preciso achar a média ponderal das 3 densidades, onde os volumes de cada tanque corresponde aos pesos dessa média.

Atividade 7: Volume e relações trigonométricas

Seja o paralelepípedo abaixo representando um tanque de um Navio, onde a largura do tanque $a = 18$ m, o comprimento $b = 16$ m, a altura $c = 25$ m e a medição do espaço vazio do tanque $h = 3$ m. Temos h , que é a medição com trena, é perpendicular a linha do nível do produto AB , Calcule o volume do tanque.

Figura 26 –Paralelepípedo representando um tanque de Navio



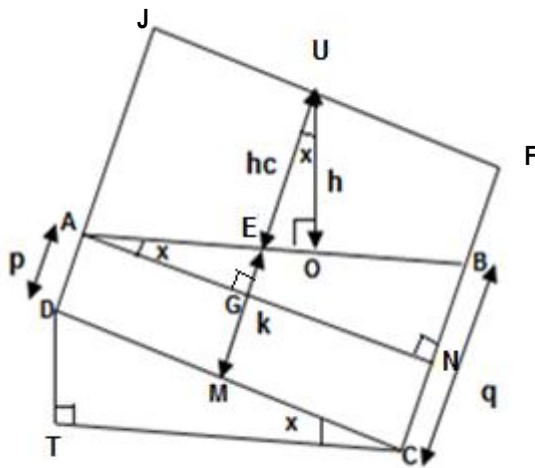
Fonte,o autor 2015

Atividade 8: Relações trigonométricas

Seja a vista frontal de um tanque, na figura abaixo, onde o retângulo $DCFJ$ sofreu uma inclinação de um ângulo x , no ponto C , sabendo que NA é paralelo a DC , UM é perpendicular a DC , UO é perpendicular a AB . AB é paralelo a TC .

- Mostre que o ângulo x em C é congruente ao ângulo $N\hat{A}B$.
- Mostre que o ângulo x também é congruente ao ângulo $E\hat{U}O$.

Figura 27 - Vista frontal de um tanque de um Navio.



Fonte,o autor 2015

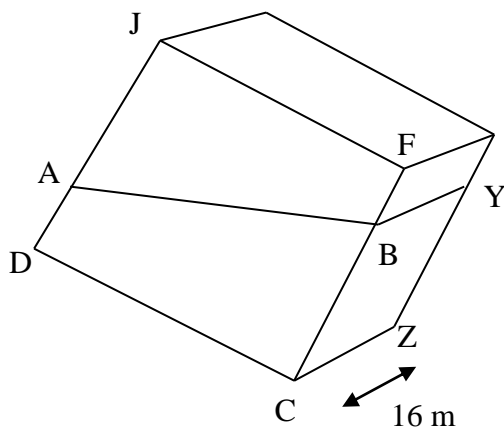
Atividade 9: Área do Trapézio

Seja a figura do exercício anterior, e após demonstração do mesmo, calcule a área do Trapézio retângulo ABCD, sabendo que $DC = 18\text{ m}$, $DJ = 25\text{ m}$, o ponto M é ponto médio do segmento DC, o ângulo $x = 60^\circ$, $h = 1,5\text{ metros}$.

Atividade 10: Volume

Após calcular a área do trapézio ABCD, no exercício anterior, calcule o volume da gasolina contida no paralelepípedo abaixo, que representa um tanque de um Navio, onde BY é paralelo a CZ = 16 m e os pontos A, B e Y são onde passam a linha da superfície do produto contido no tanque.

Figura 28 – Paralelepípedo representando um tanque de um Navio.



Fonte,o autor 2015

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta do autor deste trabalho foi apresentar a importância da Matemática na Indústria, como também apresentar atividades reais da Indústria que podem ajudar no ensino da Matemática.

Foi apresentado neste trabalho, a necessidade da indústria por empregados capacitados no conhecimento matemático para o bom desempenho das atividades profissionais, e os esforços do Brasil e do mundo em criar mecanismos para desenvolver esta proposta, como a criação do curso de graduação de matemático industrial e do Centro de Matemática e Estatística Aplicadas à Indústria (*CeMEAI*).

O mundo em constante mudança, inovação e desenvolvimento exige que o ensino matemático acompanhe estas mudanças.

As atividades mostradas no Terminal Aquaviária da baía da Guanabara é um exemplo de como a Matemática está totalmente presente nos variados serviços da Indústria. Desde o momento que o profissional chega no local de trabalho até o final do expediente, ele aplica o conhecimento matemático o tempo todo e às vezes nem percebe como está totalmente envolvido por ele.

O matemático na indústria pode inovar uma atividade, facilitar um serviço e até criar uma fórmula para melhor decisão aos menores custos de uma determinada atividade, como foi apresentado no capítulo 3.

No Terminal Aquaviário da Baía da Guanabara, TABG, não havia um estudo específico que mostrasse de maneira direta e simples para a melhor alternativa para optar em relação a operação com uma linha ou duas linhas. Embora a experiência profissional levasse muitas vezes a melhor opção, percebe-se que este trabalho transmite um estudo cujo resultado apresenta uma solução simples, confiável e direta para a realização da tarefa específica.

As atividades deixadas nesse trabalho no capítulo 4 contribuem para que o profissional da Educação de Matemática tenha material para mostrar aos alunos que o que ele aprende na escola pode ser de grande utilidade na sua vida profissional, e essa é uma das maiores queixas dos alunos que não tem um bom desempenho em Matemática.

Para finalizar, cumpre dizer que tudo que aqui está sendo apresentado tem o objetivo de se somar a outros recursos que possam convergir para dar uma resposta

bem justificada às muitas dúvidas por vezes suscitadas em sala de aula, ampliando a visão e, portanto, o horizonte dos alunos em relação aos diversos aspectos práticos do ensino acadêmico.

REFERÊNCIAS

- 1) FERRARO, N. G.; SOARES, P. A. T. S. Física Básica - Ed. Atual
- 2) LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E; MORGADO, A. C. A Matemática do ensino médio – volumes 1, 2 e 3 - Rio de Janeiro: SBM 1998
- 3) ANDRINI, ÁLVARO ; VASCONCELLOS MARIA JOSÉ Praticando Matemática, 6 –São Paulo Editora do Brasil 2012
- 4) PAIVA, MANOEL Matemática Paiva –volumes 1 e 3 – São Paulo : Moderna, 2009
- 5) CENTURIÓN, MARÍLIA – Matemática: teoria e contexto – São Paulo: Saraiva, 2012

APÊNDICE – Soluções dos Exercícios

Neste apêndice serão apresentadas as soluções das atividades do capítulo 4 da presente obra.

Atividade 1:

- a) O bombeio da REDUC dura 40 horas, $\frac{20000}{500} = 40$.
- b) O bombeio da Ilha dura 30 horas $\frac{30000}{1000} = 30$.
- c) A vazão que o produto do tanque da Ilha vai movimentando é de 500 m³/h.
- d) Após 40 h o tanque da REDUC ficará vazio e o da Ilha com 10.000 m³.
- e) A Ilha continuará bombeando por 20 h.

Atividade 2:

- a) Tempo de operação do bombeio da REDUC é de 60 h, $\frac{30000}{500} = 60$.
- b) Tempo de duração do bombeio da Ilha é de 10 h, $\frac{10000}{1000} = 10$.
- c) O tanque da Ilha está se esvaziando a uma vazão de 500 m³/h.
- d) A REDUC vai esvaziar o seu tanque em 60 h e a Ilha em 20 h

Atividade 3:

- a) O bombeio da REDUC dura 66 h e 40 min, $\frac{20000}{300} = 66,66$.
- b) O bombeio da Ilha dura 44 h e 26 min, $\frac{40000}{900} = 44,44$.
- c) A vazão que o produto do tanque da Ilha vai movimentando é de 600 m³/h.
- d) O tanque da REDUC e da Ilha ficam vazios em 66 h e 40 min.

Atividade 4:

- a) Como $20000 < 25000$, ou seja $Vr < \frac{V \cdot Qr}{Qi}$, então é melhor operar com 2 linhas.
- b) Como $30000 > 20000$, ou seja $Vr \geq \frac{V \cdot Qr}{Qi}$, então é melhor operar com 1 linha.
- c) Como $20000 = 20000$, ou seja $Vr = \frac{V \cdot Qr}{Qi}$, então é melhor operar com 1 linha.

Atividade 5:

a) A previsão de término é para às 3:13 do dia 21/10.

Atividade 6:

a) A densidade final do produto nos tanques do Navio é de 0,9896.

Atividade 7:

a) O volume do tanque é $(25 - 3) \cdot 18 \cdot 16 = 6336 \text{ m}^3$

Atividade 8

a) Como AN//DC, temos a reta CF cortada por essas paralelas, então o ângulo TCN é congruente ao ângulo OBF, mas $\text{TCN} = x + 90^\circ$, logo $\text{OBF} = x + 90^\circ$, mas OBF é ângulo externo em B ao triângulo ANB, por isso o ângulo $\text{OBF} = \text{ângulo N}\hat{\text{A}}\text{B} + 90$, assim $\text{OBF} = \text{N}\hat{\text{A}}\text{B} + 90^\circ = x + 90^\circ$, onde concluímos que $\text{N}\hat{\text{A}}\text{B} = x$.

b) Os ângulos $\text{A}\hat{\text{E}}\text{G}$ é congruente ao ângulo $\text{U}\hat{\text{E}}\text{O}$ pois são opostos pelo vértice. Os triângulos EOU, retângulo em O e AGE, retângulo em G, são semelhantes, pois os ângulos opostos pelo vértice e retos são congruentes, logo o terceiro ângulo é congruente também, $\text{G}\hat{\text{A}}\text{E}$ é congruente ao ângulo $\text{E}\hat{\text{U}}\text{O}$. Logo, $\text{E}\hat{\text{U}}\text{O}$ é congruente ao ângulo x .

Atividade 9:

a) Como $\cos x = \frac{h}{hc}$ e $x = 60^\circ$, $\frac{1}{2} = \frac{1,5}{hc}$, logo $hc = 3 \text{ m}$. Como $\text{DJ} = k + hc$, temos $25 = k + 3$, a base média $k = 22$. A área do trapézio é a base média vezes a altura, logo $A = k \cdot DC$, $A = 22 \cdot 18$, $A = 396 \text{ m}^3$

Atividade 10:

a) O volume do tanque é $396 \cdot 16 = 6336 \text{ m}^3$