



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Emanuel Arcanjo Jaconiano

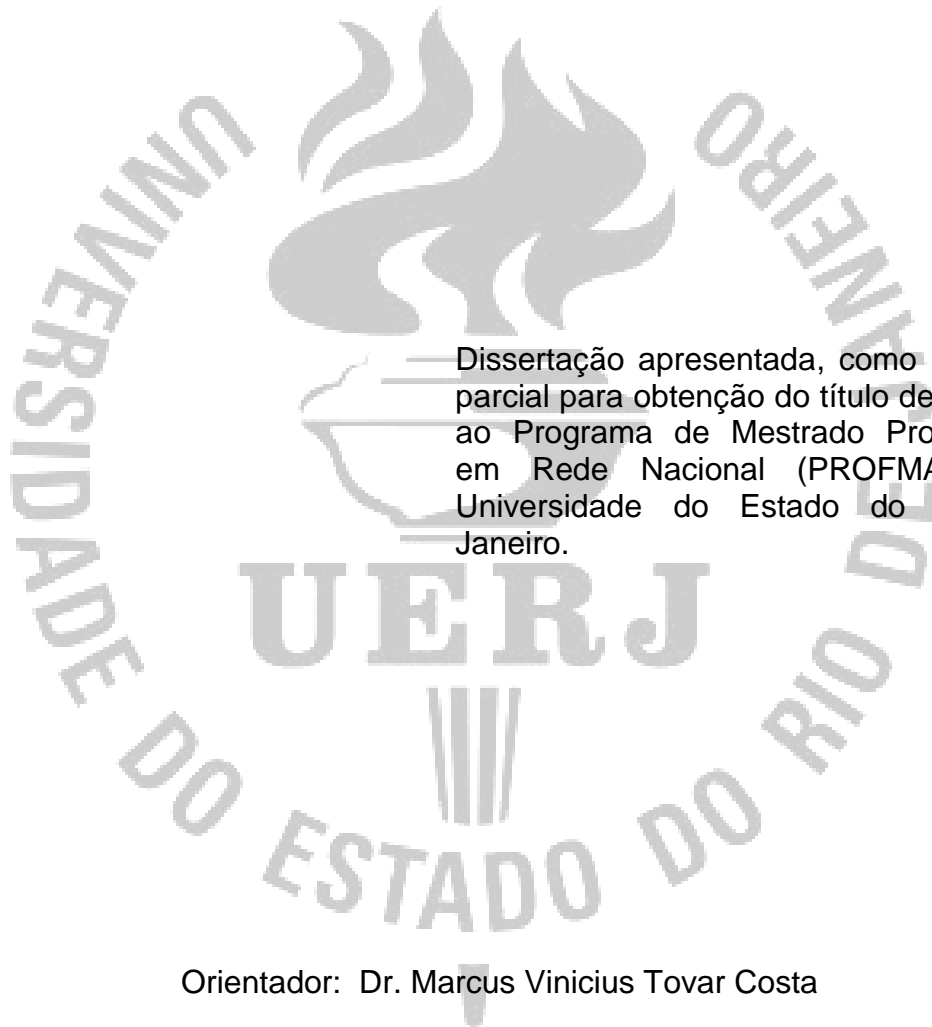
**Resolução de Problemas de Proporcionalidade através da
Redução à Unidade**

Rio de Janeiro

2017

Emanuel Arcanjo Jaconiano

Resolução de Problemas de Proporcionalidade através da Redução à Unidade



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Dr. Marcus Vinicius Tovar Costa

Coorientador: Dr. Augusto Cesar de Castro Barbosa

Rio de Janeiro

2017

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

J991 Jaconiano, Emanuel Arcanjo.
Resolução de problemas de proporcionalidade através da redução à
unidade / Emanuel Arcanjo Jaconiano. - 2017
98 f.

Orientador: Marcus Vinicius Tovar Costa.

Coorientador: Augusto Cesar de Castro Barbosa.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
- PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de
Matemática e Estatística.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Razão e proporção –
Estudo e ensino – Teses. I. Costa, Marcus Vinicius Tovar. II. Barbosa,
Augusto Cesar de Castro. III. Universidade do Restado do Rio de
Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.

CDU 51.07

Autorizo para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial
desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Emanuel Arcanjo Jaconiano

Resolução de Problemas de Proporcionalidade através da Redução à Unidade

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovado em de de 2017.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Marcus Vinicius Tovar Costa (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística – IME

Prof. Dr. Augusto Cesar de Castro Barbosa
Instituto de Matemática e Estatística – IME

Prof. Dr. Fernando Antonio de Araújo Carneiro
Instituto de Matemática e Estatística – IME

Prof. Dr. Vitor Luiz Bastos de Jesus
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia

Rio de Janeiro

2017

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho ao meu avô, Antônio de Araújo Ribeiro (*in memoriam*), pela inexorável parceria e torcida por minha vitória.

AGRADECIMENTOS

A minha mãe pela companheira incansável e por ser a melhor mãe que alguém pode ter;

Ao meu pai, um niilista de primeira ordem que na dicotomia entre o bem e o mal me ensinou a ser um homem do bem;

A minha irmã pelas risadas, filmes e cervejas que compartilhamos juntos;

A Eva, Edna e Tarcísio por me darem a melhor infância que alguém possa ter;

Ao Marcos José da Costa Machado um pai de laços não genético, mas de emoção sincera;

A Aline, minha esposa pela segunda vez, por instantes de vida que valem por si só;

A Enrique e Eduardo por me ensinarem que independente da idade podemos ser crianças outra vez;

A Raul Agostino por ser pai, filho e irmão, entre inúmeras conversas, me ensinou que estamos sempre aprendendo aprender e mais um Googol de coisas;

A Antônio Andrade, Pedro Andrade, Diego Cordeiro por fazer justiça a música do Milton Nascimento “Amigo é coisa pra se guardar do lado esquerdo do peito”;

A Sandra Francisco, um ser iluminado mais próximo de Shaka que já conheci;

Ao Roberto Santana pelas conversas e caminhadas compartilhadas;

A Sandro Fernandes e Felipe Freitas, físicos por excelência, por provar que amizade transcende o tempo e o espaço;

A Marcelinho e Carlos Victor, por 6 anos de segundas-feiras inesquecíveis;

A Edgard, um chefe, humano demasiado humano;

A Marcos Paulo e Odylo, alunos inesquecíveis e amigos de carteirinha;

A Fabiano e Rinaldo, decanos matemáticos, fontes de inspiração;

A minha turma do Profmat pela família construída;

Ao meu orientador Marcus Tovar por acreditar desde o início nesse projeto;

A todos vocês meu muito obrigado e finalizo parafraseando Carl Sagan:

“Diante da vastidão do tempo e da imensidão do universo é um imenso prazer para mim dividir um planeta e uma época com vocês”.

EPÍGRAFE

“Um resultado matemático novo, completamente novo, nunca antes conjecturado ou compreendido por ninguém, acarinhado desde as primeiras hipóteses esperançosas ao longo dos labirintos das demonstrações goradas, das abordagens erradas, das direções pouco prometedoras e de meses ou anos de trabalho difícil e delicado – nada, ou quase nada, neste mundo pode provocar uma sensação semelhante de poder e de tranquilidade ao seu criador. E um grande e novo edifício matemático é um triunfo que sussurra palavras de imortalidade”.

Alfred Adler

RESUMO

JACONIANO, E. A. *Resolução de problemas de proporcionalidade através da redução à unidade*. 2017. 98f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em rede Profissional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

O trabalho aqui apresentado tem por objetivo abordar a resolução de problemas matemáticos como metodologia de ensino sobre o tema proporcionalidade com foco no método de redução à unidade. Após uma breve análise em alguns livros didáticos, podemos verificar que a abordagem atual sobre esse conceito, em muitos casos não é adequada, dificultando assim o aprendizado por parte dos alunos. Somado a isso, fizemos uma análise quantitativa através de um trabalho realizado na rede particular de ensino, buscando discutir o processo de ensino aprendizagem sobre o assunto proporcionalidade.

PALAVRAS-CHAVE: Proporcionalidade. Redução à unidade. Resolução de problemas.

ABSTRACT

JACONIANO, E. A. Solving problems of proportionality using reducing unit method. 2017. 98f. Dissertation (Professional Master in Mathematics in Professional Network - PROFMAT) - Institute of Mathematics and Statistics, State University of Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

The paper presented here aims to address the problem solving of mathematical problems as a teaching methodology, focusing on the unit reduction method. After a brief analysis in some textbooks, we can verify that the current approach on this concept, in many cases is not adequate, thus hindering the learning on the part of the students. Added to this, we did a quantitative analysis through a work carried out in the private network of education, seeking to discuss the process of teaching learning on the subject proportionality.

Keywords: Proportionality. Reduction unit. Problem solving.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 –	A Pré-História: os primórdios da evolução humana.	15
Figura 2 –	O equilibrista.	21
Tabela 1 –	Informações do problema.	35
Tabela 2 –	Informações do problema.	36
Tabela 3 –	Reduzindo à unidade.	38
Tabela 4 –	Reduzindo à unidade.	39
Figura 3 –	Foto tirada de creme dental exposto para venda em um supermercado no Rio de Janeiro.	41
Tabela 5 –	Reduzindo à unidade.	44
Gráfico 1 –	Grandezas diretamente proporcionais.	47
Gráfico 2 –	A essência da redução à unidade.	47
Gráfico 3 –	Grandezas que são proporcionais a outras.	48
Gráfico 4 –	Grandezas inversamente proporcionais.	49
Figura 4 –	Figuras semelhantes.	51
Figura 5 –	Mapas semelhantes.	52
Figura 6 –	Triângulos semelhantes.	53
Figura 7 –	Hexágonos semelhantes.	54
Figura 8 –	Cálculo da área do retângulo.	55
Figura 9 –	Cálculo do volume do paralelepípedo.	56
Figura 10 –	Pote vazio de açúcar.	58
Figura 11 –	Foto do cubo unitário de açúcar.	58
Figura 12 –	Cubos unitários dentro do pote de açúcar.	59
Gráfico 5 –	Mais vezes mais.	60
Gráfico 6 –	Menos vezes menos.	61
Gráfico 7 –	Mais vezes menos.	62
Gráfico 8 –	Menos vezes mais.	63
Figura 13 –	Teorema de Pitágoras e a redução à unidade.	63
Figura 14 –	Extensão do Teorema de Pitágoras (ex. 1).	64
Figura 15 –	Extensão do Teorema de Pitágoras (ex. 2).	64
Figura 16 –	Generalização do Teorema de Pitágoras.	65
Figura 17 –	Área de absorção dos raios solares.	68

Figura 18 –	Aumentando a área absorção dos raios solares.	68
Tabela 6 –	Organizando os dados do problema.	68
Tabela 7 –	Organizando os dados do problema.	69
Tabela 8 –	Organizando os dados do problema.	71
Gráfico 9 –	Quantidade de acertos por item da questão discursiva.	76
Gráfico10 –	Quantidade de acertos da questão objetiva.	77

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA DE ENSINO...	14
2.1	Fundamentação teórica e objetivos.....	14
2.2	Abordagem Histórica.....	15
2.3	Diferença entre problemas e exercícios.....	16
2.4	Heurística.....	18
2.5	Heurística de René Descartes (1596 – 1650).....	18
2.6	Heurística de George Polya (1887 – 1985).....	19
2.7	Outras contribuições, críticas e propostas.....	21
2.8	Dilemas Contemporâneos.....	23
2.9	Por que tanta gente odeia Matemática?	28
2.10	Para que serve a Matemática?	29
3	GRANDEZAS PROPORCIONAIS	30
3.1	Grandezas Diretamente e Inversamente Proporcionais	30
3.2	Redução à unidade	37
3.3	Como saber que não estamos sendo enganados usando a redução à unidade.....	41
3.4	Entendendo a proporcionalidade sobre outro ponto de vista.....	42
3.5	Funções, proporcionalidade e gráficos.....	46
3.6	Proporcionalidade e a geometria	50
3.7	Proporcionalidade e redução à unidade em diversas situações e aplicações.....	59
4	ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS	67
5	DISCUSSÕES DOS RESULTADOS	76
6	CONCLUSÕES	78
	REFERÊNCIAS	79

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho é fruto de reflexões e uma “conclusão” após mais de uma década de dedicação ao ensino de Matemática nos ensinos médio e fundamental. Ao longo desse período pude observar e constatar o aparecimento de lacunas no ensino dessa importante ciência. Além disso, o entendimento e a busca das razões do porquê a maioria dos alunos possui ojeriza à Matemática. Na tentativa de explicar esses fatos, creio ser importante contar como essa preocupação surgiu ao longo da minha trajetória de professor.

Em 2004, tinha 18 anos de idade, comecei a lecionar ao mesmo tempo em que cursava o primeiro período de Matemática da universidade. Iniciei meu trabalho em curso pré-vestibular. Preparava alunos para as principais universidades resolvendo suas temidas provas específicas, participava de um projeto chamado de Aprofundamento, nome comum nos cursos Pré-Vestibulares. Ao resolver tais provas, percebia a complexidade das questões ali presentes.

Ao perguntar para os alunos quem fez a questão 6, por exemplo, notava que ninguém tinha ideia de como resolvê-la. Com o tempo fui percebendo que os alunos não faziam as questões, na maioria das vezes, porque não entendiam a essência dos conteúdos presentes, ou ainda pior, muitos nunca haviam estudado ou visto aquele tópico de matéria, ou se viram, certamente, foi de maneira bastante superficial. Era impressionante, parava tudo, ia para o quadro, explicava o conteúdo necessário para o desenvolvimento da questão e fazia alguns exemplos mais simples. Em seguida, dava um novo tempo para a resolução da questão 6. Era uma espécie de milagre, mais ou menos 40 % dos alunos resolviam o problema. Está aí a lacuna que mencionei no primeiro parágrafo.

Minha prática em sala começou através da resolução de problemas de provas e, de maneira indireta, fui obrigado a refletir sobre as falhas no processo de ensino-aprendizagem. Em seguida, comecei a preparar alunos de 13 a 16 anos para o exame de ingresso ao Colégio Naval. Problemas os mais variados possíveis e com níveis de dificuldade os mais diversificados. Assim, sem perceber, estava hipnotizado pela prática docente e convicto de que uma boa aula também reside em ensinar os alunos a resolver problemas.

O tempo existe, e permite a quebra de paradigmas. Ao começar a lecionar em turmas de ensino médio, percebo a heterogeneidade presente numa sala de aula, com alunos de todos os tipos, mas com algo em comum, o direito de aprender aquilo que está sendo ensinado. Nesse momento acontece a mudança em minha concepção do que poderia ser uma aula de qualidade. Seria aquela capaz de atingir o bom aluno e também aquele que tem uma maior dificuldade. Em outras palavras, é aquela que se faz entender pelos seus interlocutores, sem perder a profundidade daquilo que está sendo ensinado. Para isso, diante de tantas variáveis, algo era invariável, a resolução de problemas como canal para o aprendizado.

Os docentes devem sempre lembrar que os sujeitos mais importantes em uma sala de aula são os alunos, o conteúdo e o professor nessa ordem. Muitas vezes acabamos invertendo esse terno ordenado o que dificulta o processo de ensino-aprendizagem, onde o aluno deve ser o protagonista.

O principal objetivo dessa dissertação é apresentar o tema *grandezas proporcionais*, usando o *método de redução à unidade*. A motivação para esse trabalho foi perceber a falta de compreensão desse assunto em uma grande parte dos educandos. Este trabalho conta com 6 capítulos, onde o primeiro capítulo, a introdução, aborda a motivação que me levou ao estudo desse assunto. No segundo capítulo, abordaremos a “resolução de problemas” como metodologia de ensino com base em diversos autores, sendo POLYA (1975) o principal. Feito isso, no terceiro capítulo são apresentados inúmeros problemas de proporcionalidade cujas soluções tem como foco a redução à unidade. A análise de livros didáticos, abordando o tema, é mostrada no quarto capítulo onde é apontado que muitos adotam modelos ineficientes para a resolução de problemas sobre proporcionalidade enfatizando ao conhecido “decoreba”, ao invés de levar o aluno a refletir sobre o tema. A discussão sobre o ensino de proporcionalidade será discutida no quinto capítulo. Por fim, no capítulo seis são apresentadas conclusões e perspectivas para futuros trabalhos.

No decorrer desta dissertação pretende-se oferecer uma estratégia didática para professores no que se refere a resolução de problemas. A proposta é trabalhar a resolução de problemas como metodologia de ensino, além de incentivar os alunos a pensar, desenvolvendo sua autonomia, maturidade e qualidade de raciocínio.

2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA DE ENSINO

2.1 Fundamentação teórica e objetivos

Neste capítulo, busca-se uma bagagem teórica para abordar o tema grandezas proporcionas através da resolução de problemas. Grande parte do que ensinamos na vida escolar do aluno depende exclusivamente de um bom entendimento desse assunto. A maioria dos alunos ao final do ensino fundamental e início do ensino médio não tem a noção do que significa uma grandeza, muito menos do que significam grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Isso acaba deixando lacunas no entendimento de matérias que estão relacionadas à esse tópico, fato que tentaremos mostrar no final deste trabalho.

Um dos objetivos, também é a pretensão de transformar a ojeriza e o fardo que os estudantes tanto falam ao estudar Matemática em um pouco mais de prazer e leveza.

“A primeira regra do ensino é saber o que se deve ensinar. A segunda é saber um pouco mais do que aquilo que se deve ensinar.” (POLYA, 1975).

Resolver problemas é uma habilidade prática, como nadar, esqui ou tocar piano: você pode aprendê-la por meio de imitação e prática (...). Se você quer aprender a nadar você tem de ir à água e se você quer se tornar um bom ‘resolvedor de problemas’, tem que resolver problemas. (POLYA, 1975).

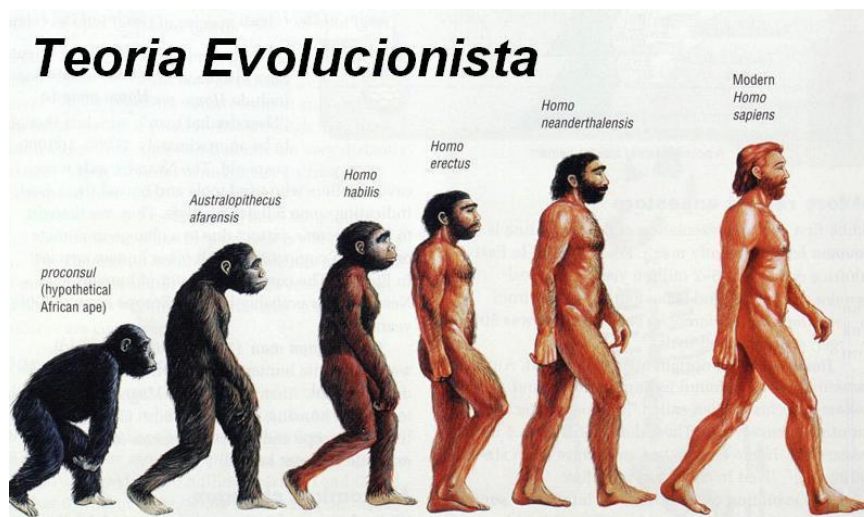
Com essa proposta queremos ensinar os alunos a pensar e não a fazer. A ideia central é substituir sempre que possível as fórmulas pela redução à unidade.

2.2 Abordagem Histórica

A melhoria da capacidade dos animais de se locomoverem para encontrar comida, abrigo e fugirem de seus predadores foi basicamente a razão mais primitiva para a evolução do cérebro desses seres vivos, a Figura 1 mostra um exemplo dessa evolução ao longo das eras para o caso dos humanos. Esta evolução permitiu ao homem um notável progresso ao longo da história. As mais variadas buscas de solucionar as mais variadas situações que eram colocadas diante de cada época permitiu ao homem ocupar um lugar privilegiado no globo terrestre em relação aos outros animais. Podemos citar alguns exemplos tais como: a descoberta do fogo para se aquecer, o uso da escrita cuneiforme desenvolvida pelos sumérios e posteriormente a hieróglifa pelos egípcios, a invenção da roda, a criação de um sistema para irrigar a terra e controlar as inundações entre os rios Tigres e Eufrates, onde as inundações não eram previsíveis como no rio Nilo.

Sem dúvida nenhuma se o homem não tivesse encontrado soluções para cada problema que esteve diante dele o mundo que se apresenta hoje diante de nós não seria desta forma.

Figura 1 – A Pré-História: os primórdios da evolução humana



Fonte: <http://animais.culturamix.com/curiosidades>

Outro ponto crucial é o momento onde nos tornamos carnívoros, duplicando as chances de sobreviver. O que isso nos mostra? Que saber resolver problemas é

fundamental para a preservação e evolução da vida. O que mais podemos querer? Ao longo do tempo a evolução das espécies fez com que nós seres humanos tivéssemos que nos deparar com situações cada vez mais complexas e que buscar estratégias para resolver problemas se tornou tema central no ato de existir. Podemos então nos indagar a respeito sobre o que é um problema? Segundo Newell e Simon (1972) “um problema é uma situação em que cada indivíduo deseja fazer algo, porém desconhece o caminho das ações necessárias para concretizar a ação”. Antes de falarmos em estratégias de solucionar problemas precisamos de alguns pré-requisitos como veremos a seguir.

2.3 Diferença entre Problemas e Exercícios

É bastante comum professores de Matemática e livros didáticos usarem sem a menor distinção a expressão resolver problemas ou exercícios como se fossem a mesma coisa. Devemos tomar cuidado, pois, muitos educadores matemáticos salientam a importância dessa distinção. De acordo com Silveira (2001):

Um problema matemático é toda situação que requer a descoberta de informações matemáticas desconhecidas para a pessoa que tenta resolvê-lo e/ou a invenção de uma demonstração de um resultado matemático dado. O fundamental é que o solucionador conheça o objetivo a chegar, mas só estará enfrentando um problema se ele ainda não tem os meios para atingir tal objetivo.

Já um exercício é uma atividade mais imediata como uma mera aplicação de fórmula. Esta diferença entre problemas e exercícios é enfatizada por muitos professores e pesquisadores da educação matemática.

Para Lima (2004), “resolver problemas ensina a usar conceitos e proposições, desfaz certos mal-entendidos, ajuda a fixar na mente ideias novas, dá oportunidade para explorar as fronteiras da validade das teorias expostas”.

Reforçando a ideia do parágrafo anterior, Dante (1991) acredita que “um dos objetivos do ensino da matemática é fazer o aluno a pensar produtivamente e, para isso, nada melhor que apresentar situações problemas que o envolva e o motive a querer resolvê-las”.

Junto aos dois autores, Lupinacci e Botin (2004) defendem que:

a Resolução de Problemas é um método eficaz para desenvolver o raciocínio e para motivar os alunos para o estudo da Matemática. O processo ensino e aprendizagem pode ser desenvolvido através de desafios, problemas interessantes que possam ser explorados e não apenas resolvidos.

Já D'ambrósio (1994), apud Breuckmann (1998) "acreditam na resolução de problemas como metodologia de ensino em que o professor propõe ao aluno situações problemas, caracterizados por investigações e explorações de novos conceitos".

Repare que os autores mencionados falam em investigar e explorar os problemas e não só resolvê-los. Ancorado a isto é apontada a necessidade imperativa de que o professor amplie seus horizontes e de seus alunos, buscando estratégias diferentes para atacar os problemas, não engessando sua maneira de pensar, fazendo assim com que seus educandos possam aprender novos conceitos de forma motivadora e reflexiva. Infelizmente, o modelo adotado por muitas escolas é exatamente o oposto, usando materiais apostilados, onde o professor contribui muito pouco para o aprofundamento dos conceitos que se pretende ensinar. Além disso, o tempo dispensado aos conteúdos é mínimo. A maioria das escolas ensinam decorebas em cima de decorebas tornando nossos alunos pragmáticos e com pouca autonomia de raciocínio. Para realizar o que deveria ser feito "O interessante é resolver diferentes problemas com uma mesma estratégia e aplicar diferentes estratégias para resolver um mesmo problema" (DANTE,1991).

Sem dúvida, essa estratégia aumentaria o número de ferramentas a serem utilizadas na resolução de problemas, possibilitando uma maior chance de sucesso perante um desafio apresentado.

Portanto, caso os alunos consigam: analisar e interpretar a questão apresentada, estruturar parcial ou totalmente as situações propostas, desenvolver estratégias de resolução, o que inclui a verificação das mesmas e do resultado, podemos dizer que têm em mãos um problema matemático. No entanto, se é apresentada "uma atividade de treinamento no uso de alguma habilidade/conhecimento matemático já conhecido pelo resolvidor, como a aplicação de um algoritmo conhecido, de uma fórmula conhecida" (SILVEIRA, 2001), os alunos têm em mãos um exercício que exige apenas a aplicação de um

procedimento sem a necessidade de criar estratégias para resolvê-lo. Esta comparação, talvez explique o baixo desempenho dos alunos diante dos problemas de Matemática, pois a maioria dos problemas “exercícios” abordados em sala de aula são repetitivos e com aplicação direta de fórmulas, trazendo dificuldades ao educando em aperfeiçoar diferentes tipos de raciocínio, engessando sua criatividade e não desenvolvendo, como deveria, sua autonomia de pensamento. Ao falar de problemas matemáticos não podemos deixar de mencionar a heurística.

2.4 Heurística

A Heurística é a arte de inventar, de fazer descobertas; ciência que tem como objeto a descoberta dos fatos; método de investigação baseado na aproximação progressiva de um dado problema (Dicionário Online de Português, 2017). Na antiguidade era o nome de um certo ramo de estudo, não bem definido, que pertencia a diversas áreas tais como à Lógica, Filosofia e Psicologia. Seu principal objetivo era o estudo de métodos e regras da descoberta ou invenção. Segundo Polya (2006), encontramos indícios sobre este ramo do conhecimento em diversos pensadores e matemáticos como Euclides, Sócrates, Pappus, Leibnitz e Descartes, sendo dado a este último a mais famosa tentativa de sistematização da Heurística antes de Polya.

2.5 Heurística de René Descartes (1596- 1650)

Descartes foi um grande matemático e filósofo francês da idade moderna que teve as primeiras ideias relevantes no sentido da Heurística para resolução de Problemas. Sua ambição era reduzir todo problema à um raciocínio de ordem matemática. Na sua obra Discurso do Método (1983) ele tinha a pretensão de conduzir a própria razão através da lógica e encontrar a verdade nas ciências. Para isso ele criou uma estratégia dividida em 4 etapas para o julgamento de uma determinado fato:

A primeira era o de jamais acolher alguma coisa como verdadeira que eu não conhecesse evidentemente como tal; isto é, de evitar cuidadosamente a precipitação e a prevenção e, e de nada incluir em meus juízos que não se apresentasse tão clara e tão distintamente a meu espírito, que eu não tivesse nenhuma ocasião de eu pô-lo em dúvida.

A segunda em dividir cada uma das dificuldades que eu examinasse em tantas parcelas quantas possíveis e quantas necessárias fossem para melhor resolvê-las.

A terceira a de conduzir por ordens meus pensamentos, começando pelos objetos mais simples e mais fáceis de conhecer para subir pouco a pouco como por degraus, até o conhecimento dos mais compostos, e supondo mesmo uma ordem entre os que não se precedem naturalmente uns os outros.

A quarta e última etapa resume-se de fazer em toda parte enumerações tão completas e revisões tão gerais, que eu tivesse a certeza de nada omitir. (DESCARTES, 1983)

2.6 Heurística de George Polya (1887- 1985)

Polya foi um filósofo e matemático húngaro com grande importância no século XX, sendo o primeiro a apresentar uma heurística na resolução de problemas para a Matemática. Suas ideias foram influenciadas por Descartes, Skinner e Wallas e seu trabalho influenciou grandes pesquisadores nesta área tais como Thompson e Shoenfeld. As etapas na resolução de problemas segundo Polya são:

1. Compreender o problema é o primeiro passo para começar.

Precisamos entender o que pede o problema está. Compreender bem as suas regras, separar as hipóteses, definir bem as variáveis para sabermos onde queremos chegar.

2. Estabelecer um plano envolve várias etapas:

1ª) Mobilização e organização

Devemos escrever todas as ideias que surgirem, selecionando os itens relevantes. Este ato chama-se *mobilização*.

Depois dessa etapa, precisamos adaptar e combinar essas ideias no problema em questão. Isto é *organização*.

2ª) Procurar semelhanças com outros problemas conhecidos

Uma regra básica da vida matemática: se o universo lhe entrega um problema difícil, tente resolver outro mais fácil, em vez do primeiro, e fique na esperança de que a versão simples seja próxima o bastante do problema original.

3ª) Regressão – Regredir para progredir

Às vezes o problema resolvido contém muitos elementos e informações. É extremamente vantajoso, quando possível, simplificarmos esses elementos, obtendo um novo problema, mas sem perder a essência do original.

4ª) Esquematizar, diagramar, desenhar ajudam a solucionar

Geralmente, as pessoas têm uma maior facilidade para organizar seus pensamentos fazendo esboços da situação.

5ª) Inverter o caminho pode ajudar

Pensar no problema já resolvido pode auxiliar a mobilização e a organização das ideias, dando mais clareza ao pensamento.

3. Executar o plano

Depois de compreender e planejar, é hora de “botar a mão na massa”.

4. Retrospecto

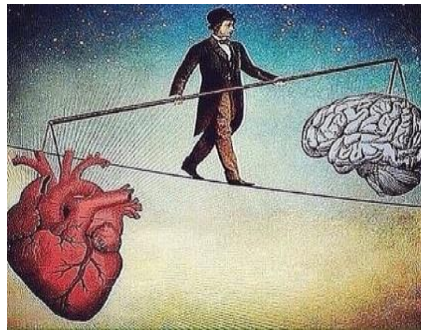
Essa etapa talvez seja a mais importante e, com certeza, a que menos colocamos em sala de aula. Depois de resolver um problema é muito importante checar o resultado e ver se ele está de acordo com os dados, se faz sentido. Verifique se é possível encontrar novas rotas para solucionar o problema. Novos caminhos que levam ao mesmo destino nos dão conforto e confiança na hora de ensinar.

Outras estratégias podem ser mencionadas.

– Persistência, esperança e sucesso

Não pense que resolver problemas é uma questão puramente intelectual. Persistência e emoções desempenham papéis muito importantes como podemos ver na Figura 2. É necessário preparar o espírito.

Figura 2 – “O equilibrista”



Fonte: <http://obviousmag.org>.

Muitos fatores como confiança, equilíbrio, ansiedade, frustrações, interferem na resolução de problemas. Piaget (1983) defende a ideia de que o ambiente e as relações afetivas são condições necessárias para o desenvolvimento do indivíduo. Polya (2006) reafirma isso em sua Heurística como mencionamos acima.

– Não teime demais com uma ideia

Seja humilde, peça ajuda aos seus melhores amigos na hora de resolver problemas: O quê?, Por quê?, Onde?, Quando? e Como?.

– Saber a hora de parar

Muitas das vezes, depois de inúmeras tentativas, não obtemos progresso na execução do problema. Nesse momento, a melhor coisa a se fazer é descansar a cabeça. Os psicólogos explicam o fato que, após uma ausência prolongada, o problema pode voltar ao consciente com muito mais clareza, possibilitando a solução. Esse evento chama-se trabalho do subconsciente.

2.7 Outras contribuições, críticas e propostas.

Após Descartes encontramos duas ideias originais, mas que não foram bem sucedidas. A primeira ideia se deve a G. Wallas em *The Art of Thought* (1926), psicólogo que nasceu na segunda metade do século XIX, e que defendeu assim como Descartes 4 fases para resolução de problemas que são:

- a) saturação: trabalha no problema até ter feito tudo o que podia com ele;
- b) incubação: você tira o problema do seu consciente e deixa o subconsciente tomar conta dele. Ou seja, você 'dorme' sobre ele. Esta é a parte fácil;
- c) inspiração: a resposta chega subitamente, sem que você esteja pensando no problema;
- d) verificação: você checa a solução apenas para ter certeza de sua correção.

A segunda ideia foi de B. Skinner (1972) também psicólogo que nasceu na primeira metade do século XX e dividiu a resolução de problemas em 2 etapas:

- a) determinar as ações produtivas;
- b) reforçá-las.

Apesar de terem sido mal sucedidas, por serem ideias muito vagas e de difícil aplicação prática, influenciaram Polya como já mencionamos.

Voltando novamente à Polya, apesar da sua Heurística ser referência até os dias atuais, seu trabalho não ficou isento de críticas. Alan Schoenfeld (1985), matemático e pesquisador do desenvolvimento cognitivo, concorda que o processo de ensino e aprendizagem da Matemática deve estar ligado diretamente ao domínio de resolução de problemas. Suas críticas ao trabalho de Polya podem ser encontradas no *Handbook for research on mathematics teaching and learning*, do NCTM, em Grouws (1992), onde, no capítulo sobre resolução de problemas, Schoenfeld verifica que as tentativas de ensinar os estudantes a usarem os métodos de Polya não haviam sido demonstradas com êxito. Sugere ainda que a razão fundamental para a falta de sucesso para a maioria das Heurísticas de Polya é que estas são descritas, mas não prescritas, isto é, provavelmente falta em seu trabalho uma especificação maior de como fazer. Segundo ainda Schoenfeld, a resolução de problemas deveria "ajudar os estudantes a desenvolver um grande número de estratégias mais específicas em resolução de problemas; ensinar metas cognitivas; desenvolver formas de melhorar as crenças dos estudantes sobre a natureza matemática, a resolução de problemas e suas próprias competências pessoais". Essa crença do autor pode ser reforçada no seu livro *Mathematical Problem Solving* (1985), onde o pesquisador divide em 4 estágios do conhecimento para ter sucesso no aprendizado da matemática:

1. *Recursos*: conhecimento de procedimentos e questões da matemática.

2. *Heurísticas*: estratégias e técnicas para resolução de problemas, tais como trabalhar o que foi ensinado, ou desenhar figuras.
3. *Controle*: decisões sobre quando e quais recursos usar.
4. *Convicções*: uma visão matemática do mundo, que determina como alguém aborda um problema.

Uma década após as propostas de Schoenfeld terem sido feitas, vários teóricos apontaram pouca praticidade sobre as técnicas apresentadas para resolução de problemas no âmbito escolar. Há ainda muito que se evoluir e uma possível explicação se deve às ideias de Schoenfeld terem potencializado as falhas das Heurísticas de Polya para uma estágio mais elevado. Seus críticos ressaltam que:

a pesquisa sobre resolução de problemas matemáticos estagnou durante grande parte da década de 90 e início deste século. Além disso, a pesquisa que foi conduzida não parece ter se acumulado num corpo substancial de conhecimento, orientado para o futuro, de como se pode efetivamente promover a resolução de problemas dentro e além da sala de aula. Esta falta de progresso é devida principalmente aos muitos anos de elaborações repetidas de concepções governadas por regras de competência em resolução de problemas. Chegou a hora de considerar outras opções para avançar na pesquisa em resolução de problemas e desenvolvimento curricular – “nós temos destacado a necessidade de reexaminar as hipóteses de nível fundamental sobre o que significa compreender conceitos e processos de resolução de problemas matemáticos. Uma poderosa alternativa em que temos avançado é a de utilizar as perspectivas teóricas e as metodologias de pesquisa associadas a uma perspectiva de modelos e modelação (MMP) em ensino, aprendizagem e resolução problemas matemáticos”. Adotar uma MMP significa ter pesquisadores que estudam desenvolvimentos de modelos e modelação dos estudantes e que naturalmente utilizam abordagens integradas para explorar o (co)desenvolvimento de conceitos matemáticos, processos de resolução de problemas, funções meta cognitivas, disposições, crenças e emoções. Esses pesquisadores também veem processos desenvolvimentais de resolução de problemas, num modo semelhante àquele que fariam ao estudar o desenvolvimento de conceitos matemáticos em áreas temáticas como os números iniciais, a geometria e a álgebra. Além disso, os problemas utilizados são simulações atraentes, situações autênticas de resolução de problemas (por exemplo, a seleção de equipes esportivas para os Jogos Olímpicos) e engajam os alunos no pensar matemático que envolve criar e interpretar situações (descrevendo, explicando, comunicando) pelo menos, tanto quanto ele envolve computar, executar procedimentos e raciocinar dedutivamente (ENGLISH; LESH; FENNEWALD, 2008)

2.8 Dilemas Contemporâneos

Com base em tudo que foi exposto até aqui, durante a década de 1980, vários recursos haviam sido criados para serem utilizados em sala de aula sobre a resolução de problemas. Podemos exemplificar aqui listagens com coleções de problemas e estratégias para as devidas soluções, além orientações para avaliar essas práticas. Sem dúvida, esses materiais auxiliaram os professores de Matemática a abordarem a resolução de problemas em suas aulas. Paralelamente, durante essa década a dificuldade dos professores em ensinar, e dos alunos em aprender fizeram com que os educadores matemáticos e pesquisadores tivessem que repensar o processo de ensino aprendizagem. Infelizmente, não havia um único caminho a ser seguido.

De acordo com Onuchic e Allevato (2004), ao final da década de 1980, o NCTM, em busca de uma nova reforma para a educação matemática, publicou os títulos, *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, em 1989; *Professional standards for teaching mathematics*, em 1991; e *Assessment standards for school mathematics*, em 1995. Os objetivos desses “Standards” tinham como escopo grandes mudanças nos currículos da matemática, além disso visavam estimular a todos os envolvidos a melhorar os programas de Matemática em todos os segmentos de ensino.

Diversos materiais instrucionais foram produzidos por essas novas ideias para se alinhar aos “Standards”. Além disto, era necessário repensar a abordagem e aplicação desses conteúdos na sala de aula. Estes novos currículos sugeriam a utilização de contextos nos problemas matemáticos, ou seja, nascia a contextualização como forma de ensinar tais conteúdos, além de relacioná-los com outras áreas do ensino, ou seja, a ideia de interdisciplinaridade.

Em 1995, o ensino da Matemática nos Estados Unidos entrava em crise. Após 10 anos de aplicações da nova reforma muitas críticas e sugestões foram dadas evoluindo estes documentos para o *Standards 2000* como assim ficou conhecido. No Brasil, com base nos Standards foram criados os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) que entraram em vigor no Brasil em 1998. Como desdobramento da nova Lei de Diretrizes e Bases que entrara em vigor em 1996, os PCN viriam a ser a orientação aos professores tendo como objetivo e modificar o

perfil metodológico no fazer pedagógico da educação brasileira como pressuposto de uma política pública de Estado e não de governos.

Base da construção das matrizes de referência para a constituição das avaliações oficiais do Governo federal (intermediada pelo INEP), os Parâmetros Curriculares Nacionais, entretanto, acabaram formando orientações adotadas pelos diversos segmentos (públicos e privados) de todo o país. Entende-se, por Matrizes de referência como o documento que serve de orientação para a elaboração das referidas avaliações oficiais anteriormente citadas.

No que tange ao ensino da Matemática, assim como nas demais áreas do conhecimento, os PCN tratam separadamente do tema nos diversos ciclos na Educação Básica: Ensino Fundamental I e II e o Ensino Médio.

Destaca-se, aqui, em particular, a proposta dos PCN para o Ensino Fundamental, ciclo II (6º ao 9º. anos) e, na sequência, para o Ensino Médio:

Os Parâmetros Curriculares Nacionais explicitam o papel da Matemática no ensino fundamental pela proposição de objetivos que evidenciam a importância de o aluno valorizá-la como instrumental para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. Destacam a importância de o aluno desenvolver atitudes de segurança com relação à própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, de cultivar a auto-estima, de respeitar o trabalho dos colegas (...). Indicam a Resolução de Problemas como ponto de partida da atividade Matemática e discutem caminhos para fazer Matemática.

E no Ensino Médio os PCN sugerem que este seja desenvolvido não mais por disciplina, mas por áreas do conhecimento. Neste sentido, agrupam Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Entretanto, no que se refere exclusivamente à Matemática, a orientação sugere:

A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e

da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional.

Vamos ver o que os PCN (BRASIL, 1996) dizem a respeito da resolução de problemas:

“[...] para atender as demandas do trabalho contemporâneo, é inegável que a matemática pode dar uma grande contribuição à medida que explora a resolução de problemas e a construção de estratégias como um caminho para ensinar e aprender na sala de aula. Também o desenvolvimento da capacidade de investigar, argumentar, comprovar, justificar e o estímulo à criatividade, à iniciativa pessoal e ao trabalho coletivo favorecem o desenvolvimento dessas capacidades.

Um outro parágrafo também aborda a resolução de problemas:

“[...] educadores matemáticos apontam a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática. Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução”.

Podemos citar também, o Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP) cujo principal objetivo é desenvolver a resolução de problemas como “metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas”. Este método se diferencia do ensino tradicional (teoria-exemplos resolvidos-exercícios), cabendo ao aluno a última etapa deste processo. Aqui o professor é apenas o mediador entre o processo de ensino-aprendizagem, onde o aluno é o protagonista na construção do objeto do saber matemático. Complementando as ideias de Polya e Schoenfeld, o GTERP desenvolveu um roteiro que veremos abaixo na íntegra para ser utilizado em sala de aula pelo professor numa forma prescritiva dividida em 9 estágios como veremos abaixo:

- 1) Preparação do problema: selecionar um problema visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É recomendável que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema proposto não tenha ainda sido trabalhado em sala de aula.
- 2) Leitura individual: entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.

3) Leitura em conjunto: formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos:

- se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo e levando-os a interpretar o problema;
- se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.

4) Resolução do problema: de posse do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da “matemática nova” que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, os conduzirá na construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.

5) Observar e incentivar: nessa etapa, o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto buscam resolver o problema, os alunos, em grupos, têm seu comportamento observado, analisado pelo professor, que estimula o trabalho colaborativo, pois, como mediador, leva-os a pensar, dando-lhes tempo para isso, e incentiva a troca de ideias:

- o professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) com base nos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda aos alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. De igual modo, a ele cabe acompanhar suas explorações e ajuda-los, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação, passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática, conceitos relacionados e técnicas operatórias, a fim de possibilitar a continuação do trabalho.

6) Registro das resoluções na lousa: representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam sobre elas.

7) Plenária: para esta etapa, todos os alunos são convidados a discutir as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defender seus pontos de vista e esclarecer suas dúvidas. O professor coloca-se como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Esse é um momento bastante rico para a aprendizagem.

8) Busca de consenso: após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor incentiva toda a classe a chegar a um consenso sobre o resultado correto.

9) Formalização do conteúdo: neste momento, denominado “formalização”, o professor registra na lousa uma apresentação “formal” – organizada e estruturada em linguagem matemática, padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos por meio da resolução do problema, de modo a destacar as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 83-85).

Podemos observar, embasado por todos esses teóricos, que resolver problemas de matemática forma a espinha dorsal de como devemos estruturar nossas aulas para que o aprendizado ocorra de forma efetiva. Com base nisso, podemos deixar aqui algumas indagações. De acordo com a metodologia Prescritiva de Onuchic e Allevato (2011), será que a maioria dos professores estão preparados

para este tipo de abordagem em sala de aula? Com o sistema brasileiro de educação, onde o objetivo do ensino passou a ser aprovação no vestibular, como utilizar todas essas técnicas visto que os educadores tem uma prazo mínimo para terminar seus conteúdos, utilizando ainda apostilas padronizadas pelas escolas?

Neste dinamismo contemporâneo, com o avanço tecnológico e a demanda da sociedade atual, existirá espaço para o ensino tradicional?

2.9 Por que tanta gente odeia Matemática?

Uma boa resposta a essa pergunta pode ser obtida a partir de uma mistura da visão de dois autores diferentes (GOWERS, 2008) e (ELLENBERG, 2015). Na visão de Gowers, a grande antipatia da Matemática em relação a outras disciplinas, como por exemplo, História e Literatura, acontece por dois motivos básicos: primeiro pela própria singularidade da Matemática que tem por característica, muitas das vezes, a construção em si mesma. Vejamos, através de um exemplo, o que isso quer dizer. Se você não entende teorema de Pitágoras terá dificuldade em entender o cálculo da diagonal do cubo e assim por diante.

Como as pessoas acham pouco atraentes as aulas de Matemática, acabam não vendo sentido naquilo que está sendo transmitido. O ponto de vista de Ellenberg vai de encontro ao de Gowers. Na sua visão, o desinteresse pela Matemática acontece muitas vezes por culpa do próprio professor, fazendo isso de forma inconsciente, talvez pela sua insegurança ou por não estar bem preparado para função. Um exemplo disso, pode ser percebido quando no momento de uma explicação de um determinado conteúdo um aluno faz a pergunta mais temida e inoportuna de todas: Para que serve isso? Respostas do tipo “porque cai no vestibular”, ou “você ainda não sabe que profissão irá escolher, pode ser que algum dia você precise usar isso”, certamente são insatisfatórias tanto para o aluno quanto para o professor. Respostas contínuas como essas, sem dúvida, irão impactar sobre os alunos de forma negativa. De qualquer forma a pergunta deve ser mantida. Mas para que serve a Matemática? Felizmente existem respostas mais satisfatórias do que as apresentadas. Uma das mais relevantes é dada por Jordan Ellenberg, discutida a seguir.

2.10 Para que serve a Matemática?

É bastante simplória a ideia de que a Matemática é simplesmente uma sequência de cálculos a serem executados por rotina até que sua paciência ou energia se esgote. As equações que os alunos resolveram ao longo dos anos são para a Matemática a mesma coisa que trabalhar com pesos e fazer ginástica é para o futebol. Se você jogar futebol em nível de competição, vai ter que fazer um monte de exercícios, chatos, repetitivos e aparentemente sem sentido. Será que os jogadores profissionais algum dia usam esses exercícios? Bom, nunca veremos um grande jogador em campo levantando halteres, nem correndo em zig-zag entre cones. No entanto, o veremos usando a força, a velocidade, a percepção e a flexibilidade que desenvolveu fazendo esses exercícios, semana pós semana. Praticar exercícios é parte de aprender a jogar futebol, assim como resolver problemas de Matemática faz parte de seu aprendizado. Saber Matemática é “como usar um par de óculos de raios X que revelam estruturas ocultas sob a superfície caótica do mundo” (ELLENBERG, 2015).

3 GRANDEZAS PROPORCIONAIS

3.1 Grandezas diretamente e inversamente proporcionais

Com base na fundamentação teórica do capítulo anterior, vamos explorar uma quantidade significativa de problemas matemáticos envolvendo grandezas (tudo aquilo que pode ser medido) proporcionais para depois formalizarmos o conceito resultando na autonomia de raciocínio do aluno.

Considere a seguinte situação:

Beatriz lê 3 páginas de um livro em 1 minuto. Nesse ritmo, em 2 minutos, ela consegue ler o dobro, isto é, $2 \times 3 = 6$ páginas, em 3 minutos ela lê o triplo, ou seja $3 \times 3 = 9$ páginas, em 4 minutos serão $4 \times 3 = 12$ páginas, e assim sucessivamente.

Quando multiplicamos o tempo por um número, a quantidade de páginas que ela lê por minuto fica multiplicada por esse mesmo número. Agora acompanhe o caso que segue.

Um grupo de 12 operários produziu durante certo tempo 3.000 peças. Se cada um deles produz a mesma quantidade, quantas peças foram produzidas por 6 operários?

Se dividimos a quantidade de operários por 2 a quantidade de peças também vai ficar reduzida pela metade, ou seja, $\frac{3.000}{2} = 1.500$ peças, certo?

E se fossem 4 operários?

Neste caso, como dividimos a quantidade de operários por 3, o número de peças vai ficar reduzida à terça parte, isto é, $\frac{3.000}{3} = 1.000$ peças.

Nos dois exemplos quando uma das grandezas é multiplicada ou dividida por um número, a outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número. Quando isso acontece chamamos as grandezas de diretamente proporcionais.

Vamos resolver alguns problemas para o entendimento do conceito.

1. Se 8 metros de certo tecido custam R\$ 32,00, quanto custarão 25 metros do mesmo tecido?

Solução: Se dividirmos o preço pela quantidade de metros descobriremos o preço por metro. Assim, $\frac{32}{8} = 4$ ou seja, 1 metro custa R\$ 4,00 reais.

Portanto, 25 metros custam $25 \times \text{R\$ } 4,00 = \text{R\$ } 100,00$.

2. Em uma usina de reciclagem de latas de alumínio são necessárias 450 latas para se obter 6 kg de alumínio. Quantas latas serão necessárias para se obter 100 kg de alumínio?

Solução: Se dividirmos o número de latas pelo número de quilo descobriremos o número de latas por quilo. Assim $\frac{450}{6} = 75$, ou seja, com 75 latas obtemos 1kg de alumínio. Portanto, para obtermos 100 kg de alumínio serão necessárias $75 \times 100 = 7.500$ latas.

3. (ENEM) Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas.

Se a mãe ministrou corretamente 30 gotas do remédio a seu filho a cada 8 horas, então a massa corporal dele é de:

- a) 12 kg b) 16 kg c) 24 kg d) 36 kg e) 75 kg

Solução: 5 gotas para cada 2 kg, ou seja, para 1 kg são necessárias $\frac{5}{2} = 2,5$ gotas.

Portanto, 30 gotas significa que a massa corporal da criança é $\frac{30}{2,5} = 12$ kg.

Sejam alguns exemplos com três grandezas.

4. Três agricultores colhem 1.800 pés de alface em 5 horas. Se todos trabalham da mesma forma quantos pés de alface serão colhidos em 6 horas por 2 agricultores?

Solução: Observe que a quantidade de pés de alface é diretamente proporcional ao número de agricultores e também ao número de horas trabalhadas. Portanto:

3 agricultores _____ 5 horas _____ 1.800 pés de alface

1 agricultor _____ 5 horas _____ $\frac{1.800}{3} = 600$ pés de alface

1 agricultor _____ 1 hora _____ $\frac{600}{5} = 120$ pés de alface

Se dividimos o número de agricultores por 3 a quantidade de pés de alface também fica dividida por 3.

Se dividimos o número de horas trabalhadas por 5 a quantidade de pés de alface também fica dividida por 5.

Agora que sabemos quanto um agricultor colhe em uma hora podemos deduzir que:

2 agricultores _____ 1 hora _____ $120 \times 2 = 240$ pés de alface

Se multiplicamos o número de agricultores por 2 a quantidade colhida também fica multiplicada por 2.

Finalmente,

2 agricultores _____ 6 horas _____ $240 \times 6 = 1.440$ pés de alface

Se multiplicamos o número de horas por 6 a quantidade de pés de alface também fica multiplicada por 6.

5. Três artesãos confeccionam 120 pulseiras em 8 dias. Conservadas as condições de trabalho quantos dias são necessários para que 6 artesãos façam 90 pulseiras?

Solução: Organizando os dados do problema temos:

3 artesãos _____ 120 pulseiras _____ 8 dias

1 artesão _____ $\frac{120}{3} = 40$ pulseiras _____ 8 dias

1 artesão _____ $\frac{40}{8} = 5$ pulseiras _____ 1 dia

Se dividimos o número de artesãos por 3 mas mantivermos inalterado a quantidade de dias ele só conseguirá fabricar $\frac{120}{3} = 40$ pulseiras.

Logo, em 1 dia este artesão faz $\frac{40}{8} = 5$ pulseiras.

Assim,

6 artesãos _____ $5 \times 6 = 30$ pulseiras _____ 1 dia

6 artesãos fazem o sêxtuplo, isto é, $6 \times 5 = 30$ pulseiras em por dia.

Portanto,

6 artesãos _____ $30 \times 3 = 90$ pulseiras _____ $1 \times 3 = 3$ dias

Para fazer o triplo de pulseiras eles levarão o triplo do tempo, ou seja, $3 \times 1 = 3$ dias.

6. Uma olaria produz 2800 tijolos em 10 dias trabalhando 4 horas por dia. Quantos tijolos esta olaria produzirá em 15 dias trabalhando 6 horas por dia?

Solução: Organizando os dados do problema temos:

2.800 _____ 10 dias _____ 4 horas/dia

Portanto, em 1 dia temos:

$\frac{2.800}{10} = 280$ tijolos _____ 1 dia _____ 4 horas/dia

Trabalhando 1 hora/ dia temos:

$\frac{280}{4} = 70$ tijolos _____ 1 dia _____ 1 hora/dia

Assim, em 15 dias:

$15 \times 70 = 1.050$ tijolos _____ 15 dias _____ 1 hora/dia

Finalmente,

$1.050 \times 6 = 6.300$ tijolos _____ 15 dias _____ 6 horas por dia

Pensando um pouco mais, veremos uma forma diferente das grandezas se relacionarem. Considere o exemplo que segue.

Se 18 homens fazem um trabalho em 30 dias então 9 homens levarão 60 dias, nas mesmas condições de trabalho. Neste caso quando dividimos por 2 o número de homens o número de horas duplicou, certo?

Se fossem 6 homens (a terça parte de 18) o tempo seria o triplo, ou seja, 90 dias.

Mas, 36 homens (18×2) levam $\frac{30}{2} = 15$ dias. O dobro do número de homens consegue fazer o trabalho na metade do tempo.

Agora, quando multiplicamos uma grandeza por um número a outra fica dividida por esse número e quando dividimos uma grandeza por um número a outra fica multiplicada por esse número. Nesses casos as grandezas são chamadas de inversamente proporcionais. Podemos misturar os dois tipos de proporcionalidade no mesmo problema. Tradicionalmente esse tipo de problema é conhecido como “Regra de três”, Se envolvem duas grandezas é regra de três simples e quando relacionam mais são regras de três compostas. Vejamos nos exemplos que seguem como isso acontece.

7. Se 5 pessoas consomem 40 litros de água em 4 dias, e o consumo das pessoas é o mesmo em quantos dias 3 pessoas consumirão 24 litros de água?

Solução: Organizando os dados do problema temos:

5 pessoas _____ 40 litros _____ 4 dias

1 pessoa _____ 40 litros _____ 20 dias

1 pessoa _____ 1 litro _____ $\frac{1}{2}$ dia

1 pessoa _____ 24 litros _____ 12 dias

3 pessoas _____ 24 litros _____ 4 dias

Uma pessoa apenas levará 5 vezes o tempo que as 4 levariam para beber toda a água, ou seja, $5 \times 4 = 20$ dias

Esta pessoa bebe 1 litro em $\frac{1}{40}$ do tempo, isto é, $(\frac{1}{40}) \times 20 = \frac{1}{2}$ dia para a beber 24 litros ela levará $24 \times (\frac{1}{2}) = 12$ dias.

3 pessoas beberão esta quantidade em $\frac{1}{3}$ do tempo, que é $(\frac{1}{3}) \times 12 = 4$ dias.

Veremos mais a frente que esse método é chamado de redução à unidade e permite uma análise detalhada do que está acontecendo. No entanto, ao entendermos esse processo na sua essência, poderemos resolver esses

problemas de forma mais compacta, tornando esse processo vantajoso. Vejamos mais dois exemplos para fixarmos os conceitos até aqui apresentados.

8. Um forno tem sua produção de alumínio fundido de acordo com a Tabela 1.

Tabela 1: Informações do problema

Tempo (minutos)	Produção (kg)
3	50
6	100
9	150
12	200

Fonte: elaborada pelo autor, julho de 2016.

Observe que de acordo com a Tabela 1, uma grandeza varia em função da outra. Essas grandezas são variáveis dependentes. Observe que:

Quando duplicamos o tempo, a produção também duplica.

$$3 \text{ min} \rightarrow 50 \text{ kg}$$

$$6 \text{ min} \rightarrow 100 \text{ kg}$$

Quando triplicamos o tempo, a produção também triplica.

$$3 \text{ min} \rightarrow 100 \text{ kg}$$

$$9 \text{ min} \rightarrow 150 \text{ kg}$$

Como vimos acima as variáveis dependentes são diretamente proporcionais. Repare o que está acontecendo.

$$\frac{3}{9} = \frac{50}{150} = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad \frac{6}{12} = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}.$$

Com isso, podemos escrever que, se os números a, b e c são diretamente proporcionais a x, y e z, então:

$$k = \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}.$$

Assim, os números 4, 12 e 10 são, nesta ordem, diretamente proporcionais a 6, 18 e 15, pois

$$\frac{4}{6} = \frac{12}{18} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

9. Um homem andando de patins faz um treino para uma competição de "1000 metros contra o relógio", mantendo em cada volta uma velocidade constante e obtendo, assim, um tempo correspondente, conforme a Tabela 2.

Tabela 2: Informações do problema

Velocidade (m/s)	Tempo (s)
4	250
5	200
8	125
16	62,5
20	50

Fonte: elaborado pelo autor, julho de 2016.

Observe que uma grandeza varia de acordo com a outra. Essas grandezas são também, como no exemplo anterior, variáveis dependentes. Porém, observe que:

Quando duplicamos a velocidade, o tempo fica reduzido à metade.

$$4 \text{ m/s} \rightarrow 250 \text{ s}$$

$$8 \text{ m/s} \rightarrow 125 \text{ s}$$

Quando quadruplicamos a velocidade, o tempo fica reduzido à quarta parte.

$$4 \text{ m/s} \rightarrow 250 \text{ s}$$

$$16 \text{ m/s} \rightarrow 62,5 \text{ s}$$

Como vimos acima, as variáveis dependentes são inversamente proporcionais.

$$\frac{8}{20} = \frac{2}{5} \text{ e } \frac{125}{50} = \frac{5}{2}.$$

Com isso podemos escrever: se os números a, b e c são inversamente proporcionais a x, y e z, então:

$$k = \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = a \cdot x = b \cdot y = c \cdot z.$$

Assim, os números 2, 5 e 4 são, nesta ordem, inversamente proporcionais a 50, 20 e 25, pois $2 \cdot 50 = 5 \cdot 20 = 4 \cdot 25 = 100$.

Aqui vemos dois conceitos importantes relacionados às grandezas. A primeira é obtida quando dividimos duas grandezas, chamamos isso de RAZÃO, a segunda é a igualdade de duas ou mais razões que chamamos de PROPORÇÃO. Perceba que nos 2 exemplos anteriores, igualamos a proporção a um número k , esse valor é chamado de constante de proporcionalidade e o método de redução a unidade como veremos a diante explicará melhor esse conceito.

3.2 Redução à Unidade

A redução à unidade é um método poderoso para resolver problemas de grandezas proporcionais, pouquíssimo divulgado e usado no ensino. O ganho que se tem em pensar dessa forma é o seu poder de síntese, pois tudo o que temos que fazer é reduzir as informações à unidade e depois compará-la com o que queremos. Ao analisarmos brevemente vários livros didáticos presentes no mercado, percebemos omissão a esse método em prol de um conjunto de fórmulas para a resolução de problemas, e isso se faz presente de forma assustadora. Para cada situação uma fórmula diferente, ou ainda, problemas diferentes, mas de mesma natureza sendo resolvidos por um glossário de fórmulas. Como pode um livro didático não se basear nos Parâmetros Curriculares Nacionais? Podemos citar um trecho que critica este fato como veremos a seguir.

“[...] A abordagem de conceitos, ideias e métodos sob a perspectiva de resolução de Problemas ainda bastante desconhecida da grande maioria quando é incorporada, aparece como um item isolado, desenvolvido paralelamente como aplicação da aprendizagem, a partir de listagens de problemas cuja resolução depende basicamente da escolha de técnicas ou formas de resolução memorizadas pelos alunos” (PCN's, 1998)

Aqui mais uma vez cabe a pergunta: Por que será que os alunos não suportam Matemática? Precisamos cultivar tanto nos estudantes a autonomia para o ensino da Matemática quanto a do raciocínio. Motivá-los e mostrá-los que com uma simples maneira de pensar serão capazes de resolver uma infinidade de problemas de Matemática. Fazer com que ao adquirirem confiança sejam capazes em levar o raciocínio para resolver diversos problemas com os quais vão se deparar. Dessa

forma, a proposta desta dissertação também pode ser colocada como o uso da redução à unidade proporcionando um novo olhar sobre a busca na solução de problemas.

São apresentados a seguir diversas situações problema aplicando a redução à unidade.

10. Uma empresa de engenharia asfaltou 36 km de uma estrada em 16 dias. Quantos dias seriam necessários para essa mesma empresa asfaltar 90 km de estrada?

Solução: Primeiramente, vamos nos certificar que existe a proporcionalidade entre as variáveis dependentes. A partir daí vamos reduzir à unidade. Veja a Tabela 3.

Tabela 3: Reduzindo à unidade

km	dias
36	16
Dividindo por 36	Dividindo por 36
1	$16/36 = 4/9$
Multiplicando por 90	Multiplicando por 90
90	$4 \cdot 90/9 = 40$

Fonte: Tabela do autor, fevereiro de 2016.

Repare que após obter o tempo gasto para 1 km, encontrar o tempo gasto para qualquer quilometragem que o problema venha pedir se resume a um produto.

11. Uma canavial tem a forma de um quadrado com 60 metros de lado e um lavrador consegue ceifá-lo em 4 dias. Em quantos dias o mesmo lavrador ceifaria um canavial com 90 metros de lado.

Solução: Nesse problema é necessário atenção porque a relação medida do lado e número de dias não é uma proporcionalidade. A proporcionalidade acontece entre a área da plantação e o número de dias. Aqui podemos reduzir a unidade mais uma vez, considerando a Tabela 4. Com a prática, a tendência dos alunos é abandonar a tabela.

Tabela 4 – Reduzindo à unidade

Área da plantação em metros quadrados (m ²)	Número de dias
60 . 60 = 3600	4
Dividindo por 3600	Dividindo por 3600
1	4/3600 = 1/900
Multiplicando por 90 . 90 = 8100	Multiplicando por 90 . 90 = 8100
8100	8100 . 1/900 = 9

Fonte: Tabela do autor, fevereiro de 2016.

Repare que após obtermos o tempo gasto para 1 metro quadrado de plantação, mostrado na tabela 4, encontrar o tempo gasto para qualquer área que o problema venha pedir se resume a um produto.

Visto isso, podemos observar que a redução à unidade é um método bastante eficaz na resolução de problemas, principalmente no que se refere ao conceito de proporcionalidade. Sua utilidade abrange uma gama de soluções interessantes, fazendo com que o aluno treine seu raciocínio de diversas maneiras. Com isso, o aluno começa a ganhar novas habilidades, o que possibilita usá-las em novos problemas, ampliando seu horizonte e aumentando a chance de sucesso diante de novos desafios. Podemos citar como exemplo problemas envolvendo torneiras como veremos a seguir.

12. Uma torneira enche um tanque em 2 horas e uma outra torneira, em 3 horas. Se forem abertos simultaneamente, calcular em quanto tempo as duas torneiras juntas encherão o tanque.

Solução: Em 1 hora, a primeira torneira despeja $\frac{1}{2}$ da capacidade do tanque.

Em 1 hora, a segunda torneira despeja $\frac{1}{3}$ da capacidade do tanque. Em 1 hora, as

duas juntas despejarão $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$ da capacidade do tanque. Ou seja, para

despejarem $\frac{6}{6}$, para encher totalmente o tanque serão necessários $\frac{6}{\frac{5}{6}} = 1$ hora e 20

minutos.

13. Um reservatório é alimentado por duas torneiras que o enchem em 6 horas. Se a primeira sozinha o enche em 10 horas, em quanto tempo a segunda, funcionando só, deixará o reservatório cheio?

Solução: Em 1 hora, as duas juntas despejarão $\frac{1}{6}$ da capacidade do reservatório.

Em 1 hora, a primeira torneira só despeja $\frac{1}{10}$ da capacidade do reservatório. Para achar o quanto a segunda torneira despejará em 1 hora, devemos fazer:

$\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{5-3}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$. Com isso, para encher o tanque todo, ou seja $\frac{15}{15}$, a torneira levará $\frac{\frac{15}{1}}{\frac{1}{15}} = 15$ horas.

Repare que nos 2 exemplos anteriores usamos a redução à unidade de uma forma mais prática, mais natural sem recorrer às tabelas. Podemos ainda usar a redução à unidade para resolver problemas de perseguições, vejamos como:

14. Um rato está a 48 metros na frente de um gato que o persegue. Enquanto o rato percorre 4 metros o gato percorre 7 metros. Quantos metros deverá percorrer o gato para alcançar o rato?

Solução: Pela informação do problema 7 m de percurso do gato corresponde a 4m de percurso do rato. Fazendo a redução a unidade, temos que o gato percorrendo 1 metro, o rato percorrerá $\frac{4}{7}$ m. Portanto, cada vez que o gato andar 1 metro a diferença tirada entre eles será de $1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$ m. Como a distância entre eles é de 48 metros, o problema resume saber quantas vezes 48 contém $\frac{3}{7}$. Logo, $48 \cdot \frac{7}{3} = 112$ metros, que é a resposta do problema.

A diversidade de aplicações da redução à unidade é muito grande. Visto que já resolvemos uma quantidade significativa de situações. Além disso, podemos usá-la em nosso cotidiano de forma bem simples como é mostrado no tópico a seguir.

3.3 Como saber que não estamos sendo enganados usando redução à unidade?

Figura 3 – Foto tirada de creme dental exposto para venda em supermercado no Rio de Janeiro



Fonte: Foto do autor, fevereiro de 2016.

O impacto ao saber usar a redução à unidade na hora de fazer compras, por exemplo, é fundamental. Como saber se realmente o preço sugerido nas promoções é verdadeiro? O que garante que não estamos sendo enganados? Essas perguntas foram feitas a um senhor de mais ou menos 40 anos que estava olhando a promoção da Figura 3. Essa imagem estava em um mercado. Ele parou, pensou e me respondeu: “É, parece vantajoso”. Aí eu perguntei: Vantajoso quanto? Ele se contorceu e me disse: dá para perceber. Falei com ele sobre o método de redução à unidade e expliquei que este poderia ser usado para verificar a veracidade da promoção acima. Tirei meu celular do bolso e cliquei em calculadora. Perguntei a ele quanto estava custando 90g de creme dental fora da promoção, ele me disse R\$ 2,49. Aí indaguei, quanto deveria custar 1 grama, imediatamente ele mandou eu dividir por 90, conselho seguido à risca. $2,49 : 90 = 0,0276666667$. Chamei atenção para a promoção que falava em pagar 70 gramas, o restante era grátis. Na mesma hora ele me disse para multiplicar o resultado obtido anteriormente por 70, $(0,0276666667) \cdot (70) = 1,936666667$. Olhou para o celular e fez um cara engraçada. Ri e falei está vendo? Na verdade R\$ 1,93 deveria ser o preço real da promoção. Esse produto está custando R\$ 0,14 abaixo do que a promoção está sugerindo “leve 90 e pague 70”. Esse produto na promoção está sendo muito vantajoso para nós consumidores. A alegria presente no rosto do meu pesquisando ocasional era notável, me agradeceu e disse que iria passar a usar esse raciocínio daquele

momento em diante. Uma pergunta fundamental que podemos formular aqui é: Será que os responsáveis pelo financeiro do mercado tinham ideia dessa “promoção da promoção”? Isso poderia gerar um impacto enorme se levado a muitos outros produtos. Está claro como um raciocínio tão simples pode revelar coisas que até então estavam escondidas.

3.4 Entendendo a proporcionalidade sobre um outro ponto de vista (A essência da redução a unidade).

No exemplo introdutório desta seção que vimos que uma menina lia 3 páginas de um livro por minuto. Então podíamos dizer que:

1 minuto _____ 3 páginas
 2 minutos _____ 6 páginas
 3 minutos _____ 9 páginas
 4 minutos _____ 12 páginas

...

Repare que a proporção entre o número de páginas e o tempo de leitura é constante:

$$\frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = 3$$

Isto é, $\frac{\text{número de páginas}}{\text{minutos}} = 3$,

ou

número de páginas = 3 x minutos.

Poderíamos, também, escrever que $\frac{\text{minutos}}{\text{número de páginas}} = \frac{1}{3}$ ou que $\text{minutos} = \frac{1}{3} \times \text{número de páginas}$.

Podemos nos referir de maneira geral como: sempre que duas grandezas A e B forem diretamente proporcionais uma delas será uma constante k (no exemplo acima foi 3) multiplicado pela outra. Escrevendo para o caso geral, obteremos $A = k \times B$. Repare que o valor de $k = 3$ encontrado, nada mais é que o número de páginas

lidas pela menina em um minuto. Isso equivale a redução a unidade. Quando achamos o valor de k está implícito a redução a unidade.

Vejamos um outro exemplo:

No exemplo de grandezas inversamente proporcionais 18 homens faziam um trabalho em 30 dias, 9 homens em 60 dias, 6 homens em 90 dias,

18 homens _____ 30 dias

9 homens _____ 60 dias

6 homens _____ 90 dias

Agora o produto entre as quantidades é constante, veja:

$$18 \times 30 = 9 \times 60 = 6 \times 90 = 540$$

homens x dias = 540

ou

$$\text{homens} = \frac{540}{\text{dias}}$$

Aqui a outra forma de escrever é a expressão praticamente idêntica: dias=540 / homens

Sempre que duas grandezas A e B forem inversamente proporcionais uma delas é uma constante dividida pela outra, isto é: $A = \frac{k}{B}$. Note que o valor de $k=540$

encontrado nada mais é que o número de homens necessários para realizar o trabalho em um dia. Novamente a redução à unidade se fez presente quando encontramos o valor de k . Por que isso é importante?

A importância desse fato é reduzir os problemas de regra de três composta mista a problemas de regra de três simples e direta (os quais realmente são regras de três e não regra de quatro, cinco, ...). Podemos usar essa nova abordagem para resolver problemas facilitando o nosso dia a dia. Tudo que precisamos fazer é usar os conceitos de diretamente e inversamente proporcional. Por exemplo, se uma grandeza G é diretamente proporcional a A e B e inversamente proporcional a C e

D, então podemos escrever $G = k \frac{A \cdot B}{C \cdot D}$. Isso vale para qualquer número de grandezas. Devemos encontrar o valor de k que é a essência do método na redução

a unidade, substituindo todas as demais maneiras de resolver esses problemas, tais como: sinais, setinhas e decorebas, pois estas provavelmente serão esquecidas. Vejamos algumas situações, agora utilizando a constante de proporcionalidade o k.

15. Se 5 pessoas consomem 40 litros de água em 4 dias. Considerando que o consumo das pessoas é o mesmo, em quantos dias 3 pessoas consumirão 24 litros de água?

Solução: A primeira coisa a fazer é verificar a proporcionalidade. Podemos mostrar que o número de dias (o que está sendo solicitado) é diretamente proporcional à quantidade de água consumida (pois ambas aumentam ou diminuem na mesma razão) mas, é inversamente proporcional ao número de pessoas (quando uma delas aumenta, a outra diminui pelo mesmo fator e vice-versa). Assim podemos escrever:

$$\text{dias} = \frac{k \times \text{água}}{\text{pessoas}}$$

daí, podemos usar as informações conhecidas para descobrir o valor da constante k,

$$4 = \frac{k \times 40}{5} \text{ isto é, } k = \frac{1}{2}.$$

Como k é constante, podemos descobrir o que o problema pede fazendo uma nova

substituição na equação acima, isto é, dias = $\frac{\frac{1}{2} \times 24}{3} = 4$. Para mostrar ao aluno

o passo a passo de forma explícita, é só construir a Tabela 5.

Tabela 5 – Reduzindo à unidade

Consumo de água/pessoas	Número de dias
40/5 = 8	4
Dividindo por 8	Dividindo por 8
1	4/8 = 1/2
Multiplicando por 24/3 = 8	Multiplicando por 24/3 = 8
8	4

Fonte: Tabela do autor, fevereiro de 2016.

16. Uma máquina funcionando 10 horas por dia, durante 20 dias produz 500 objetos. Quantas horas por dia a máquina precisa funcionar para fabricar 400 objetos em 40 dias?

Solução: Primeiramente devemos verificar a proporcionalidade. O número de horas por dia é diretamente proporcional ao número de objetos, mas inversamente proporcional ao número de dias. Portanto, horas por dia = $\frac{k \times \text{objetos}}{\text{dias}}$.

Sendo assim, podemos calcular a constante k, $10 = \frac{k \times 500}{20}$. Isolando k temos que

$k = \frac{2}{5}$. Para descobrir o que o problema pede fazemos:

$$\text{horas por dia} = \frac{\frac{2}{5} \times 400}{40} = 4.$$

17. O preço de um cavalo é diretamente proporcional à sua força e inversamente proporcional à sua idade. Um cavalo de 2 anos custa R\$18.000,00. Quanto ele estará valendo quando tiver 5 anos se a expectativa é que, com essa idade ele terá o triplo da força atual?

Solução: Neste, já que conhecemos quem é diretamente e inversamente proporcional à idade, podemos escrever, $\text{Preço} = \frac{k \times \text{força}}{\text{idade}}$

Não conhecemos o valor numérico da força F, mas como veremos, isso não será relevante. Assim, $18.000 = \frac{k \times F}{2}$

$$\text{ou } k = \frac{36.000}{F}.$$

Para a idade de 5 anos e sabendo que a força será o triplo da força anterior, isto é

$3F$, teremos $\text{Preço} = \frac{\frac{36.000}{F} \times 3F}{5}$. Podemos cancelar os F's e o preço será de

R\$ 21.600,00.

Cuidado: No mundo real temos que usar a proporcionalidade com atenção. Por exemplo, se 5 operários fazem uma casa em 20 dias, então 10.000 operários levariam $\frac{20}{10.000} = 0,002$ dias, o que levaria aproximadamente 3 minutos, contrariando o senso comum!

Vejamos agora um caso totalmente literal envolvendo mais de 3 grandezas.

18. Se x abelhas, trabalhando x horas por dia durante x dias produzem x litros de mel, então calcule o número de litros de mel, produzido por y abelhas, trabalhando y horas por dia durante y dias.

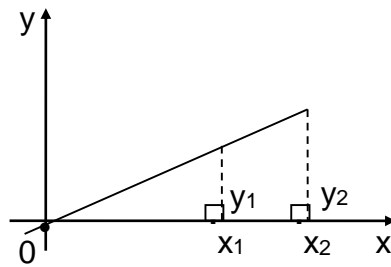
Solução: Este é um problema que os alunos terão dificuldade em resolver pelas “decorebas” apresentadas nos livros didáticos. No entanto com que apresentamos até aqui tudo se passa em como encontrar o valor de k . Precisamos verificar as proporcionalidades presentes, analisando as relações entre as grandezas. O número de litros de mel (M) é diretamente proporcional as grandezas: número de abelhas (A), horas por dia (H) e dias (D). Assim, podemos escrever $M = k \cdot (A \cdot H \cdot D)$. Pelas informações do problema segue que $x = k \cdot x^3$. Portanto, $k = 1/x^2$. Substituindo na equação acima o valor k e colocando os outros valores do problema temos, $M = \frac{y^3}{x^2}$ que é a resposta do problema.

3.5 Funções, proporcionalidade e gráficos.

As relações mencionadas até aqui podem ser representados graficamente. Entender esses mecanismos por meios de gráficos é mais uma ferramenta poderosa que auxilia na resolução de problemas. Do Gráfico 1, por semelhança de triângulos, que é uma proporcionalidade, tiramos as relações.

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \dots = k$$

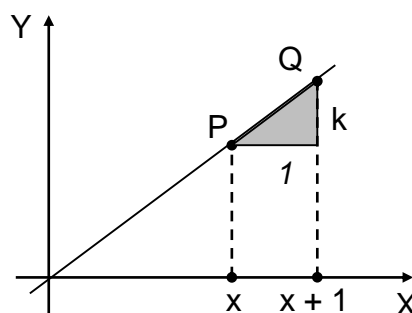
Gráfico 1 – Grandezas diretamente proporcionais



Fonte: LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C.; MORGADO, A.C. Temas e problemas elementares. Rio de Janeiro: SBM, 2005.193 p.

Repare que essas igualdades definem grandezas diretamente proporcionais. Isso quer dizer, $y = kx$ ($k \in \mathbb{R}^*$) que representa uma função linear. Cada ponto (x, y) é um ponto da reta que passa pela origem. Aqui o número k (fator de proporcionalidade) representa o coeficiente angular da reta ou a taxa de variação da função. Podemos indagar, onde está a redução à unidade no Gráfico 2? Analisando novamente o Gráfico 2, observamos que o acréscimo de uma unidade no eixo x implica no acréscimo de k unidades no eixo y , o que representa a redução à unidade. Isso nos leva ao exercício (1) em que a menina lia três páginas por minuto podendo ser escrito como $y = 3x$, cuja representação gráfica está acima, para $k = 3$

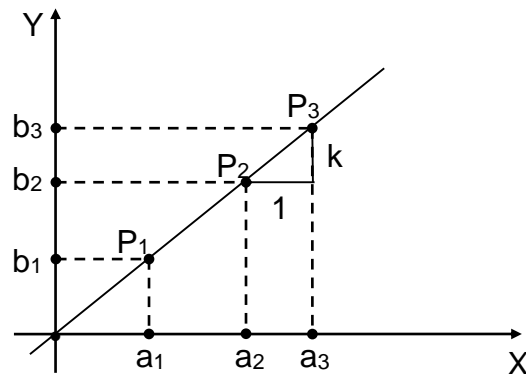
Gráfico 2 – A essência da redução à unidade



Fonte: LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C.; MORGADO, A.C. Temas e problemas elementares. Rio de Janeiro: SBM, 2005.193 p.

Portanto, o que será que significa a situação a seguir mostrada pelo Gráfico 3?

Gráfico 3 – Grandezas que são proporcionais a outras



Fonte: LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C.; MORGADO, A.C. Temas e problemas elementares. Rio de Janeiro: SBM, 2005.193 p.

A situação descrita no Gráfico 3 nos informa que os números (b_1, b_2, b_3) são proporcionais aos números (a_1, a_2, a_3) . Como o nosso foco é a resolução de problemas, vejamos como isso nos ajuda a entender o próximo problema.

19. Desejando dividir R\$ 117,00 entre os artilheiros de um time de futebol de salão, um técnico definiu que a mesma fosse diretamente proporcional ao número de gols. Sabendo-se que os artilheiros fizeram 2, 3, e 4 gols, respectivamente, calcular a parte que recebeu cada um.

Solução: Chamando x , y e z a parte de cada um, podemos escrever:

$$k = \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$

Daí, $x = 2k$, $y = 3k$ e $z = 4k$.

Como $x + y + z = 117$, substituindo temos:

$$2k + 3k + 4k = 117$$

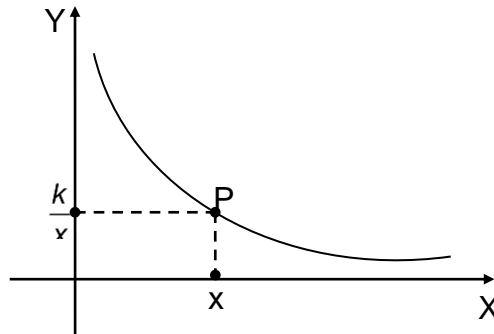
$$9k = 117$$

$k = 13$. Logo, $x = 26,00$; $y = 39,00$ e $z = 52,00$.

Vamos analisar esse resultado, aliás é uma das técnicas de Polya, entender a resposta na sua completude. Observem que para cada gol a mais, o valor acrescido foi de 13 reais (nossa redução a unidade), realmente sem entender esse método fica muito difícil entender a essência dos valores encontrados.

Existe um outro gráfico que também explicita a proporcionalidade. Agora é a respeito de grandezas inversamente proporcionais, ou seja, $x \cdot y = k$. Para isso, considere o Gráfico 4, que tem a forma de uma hipérbole.

Gráfico 4 – Grandezas inversamente proporcionais



Fonte: LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C.; MORGADO, A.C. Temas e problemas elementares. Rio de Janeiro: SBM, 2005.193 p.

Apesar de não podermos aprofundar as principais relações dessa curva neste momento, isso não impede de mostrarmos aos alunos a sua forma.

Podemos formalizar com um pouco mais de rigor, isso que acabamos de ver. Existe um teorema muito importante chamado Teorema fundamental da proporcionalidade que pode ser enunciado da seguinte maneira: Se $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função crescente tal que $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo $n \in \mathbb{N}$, então $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$ para quaisquer x e c em \mathbb{R}^+ . A demonstração será colocada no apêndice 1. Muitos resultados que usamos nas linhas acima podem ser demonstrado imediatamente a partir desse teorema.

- a) Se $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma proporcionalidade, então tem-se para todo x positivo, $f(x) = k \cdot x$, onde $k=f(1)$.

A demonstração é praticamente imediata. Pelo teorema fundamental da proporcionalidade, para quaisquer $x, c \in \mathbb{R}^+$ vale $f(x \cdot c) = x \cdot f(c) = f(c) \cdot x$. Em particular, tomando $c=1$, obtemos $f(x) = k \cdot x$, onde $k = f(1)$, o que mostra novamente o k , constante de proporcionalidade como redução a unidade.

- b) Grandeza proporcional a várias outras: Imagine que a grandeza g se relaciona com as grandezas p, q, r, s, t de tal modo que $g=f(p, q, r, s, t)$, onde g é diretamente proporcional a p e q e inversamente proporcional a r ,

s e t. Tomando $k = f(1, 1, 1, 1, 1)$, redução a unidade, podemos escrever:

$$g=f(p, q, r, s, t) = k \cdot \frac{pq}{rst} .$$

De fato, pelo teorema fundamental da proporcionalidade temos,

$$g=f(p, q, r, s, t)= f(p.1, q, r, s, t)= p. f(1, q, r, s, t)= p. q. f(1, 1, r, s, t) = \frac{pq}{r}$$

$$f(1, 1, 1, s, t)= \frac{pq}{r.s} . f(1, 1, 1, 1, t) = \frac{pq}{r.s.t} . f(1, 1, 1, 1, 1) = \frac{p.q}{r,s,t} . k =$$

$$k \cdot \frac{p.q}{r,s,t}, \text{ como queríamos demonstrar.}$$

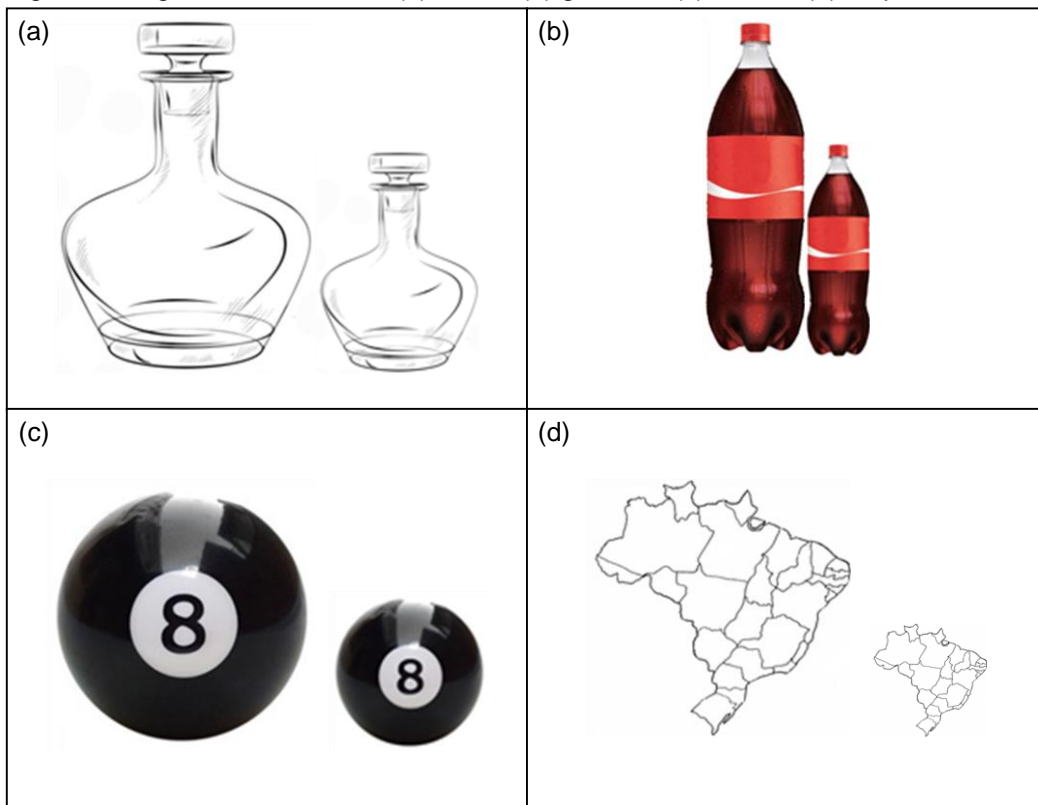
Com o teorema da proporcionalidade e a redução à unidade é possível explicar muitos resultados importantes na Matemática. Agora vamos aplicar esse resultado na geometria.

3.6 Proporcionalidade e a Geometria

A proporcionalidade está presente em grande parte do que fazemos em geometria, principalmente no que se refere a figuras semelhantes e as proporções que existem entre elas. Infelizmente, muitas vezes ensinamos somente a semelhança de triângulos, deixando para trás todo resto. Uma gama de conhecimentos que poderiam ser apontados aos alunos é descartado sem o menor motivo, fato esse explicitado no livro Medida e Forma de Geometria do Lima (2004). Prejuízo na aprendizagem de inúmeros conceitos posteriores na Matemática, além de afetar as ciências naturais e sociais, que necessitam de conceitos tais como: ampliação, redução, escala, projeção, variações de áreas e volumes. Apresentamos a seguir uma série de exemplos para sanar esse impacto, além de ressaltar mais uma vez a importância da redução a unidade nesse processo. Iniciamos com o conceito de semelhança.

O que é semelhança? “A noção de semelhança corresponde a uma ideia natural de mudança de escala, isto é, ampliação ou redução de uma figura alterando seu tamanho sem modificar suas proporções” LIMA (2004). Encontramos em nosso cotidiano, muitos casos de semelhança que podem ser exemplificados pela Figura 4.

Figura 4 – Figuras semelhantes: (a) vasos, (b) garrafas, (c) bolas e (d) mapas



Fonte: <http://www.tudodesenhos.com/uploads/images/12860>.

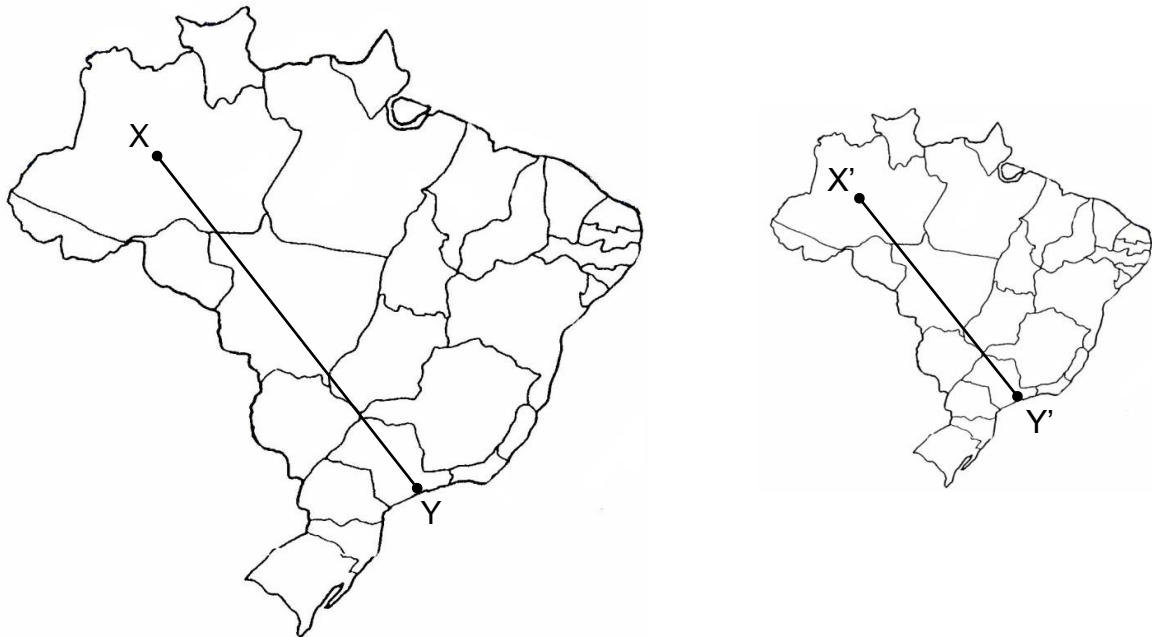
Mas, como saber se duas figuras são realmente semelhantes?

Definição: sejam F e F' figuras, do plano ou do espaço, e k um número real positivo. Diz-se que F e F' são semelhantes, com razão de semelhança k , quando existe uma correspondência biunívoca $f: F \rightarrow F'$, entre os pontos de F e os pontos de F' , com a seguinte propriedade:

Se X e Y são pontos quaisquer de F e $X' = f(X)$, $Y' = f(Y)$ são seus correspondentes em F' , então $X'Y' = k \cdot XY$.

Podemos dizer que k é a razão de proporcionalidade entre F e F' , ou seja, é o valor obtido pela redução a unidade e X , X' , Y e Y' são homólogos. Vejamos o que isso quer dizer. Considere os dois mapas da Figura 5: o quem vem a ser essa correspondência biunívoca?

Figura 5 – Mapas semelhantes



Fonte: https://4.bp.blogspot.com/_Q0VHXorLofw/TPyHFobAyDI/AAAAAAAAACsM/0zmlYFxfkL88/s1600/mapa+do+Brasil.jpg.

Considerando um ponto X no estado do Amazonas, por exemplo, no mapa da esquerda, Figura 7, existe um único ponto X' no estado do Amazonas na figura da direita correspondente a X. Da mesma forma se tomarmos um ponto Y em São Paulo, por exemplo, na figura da esquerda, existe um único ponto Y' na figura da direita que é correspondente a Y.

Supondo que $XY=8$ e $X'Y'=4$, a razão entre estas medidas é, $\frac{XY}{X'Y'} = \frac{8}{4} = 2$, portanto, essas figuras serão semelhantes se ao considerarmos quaisquer outros dois segmentos correspondentes nas figuras, AB e A'B', a razão entre eles também deverá ser 2, ou seja, $\frac{XY}{X'Y'} = \frac{AB}{A'B'} = 2 = k^1$, (redução à unidade).

Podemos levantar a seguinte questão, Quando dois triângulos são semelhantes?

Dois triângulos são semelhantes quando é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que os ângulos correspondentes sejam dois a dois congruentes e os lados homólogos proporcionais.

¹quando k é igual a 1, as figuras são congruentes ou isométricas.

De fato, essa é a definição de triângulos semelhantes, e impõe duas condições para existência dessa semelhança:

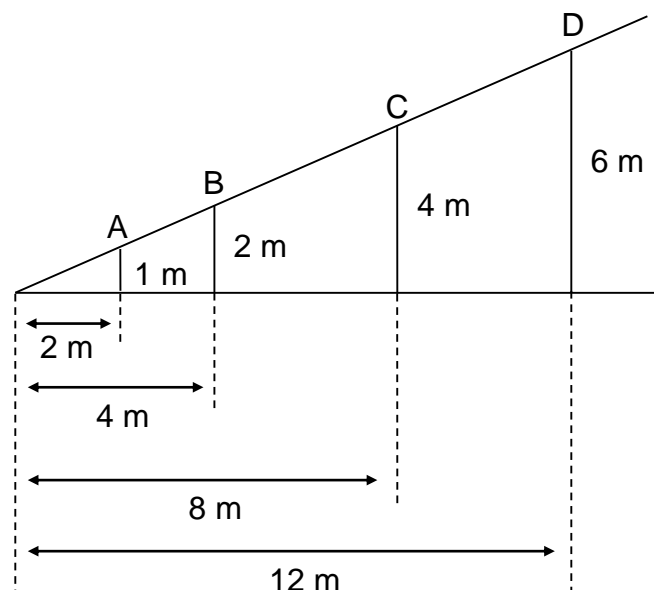
- ângulos correspondentes dois a dois congruentes;
- lados homólogos proporcionais.

Entretanto, se uma dessas condições ocorre, então a outra “automaticamente” também se verifica. Considerando a figura 6, podemos notar que os triângulos que tem como um dos vértices B, C e D são semelhantes com o triângulo que tem como um dos Vértices o A, pois $k = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{6}{12}$, lados homólogos proporcionais! Portanto, obrigatoriamente os ângulos são iguais!

Repare que podemos olhar esse k como a tangente de um ângulo agudo de todos aqueles triângulos semelhantes, ou seja, a tangente pode ser considerada como uma constante de proporcionalidade e que está implícito a redução à unidade. O mesmo pode ser aplicado para as razões seno e cosseno.

A constante de proporcionalidade k, está presente em grande parte do que fazemos em geometria quando trabalhamos com figuras semelhantes. Um bom entendimento dessa constante de proporcionalidade nos permite resolver problemas de forma mais rápida como veremos a seguir.

Figura 6 – Triângulos semelhantes

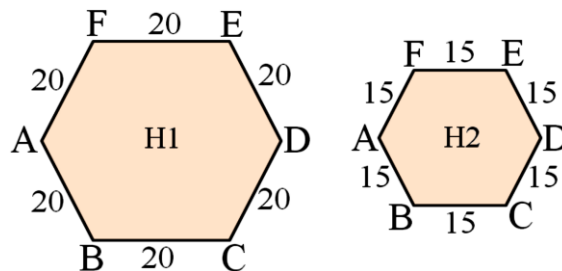


20. O triângulo escaleno de lados medindo 7 cm, 8 cm e 9 cm é semelhante ao triângulo, também escaleno, de lados com medidas 14 cm, 16 cm e x cm. Determine x.

Solução: Pela semelhança de triângulos temos, $k = 2 = \frac{14}{7} = \frac{16}{8}$, onde k (redução à unidade) é a razão de semelhança entre os dois triângulos. Isso quer dizer que cada lado de um triângulo é o dobro do outro. O que permite calcular o valor de x Portanto, $x=9.2=18$ cm. A congruência entre os ângulos correspondentes está implícita, embora nem conheçamos os seus valores. Além disso, o k ajuda a entender relações entre perímetros, áreas e volumes de figuras semelhantes.

Considere que os hexágono semelhantes H1 e H2, Figura 7.

Figura 7 – Hexágonos semelhantes



Fonte: Apostila do Colégio QI, elaborada pelo autor.

Nessas condições:

- a) Qual é a razão de semelhança entre H1 e H2?

$$\text{A razão de semelhança } k = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

- b) Qual é a razão de semelhança entre os perímetros de H1 e H2?

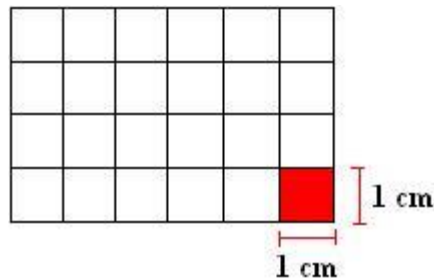
$$\frac{20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20}{15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15} = \frac{6 \cdot 20}{6 \cdot 15} = \frac{4}{3} = k$$

O que nos mostra que a razão de semelhança continua a mesma. Esse resultado pode ser estendido para quaisquer que sejam dois polígonos semelhantes. Vejamos o que acontece com as áreas e os volumes.

Vamos supor que precisamos medir uma região R do plano, para isso devemos compará-la com outra chamada unidade de área. Isso quer dizer quantas vezes a região R contém a nossa unidade de área. Convencionamos tomar como unidade de

área um quadrado de lado unitário, ou seja, de lado 1. O resultado dessa comparação é a grandeza área. Como exemplo, para medir a área do retângulo da Figura 8 em centímetros quadrados, precisamos saber quantas vezes esse retângulo contém o quadrado unitário de 1 cm de lado, ou seja, nossa redução a unidade.

Figura 8 – Cálculo da área do retângulo



Fonte: pt.wikipedia.org/wiki/área (adaptado).

Neste caso, o retângulo da Figura 10 possui 24 cm^2 . Mas, nem sempre as coisas são tão simples assim, pois o retângulo pode ter lados que não sejam inteiros, dificultando o cálculo.

Como resolver esse caso? Vamos usar a redução à unidade e o teorema fundamental da proporcionalidade.

Seja $A(a, b)$ a área de um retângulo de dimensões a e b . O teorema da proporcionalidade assegura que: $A(c \cdot a, b) = c \cdot A(a, b)$ e $A(a, d \cdot b) = d \cdot A(a, b)$, pois sua área é diretamente proporcional as suas dimensões. Assim, podemos escrever: $A(a, b) = A(a \cdot 1, b) = a \cdot A(1, b) = a \cdot b$. Logo, $A(a, b) = a \cdot b$.

Desta forma, podemos provar a área de inúmeros polígonos tais como paralelogramo, triângulo, losango, trapézio, etc..., pois dependem da área do retângulo.

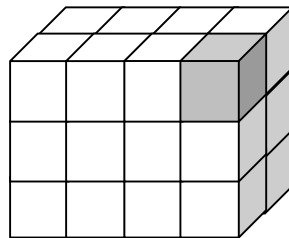
Já vimos que a razão entre os perímetros de dois polígonos semelhantes é igual a razão de semelhança entre eles, mas o que será que acontece com a razão entre as áreas?

Vamos considerar um caso particular e generalizar o resultado posterior. Considere um retângulo de dimensões $a=3$ e $b=5$, portanto sua área vale $a \cdot b=3 \cdot 5=15$ unidades de área. Vamos construir um outro retângulo semelhante ao primeiro de modo que suas dimensões sejam o dobro do anterior, ou seja constante

de proporcionalidade $k=2$, com isso, $a'=6$ e $b'=10$, portanto sua área vale, $a' \cdot b' = 6 \cdot 10 = 60$ unidades de área. Logo, a razão entre as áreas é dada por $\frac{a' b'}{a \cdot b} = \frac{60}{15} = 4 = 2^2 = k^2$, que é o quadrado da razão de semelhança. Generalizando o resultado, consideraremos dois retângulos semelhantes, A_1 e A_2 de dimensões a, b, a' e b' , respectivamente, com constante de proporcionalidade k . Com isso, $a' = k \cdot a$ e $b' = k \cdot b$. Daí, $\frac{a' b'}{a \cdot b} = \frac{k a \cdot k b}{a \cdot b} = k^2$, como queríamos demonstrar. Portanto, a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança, que pode ser entendido para quaisquer figuras planas semelhantes.

Agora vamos medir uma região R do espaço e para isso devemos compará-la com outra, que representa a unidade de “volume”. O que quer dizer quantas vezes a região R contém a nossa unidade de volume. Convencionamos tomar como unidade de volume um cubo de aresta unitário, ou seja, 1. O resultado dessa comparação é a grandeza chamada de volume, que mede a quantidade de espaço ocupado por alguma coisa. Por exemplo, para medir o volume do paralelepípedo abaixo em unidades de volume, precisamos saber quantas vezes o paralelepípedo contém o cubo unitário de aresta 1, destacado na Figura 9, ou seja, a redução à unidade.

Figura 9 – Cálculo do volume do paralelepípedo



Fonte: Figura feita pelo autor, abril 2016.

Neste caso, o paralelepípedo da Figura 9 possui 24 unidades de volume. Porém, as coisas não são tão simples assim, pois o paralelepípedo pode ter lados que não sejam inteiros, dificultando o cálculo. Assim como fizemos com o retângulo, vamos fazer com o paralelepípedo, assim usaremos a redução à unidade e o teorema fundamental da proporcionalidade unido os para justificar o volume de um paralelepípedo qualquer de arestas a, b e c .

Seja $V(a, b, c)$ o volume de um paralelepípedo dimensões $a, b, e c$. Como o teorema da proporcionalidade assegura que: $V(k. a, b, c) = V(a, k. b, c) = V(a, b, k. c) = k. V(a, b, c)$, pois, seu volume é diretamente proporcional às suas dimensões. Desta forma, podemos escrever que:

$V(a, b, c) = V(a.1,b,c) = a. V(1,b,c) = a. A(1,b.1)=ab. V(1,1,c.1) = a.b.c. V(1,1,1)$, onde $V(1,1,1) = 1$ é o volume do cubo unitário, e representa a redução à unidade, portanto, $V(1,1,1) = 1$. Logo, $V(a, b, c) = a . b . c$ é o volume do paralelepípedo para quaisquer que sejam as dimensões.

Com isso, podemos determinar o volume de inúmeros sólidos junto com o princípio de Cavalieri, tais como prismas, cilindro, pirâmide, cone, etc..., pois dependem do volume do paralelepípedo, num efeito cascata.

Já vimos que a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança, mas o que será que acontece com a razão entre os seus volumes?

A partir de um caso particular iremos generalizar o resultado.

Considere um paralelepípedo P de dimensões $a=3, b=5$ e $c=2$, portanto seu volume vale $V_p = a. b. c = 3.5.2 = 30$ unidades de volume. Vamos construir um outro paralelepípedo P' , semelhante ao primeiro, de modo que suas dimensões sejam o triplo do anterior, ou seja, a constante de proporcionalidade das dimensões de P' em relação a P é $k=3$, assim $a'=9, b'=15$ e $c'=6$, portanto, seu volume vale, $a'.b'.c' = 9.15.6 = 810$ unidades de volume. A razão entre os volumes será $\frac{V_{p'}}{V_p} =$

$$\frac{a' b' . c'}{a . b . c} = \frac{810}{30} = 27 = 3^3 = k^3, \text{ que é o cubo da razão de semelhança.}$$

O resultado anterior pode ser generalizado. Sejam dois paralelepípedos semelhantes, P_1 e P_2 de dimensões a, b, c e a', b', c' com constante de proporcionalidade k . As dimensões de P_2 podem ser escritas como: $a'=k.a$ e $b'=k.b$ e $c'=k.c$. Assim, $\frac{a' b' . c'}{a . b . c} = \frac{ka . kb . kc}{a . b . c} = k^3$, o que demonstra e generaliza o resultado anterior.

Portanto, a razão entre os volumes de duas figuras semelhantes é o cubo da razão de semelhança. Este resultado pode ser estendido para quaisquer sólidos semelhantes.

Vemos novamente aqui que a redução à unidade, aparece de forma concisa para justificar e demonstrar muitos resultados. Vamos supor que desejamos medir o volume de um sólido irregular como, por exemplo, um pote de açúcar, como o apresentado na Figura 10.

Figura 10 – Pote vazio de açúcar



Fonte: Foto tirada pelo próprio autor, fevereiro de 2016.

Para isso, vamos considerar a redução a unidade, representada por um cubinho de açúcar, Figura 11.

Figura 11 – Foto do cubo unitário de açúcar



Fonte: Foto tirada pelo próprio autor, fevereiro de 2016.

Podemos considerar que o volume do pote é dado pelo número de vezes que contém esse cubo unitário, Figura 12.

Figura12– Cubos unitários dentro do pote de açúcar



Fonte: Foto tirada pelo próprio autor, fevereiro de 2016.

Evidentemente que existem espaços vazios no pote e o número de cubinhos considerados representa um valor aproximado do volume final. No entanto, podemos deduzir a unidade de medida, o que implicaria em podermos introduzir um maior número de cubinhos dentro do pote, reduzindo os espaços vizinhos. Este processo nos forneceria um volume também aproximado, porém mais próximo do valor esperado. Este processo, chamado de método da exaustão pode ser realizado até que o volume seja o desejado.

3.7 Proporcionalidade e redução à unidade em diversas situações e aplicações.

Nesta seção vamos usar o método de redução a unidade para mostrar as propriedades dos sinais para o produto. Em geral, estas regras são apresentadas e utilizadas sem nenhuma justificativa durante toda a vida escolar de um aluno, e introduzida, para poucos, no curso de álgebra da graduação. Esta seção tem por objetivo impactar os educadores com a pretensão de levar a utilização das justificativas das propriedades dos sinais do produto em suas práticas a fim de melhorar o processo de ensino-aprendizagem da Matemática. É muito frequente os alunos fazerem os seguintes questionamentos:

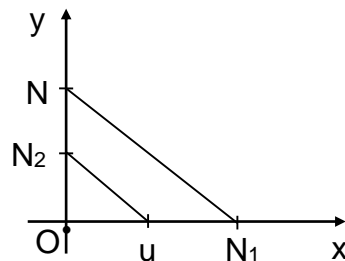
- Professor, por que menos com menos dá mais? Ou por que mais com menos dá menos? Sempre que possível, não se deve responder aos nossos alunos porque

é a “regrinha”. Sem fazer uso do grande rigor da matemática, é possível explicar as razões por essas propriedades.

Para mostrar os 4 casos seguintes, vamos utilizar um sistema de eixos coordenados orientados na forma convencional, Gráfico 5. Vamos considerar também um segmento unitário \overline{Ou} no sentido positivo do eixo x . Além disso, $ON_1 \rightarrow$ eixo x , representa (em módulo e em sinal) o primeiro número a ser multiplicado. $ON_2 \rightarrow$ eixo y , representa (em módulo e em sinal) o segundo número a ser multiplicado.

Caso 1: Positivo vezes positivo é igual a positivo

Gráfico 5 – Mais vezes mais



Fonte: Sholte, A.P. LINDQUIST, M. M. Aprendendo e Ensinando Geometria. São Paulo: Atual 1996. 308 p.

- a) Primeiramente, vamos colocar o segmento \overline{Ou} de tamanho unitário.
- b) Em seguida, vamos colocar os números N_1 e N_2 , quantidades a serem multiplicadas, no sistema.
- c) Traçamos o segmento N_2u . Agora, vamos traçar um segmento paralelo a N_2u , passando por N_1 , que chamamos de NN_1 .

Por construção, os triângulos formados são semelhantes, ou seja, $\triangle ON_2u \sim \triangle ON_1N$. Daí,

$$\frac{\overline{ON}}{\overline{ON_2}} = \frac{\overline{ON_1}}{\underbrace{\overline{Ou}}_1} \Rightarrow \overline{ON} = \overline{ON_1} \times \overline{ON_2} .$$

(+) = (+) x (+)

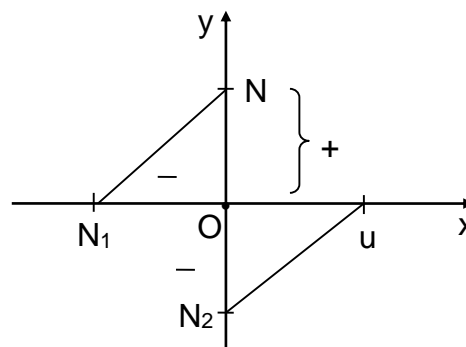
Produto de duas quantidades a serem multiplicadas

Logo, $\overline{ON} = \overline{ON_1} \times \overline{ON_2} .$

(positivo) (positivo) (positivo)

Caso 2: Negativo vezes negativo é igual a positivo

Gráfico 6 – Menos vezes menos



Fonte: Sholte, A.P. LINDQUIST, M. M. Aprendendo e Ensinando Geometria. São Paulo: Atual 1996. 308 p.

- O processo de construção do Gráfico 6 é análogo ao anterior.
- Com isso, os triângulos formados são semelhantes, ou seja, $\Delta ONN_1 \sim \Delta OuN_2$.

Daí,

$$\frac{\overline{ON}}{\overline{ON_2}} = \frac{\overline{ON_1}}{\underbrace{\overline{Ou}}_1} \Rightarrow \overline{ON} = \overline{ON_1} \times \overline{ON_2} .$$

(+) = (-) x (-)

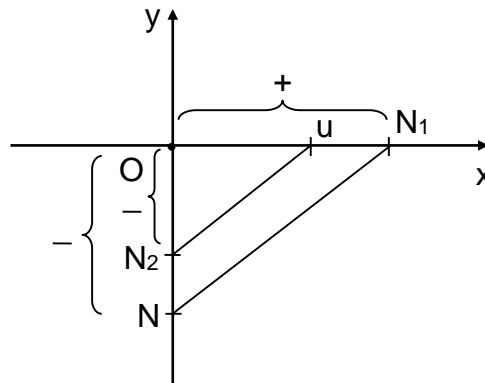
Produto de duas quantidades a serem multiplicadas

Logo, $\overline{ON} = \overline{ON_1} \times \overline{ON_2} .$

(negativo) (negativo) (positivo)

Caso 3: Positivo vezes negativo é igual a negativo

Gráfico 7 – Mais vezes menos



Fonte: Sholte, A.P. LINDQUIST, M. M. Aprendendo e Ensinando Geometria. São Paulo: Atual 1996. 308 p.

- a) O processo de construção do Gráfico 7 é análogo ao **caso 1**.
 b) Com isso, os triângulos formados são semelhantes, ou seja, $\triangle ONN_1 \sim \triangle OuN_2$.

Daí,

$$\frac{\overline{ON}}{\overline{ON_2}} = \frac{\overline{ON_1}}{\underbrace{\overline{Ou}}_1} \Rightarrow \overline{ON} = \overline{ON_1} \times \overline{ON_2}$$

(-) = (+) x (-)

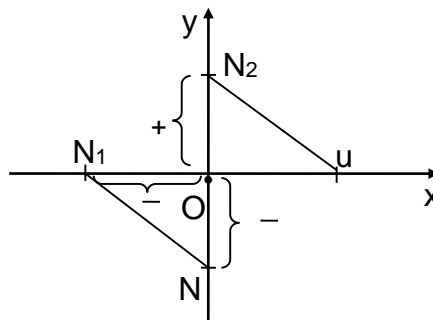
Produto de duas quantidades a serem multiplicadas

$$\text{Logo, } \overline{ON} = \overline{ON_1} \times \overline{ON_2} .$$

(positivo) (negativo) (negativo)

Caso 4: Negativo vezes positivo é igual a negativo

Gráfico 8 – Menos vezes mais



Fonte: Sholte, A.P. LINDQUIST, M. M. Aprendendo e Ensinando Geometria. São Paulo: Atual 1996. 308 p.

- a) O processo de construção do Gráfico 8 é análogo ao **caso 1**.
 b) Com isso, os triângulos formados são semelhantes, ou seja, $\triangle ONN_1 \sim \triangle OuN_2$.

Daí,

$$\frac{\overline{ON}}{\overline{ON_2}} = \frac{\overline{ON_1}}{\underbrace{\overline{Ou}}_1} \Rightarrow \overline{ON} = \overline{ON_1} \times \overline{ON_2} \quad .$$

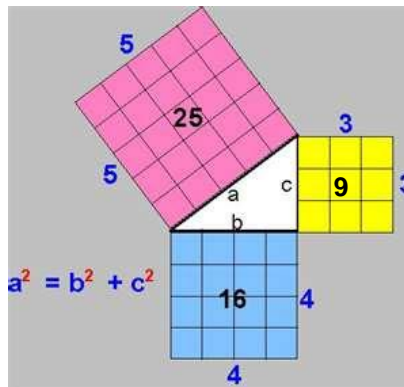
(-) = (-) X (+)

Produto de duas quantidades a serem multiplicadas

$$\text{Logo, } \underbrace{\overline{ON}}_{(\text{negativo})} = \underbrace{\overline{ON_1}}_{(\text{positivo})} \times \underbrace{\overline{ON_2}}_{(\text{negativo})} .$$

Outra aplicação da redução à unidade pode ajudar a entender o teorema de Pitágoras e sua interpretação geométrica. A Figura 13 é auto explicativa quando reduzimos à unidade.

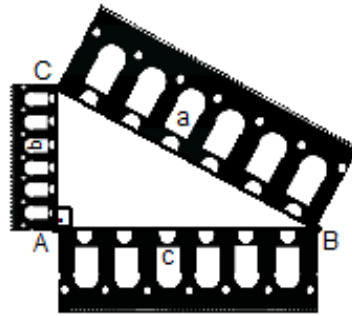
Figura 13 – Teorema de Pitágoras e a redução à unidade



Fonte: <http://filoparanavai.blogspot.com.br/2010/04/biografias-tales-de-mileto-anaximandro.html>.

Concluimos que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos. Existe uma extensão desse teorema pouco comentada nos textos escolares e que contribui bastante na resolução de problemas. Vamos considerar ao invés de quadrados, quaisquer figuras semelhantes construídas sobre os lados do triângulo retângulo conforme as Figuras 14 e 15.

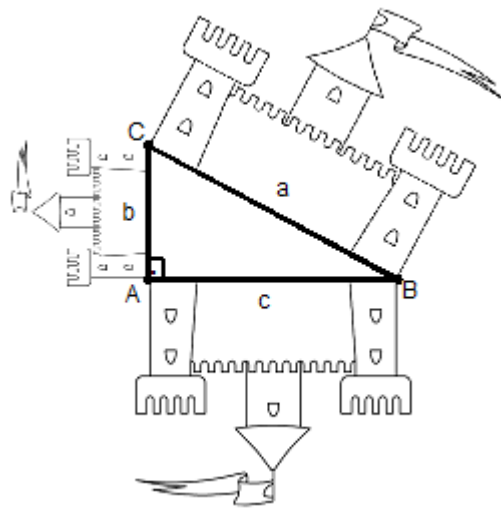
Figura 14 – Extensão do Teorema de Pitágoras (exemplo 1)



Fonte: elaborada pelo autor, março de 2016.

Usando o fato de que a razão entre as áreas de duas superfícies semelhantes é o quadrado da razão de semelhança. Vamos considerar a Figura 15 dos castelos.

Figura 15– Extensão do Teorema de Pitágoras (exemplo 2)



Fonte: elaborada pelo autor, março de 2016.

Sejam a , b , c , as medidas da hipotenusa e dos catetos respectivamente. Vamos chamar de A' , a área do castelo construído sobre a hipotenusa e B' e C' as áreas dos castelos construídos sobre os catetos. Sabemos que:

$$\frac{A'}{B'} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \rightarrow \frac{A'}{a^2} = \frac{B'}{b^2}.$$

De modo análogo temos:

$$\frac{A'}{C'} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \rightarrow \frac{A'}{a^2} = \frac{C'}{c^2}.$$

Com isso,

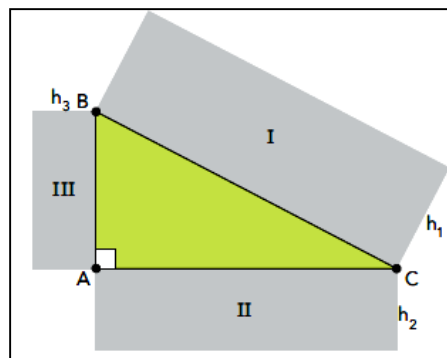
$$\frac{A'}{a^2} = \frac{B'}{b^2} = \frac{C'}{c^2}.$$

Sabendo que $a^2 = b^2 + c^2$ pela propriedade das proporções tem-se $A' = B' + C'$, o que conclui a demonstração.

Uma aplicação desse resultado está em um dos problemas do segundo exame de qualificação da UERJ no ano de 2014.

Na figura a seguir, estão representados o triângulo retângulo ABC e os retângulos semelhantes I, II e III, de alturas h_1 , h_2 e h_3 , respectivamente proporcionais às bases BC, AC e AB. Se $AC = 4\text{m}$ e $AB = 3\text{m}$, a razão $\frac{4h_2 + 3h_3}{h_1}$ é igual a:

Figura 16– Generalização do Teorema de Pitágoras



Fonte: 2014 - 2º Exame de Qualificação UERJ.

- (A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2

Sabendo a extensão do teorema de Pitágoras o problema se torna imediato. De fato,

$$\frac{4h_2 + 3h_3}{h_1} = \frac{5h_1}{h_1} = 5.$$

Novamente a constante de proporcionalidade k , essência da redução à unidade, contribui na demonstração deste teorema; indicando a extensão do procedimento de aplicação de $AC=4m$ e $AB=3m$. Segue que

$$\frac{A'}{a^2} = \frac{B'}{b^2} = \frac{C'}{c^2} \rightarrow \frac{BCh_1}{a^2} = \frac{BAh_3}{b^2} = \frac{CAh_2}{c^2} \rightarrow \frac{5h_1}{a^2} = \frac{3h_3}{b^2} = \frac{4h_2}{c^2} = \frac{3h_3 + 4h_2}{b^2 + c^2}.$$

Como $a^2 = b^2 + c^2$, segue que $5h_1 = 3h_3 + 4h_2$, concluindo a explicação.

4 ANÁLISE DO TEMA PROPORCIONALIDADE E REGRA DE TRÊS ABORDADO EM ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS.

Neste capítulo, analisamos como o conceito de proporcionalidade e regra de três vem sendo abordado em alguns livros didáticos, e se estes fazem menção ou não a redução à unidade.

Proporcionalidade é um assunto que começa a ser trabalhado no ensino fundamental e acompanha o aluno durante todo o ensino médio, não só na matemática, mas também, em outras áreas, o que denota a importância de uma abordagem satisfatória. Esta análise está dividida em dois grupos de livros: Ensino Fundamental 2 (E.F.2) e Ensino Médio (E.M).

E.F.2

— O primeiro livro do Ensino fundamental a ser analisado é *Matemática compreensão e prática*, SILVEIRA (2013). Este livro tem sido adotado por um grande número de escolas.

Regra de três simples

*Agora, vamos estudar a resolução de questões que envolvem grandezas diretamente a inversamente proporcionais, por meio de **regra de três simples**.*

Regra de três simples é um processo prático para resolver problemas que envolvem quatro valores, dos quais conhecemos apenas três. Devemos, portanto, determinar um valor com base nos outros três já conhecidos.

Passos de uma regra de três simples

1º) Construir uma tabela, agrupando as grandezas da mesma espécie em colunas e mantendo, na mesma linha, as grandezas de espécies diferentes em correspondência.

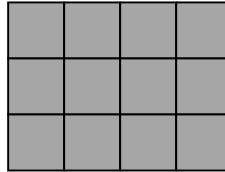
2º) Verificar se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais.

3º) Montar a proporção e resolver a equação.

Vejamos alguns exemplos encontrados em livros didáticos:

Exemplo 1: Com uma área de absorção de raios solares de $1,2 \text{ m}^2$, um painel de captação de energia solar consegue gerar 400 watts hora (Wh) de energia. Aumentando a área para $1,5 \text{ m}^2$, qual será a energia produzida?

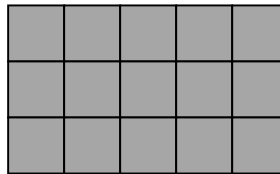
Figura 17 – Área de absorção dos raios solares



$1,2 \text{ m}^2$

Fonte: SILVEIRA, E. Matemática: Compreensão e Prática 7º ano. São Paulo, Moderna, 2013. 303 p.

Figura 18 – Aumentando a área de absorção dos raios solares



$1,5 \text{ m}^2$

Fonte: SILVEIRA, E. Matemática: Compreensão e Prática 7º ano. São Paulo, Moderna, 2013. 303 p.

Solução:

• *Tabela*

Tabela 6 – Organizando os dados do problema

Área (m^2)	Energia (Wh)
1,2	400
1,5	x

←

grandezas de espécies diferentes em correspondência

←

↑

↑

grandezas de mesma espécie

- *Identificação do tipo de relação*

Área	Energia	
1,2	400	↓ seta para baixo colocada como referência
1,5	x	

Observe que, aumentando a área de absorção, a energia solar gerada aumenta na mesma proporção. Como as palavras “**aumentando**” e “**aumenta**” indicam um mesmo sentido de crescimento, dizemos que as grandezas são **diretamente proporcionais**.

- *Montando a proporção e resolvendo a equação.*

Área		Energia	
1,2	↓	400	↓
1,5	↓	x	↓

grandezas diretamente proporcionais,
setas no mesmo sentido

$$\frac{400}{x} = \frac{1,2}{1,5}$$

$$1,2x = 1,5 \cdot 400$$

$$x = \frac{1,5 \cdot 400}{1,2} = 500$$

Logo, a energia gerada em 1,5 m² será de 500 Wh.

Exemplo 2: O Maglev, trem de levitação magnética, deslocando-se a uma velocidade média de 400 km/h, faz determinado percurso em 3 horas. Em quanto tempo o trem faria o mesmo percurso se a velocidade fosse de 480 km/h?

Solução:

- *Tabela*

Tabela 7– Organizando os dados do problema

Velocidade (km/h)	Tempo (h)
400	3
480	x

↑ ↑
grandezas de mesma espécie

← ←
grandezas de espécies diferentes em correspondência

- *Identificação do tipo de relação*

Velocidade	Tempo	
400	3	\downarrow <i>seta para baixo colocada como referência</i>
480	x	

Observe que, aumentando a velocidade, o tempo do percurso diminui na mesma proporção. Como as palavras “**aumentando**” e “**diminui**” têm sentidos contrários, dizemos que as grandezas são **inversamente proporcionais**.

- *Montando a proporção e resolvendo a equação.*

Velocidade	\uparrow	Tempo	\downarrow	
400	\uparrow	3	\downarrow	$\frac{3}{x} = \frac{480}{400} \rightarrow$
480		x		

*grandezas inversamente proporcionais,
setas em sentidos contrários*

*Invertemos os termos,
pois as setas estão em
sentidos contrários.*

Logo, o trem faria o mesmo percurso em 2,5 horas ou 2 horas e 30 minutos, se a velocidade fosse de 480 km/h.

Regra de três composta

A regra de três composta é utilizada em problemas com mais de duas grandezas, diretamente ou inversamente proporcionais.

Observe os exemplos.

Exemplo 3: Em 8 horas, 20 caminhões descarregaram 160 m³ de areia. Em 5 horas, quantos caminhões serão necessários para descarregar 125 m³ de areia?

Solução:

Inicialmente, montamos uma tabela, colocando, em cada coluna, as grandezas de mesma espécie e, em cada linha, as grandezas de espécies diferentes que se correspondem.

- *Tabela*

Tabela 8 – Organizando os dados do problema

Tempo (h)	Número de caminhões	Volume (m³)
8	20	160
5	x	125

- *Identificação do tipo de relação*

Tempo	Número de caminhões	↓	Volume
8	20		160
5	x		125

Seta para baixo colocada como referencial

Agora, comparamos cada grandeza com a que queremos encontrar (x). Observe que, aumentando o tempo de trabalho, podemos diminuir proporcionalmente o número de caminhões necessários para realizar uma mesma tarefa. Logo, a relação é inversamente proporcional. E, **aumentando** o volume de areia, devemos **aumentar** proporcionalmente o número de caminhões necessários para transportá-la. Logo, a relação é diretamente proporcional.

- *Montando a proporção e resolvendo a equação.*

Tempo	↑	Número de caminhões	Volume	↓
8		20	160	
5		x	125	

Seta em sentido contrário à seta de referência. Grandezas inversamente proporcionais (tempo e número de caminhões).

Seta no mesmo sentido da seta de referência. Grandezas diretamente proporcionais (número de caminhões e volume de areia).

Igualamos a razão que contém o termo x com o produto das outras razões de acordo com o sentido das setas.

$$\frac{20}{x} = \frac{160}{125} \cdot \frac{5}{8}$$

$$\frac{20}{x} = \frac{4}{5} \rightarrow 4x = 20 \cdot 5 \rightarrow x = 25$$

Estamos falando de grandezas diretamente e inversamente proporcionais, por que não escrever de uma forma mais adequada cada uma delas? Devemos usar a constante de proporcionalidade k , redução à unidade, junto com a definição desses tipos de grandezas. Por que usar setinhas? Vimos na página 42 a dificuldade em usar as setas quando o problema for literal. O livro não menciona a redução a unidade no ensino da proporcionalidade. Então como resolver esses 3 exemplos usando a constante de proporcionalidade k ? Segue, portanto, uma proposta através de 3 exemplos examinados.

Exemplo1: O primeiro passo na resolução é verificar a proporcionalidade. A área de absorção A é diretamente proporcional a energia gerada E .

Portanto, podemos escrever $A = k \cdot E$. Como $1,2 \text{ m}^2$ de área consegue gerar 400 watt-hora, temos: $1,2 = k \cdot 400$, ou seja, $k = 0,003$. Com isso, $A = 0,003 \cdot E$. Fazendo uma substituição quando $A = 1,5 \text{ m}^2$, segue $1,5 = 0,003 \cdot E$, o que implica $E = 500$ watt-hora de energia gerada.

Exemplo2: O primeiro passo na resolução é verificar a proporcionalidade. A velocidade média V do trem é inversamente proporcional ao tempo T . Portanto, podemos escrever $V = \frac{k}{T}$. Como o trem desloca-se a uma velocidade média de 400 km/h e consegue fazer este percurso em 3 horas, podemos escrever $400 = \frac{k}{3}$, ou seja, $k = 1200$. Com isso, $V = \frac{1200}{T}$. Fazendo uma substituição quando 480 km/h, segue $480 = \frac{1200}{T}$, o que implica $T = 2,5\text{h}$.

Exemplo3: O primeiro passo na resolução é verificar a proporcionalidade. O número de caminhões C é diretamente proporcional ao volume V de areia que ele transporta e inversamente proporcional ao tempo T . Portanto, podemos escrever

$C = k \frac{V}{T}$. Como em 8 horas, 20 caminhões descarregaram 160 m^3 de areia, podemos escrever $20 = k \frac{160}{8}$, ou seja, $k = 1$. Com isso, $C = 1 \cdot \frac{V}{T}$. Fazendo uma substituição para saber quantos caminhões C descarregarão 125 m^3 de areia em 5 horas, segue $C = 1 \cdot \frac{125}{5}$, o que implica, $C = 25$ caminhões.

— O segundo livro a ser analisado é *Matemática, sétimo ano, sétima edição*, BIANCHINI (2011). Diferente do *Silveira* (2013), o autor não usa setinhas, mas ensina regra de três pelo método tradicional, não falando da redução a unidade em nenhum momento.

E.M.

— Analisamos o primeiro volume, *Matemática Dicas e Macetes*, RIBEIRO (2003).

Primeiramente, o que chama atenção é o nome do livro, onde já está implícito que a proposta do livro é que o aluno decore regras para resolver determinados tipos de problemas. Na pág. 67, encontramos um título, “Problemas envolvendo torneiras” e a fórmula para resolver problemas desse tipo, sem a devida fundamentação teórica. Segue o que está sendo exposto no livro.

Problemas com torneiras:

Para determinar o tempo total (T) que leva para encher uma fração de um tanque (para o tanque todo, a “fração” é igual a 1), com várias torneiras funcionando juntas, sabendo os tempos $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$, em que cada torneira leva para encher ou esvaziar o tanque funcionando sozinha, utilizamos a seguinte fórmula geral:

$$T = \frac{\text{fração}}{\pm \frac{1}{t_1} \pm \frac{1}{t_2} \pm \dots \pm \frac{1}{t_n}} .$$

onde utilizamos o sinal “+” quando a torneira enche o tanque ou o sinal “-” quando a torneira (ou o “ralo”) o esvazia.

Exercício Resolvido:

Sabendo que uma torneira enche um tanque funcionando sozinha em 2 horas e outra, também funcionando sozinha o enche em 3 horas, enquanto que um ralo esvazia esse mesmo tanque em 6 horas, estando o tanque com $\frac{2}{3}$ de sua capacidade, abrindo as duas torneiras e abrindo o ralo, em quanto tempo esse tanque ficará completamente cheio?

Resolução:

Temos: $t_1 = 3$; $t_2 = 6$; $t_3 = 2$ e fração do tanque a ser completada = $\frac{1}{3}$. Pela fórmula

$$T = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{6}} = \frac{1}{3} \times \frac{6}{4} = \frac{1}{2} h$$

Resposta: O tanque ficará cheio em meia hora.

A primeira pergunta que podemos formular é: Isso é o que queremos para os nossos alunos? O aluno deve tratar o problema de forma mecânica, decorando apenas uma fórmula para resolvê-lo, sem explorá-lo, sem que em nenhum momento ele entenda o processo presente na solução? Essa abordagem contraria a proposta de POLYA, (2006) e de tantos outros especialistas na resolução de problemas. Ao invés dessa maneira, proponho a redução à unidade para que o aluno entenda o processo, ensinando assim a raciocinar e não decorar. Deixo como sugestão a solução abaixo.

Solução:

Em 1 hora, a torneira 1, despeja $\frac{1}{2}$ da capacidade do tanque.

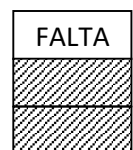
Em 1 hora, a torneira 2 despeja $\frac{1}{3}$ da capacidade do tanque.

Em 1 hora, o ralo esvazia, $\frac{1}{6}$ da capacidade do tanque.

Em 1 hora, todos juntos, temos: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3+2-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ da capacidade do tanque. Agora vamos usar o dado do problema.

O tanque está com $\frac{2}{3}$ da sua capacidade, faltando completar $\frac{1}{3}$. Logo, para

encher o que falta, levará um tempo $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} h =$ meia hora.



Resposta: O tanque ficará cheio em meia hora.

Além disso, na página 140, o autor define a função linear, sem mencionar a proporcionalidade e muito menos a redução à unidade. Novamente, o autor impõe ao aluno como deve ser a função linear, repetindo o mecanismo anterior de decorar, ao invés de ensinar o aluno a pensar.

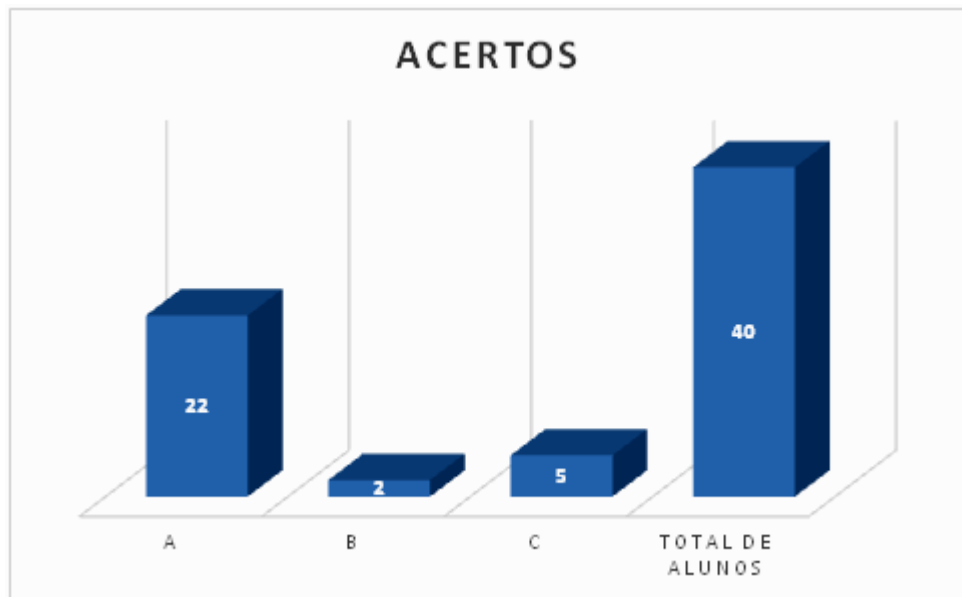
— No Livro *Fundamentos de Matemática elementar, volume 9*, DOLCE E POMPEO (2013), separam o capítulo 13 para falar de semelhança de triângulos. Abordam várias vezes a constante de proporcionalidade k e em nenhum momento falam sobre redução à unidade. Eles também não mencionam sobre semelhança nas demais figuras. No capítulo 19 que aborda o conceito de áreas, os autores destinam uma parte para razão entre áreas de dois polígonos semelhantes. No entanto, não explicam o que vem a ser isso. Apesar de ser um bom livro, o mesmo não ensina a redução à unidade quando aborda a constante de proporcionalidade k . Além disso, os autores não definem figuras semelhantes, somente triângulos semelhantes e depois explicam uma relação entre áreas de figuras semelhantes. O problema, a nosso ver, ocorre pelas lacunas teóricas que vão sendo deixadas para trás. O aluno aprende a relação entre figuras semelhantes, mas não sabe o que são figuras semelhantes, dificultando assim o processo de ensino aprendizagem.

— No livro *Matemática Contexto & Aplicações, volume 1*, DANTE (2011), o autor não menciona diretamente a redução à unidade, no entanto faz uma abordagem significativa sobre o ensino de proporcionalidade, fornecendo muitos exemplos do cotidiano onde podemos aplicar esse conceito. A pergunta que fica é por quê não explorar a redução à unidade, que é uma abordagem muito interessante para a resolução dos problemas ali apresentados.

5 DISCUSSÕES DOS RESULTADOS

Inicialmente, um dos objetivos deste trabalho era constatar a falta de compreensão dos alunos quanto ao conceito de proporcionalidade frente à resolução de problemas. Para isso, foi elaborado uma lista de exercícios composta por 15 questões com 1 discursiva e 14 objetivas, sendo estas últimas retiradas das provas do Enem (Exame Nacional do Ensino Médio), de acordo com o Apêndice 2. Esta lista foi aplicada como trabalho para uma análise quantitativa em uma turma da primeira série do ensino médio na rede particular de ensino composta de 40 alunos. O Gráfico 9 mostra a quantidade de acertos da questão discursiva por item a, b e c. Com base nos resultados alunos, concluímos que 22 alunos sabem o que é uma grandeza, apenas dois alunos sabem o que são grandezas diretamente e inversamente proporcionais e somente 5 alunos ouviram falar em redução a unidade.

Gráfico 9 – Quantidade de acertos por item da questão discursiva

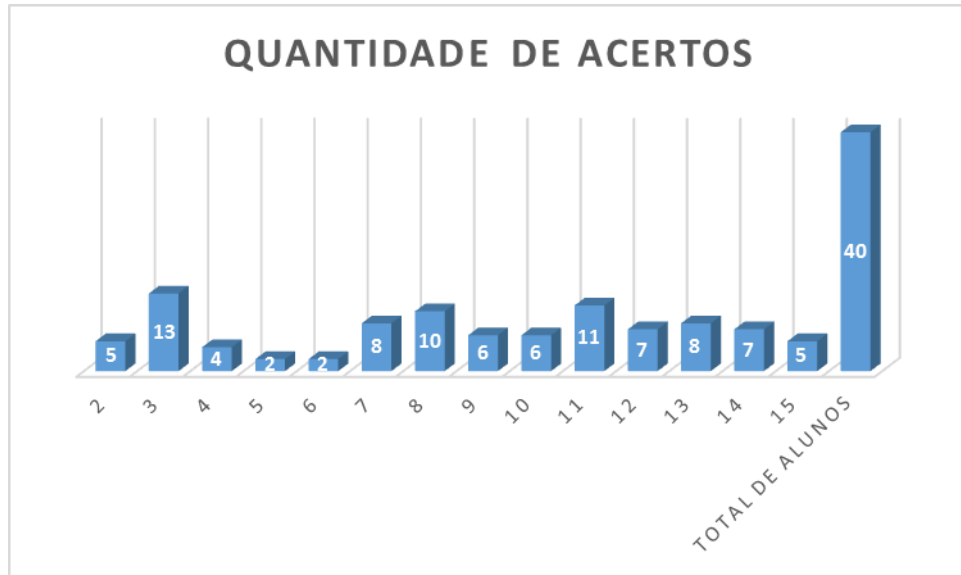


Fonte: gráfico feito pelo próprio autor, março de 2016.

O Gráfico 10 mostra a quantidade de acertos nas questões objetivas reforçando a falta de compreensão dos alunos com questões ligadas a proporcionalidade. A questão com o maior índice de acerto foi a questão 3, sobre proporção, com um índice abaixo de 34%, um resultado preocupante sobre o

aprendizado desse conteúdo. Problemas envolvendo torneiras, escalas, divisão em partes proporcionais e questões envolvendo o conceito de diretamente e inversamente proporcional ficaram bem abaixo dos 30%.

Gráfico 10 – Quantidade de acertos da questão objetiva



Fonte: gráfico feito pelo próprio autor, março de 2016.

Com base nos Gráficos 9 e 10, através desta análise quantitativa, nos deparamos com um baixo desempenho dos alunos quanto a resolução de problemas sobre o assunto proporcionalidade, reforçando a suspeita levantada no primeiro parágrafo desta secção.

6 CONCLUSÕES

O trabalho apresentado tem por finalidade explorar a resolução de problemas como metodologia para o ensino baseado, principalmente, nas teorias de POLYA (2006), servindo como suporte didático e motivacional para a sala de aula. Além disso, constatamos através de uma breve análise que alguns livros didáticos, abordam o tema de maneira não apropriada, induzindo o aluno a decorar. Somado a isso, através de uma análise quantitativa com alunos da primeira série do ensino médio da rede particular de ensino, encontramos um baixo rendimento por partes dos educandos sobre a resolução de problemas de proporcionalidade com variados níveis de dificuldade.

Por isso, deixamos aqui uma proposta para futuros trabalhos, no intuito de fazer uma análise qualitativa para avaliarmos com maior certeza o processo de ensino aprendizagem sobre o tema proporcionalidade, e com isso aplicar o método da redução à unidade para que possamos fazer uma comparação na tentativa de diminuir as falhas existentes no nosso ensino.

Este trabalho também tem como meta despertar o desejo de saber, refletir e criar, pois sem dúvida são pré-requisitos para se inserir em uma sociedade tão competitiva quanto a nossa. Precisamos desenvolver tais habilidades para que de alguma forma possamos ajudar a reverter o preocupante quadro mostrado nas páginas anteriores e com isso mudar a direção que estamos seguindo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDRINI, A.; VASCONCELOS, M. J. *Praticando matemática 2 V. 3. ed.* São Paulo: Editora do Brasil, 2012.
- BIANCHINI, E. *Matemática 2 v. 7. ed.* São Paulo: Moderna, 2011.
- BONJORNO, J. ; OLIVARES, A. *Matemática: fazendo a diferença. 1 ed.* São Paulo: FTD, 2006.
- BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. *Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil*, Brasília, DF, 23 dez. 1996. Seção 1. P. 27.833.
- BREUCKMANN, H. J. *A Solução de Problemas a partir de alguns Pressupostos Vygotskyanos.* 1998. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1998.
- CASTRO, F. Z. *Uma proposta de sequência didática para o treinamento olímpico de matemática.* 2013. 95 f. Dissertação (Mestrado em matemática) - Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2013.
- D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação matemática: da teoria à prática.* 16. ed. Campinas: Papyrus, 2008.
- DANTE, Luiz Roberto. *Didática da resolução de problemas de matemática.* 3. ed. São Paulo: Ática, 1991.
- DANTE, L.R. *Matemática contexto & aplicações 1V. 5. Ed.* São Paulo: Ática, 2011.
- DECARTES, R. *Discurso do método.* 3. ed. São Paulo: Abril Cultural, 1983.

2001: Uma odisseia no espaço. Direção de Stanley Kubrick. Los Angeles: Metro-Goldwyn-Mayer Films. 1 DVD (149 min).

DICIONÁRIO ONLINE DE PORTUGUÊS. Disponível em: < <https://www.dicio.com.br/heuristico/>>. Acesso em: 7 maio, 2017.

DOLCE, O.; POMPEO, J. *Fundamentos de Matemática Elementar* 9 v. 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2005.

ECO, U. *Como se faz uma tese*. 3. ed. São Paulo: Perspectiva, 1983.

ELLENBERG, J. *O poder do pensamento matemático: a ciência de não estar errado com relação as coisas*. 1.ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2015.

FERREIRA, C. R. *Conceito de Proporcionalidade: uma proposta para o ensino aprendizagem no fundamental*. 2013. 65 f. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2013.

GOMES, C.H.A. *O ensino de matemática e a psicologia da educação*. 2001. 113 f. Monografia- Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro 2013.

GOVERNO FEDERAL. Brasil. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. 1996. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>>. Acesso em: 12 jul. 2016.

GOWERS. T. *Matemática uma breve introdução*. 2. ed. Rio de Janeiro: GRADIVA, 2008.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. *Matemática e realidade*. 6. ed. São Paulo: Atual, 2009.

LIMA, E. L. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

LIMA, E. L. *Curso de Análise 1* V. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

LIMA, E. L. *Medida e Forma em Geometria*. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; Wagner, E. ; Morgado, A. C. *Temas e Problemas elementares*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; Wagner, E. ; Morgado, A. C. *Temas e Problemas*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; Wagner, E.; Morgado, A. C. *A Matemática do Ensino Médio V1*. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; Wagner, E.; Morgado, A. C. *A Matemática do Ensino Médio 2 V. 4*. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

LUPINACCI, V.L.M.; BOTIN, M.L.M. *Resolução de problemas no ensino de matemática*. Encontro Nacional de Educação Matemática, Anais... 8. 2004, Recife. p. 1-5.

MLODINOW, L. *De primatas a astronautas: a jornada em busca do conhecimento*. 1.ed Rio de Janeiro: Zahar, 2015.

NEWELL, A.; SIMON, H. A. *Information Processing Systems*. In: A. Newell & H., Simon (Ed.), *Human Problem Solving*. New Jersey: PrenticeHall, Inc. 1972a. p. 19-52.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N.S.G. *Novas reflexões sobre o ensino aprendizagem de matemática através da resolução de problemas*. In: BICUDO, M.A.V.; BORBA, M.C. *Educação Matemática: pesquisa em movimento*. 2. ed. rev. São Paulo: Cortez, 2005.

PAIS, L. C. *Ensinar e aprender matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

SCHOENFELD, A. *Mathematical Problem Solving*. New York, Academic Press, 1985.

SHULTE, A. P.; LINDQUIST, M. M. *Aprendendo e Ensinando Geometria*. 2.ed São Paulo: Atual, 1996.

SILVEIRA, J. F. P. *O que é matemática?* 2001. Disponível em: <
<http://athena.mat.ufrgs.br/~portosil/resu.html> >. Acesso em: 17/04/2016.

SILVEIRA, E.; MARQUES, C. *Matemática compreensão e prática 2 V*. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

SKINNER, B. F. *Tecnologia do Ensino*. S. Paulo, Editora Pedagógica, 1972.

THOMPSON, A. *Teacher's beliefs and conceptions: a synthesis of the research*. In: *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York, Macmillan, 1992.

WALLAS, Graham. *The Art of Thought*. New York, Hartcourt, Brace and Company, 1926.

APÊNDICE 1 – Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Seja $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função com as seguintes propriedades:

- 1) $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$;
- 2) $f(nx) = n \cdot f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Então $f(cx) = c \cdot f(x)$ para todo $c \in \mathbb{R}^+$ e todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Consequentemente, $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, com $a = f(1)$.

Demonstração: Em primeiro lugar, para todo número racional $r = m/n$, com $m, n \in \mathbb{N}$, e todo $x \in \mathbb{R}^+$ vale

$$n \cdot f(rx) = f(n \cdot rx) = f(mx) = m \cdot f(x),$$

por 2), logo $f(rx) = \frac{m}{n}f(x) = r \cdot f(x)$. Assim, a igualdade $f(cx) = c \cdot f(x)$ é válida quando c é racional. Suponhamos, por absurdo que exista $c > 0$ irracional tal que $f(cx) \neq c \cdot f(x)$ para algum $x \in \mathbb{R}^+$. Então ou $f(cx) < c \cdot f(x)$ ou $f(cx) > c \cdot f(x)$. Consideremos o primeiro caso. Temos então $f(cx) / f(x) < c$. Seja r um valor racional aproximado de c , de modo que $f(cx) / f(x) < r < c$, logo $f(cx) < r \cdot f(x) < c \cdot f(x)$. Como r é racional, vale $r \cdot f(x) = f(rx)$. Assim, podemos escrever $f(cx) < f(rx) < c \cdot f(x)$. Em particular, $f(cx) < f(rx)$. Mas, como $r < c$, tem-se $rx < cx$ e, pela propriedade 1), isso obriga $f(rx) < f(cx)$ e não $f(cx) < f(rx)$. Esta contradição mostra que não é possível ter-se $f(cx) < c \cdot f(x)$. De modo inteiramente análogo se vê que $f(cx) > c \cdot f(x)$ é impossível. Portanto, deve ser $f(x) = c \cdot f(x)$ para quaisquer $c, x \in \mathbb{R}^+$.

Observação. Um teorema análogo, com a mesma demonstração, vale para $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, escrevendo, na propriedade 2), $n \in \mathbb{Z}$ em vez de $n \in \mathbb{N}$. (LIMA, 1991)

APÊNDICE 2– Trabalho realizado em sala de aula no dia 22 de março de 2016 na rede particular de ensino na primeira série do ensino médio.

A presente lista é constituída por 14 questões do Enem e 1 questão discursiva. O tempo de duração desse trabalho será de 45 minutos, três minutos por questão, tempo médio de resolução por questão no Enem. Portanto, boa sorte e concentração!

1. a) O que é uma Grandeza?

b) O que são Grandezas Diretamente Proporcionais? E Inversamente Proporcionais?

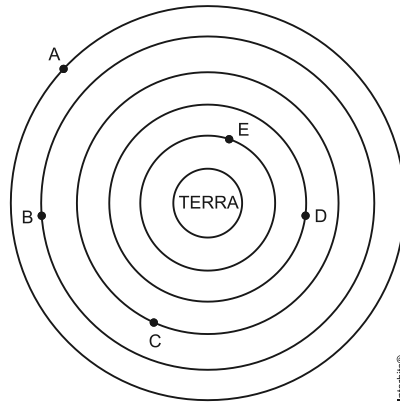
c) Você já ouviu falar em Redução a Unidade?

2. (Enem 2013) A Lei da Gravitação Universal, de Isaac Newton, estabelece a intensidade da força de atração entre duas massas. Ela é representada pela expressão:

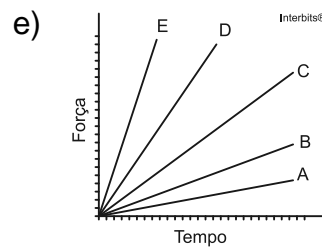
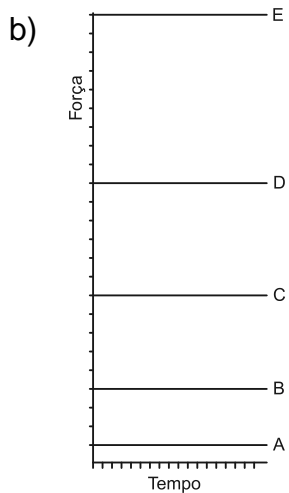
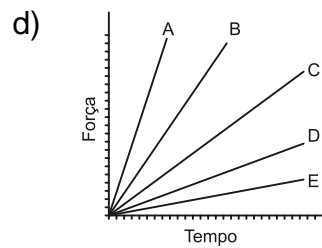
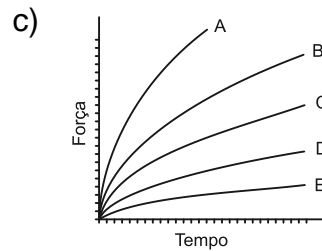
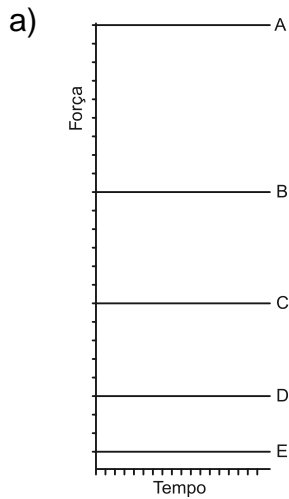
$$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

onde m_1 e m_2 correspondem às massas dos corpos, d à distância entre eles, G à constante universal da gravitação e F à força que um corpo exerce sobre o outro.

O esquema representa as trajetórias circulares de cinco satélites, de mesma massa, orbitando a Terra.

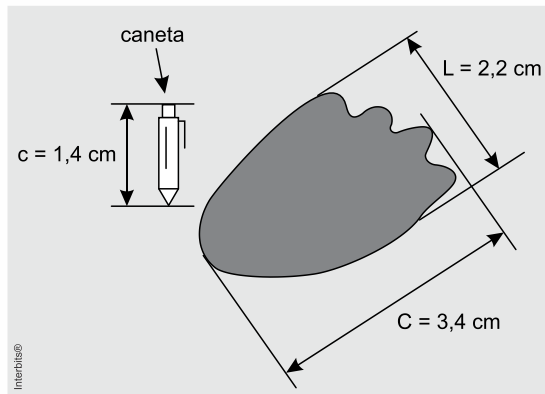


Qual gráfico expressa as intensidades das forças que a Terra exerce sobre cada satélite em função do tempo?



3. (Enem 2015) Um pesquisador, ao explorar uma floresta, fotografou uma caneta de 16,8 cm de comprimento ao lado de uma pegada. O comprimento da caneta (c), a

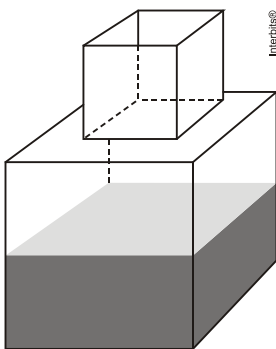
largura (L) e o comprimento (C) da pegada, na fotografia, estão indicados no esquema.



A largura e o comprimento reais da pegada, em centímetros, são, respectivamente, iguais a

- a) 4,9 e 7,6
- b) 8,6 e 9,8
- c) 14,2 e 15,4
- d) 26,4 e 40,8
- e) 27,5 e 42,5

4. (Enem 2014) Um fazendeiro tem um depósito para armazenar leite formado por duas partes cúbicas que se comunicam, como indicado na figura. A aresta da parte cúbica de baixo tem medida igual ao dobro da medida da aresta da parte cúbica de cima. A torneira utilizada para encher o depósito tem vazão constante e levou 8 minutos para encher metade da parte de baixo.

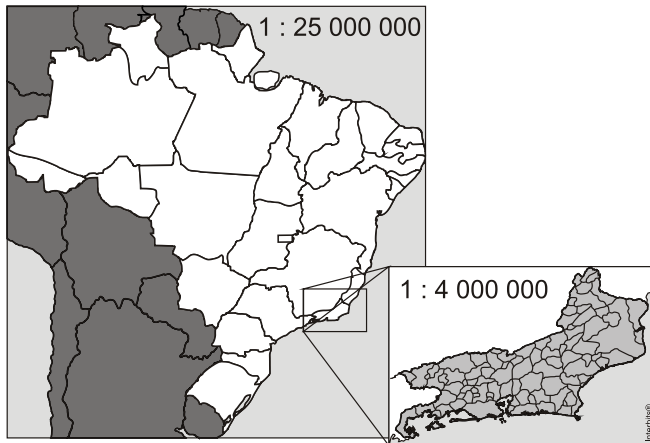


Quantos minutos essa torneira levará para encher completamente o restante do depósito?

- a) 8.
- b) 10.

- c) 16.
- d) 18.
- e) 24.

5. (Enem 2013) A figura apresenta dois mapas, em que o estado do Rio de Janeiro é visto em diferentes escalas.



Há interesse em estimar o número de vezes que foi ampliada a área correspondente a esse estado no mapa do Brasil.

Esse número é

- a) menor que 10.
- b) maior que 10 e menor que 20.
- c) maior que 20 e menor que 30.
- d) maior que 30 e menor que 40.
- e) maior que 40.

6. (Enem 2013) Muitos processos fisiológicos e bioquímicos, tais como batimentos cardíacos e taxa de respiração, apresentam escalas construídas a partir da relação entre superfície e massa (ou volume) do animal. Uma dessas escalas, por exemplo, considera que "o cubo da área S da superfície de um mamífero é proporcional ao quadrado de sua massa M ".

HUGHES-HALLETT, D. et al. *Cálculo e aplicações*.

São Paulo: Edgard Blücher, 1999 (adaptado).

Isso é equivalente a dizer que, para uma constante $k > 0$, a área S pode ser escrita em função de M por meio da expressão:

a) $S = k \cdot M$

b) $S = k \cdot M^{\frac{1}{3}}$

c) $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^{\frac{1}{3}}$

d) $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^{\frac{2}{3}}$

e) $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^2$

7. (Enem 2013) Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para 900 m^3 . Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos, e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Esta indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de 500 m^3 , cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente. A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a :

a) 2.

b) 4.

c) 5.

d) 8.

e) 9.

8. (Enem 2013) Para se construir um contrapiso, é comum, na constituição do concreto, se utilizar cimento, areia e brita, na seguinte proporção: 1 parte de cimento, 4 partes de areia e 2 partes de brita. Para construir o contrapiso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão betoneira com 14 m^3 de concreto. Qual é o volume de cimento, em m^3 , na carga de concreto trazido pela betoneira?

a) 1,75

b) 2,00

c) 2,33

d) 4,00

e) 8,00

9. (Enem 2013) Um comerciante visita um centro de vendas para fazer cotação de preços dos produtos que deseja comprar. Verifica que se aproveita 100% da quantidade adquirida de produtos do tipo A, mas apenas 90% de produtos do tipo B. Esse comerciante deseja comprar uma quantidade de produtos, obtendo o menor custo/benefício em cada um deles. O quadro mostra o preço por quilograma, em reais, de cada produto comercializado.

Produto	Tipo A	Tipo B
Arroz	2,00	1,70
Feijão	4,50	4,10
Soja	3,80	3,50
Milho	6,00	5,30

Os tipos de arroz, feijão, soja e milho que devem ser escolhidos pelo comerciante são, respectivamente,

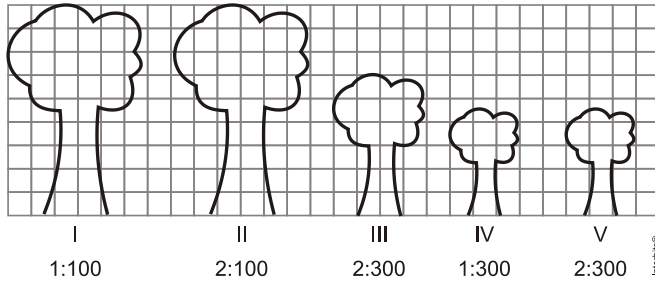
- a) A, A, A, A.
- b) A, B, A, B.
- c) A, B, B, A.
- d) B, A, A, B.
- e) B, B, B, B.

10. (Enem 2012) José, Carlos e Paulo devem transportar em suas bicicletas uma certa quantidade de laranjas. Decidiram dividir o trajeto a ser percorrido em duas partes, sendo que ao final da primeira parte eles redistribuiriam a quantidade de laranjas que cada um carregava dependendo do cansaço de cada um. Na primeira parte do trajeto, José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 6 : 5 : 4, respectivamente. Na segunda parte do trajeto, José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 4 : 4 : 2, respectivamente.

Sabendo-se que um deles levou 50 laranjas a mais no segundo trajeto, qual a quantidade de laranjas que José, Carlos e Paulo, nessa ordem, transportaram na segunda parte do trajeto?

- a) 600, 550, 350
- b) 300, 300, 150
- c) 300, 250, 200
- d) 200, 200, 100
- e) 100, 100, 50

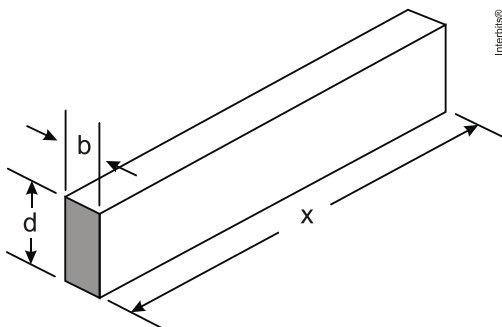
11. (Enem 2012) Um biólogo mediu a altura de cinco árvores distintas e representou-as em uma mesma malha quadriculada, utilizando escalas diferentes, conforme indicações na figura a seguir.



Qual é a árvore que apresenta a maior altura real?

- a) I
- b) II
- c) III
- d) IV
- e) V

12. (Enem 2012) A resistência mecânica S de uma viga de madeira, em forma de um paralelepípedo retângulo, é diretamente proporcional à sua largura (b) e ao quadrado de sua altura (d) e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os suportes da viga, que coincide com o seu comprimento (x), conforme ilustra a figura. A constante de proporcionalidade k é chamada de resistência da viga.



BUSHAW, D. et al. *Aplicações da matemática escolar*. São Paulo: Atual, 1997.

A expressão que traduz a resistência S dessa viga de madeira é

$$\text{a) } S = \frac{k \cdot b \cdot d^2}{x^2}$$

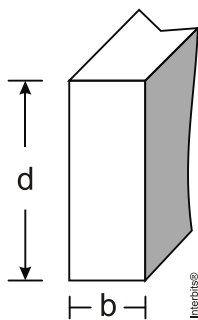
$$\text{b) } S = \frac{k \cdot b \cdot d}{x^2}$$

$$\text{c) } S = \frac{k \cdot b \cdot d^2}{x}$$

$$\text{d) } S = \frac{k \cdot b^2 \cdot d}{x}$$

$$\text{e) } S = \frac{k \cdot b \cdot 2d}{2x}$$

13. (Enem 2011) A resistência das vigas de dado comprimento é diretamente proporcional à largura (b) e ao quadrado da altura (d), conforme a figura. A constante de proporcionalidade k varia de acordo com o material utilizado na sua construção.



Considerando-se S como a resistência, a representação algébrica que exprime essa relação é

$$\text{a) } S = k \cdot b \cdot d$$

$$\text{b) } S = b \cdot d^2$$

$$\text{c) } S = k \cdot b \cdot d^2$$

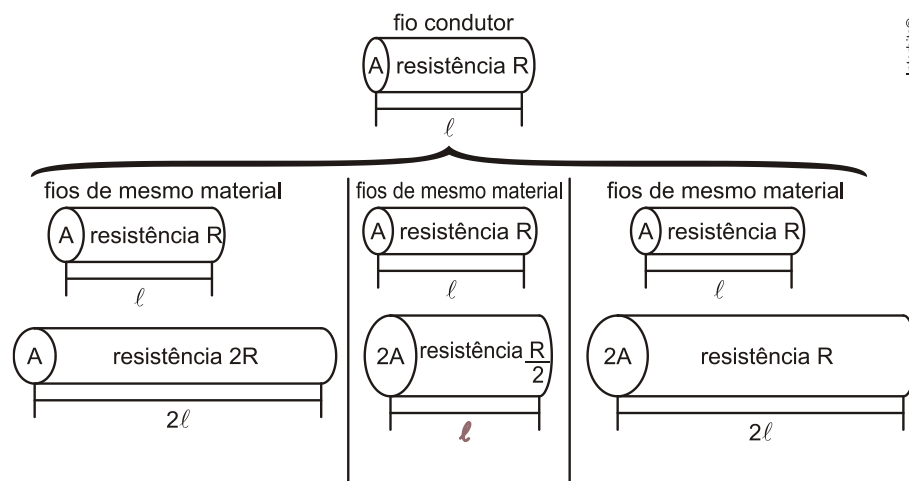
$$\text{d) } S = \frac{k \cdot b}{d^2}$$

$$\text{e) } S = \frac{k \cdot d^2}{b}$$

14. (Enem 2010) A relação da resistência elétrica com as dimensões do condutor foi estudada por um grupo de cientistas por meio de vários experimentos de eletricidade. Eles verificaram que existe proporcionalidade entre:

- resistência (R) e comprimento (ℓ), dada a mesma seção transversal (A);
- resistência (R) e área da seção transversal (A), dado o mesmo comprimento (ℓ) e
- comprimento (ℓ) e área da seção transversal (A), dada a mesma resistência (R).

Considerando os resistores como fios, pode-se exemplificar o estudo das grandezas que influem na resistência elétrica utilizando as figuras seguintes.

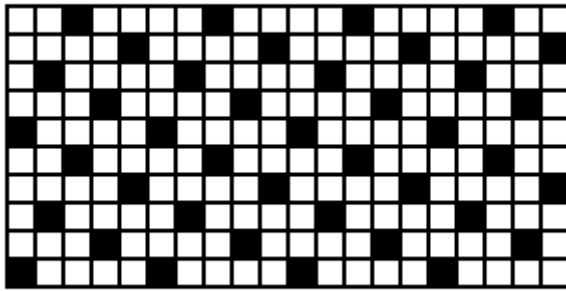


Disponível em: <http://www.efeiotojoule.com>. Acesso em: abr. 2010 (adaptado)

As figuras mostram que as proporcionalidades existentes entre resistência (R) e comprimento (ℓ), resistência (R) e área da seção transversal (A), e entre comprimento (ℓ) e área da seção transversal (A) são, respectivamente,

- direta, direta e direta.
- direta, direta e inversa.
- direta, inversa e direta.
- inversa, direta e direta.
- inversa, direta e inversa.

15. (Enem 2005) Um pátio de grandes dimensões vai ser revestido por pastilhas quadradas brancas e pretas, segundo o padrão representado a seguir, que vai ser repetido em toda a extensão do pátio.



As pastilhas de cor branca custam R\$ 8,00 por metro quadrado e as de cor preta, R\$ 10,00. O custo por metro quadrado do revestimento será de

- a) R\$ 8,20.
- b) R\$ 8,40.
- c) R\$ 8,60.
- d) R\$ 8,80.
- e) R\$ 9,00.

Gabarito:

Resposta da questão 1:

[B]

A intensidade da força de atração gravitacional é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre a Terra e o satélite. Como as órbitas são circulares, a distância para cada satélite é constante, sendo também constante a intensidade da força gravitacional sobre cada um. Como as massas são iguais, o satélite mais distante sofre força de menor intensidade.

Assim: $F_A < F_B < F_C < F_D < F_E$.

Resposta da questão 2:

[D]

Sejam L' e C' , respectivamente, a largura e o comprimento reais da pegada. Tem-se que:

$$\frac{2,2}{L'} = \frac{3,4}{C'} = \frac{1,4}{16,8} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \begin{cases} L' = 26,4 \text{ cm} \\ C' = 40,8 \text{ cm} \end{cases}$$

Resposta da questão 3:

[B]

Seendo ℓ a medida da aresta da parte cúbica de cima, tem-se que a aresta da parte cúbica de baixo mede 2ℓ .

Por conseguinte, se a torneira levou 8 minutos para despejar $\frac{(2\ell)^3}{2} = 4\ell^3$ unidades de volume, então ela levará $8 \cdot \left(\frac{4\ell^3 + \ell^3}{4\ell^3}\right) = 10$ minutos para encher completamente o restante do depósito.

Resposta da questão 4:

[D]

Sejam L e L' tais que $L = \frac{1}{25000000}$ e $L' = \frac{1}{4000000}$. Desse modo,

$$\frac{L'}{L} = \frac{\frac{1}{4000000}}{\frac{1}{25000000}} \Leftrightarrow \frac{L'}{L} = \frac{25}{4},$$

e, portanto,

$$\left(\frac{L'}{L}\right)^2 = \left(\frac{25}{4}\right)^2 \Rightarrow L'^2 \cong 39,06L^2,$$

ou seja, a área destacada no mapa foi ampliada aproximadamente 39,06 vezes.

Resposta da questão 5:

[D]

Seendo S a área da superfície do mamífero e M a sua massa, temos:

$$\begin{aligned} S^3 &= k \cdot M^2 \Leftrightarrow S = (k \cdot M^2)^{\frac{1}{3}} \\ &\Leftrightarrow S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Resposta da questão 6:

[C]

Sejam n , V e t , respectivamente, o número de ralos, o volume a ser escoado e o tempo de escoamento. Logo,

$$n = k \cdot \frac{V}{t},$$

com k sendo a constante de proporcionalidade.

Para $n = 6$, $V = 900 \text{ m}^3$ e $t = 6\text{h}$, temos

$$6 = k \cdot \frac{900}{6} \Leftrightarrow k = \frac{1}{25}.$$

Portanto, se $V' = 500 \text{ m}^3$ e $t' = 4\text{h}$, vem

$$n' = \frac{1}{25} \cdot \frac{500}{4} = 5,$$

que é o resultado procurado.

Resposta da questão 7:

[B]

Sejam a , b e c , respectivamente, os volumes de areia, brita e cimento tais que

$$a + b + c = 14 \text{ e } \frac{a}{4} = \frac{b}{2} = c = k,$$

com k sendo a constante de proporcionalidade.

Desse modo, tem-se que

$$4k + 2k + k = 14 \Leftrightarrow k = 2$$

e, portanto, $c = 2,00 \text{ m}^3$.

Resposta da questão 8:

[D]

Considere a tabela abaixo, em que a coluna Tipo B apresenta o custo efetivo de 1kg dos produtos listados.

Produto	Tipo A	Tipo B
Arroz	2,00	$\frac{1,7}{0,9} \cong 1,89$
Feijão	4,50	$\frac{4,1}{0,9} \cong 4,56$
Soja	3,80	$\frac{3,5}{0,9} \cong 3,89$
Milho	6,00	$\frac{5,3}{0,9} \cong 5,89$

Portanto, a escolha que o comerciante deve fazer é B, A, A, B.

Resposta da questão 9:

[B]

Seja x o total de laranjas:

Na primeira viagem, temos $\frac{6x}{15}$, $\frac{5x}{15}$ e $\frac{4x}{15}$ (José, Carlos e Paulo).

Na segunda viagem, temos $\frac{4x}{10} = \frac{6x}{15}$, $\frac{4x}{10} = \frac{6x}{15}$ e $\frac{2x}{10} = \frac{3x}{15}$ (José, Carlos e Paulo).

Carlos foi o único que transportou mais laranjas.

$$\frac{6x}{15} - \frac{5x}{15} = 50 \Rightarrow x = 750$$

Portanto, na segunda viagem, José transportou 300 laranjas, Carlos transportou 300 laranjas e Paulo transportou 150 laranjas.

Resposta da questão 10:

[D]

Sejam h_i e r_i , respectivamente, a altura no desenho e a altura real da árvore i .

Logo, como $\frac{h_i}{r_i} = E$, em que E é a escala adotada, vem:

$$\frac{9}{r_I} = \frac{1}{100} \Leftrightarrow r_I = 900 \text{ u.c.},$$

$$\frac{9}{r_{II}} = \frac{2}{100} \Leftrightarrow r_{II} = 450 \text{ u.c.},$$

$$\frac{6}{r_{III}} = \frac{2}{300} \Leftrightarrow r_{III} = 900 \text{ u.c.},$$

$$\frac{4,5}{r_{IV}} = \frac{1}{300} \Leftrightarrow r_{IV} = 1350 \text{ u.c.}$$

e

$$\frac{4,5}{r_{IV}} = \frac{2}{300} \Leftrightarrow r_{IV} = 675 \text{ u.c.}$$

Portanto, a árvore IV tem a maior altura real.

Resposta da questão 11:

[A]

De acordo com as informações, segue que

$$S = k \cdot \frac{b \cdot d^2}{x^2}.$$

Resposta da questão 12:

[C]

$$\frac{S}{b \cdot d^2} = k \Leftrightarrow S = k \cdot b \cdot d^2$$

Resposta da questão 13:

[C]

A constante e dobrando ℓ temos r dobrado (ℓ e R (diretamente proporcionais)).
 ℓ constante e dobrando A temos R dividido por 2 (inversamente proporcionais).
R constante e dobrando ℓ temos A dobrado (diretamente proporcionais).

Resposta da questão 14:

[B]

De acordo com o padrão apresentado, há $10 \cdot 20 = 200$ pastilhas, sendo 40 pretas e 160 brancas. Portanto, o custo do metro quadrado será de:

$$\frac{40}{200} \cdot 10 + \frac{160}{200} \cdot 8 = \text{R\$ } 8,40.$$