Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciência
Instituto de Matemática e Estatística

Thiago da Silva Borges

A metodologia de Resolução de Problemas no Ensino de Matrizes no Ensino Médio

Rio de Janeiro
2018

Thiago da Silva Borges

A metodologia de Resolução de Problemas no Ensino de Matrizes no Ensino Médio

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinicius Tovar Costa
Coorientador: Prof. Dr. Augusto Cesar de Castro Barbosa

Rio de Janeiro
2018

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

B732 Borges, Thiago da Silva.
A metodologia de resolução de problemas no ensino de Matrizes no Ensino Médio / Thiago da Silva Borges. – 2018.
139 f.

Orientador: Marcus Vinicius Tovar Costa.
Coorientador: Augusto Cesar de Castro Barbosa.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Matrizes (Matemática) – Estudo e ensino - Teses. 2. Matemática (Ensino médio) – Teses. I. Costa, Marcus Vinicius Tovar. II. Barbosa, Augusto Cesar de Castro. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.

CDU 512.643:37

Rinaldo Magallon – *CRB-7/5016* – Responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Assinatura Data

Thiago da Silva Borges

A metodologia de Resolução de Problemas no Ensino de Matrizes no Ensino Médio

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em de de 2018.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Marcus Vinicius Tovar Costa (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dr. Augusto Cesar de Castro Barbosa (Coorientador)
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dr. Silas Fantin
Departamento de Matemática e Estatística - UNIRIO

Prof. Dr. Sergio Luiz Silva
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Rio de Janeiro

2018

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, minha esposa, minha irmã, meus familiares, amigos e todos que me ajudaram a chegar até aqui.

AGRADECIMENTOS

Agradeço meus pais, Nelson e Maria de Fátima (*in memorian*), por todo amor, carinho e ensinamentos ao longo da vida. Sem eles não conseguiria chegar até aqui.

Agradeço minha irmã, Thaiana, pelo carinho e apoio em todos os momentos.

À minha esposa e parceira, Sasha, por todo amor, apoio, carinho e incentivo dados até aqui.

Aos meus orientadores, Marcus Tovar e Augusto Cesar, por todos ensinamentos.

À UERJ e aos meus professores que contribuíram para minha formação como mestre.

Aos amigos da turma do PROFMAT 2015 pela amizade e todos os momentos de aprendizagem.

Aos amigos de turma e de vida Bruno Guimarães, Marcelo Tobias e Nelson Garcez pelos momentos de estudo, risadas, reuniões e churrascos que tivemos.

Ao amigo Paulo Vinícius por todo apoio e auxílio dados durante o período de pesquisa.

Aos meus familiares, colegas de trabalho, amigos, professores e alunos que tive ao longo de minha vida.

Se enxerguei mais longe,
foi porque me apoiei sobre ombro de gigantes.
Isaac Newton

RESUMO

BORGES, T. B.*A metodologia de Resolução de Problemas no Ensino de Matrizes no Ensino Médio.* 2018. 139 f. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

Neste trabalho a metodologia de Resolução de Problema é utilizada como ferramenta para a introdução do conceito de matrizes no ensino médio. Uma experiência foi realizada em cinco turmas do 3° ano do Ensino Médio de Escola tradicional do Rio de Janeiro. O conteúdo foi apresentado de forma contextualizada envolvendo temas do cotidiano dos alunos. Em três turmas os problemas foram lançados primeiramente antes da apresentação formal dos conteúdos, enquanto que nas outras duas turmas os problemas foram explorados após a apresentação formal de Matrizes. Isto é, esse trabalho apresenta dois aspectos que precisam ser destacados: em partes das turmas o ensino de matrizes foi desenvolvido para a resolução de problemas; já nas turmas restantes, o ensino de matrizes foi realizado através da resolução de problemas. Resultados qualitativos são apresentados e discutidos.

Palavras-chave: Resolução de problemas. Matrizes. Multiplicação.

ABSTRACT

BORGES, T. B. *The teaching os matrices through the problems resolution.* 2018. 139 f. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

In this work the Problem Solving methodology is used as a tool for the introduction of the concept of matrices in High School. An experiment was carried out in five classes of the 3rd year of the High School of traditional School of the city of Rio de Janeiro. The contet was presented in a contextualized way involving subjects of the student's daily life. In three classes the problems were first introduced before the formal presentation of the contents, while in the other two classes the problem were explored after the formal presentation of matrices. This work presents two aspects that nedd to be highlighted: in part of the classes, matrix teaching was developed to solve problems; imn the other hand, in the remaining classes, the teaching of matrices was accomplished through problem solving. Qualitative results are presented and discussed.

Keywords: Problems resolution. Matrices. Multiplication.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Quadrado mágico Lo-shu como representado no “Livro das permutações”. 30
Figura 2 - Representação moderna do quadrado mágico chinês. 30
Figura 3 - W. R. Hamilton 33
Figura 4 - Placa alusiva ao surgimento da álgebra não comutativa 35
Figura 5 - J. J. Sylvester (1814 - 1897) 36
Figura 6 - Contato entre duas cônicas 37
Figura 7 - A. Cayley 38
Figura 8 - Sistema linear segundo Cayley 39
Figura 9 - Matriz nula e matriz identidade segundo Cayley 39
Figura 10 - Soma de matrizes segundo Cayley 40
Figura 11 - Multiplicação de matrizes segundo Cayley 40
Figura 12 - Redes de viagem 45
Figura 13 - Exemplo de rede aérea 46
Figura 14 - Soma/subtração de matrizes - Apresentação 53
Figura 15 - Soma/subtração de matrizes - Exercícios 54
Figura 16 - Rede de viagem 2 58
Figura 17 - Multiplicação de matrizes - Exercícios 62
Figura 18 - Simetria e rotação aplicados à arte e à arquitetura. 64
Figura 19 - Simetria axial 65
Figura 20 - Simetria central 65
Figura 21 - Simetria no plano cartesiano 66
Figura 22 - Escher, M. C., - Translação na arte 69
Figura 23 - Translação do triângulo ABC 70
Figura 24 - Rotação do vetor $\vec{v}$ 71
Figura 25 - Rotação de 120° do triângulo ABC 73
Figura 26 - Solução incompleta de um aluno para o problema 1 77
Figura 27 - Solução correta de um aluno para o problema 1 78
Figura 28 - Solução correta de um aluno para o problema 2 - Letra c 79
Figura 29 - Solução correta de um aluno para o problema 3 81
Figura 30 - Solução incompleta de um aluno para o problema 3 82
Figura 31 - Solução incompleta de um aluno para o problema 3 83
Figura 32 - Solução correta de um aluno para o problema 4 85
Figura 33 - Solução incompleta de um aluno para o problema 4 86
Figura 34 - Solução equivocada de um aluno para o problema 4 87
Figura 35 - Solução incompleta - Problema 1 88
Figura 36 - Solução incompleta - Problema 1 88

Figura 37 - Solução incompleta - Problema 3 90
Figura 38 - Solução incorreta - Problema 3 91
Figura 39 - Solução correta - Problema 4 92
Figura 40 - Solução incorreta - Problema 4 93
Figura 41 - Estatística da aplicação 1 94
Figura 42 - Solução correta - Problema 1 (a) 96
Figura 43 - Estatística da aplicação 2 - Problema 1 (a). 97
Figura 44 - Solução incorreta - problema 1 (b) 97
Figura 45 - Solução correta - problema 1 (b) 98
Figura 46 - Solução correta - problema 1 (b) 98
Figura 47 - Estatística da aplicação 2 - Problema 1 (b). 99
Figura 48 - Solução correta - problema 2 - Aplicação 2 101
Figura 49 - Solução incompleta - problema 2 - Aplicação 2 102
Figura 50 - Solução errada - problema 2 - Aplicação 2 102
Figura 51 - Estatística da aplicação 2 - Problema 2. 103
Figura 52 - Redes de viagem 104
Figura 53 - Solução incompleta - Aplicação 3 105
Figura 54 - Solução incompleta - Aplicação 3 106
Figura 55 - Solução correta sem justificativa - Aplicação 3 107
Figura 56 - Solução incorreta - Aplicação 3 107
Figura 57 - Estatística da aplicação 3. 108
Figura 58 - Tráfego de carros. 111
Figura 59 - Solução correta de um aluno, problema 1 - Aplicação 4. 113
Figura 60 - Solução incompleta de um aluno, problema 1 - Aplicação 4. 114
Figura 61 - Solução errada de um aluno, problema 1 - Aplicação 4. 114
Figura 62 - Solução incompleta de um aluno, problema 1 - Aplicação 4. 115
Figura 63 - Solução correta de um aluno, problema 2 - Aplicação 4. 116
Figura 64 - Solução incompleta de um aluno, problema 2 - Aplicação 4. 116
Figura 65 - Quadro problema 3 117
Figura 66 - Solução por tentativa de um aluno, problema 3 - Aplicação 4. 118
Figura 67 - Solução correta de um aluno, problema 3 - Aplicação 4. 119
Figura 68 - Solução errada de um aluno, problema 3 - Aplicação 4. 119
Figura 69 - Solução incompleta de um aluno, problema 1 - Aplicação 4. 121
Figura 70 - Solução incompleta de um aluno, problema 2 - Aplicação 4. 121
Figura 71 - Solução incompleta de um aluno, problema 2 - Aplicação 4. 122
Figura 72 - Solução incompleta de um aluno, problema 3 - Aplicação 4. 122
Figura 73 - Solução correta de um aluno, problema 3 - Aplicação 4. 123
Figura 74 - Estatística da aplicação 4. 124
Figura 75 - Existência de estradas entre cidades 131

Figura 76 - Redes de viagem 136
Figura 77 - Tráfego de carros. 138
Figura 78 - Quadro problema 3 139

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	13
1	**RESOLUÇÃO DE PROBLEMA**	15
1.1	**A importância da Matemática em nosso desenvolvimento**	15
1.2	**A resolução de problema**	18
1.3	**A metodologia de resolução de problema.**	19
1.3.1	A diferença entre os problemas e os exercícios.	19
1.3.2	Características e estratégias para resolução dos problemas:	20
1.3.3	Tipos de problemas:	23
1.4	**O papel do professor na resolução de problema**	26
2	**UM BREVE HISTÓRICO SOBRE MATRIZES**	28
2.1	**A importância do recurso histórico no ensino da matemática**	28
2.2	**História das matrizes**	29
2.2.1	O surgimento da nomenclatura Matriz - século XIX	31
2.2.1.1	Willian Rowan Hamilton (1805 - 1865)	33
2.2.1.2	James Joseph Sylvester (1814 - 1897)	36
2.2.1.3	Arthur Cayley (1821 - 1895)	38
3	**A TEORIA DE MATRIZES A PARTIR DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**	43
3.1	**Definição de matrizes**	43
3.2	**Tipos de matrizes**	46
3.3	**Problemas envolvendo operações entre matrizes**	50
3.3.1	Soma de matrizes	50
3.3.2	Multiplicação de matrizes	52
3.3.3	Isometria	63
4	**APLICAÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES**	75
4.1	**Público alvo da pesquisa**	75
4.2	**Como as aulas e as atividades foram conduzidas**	75
4.2.1	Primeira aplicação	76
4.2.2	Segunda aplicação	95
4.2.3	Terceira aplicação	103
4.2.4	Quarta aplicação	110
5	**CONSIDERAÇÕES FINAIS**	125
	REFERÊNCIAS	126
	APÊNDICE A – Abraham Wald e os furos de bala que faltam.	129
	APÊNDICE B – Lista da primeira aplicação.	131
	APÊNDICE C – Lista da segunda aplicação.	134

APÊNDICE D – Lista da terceira aplicação. 136
APÊNDICE E – Lista da quarta aplicação. 138

INTRODUÇÃO

A origem da Matemática está diretamente ligada a problemas, e é comum utilizá-la em nosso dia-dia para tentar resolvê-los. Apesar disso, ensinar Matemática é um desafio para a maioria dos professores dessa disciplina. É importante que os mesmos tenham ferramentas para incentivar o aluno a gostar dessa disciplina e consequentemente melhorar seu desempenho. A metodologia de resolução de problema é uma ferramenta fundamental nessa tarefa. Através dessa metodologia os alunos tendem em geral, a possuir maior liberdade para expor suas ideias, o que pode acarretar interesse nos conteúdos matemáticos e assim desenvolver novas habilidades. De acordo com Romanatto (2012, p. 303), com essa metodologia os estudantes desenvolvem capacidades intelectuais e mobilizam estratégias para encontrar respostas, tais como: criatividade, intuição, autonomia, liberdade, tentativa e erro, entre outras.

Na maior parte da minha carreira, lecionei para preparatórios destinados aos vestibulares civil e militar, onde se priorizam aulas expositivas e aprovações. No ano de 2015, ao me tornar professor do Colégio Pedro II, encontrei uma realidade diferente dos cursos preparatórios. No ensino básico não temos compromisso somente com aprovação e com alunos que possuem facilidade em Matemática. Por esse motivo, percebi a necessidade de encontrar uma metodologia que auxiliasse a melhorar minhas aulas e atrelasse o ensino a um dos maiores prazeres que a Matemática proporciona, a prática em resolver problemas. A paixão por problemas matemáticos, o interesse em conhecer uma metodologia dirigida a problemas e o desejo de transformar minhas aulas em um ambiente onde os alunos se tornem protagonistas, foram as maiores motivações na escolha desse tema.

Dessa forma, esse trabalho tem por objetivo apresentar a teoria, sugerir e analisar as aplicações realizadas pautadas na teoria de resolução de problemas. Escolhemos o tópico de Matrizes como tema para desenvolver esse trabalho. Na teoria de matrizes, demos prioridade às operações com maior foco na soma e na multiplicação de matrizes com o objetivo de dar sentido a essas operações e não apresentá-las a partir de procedimentos padronizados e exercícios rotineiros. Dividimos esse trabalho em quatro capítulos, conforme apresentamos a seguir.

O primeiro capítulo dessa dissertação é destinado a teoria de resolução de problemas. Nesse capítulo tratamos da importância da Matemática em nosso desenvolvimento, apresentamos as diferenças entre problemas e exercícios assim como suas características, e por fim discutimos sobre o papel do professor na resolução de um problema. Destacamos que o papel do professor é fundamental na aplicação dessa teoria. Essa etapa da dissertação foi fundamental para que pudesse fazer as aplicações.

No segundo capítulo apresentamos um breve histórico da teoria de matrizes, onde destacamos três matemáticos importantes no desenvolvimento dessa teoria: Willian Rowan

Hamilton, com a descoberta de uma álgebra não comutativa, James Joseph Sylvester com o estudo sobre determinantes e Arthur Cayley com as definições, operações e propriedades das matrizes.

No terceiro capítulo apresentamos algumas sugestões para o ensino de matrizes através da metodologia de resolução de problemas. Nesse capítulo damos maior destaque para a soma e multiplicação de matrizes e o finalizamos com uma sugestão de aplicação sobre transformações isométricas.

O quarto capítulo trata das aplicações realizadas com alunos de cinco turmas do terceiro ano do colégio Pedro II. Inicialmente fizemos a apresentação do público alvo seguido de uma breve explicação sobre a condução das atividades. Em seguida, apresentamos as quatro aplicações em ordem cronológica. As aplicações envolvem o conteúdo de Matrizes e sistemas lineares. Ao todo fizemos quatro aplicações e em cada uma delas apresentamos as estatísticas comparando o rendimento dos alunos e as soluções que consideramos ter maior destaque.

Por fim, apresentamos as considerações finais levando em conta as conclusões na realização desse trabalho. Destacamos a mudança de percepção no papel do professor no ensino de Matemática a partir da metodologia de resolução de problema.

1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMA

1.1 A importância da Matemática em nosso desenvolvimento

Os alunos em geral possuem dificuldade no aprendizado de Matemática e isso acaba tornando-a pouco atraente entre os mesmos. É notório que possamos caracterizar essa antipatia por diversos fatores: pela falta de estímulo em sala de aula, pela falta de motivação dos professores, pela abstração, pelo rigor lógico, entre outros. Nosso objetivo é denotar a importância da Matemática na formação dos alunos e desenvolver o gosto pela resolução de problemas a fim de desenvolver no aluno sua própria compreensão, ajudando-o na construção de seu conhecimento.

A Matemática possui papel importante no desenvolvimento cognitivo de um indivíduo. Segundo Mendes (2009, p. 12), "Torna-se necessário abordar a matemática enquanto uma atividade referente à efetivação de um pensamento ativo que busca construir soluções para os processos lógicos-interrogativos surgidos no dia-dia."De acordo com esse pensamento, podemos observar que a Matemática é necessária para o desenvolvimento do raciocínio, ajudando os alunos a tomarem decisões na escola e em questões que envolvem raciocínio lógico em seu cotidiano.

Ainda de acordo com esse pensamento, os PCNs afirmam que

> Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais (BRASIL, 2000, p. 40).

É comum ouvir em sala de aula as seguintes afirmações por parte dos discentes: "eu sou de humanas", "sou da área biomédica"e "eu sou da área de exatas". O importante é mostrar que a Matemática auxilia no desenvolvimento do aluno e o ajuda a desenvolver habilidades que potencializam seu poder de dedução e raciocínio lógico. Com frequência ouvimos perguntas dos alunos relacionadas a aplicações de determinado conteúdo, tais como:

- "Onde vou usar isso em minha vida?"
- "Onde eu aplico isso?"

As respostas para essas perguntas não são fáceis. O professor pode responder algo do tipo:

- "Estamos usando a Matemática o tempo todo, você pode não perceber agora, mas, como exemplo, o celular que você usa, só existe por conta do avanço tecnológico que também é proveniente da Matemática."

Em geral, essa resposta não satisfaz o aluno e tão pouco é a resposta adequada. Mas qual será a resposta adequada? Na verdade, existem alguns temas que realmente são difíceis serem justificados aos alunos. De fato, a Matemática ajuda no desenvolvimento intelectual de qualquer indivíduo, mesmo daqueles que não vão seguir carreiras que fazem seu uso. É importante que o professor não esteja com uma resposta vazia. Mostrar aos alunos que a Matemática tem papel fundamental em nosso raciocínio é indispensável, mesmo com assuntos que não possuam aplicações concretas e de fácil contextualização. Mostrar que a Matemática está presente a todo instante em nossa vida é relevante, mesmo que seja com exemplos básicos, como através de proporções, matemática financeira, operações, funções, entre outros. Um bom exemplo para mostrar o quanto a Matemática ajuda a otimizar nosso raciocínio lógico, é o *Problema de Abraham Wald e os furos de bala que faltam*[1]. Nesse problema observa-se fundamentos utilizados em probabilidade e geometria que ajudam a mostrar que a Matemática está entrelaçada à nossa forma de pensar e contribui em muitas outras atividades. De acordo com Ellenberg (2015, p. 10), "Saber Matemática é como usar um par de óculos raios X que revelam estruturas ocultas por sob a superfície caótica e bagunçada do mundo." Ou seja, saber Matemática não é necessariamente dominar toda sua linguagem ou sua simbologia, mas é pensar de forma livre através de deduções e raciocínio lógico e isso nos ajuda em tarefas que inicialmente não aparentam conexão direta com a Matemática.

É interessante notar que, algumas vezes a preocupação dos professores é com os que não gostam ou mesmo com os que não seguem ou não pretendem seguir carreiras que estejam entrelaçadas à Matemática, tais como: Direito, Medicina, Licenciatura em História, entre outras. Mas mesmo aos que seguem ou pretendem seguir essas carreiras, ficam algumas perguntas:

- "Quando usaremos de fato alguns aprendizados?"

- "Quando aplicaremos aquele conhecimento que adquirimos em cálculo, resolvendo as questões de derivação e integração?"

- "Para que servem os cálculos de autovalores e autovetores?"

De fato, a prática em qualquer área do conhecimento ajuda a solidificar seu entendimento assim como poderá contribuir para o desenvolvimento do mesmo.

[1] Esse problema encontra-se no apêndice A

Segundo Ellenberg,

> A Matemática não é só uma sequência de cálculos a serem executados por rotina até que sua paciência ou sua energia se esgote - embora possa parecer isso, pelo que lhe ensinaram nos cursos de Matemática. Essas integrais são para a Matemática a mesma coisa que trabalhar com pesos e fazer ginástica para o Futebol - quer dizer, jogar mesmo, em nível de competição -, vai ter de fazer um monte de exercícios chatos e repetitivos e aparentemente sem sentido. Será que os jogadores profissionais algum dia usam esses exercícios? Bom, você nunca verá ninguém em campo levantando halteres nem correndo em zigue-zague entre cones de trânsito. Mas vê os jogadores usando a força, a velocidade, a percepção e a flexibilidade que desenvolveram fazendo exercícios, semana após semana. Com a Matemática acontece mais ou menos a mesma coisa (ELLENBERG, 2015, p. 10).

É notório que o pensamento matemático não deve ser tratado como uma linha de raciocínios mecânicos e repetitivos, apesar de muitas vezes os exercícios serem necessários. O uso de problemas, por exemplo, incentiva os alunos e os mostra como a Matemática pode ser prazerosa. Para isso, não é necessário que trabalhemos com problemas profundos que estejam fora do alcance dos alunos, embora seja produtivo mostrar que a Matemática possui problemas grandiosos. De acordo com Stewart (2014, p. 14), "Andrew Wiles[2] teve contato com o que é conhecido como *O último teorema de Fermat*[3] aos dez anos e ficara tão intrigado que decidiu tornar-se matemático para resolvê-lo."

Embora seja necessário transitar pelos resultados mais simples antes de compreender os mais complexos, alguns resultados matemáticos podem ser provenientes do senso comum, mesmo aqueles mais sofisticados. Entretanto, para que o aluno tenha essa percepção, é indispensável que o professor assuma a responsabilidade de atuação e o mostre a importância de aprender e pensar matematicamente.

Segundo os PCN,

> Os resultados matemáticos distinguem-se pela sua precisão e os raciocínios desenvolvem-se num alto grau de minuciosidade, que os torna incontestáveis e convincentes. Mas a vitalidade da Matemática deve-se também ao fato de que, apesar de seu caráter abstrato, seus conceitos e resultados têm origem no mundo real e encontram muitas aplicações em outras ciências e em inúmeros aspectos práticos da vida diária: na indústria, no comércio e na área tecnológica. Por outro lado, ciências como Física, Química e Astronomia têm na Matemática ferramenta essencial. Em outras áreas do conhecimento, como Sociologia, Psicologia, Antropologia, Medicina, Economia Política, embora seu uso seja menor que nas chamadas ciências exatas, ela também constitui um subsídio importante, em função de conceitos, linguagem e atitudes que ajuda a desenvolver (BRASIL, 1997, p. 23).

---

[2] Andrew John Wiles é um matemático britânico. Famoso por ter demonstrado, com a colaboração de Richard Lawrence Taylor, o Último Teorema de Fermat, em 1994.

[3] A equação $x^n + y^n = z^n$ não possui solução com x, y, z e n inteiros não nulos com $n \geq 3$.

Entretanto, é óbvio que para a Matemática ser entendida em um nível mais profundo utiliza-se de simbologias e de uma linguagem que muitas vezes pode desestimular os alunos a estudá-la. Por esse motivo, em alguns conteúdos o professor deve dar significado as notações e operações, com o objetivo de facilitar o entendimento dos alunos. Temos uma tendência de explicar Matemática através de regras, essa não é a forma ideal de ensinar. De acordo com Moreira (2012, p. 12), a aprendizagem mecânica, aquela praticamente sem significado, puramente memorística é a que mais ocorre nas escolas. Acreditamos que o ensino de Matemática deve ter como objetivo a aprendizagem significativa que implica na compreensão do conteúdo, na capacidade de transferir, descrever e enfrentar situações novas.

De acordo com esse pensamento, os professores não devem ensinar através de regras e definições sem problematizar situações, pois fazendo isso o aprendizado não terá sentido. É importante destacar que para uma aprendizagem significativa é necessário que se leve em consideração os conhecimentos prévios dos alunos, o material utilizado em sala de aula, assim como a predisposição dos alunos para aprender, como afirma Moreira,

> É importante reiterar que a aprendizagem significativa se caracteriza pela interação entre conhecimentos prévios e conhecimentos novos [...] essencialmente, são duas as condições para a aprendizagem significativa: o material de aprendizagem deve ser potencialmente significativo e o aprendiz deve apresentar uma predisposição para aprender (MOREIRA, 2012, p. 2-8).

Dentro da proposta de tornar a Matemática mais prazerosa e legitimar sua importância no desenvolvimento de um indivíduo, faremos em sala de aula algumas aplicações utilizando a metodologia de resolução de problemas. A fim de esclarecer essa metodologia, abordaremos na próxima seção sua estrutura teórica, discutindo suas características, os tipos de problemas e o papel do professor nessa tarefa.

1.2 A resolução de problema

Um dos maiores desafios ao ensinar Matemática é mostrar aos alunos o quão ela é interessante e importante em nossa vida. Acreditamos que entre as ferramentas que podemos contar para a árdua tarefa de estimular o aprendizado em Matemática e torná-la interessante, está a resolução de problemas. Esta pode estimular e ajudar a solidificar o prazer por estudar Matemática podendo contribuir para uma aprendizagem significativa.

A resolução de um problema, seja ele ligado ao nosso cotidiano ou meramente abstrato como, por exemplo, uma demonstração, pode desencadear uma série de resultados, estimulando a curiosidade e aprimorando a criatividade, pois através do planejamento, dos erros e acertos o aluno não se vê enclausurado em um rigor teórico antecipadamente determinado, podendo assim, expor suas ideias e desenvolver habilidades a partir das experiências na resolução dos problemas.

Concordamos com Romanatto, quando ele diz que

> Entendenmos que na resolução de problemas, os estudantes vão exercitar as suas mais diversas capacidades intelectuais como também mobilizar estratégias das mais diversas naturezas para encontrar a resposta, tais como: criatividade, intuição, imaginação, iniciativa, autonomia, liberdade, estabelecimento de conexões, experimentação, tentativa e erro, utilização de problemas conhecidos, interpretação dos resultados, etc. Enfim, é o que a Matemática pode fazer pelo estudante e não o contrário (ROMANATTO, 2012, p. 303).

Na próxima seção abordaremos as principais características de um problema, os tipos de problemas, as etapas que os alunos devem seguir nessa metodologia, bem como, a diferença entre exercício e problema.

1.3 A metodologia de resolução de problema.

1.3.1 A diferença entre os problemas e os exercícios.

Qual é a diferença entre um exercício e um problema? De acordo com o dicionário Dicio *on line*[4], exercício é definido como "tarefa dada aos alunos para aferir ou consolidar uma lição"e problema é definido como "exercício em que se calculam uma ou múltiplas quantidades sobre as quais não se tem conhecimento, relacionando-as com outras já sabidas; questão que se resolve através de cálculos."

A partir dessas definições, podemos observar uma sútil diferença entre problema e exercício. Em sala de aula é muito comum o uso dos dois vocábulos para apresentar ao aluno uma situação que o mesmo deva desenvolver. Mas, de fato, problema e exercício possuem alguma distinção? Em muitos livros didáticos é comum o autor denominar os níveis das tarefas da seguinte forma: "exercícios de fixação", "exercícios propostos", "problemas propostos", "desafios", entre outros. Essas nomenclaturas não esclarecem a diferença entre exercício e problema, acabando em muitas vezes abordando exercícios nos lugares dos problemas e vice-versa.

Enfim, quais são as principais diferenças entre exercício e problema? Podemos definir exercício como uma tarefa em que o aluno necessita aplicar algo meramente burocrático, que automatiza certas técnicas de resolução, como, por exemplo a aplicação do Teorema de Pitágoras de forma direta (tendo a medida de dois catetos, determine a medida da hipotenusa). Já o problema, podemos elucidar como uma tarefa que depende

[4] Essas definições encontram-se no endereço eletrônico: https://www.dicio.com.br/

de organização e de alguns processos mais sofisticados que contam com, principalmente, o interesse e comprometimento do discente. No problema o aluno não possui uma solução pré-determinada com auxílio de algoritmos, ele necessita de uma elaboração de um plano que conta com a interpretação, poder de decisão e raciocínio dedutivo. Para resolver o exercício o aluno necessita do entendimento instrumental, em contrapartida, para resolver um problema o aluno necessita do entendimento relacional.

De acordo com Souza,

> O entendimento instrumental refere-se a "ter regras sem razões"para o tipo de compreensão em Matemática que aparece somente pela proficiência de executar procedimentos matemáticos, como os algoritmos. O entendimento relacional diz respeito à habilidade de relacionar, com significados, os conceitos adquiridos (SOUZA, 2007, p. 9).

Concordamos com Onuchic, quando ela diz que

> Colocando o foco em Resolução de Problemas, defendemos que: o ponto de partida das atividades Matemáticas não é a definição mas o problema; que o problema não é um exercício no qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou uma determinada técnica operatória (ONUCHIC, 1999, p. 215).

Dessa forma, percebemos que existe diferença entre resolver exercício e resolver problema. No problema o aluno necessita de algumas estratégias, como veremos na próxima seção, e acreditamos que o foco principal da teoria de Resolução de Problema é que o aluno assuma o protagonismo e seja participante na sua própria aprendizagem. Com a Resolução de Problema o aluno passa relacionar conhecimentos, cria habilidade para resolver problemas, organiza suas ideias e aprende "como pensar".

1.3.2 Características e estratégias para resolução dos problemas:

A seguir definiremos algumas características dos problemas, assim como estratégias de resolução e classificação. É importante ressaltar que essas definições são indispensáveis para o entendimento da metodologia de resolução de problemas, além de reforçar a distinção entre exercício e problema.

Segundo Resnick (1996), problemas possuem as seguintes características:

• Sem algoritmização: o caminho da resolução é desconhecido, ao menos em boa parte.

• Complexos: precisam de vários pontos de vista.

• Exigentes: a solução só é atingida após intenso trabalho mental; embora o caminho possa ser curto, ele tende a ser difícil.

• Necessitam de lucidez e paciência: um problema começa com uma aparente desordem de ideias e é preciso adotar padrões que permitirão construir o caminho até a solução.

• Nebulosos: nem sempre todas as informações necessárias estão aparentes; por outro lado, pode existir conflito entre as condições estabelecidas pelo problema.

• Não há solução única: normalmente ocorre de existirem várias maneiras de se resolver um dado problema; no entanto, pode acontecer de não existir uma melhor solução ou até de não haver solução, ou seja, resolver um problema não é o mesmo que achar a resposta.

Além de definir algumas características dos problemas é importante que tenhamos uma estratégia antes de começarmos a resolvê-los. Uma grande referência nesse assunto é George Polya. Para ele, uma pessoa está diante de um problema quando ela se defronta com uma questão que não consegue resolver com o conhecimento que detém, ou seja, ela não consegue resolvê-lo com procedimentos (algoritmos) ou técnicas pré-determinadas. De acordo com Polya (2006, p. 4-5), a resolução de um problema deve seguir quatro etapas [5], são elas:

1ª) compreender o problema;

2ª) estabelecer um plano;

3ª) executar o plano;

4ª) fazer o retrospecto ou verificação.

Para cumprir essas etapas, primeiramente os alunos necessitam ter um embasamento razoável do assunto proposto, verificar quais são as condições dadas no enunciado, como, por exemplo, determinar as incógnitas e as condicionantes. Algumas perguntas podem ajudar nessa etapa:

• As condicionantes são satisfatórias?

• Qual é a incógnita?

• O que eu quero determinar?

[5] Para ilustrar alguns pontos tratados nessas etapas, consulte as seções 8-13 do livro " A arte de resolver problema"(POLYA, 2006)

• Quais são os meus conhecimentos pré-adquiridos que ajudam nessa solução? Que estratégia devo tomar?

Na segunda etapa, o aluno deve se ater a elaborar uma estratégia que faça uma associação entre o que foi pedido no enunciado, os dados estabelecidos pelo mesmo e os conhecimentos pré-adquiridos que ajudam na resolução do problema abordado. É claro que perguntas feitas outrora, acabem ajudando a estabelecer um plano satisfatório.

Na terceira etapa, cabe ao aluno executar o plano. É de suma importância que as etapas anteriores tenham tido sucesso, pois caso contrário, provavelmente o aluno terá problemas em sua execução.

Na quarta etapa, o aluno deve fazer a revisão de sua solução. Nessa fase é possível em alguns casos verificar se a solução está correta, como, por exemplo, ao resolver um problema oriundo de um equação, substituir os valores encontrados das variáveis e verificar se há identidades que o permitam ter uma certeza de que a solução está correta. É importante que o aluno verifique, de modo geral, se a solução está de acordo com o problema proposto.

Porém alguns autores defendem outro ponto de vista para resolução de problema e criticam os passos tomados por Polya para resolver um problema, pois são genéricos e não ajudam o aluno que não sabe o que fazer em um problema.

Segundo Schoenfeld (1992 apud VALE; PIMENTEL; BARBOSA, 2015, p. 42)

> As heurísticas de Polya são essencialmente descritivas, fornecendo apenas largas categorias de processos. A caraterização de Polya não fornecia a quantidade de pormenores que permitisse a pessoas não familiarizadas com as estratégias ser capaz de utilizá-las. Para ultrapassar esta dificuldade, este investigador preconiza: (a) desenvolver nos alunos um maior número de estratégias mais específicas, mais ligadas a determinadas categorias de problemas; (b) ensinar estratégias metacognitivas para que os alunos aprendam a aplicar no momento adequado as estratégias de resolução de problemas e os conhecimentos adquiridos; e (c) estudar modos de eliminar crenças contraproducentes dos alunos e fomentar crenças produtivas sobre a matemática, a resolução de problemas e as suas próprias competências pessoais (SCHOENFELD, 1992).

Em contrapartida, segundo D'ambrosio,

> A interpretação muito limitada do trabalho de Polya resultou em propostas curriculares que (nos anos 1960 a 1990) transmitiam aos alunos uma visão da resolução de problemas como um procedimento seguindo passos determinados. As propostas curriculares incluíam a resolução de problemas como um capítulo ou como atividades independentes. A proposta decompunha a resolução de problemas em quatro subatividades: compreender o problema, desenvolver um plano, implementar o plano, e avaliar a solução. Muita ênfase foi dada ao ensino desses quatro passos. Alunos resolviam problemas demonstrando cada passo. Ensinava-se também uma coleção de heurísticas ou estratégias de resolução. A análise mais profunda do trabalho de Polya nos mostra uma visão de resolução de problemas muito mais rica do que a que foi assumida nas

> propostas curriculares. Polya estudava o trabalho de investigação dos matemáticos e propunha um ensino que criasse oportunidades para que os alunos se comportassem como matemáticos, investigando problemas abertos e desafiantes para todos. Esse aspecto da proposta pedagógica de Polya se perdeu na tentativa de inseri-lo em livros texto (D'AMBROSIO, 2008, p. 1).

Acreditamos que o aluno necessite da prática em resolver problemas e o professor crie o espaço ideal para o desenvolvimento desse costume. Além disso, estar embasado somente em regras descritíveis que ensinam a forma correta de resolver problema não auxilia o aluno de forma integral. É necessário a ambientação correta para que o aluno aprenda matemática ao resolver problemas.

De acordo com Onuchic e Allevato (2004, p. 221), para a ambientação ideal é preciso separar a resolução de problemas em três etapas: antes, durante e depois:

- Antes: o professor deve garantir que os alunos estejam mentalmente prontos para receber a tarefa e assegurar-se de que todas as expectativas estejam claras.

- Durante: os alunos trabalham e o professor observa e avalia esse trabalho.

- Depois: o professor aceita a solução dos alunos sem avaliá-las e conduz a discussão enquanto os alunos justificam e avaliam seus resultados e métodos. Então, o professor formaliza os novos conceitos e novos conteúdos construídos.

1.3.3 Tipos de problemas:

Outro fator a ser levado em consideração é o tipo de problema que devemos abordar. Nesse caso, o papel do professor é fundamental, como veremos na próxima seção. Os problemas matemáticos podem ser divididos em quatro tipos (PEREIRA; RAMOS; CARNEIRO, 2001, p. 6):

1. Problemas de sondagem: para a introdução natural e intuitiva de um novo conceito.

2. Problemas de aprendizagem: para reforçar e familiarizar o aluno com um novo conceito.

3. Problemas de análise: para a descoberta de novos resultados derivados de conceitos já aprendidos e mais fáceis que os problemas de sondagem.

4. Problemas de revisão e aprofundamento: para revisar os tópicos já vistos e aprofundar alguns conceitos.

Dante (1988 apud SOARES; PINTO, 2001, p. 6), faz a classificação de problemas da seguinte forma:

1. Exercícios de reconhecimento.

2. Exercícios de algorítimos.

3. Problemas padrões: são necessários, porém não devem ser predominantes.

4. Problemas-processo ou heurísticos: este tipo de problema exige do aluno um tempo para pensar e arquitetar um plano de ação, uma estratégia que poderá levá-lo à solução e, por isso, tornam-se mais interessantes do que os problemas padrão. Eles aguçam a curiosidade do aluno e permitem que o mesmo desenvolva sua criatividade, a sua iniciativa e seu espírito explorador. E, principalmente, inicia o aluno ao desenvolvimento de estratégias e procedimentos para resolver situações-problema o que, em muitos casos é mais importante que a própria resposta correta das mesmas.

5. Problemas de aplicações ou situações-problema: usando conceitos técnicas e procedimentos matemáticos procura-se matematizar uma situação real, organizando os dados em tabela, traçando gráficos, tirando informações a partir dos dados e dos gráficos, fazendo operações, etc. Em geral exigem pesquisa e levantamento de dados, eles podem ser apresentados em forma de projetos e serem desenvolvidos usando conhecimentos e princípios de outras áreas que não a matemática.

6. Problemas de quebra-cabeça.

Lopes (1994 apud SOARES; PINTO, 2001, p. 6 - 7) critica a classificação feita por Dante, ele afirma ainda que

> Tais classificações pouco auxiliam os professores na compreensão e exploração das atividades de resolução de problemas e expressam uma visão reducionista no que se refere a objetivos didáticos e educacionais pretendidos pela Educação Matemática. Os professores, ao planejarem seu trabalho, selecionando atividades de resolução de problemas, devem estabelecer claramente os objetivos que pretendem atingir. Para se desenvolver uma boa atividade, o que menos importa é saber se um problema é de aplicação ou de quebra-cabeça. O principal é analisar o potencial do problema no desenvolvimento de capacidades cognitivas, procedimentos e atitudes e na construção de conceitos e aquisição de fatos da Matemática.

Mesmo com diferentes percepções, acreditamos que a principal preocupação na escolha do problema é permitir que o aluno desenvolva habilidades cognitivas trazendo experiências para resolver outros problemas. É importante que a compreensão seja o principal objetivo. É fundamental que o professor leve em consideração o público e a sua realidade. Achamos imprescindível que o professor escolha com cuidado o tipo de problema a ser abordado, corroborando com o desenvolvimentos dos alunos. Ainda de acordo com Lopes (1994 apud SOARES; PINTO, 2001, p. 7), os alunos devem ter contato com tipos variados de problemas, pois dessa forma eles criam habilidades em resolver situações problema. Feito isso, o aluno possui possibilidade de aplicar problemas matemáticos em problemas rotineiros.

De acordo com Onuchic,

> A Matemática precisa ser ensinada como Matemática e não como um acessório subordinado a seus campos de aplicação. Isso pede uma atenção continuada à sua natureza interna e a seus princípios organizados, assim como a seus usos e aplicações (ONUCHIC, 1999, p. 204-5).

De modo geral, verificamos que a aplicação de um problema deve ter um objetivo pré-estabelecido com foco em desenvolver o pensamento cognitivo do aluno, tornando a Matemática mais prazerosa e trazendo ao aluno um olhar apreciável por essa disciplina. Ao colocar o foco na resolução de problemas, o que se defende é uma proposta que poderia ser resumida nos seguintes princípios, presentes nos PCN (BRASIL, 1998, p. 32-3):

• o ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;

• o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;

• aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na história da Matemática;

• o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas. Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações;

• a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

O professor tem um trabalho diferenciado na aplicação e orientação em resolução de problemas. Segundo Pereira, Ramos e Carneiro (2001, p. 14), “Para uma dada pessoa, além de muito da sua capacidade de resolver problemas ser determinada geneticamente, a realização plena de seu potencial passa por uma orientação adequada e experiente”. A próxima seção é destinada a essa discussão.

1.4 O papel do professor na resolução de problema

Em geral, o papel de um professor é o de ensinar, educar no mais amplo sentido, transmitir seus conhecimentos e suas experiências. Na metodologia de resolução de problema, algumas dessas ações se transformam. O professor nesse momento passa a ser um gerenciador, ele não deve mais ter o papel apenas de transmissor de conhecimento e não deve ser protagonista nas ideias que levam à resolução de um determinado problema, cabendo ao aluno tomar suas decisões e ter suas próprias inspirações. Sendo assim, é necessário que o professor tome cuidado com suas intervenções, principalmente ao responder algumas perguntas feitas pelos alunos. De acordo com Allevatto et al. (2014, p. 44), “[...] vale ressaltar que para que uma atividade constitua, de fato, como um problema, o professor não pode prescrever aos estudantes os métodos e/ou regras específicas para que obtenham a solução”. Mudar o estilo de aula é necessário. Atualmente, aulas expositivas são predominantes. Essa metodologia não consiste em aulas expositivas, pois o professor acaba desfazendo as etapas essenciais para a resolução de problemas, como a compreensão, a elaboração de um plano, a execução e o retrospecto. Mostrar aos alunos o caminho que os levam a solução de um problema não é a melhor opção. Fazendo isso, o aluno perde a criatividade e se transforma em um mero espectador em sala de aula. O professor deve estimular a criação de habilidade para a resolução dos problemas de forma atrativa, escolhendo problemas ligados à atualidade e à tecnologia, por exemplo. Na resolução dos problemas, é comum que surjam dúvidas em alguns momentos, mas o professor deve usar seu papel de mediador para não dar a resposta ou indicar algum caminho específico que o aluno deva tomar. As ações tomadas pelo professor não são simples e, consequentemente, não é possível denotar uma regra a ser seguida pelo docente, mas o mesmo deve ter bom senso para orientar, sem deixar claro para o aluno o atalho para o triunfo. Ou seja, o professor deixa o seu status de comunicador de conhecimento para um de observador, organizador, consultor, mediador, controlador e incentivador da aprendizagem.

Segundo Polya (2006, p. 1), “O professor não deve ajudar com exagero, mas de uma forma que caiba ao aluno parte razoável do trabalho.”É notório que o professor e o aluno possuem papéis fundamentais nessa etapa de resolução. Embora não seja nossa intensão discutir o papel do aluno[6]. O professor deve incentivar seu aluno a se organizar, separando as condicionantes do problema, a fazer indagações a si mesmo, e como já citamos, não responder diretamente as perguntas feitas e sim, propiciar o pensamento crítico que geram ideias, sejam elas boas ou ruins, pois assim o aluno acaba criando lastro para outras percepções no problema e, desse modo, torna-se mais independente para novas situações. É interessante que hajam discussões sobre as soluções dos problemas e dos erros cometidos. Em alguns casos, os erros podem ensinar mais que os acertos.

Ainda de acordo com Polya,

> O professor que deseja desenvolver nos alunos o espírito solucionador e a capacidade de resolver problemas deve incutir em suas mentes algum interesse por problemas e proporcionar-lhes muitas oportunidades de imitar e de praticar. Além disso, quando o professor resolve um problema em aula, deve dramatizar um pouco as suas ideias e fazer a si próprio as mesmas indagações que utiliza para ajudar os alunos. Por meio desta orientação, o estudante acabará por descobrir o uso correto das indagações e sugestões e, ao fazê-lo, adquirirá algo mais importante do que o simples conhecimento de um fato matemático qualquer (POLYA, 2006, p. 4).

Além disso, o professor tem papel decisivo na escolha dos problemas, como citamos na seção anterior. Eles devem ser claros, evitando problemas longos com enunciados obscuros e os mesmos devem estar de acordo com o nível do discente. Segundo os PCN (BRASIL, 1997, p. 33), "O que é problema para um aluno pode não ser para outro, em função do seu nível de desenvolvimento intelectual e dos conhecimentos de que dispõe."De acordo com esse pensamento, o professor deve tomar cuidado com suas escolhas, tomando como principal objetivo elaborar um bom plano de acordo com seu público.

Um bom problema não deve se restringir a envolver ações cotidianas, o professor deve escolher situações que os possibilitem alcançar objetivos desejáveis e pré-estabelecidos. Assim, ele deve escolher o tipo de problema de acordo com cada situação. De acordo com Souza (2005, p. 3), os alunos ao resolverem problemas podem despertar suas curiosidade e interesse pelos conhecimentos matemáticos desenvolvendo a capacidade de solucionar situações que lhes são propostas. O professor deve propor situações que envolvam construções de ideias, incentivando o aluno a aprender Matemática, além de ser um "administrador"no momento de auxiliar na resolução do problema proposto. Outra tarefa do professor, é de diversificar as aplicações, abordagem e os recursos utilizados. A resolução de problema é um recurso indispensável, mas deve ser utilizado junto a outros, como, por exemplo, a História da Matemática.

No próximo capítulo apresentamos um breve histórico do tema matrizes, escolhido como tópico para o desenvolvimento e aplicação da metodologia de resolução de problemas.

[6] Veja o artigo de Pereira, Ramos e Carneiro (2001) para verificar quais categorias de conhecimento ou habilidades o indivíduo necessita para resolver um problema.

2 UM BREVE HISTÓRICO SOBRE MATRIZES

2.1 A importância do recurso histórico no ensino da matemática

A História da Matemática tem papel importante no desenvolvimento dos alunos. Segundo os PCN (BRASIL, 1998, p. 34), "[...] pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas, especialmente para dar respostas a alguns 'porquês' e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento." Além disso, recorrer à História da Matemática, pode torná-la apaixonante, pelo fato do leitor entrar em contato com obras realizadas por gênios como Euclides, Ptolomeu, Newton, Galileu, entre outros, além de criar lastro para entender alguns problemas e a origem de alguns resultados. Tal recurso pode ajudar a solidificar a humanização da Matemática que se vê muitas vezes apartada das outras disciplinas, como cita Dambros,

> No entanto, a matemática aparece, nos currículos escolares, dissociada de outras áreas e de suas características humanas. É difícil enxergá-la como um produto humano, pois, da forma como é mostrada, não deixa emergir o processo de seu desenvolvimento. Professores e alunos vêem os conceitos apenas em seus aspectos técnicos. A beleza da matemática, tão propagada por muitos matemáticos, não é sentida pela grande maioria dos alunos e professores, cujo "temor" os impede de ver beleza em algo que causa tanta aversão. Outros, para os quais essa aversão não existe, até conseguem ver beleza na matemática, porém, uma beleza imponente, por parecer inquestionável e desprovida do seu caráter humano (DAMBROS, 2006, p. 36-37).

É importante que a História da Matemática seja usada de forma correta, e nesse sentido, o papel do professor é crucial. O mesmo não deve tornar seu uso vazio, mostrando aos alunos somente o nome de alguns matemáticos importantes, mas deve se ater a utilizar essa ferramenta de forma adequada, mostrando a importância de uma determinada descoberta para a época e seus impactos nos dias atuais, como as dificuldades encontradas, ferramentas e linguagens utilizadas na construção daquele conhecimento.

De acordo com D'ambrosio,

> A História da Matemática é um elemento fundamental para se perceber como teoria e práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas num contexto específico de sua época [...]. Conhecer, historicamente, pontos altos da Matemática de ontem poderá, na melhor das hipóteses, e de fato faz isso, orientar no aprendizado e no desenvolvimento da Matemática de hoje (D'AMBROSIO, 2009, p. 34).

A fusão da resolução de problema e a utilização da História da Matemática serve de grande ferramenta para evidenciar grandes resultados matemáticos. É possível com isso, ressaltar a importância da resolução de problemas, já que a história mostra que importantes resultados foram oriundos de problemas que, em muitos casos, ficaram sem solução por décadas, séculos, ou mesmo milênios. É inegável que a Matemática originalmente surgiu como parte da vida diária da sociedade. Contudo, não há possibilidade de se tratar problemas com grande complexidade em sala de aula, mas é importante citá-los, pois esse tipo de apresentação pode aguçar a curiosidade dos estudantes, estimulando o seu aprendizado. Os Primeiros problemas matemáticos parecem ter surgido no Egito, em um período em que a Matemática primitiva precisava de um embasamento prático para se desenvolver. A maioria dos problemas deste período é do tipo aritmético, enquanto que há outros que podemos designar como algébricos (BOYER, 1996). Com esse incentivo, os alunos poderão apresentar maior interesse pela Matemática, além de, através desse recurso, terem contato com grandes feitos e resultados gerados por verdadeiros gênios.

2.2 História das matrizes

Acredita-se que as primeiras noções de matrizes apareceram por volta de 1200 a.C. na China. Os chineses eram fascinados por diagramas, como afirma Boyer,

> Os Chineses gostavam especialmente de diagramas; não é surpreendente que o primeiro registro de um quadrado mágico tenha aparecido lá. O quadrado mágico foi supostamente trazido para homens numa tartaruga do Rio Lo nos dias do lendário Imperador Yii, considerado um engenheiro hidráulico (BOYER, 1996).

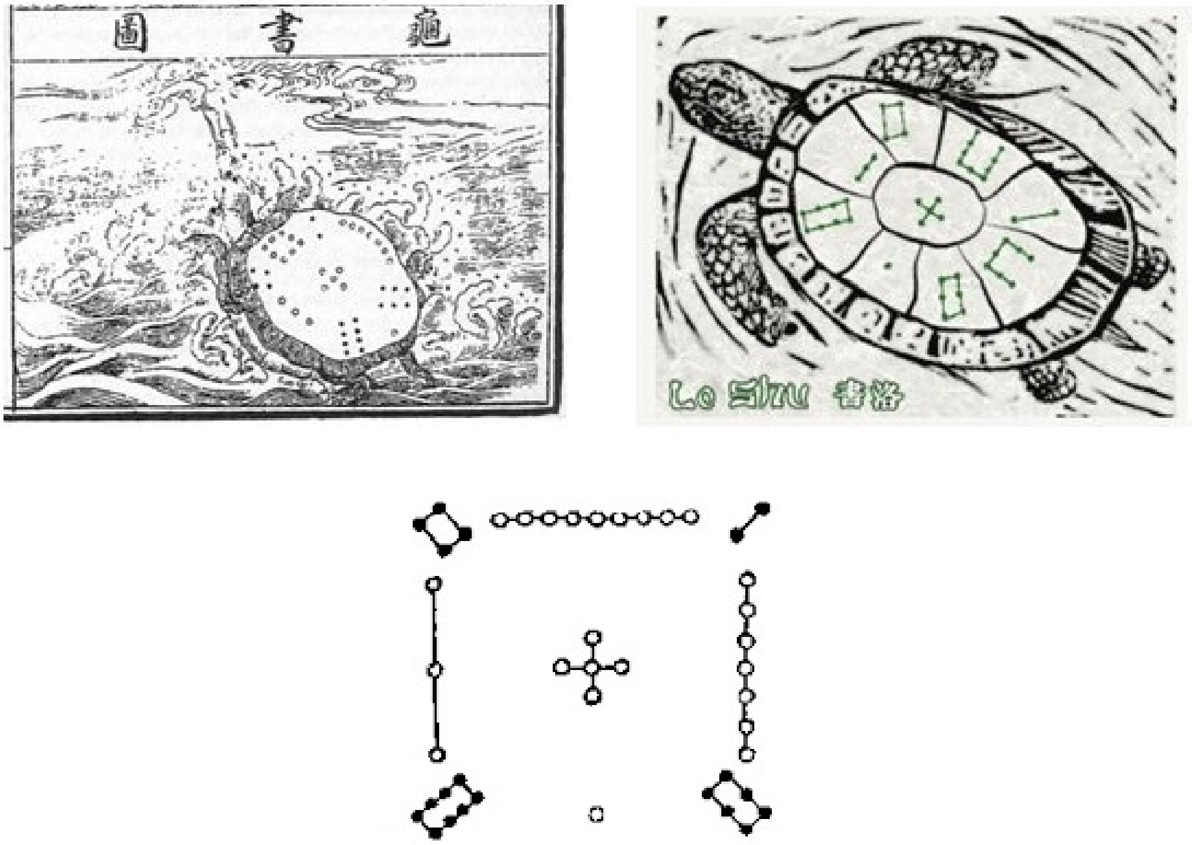
Um dos livros clássicos mais importantes da literatura matemática chinesa é o *Ì-Ching* ou Livro das permutações. Nesse livro, há um diagrama numérico denominado *lo-shu* e trata-se do relato mais antigo sobre quadrado Mágico[7]. Como já citamos, há uma lenda que o primeiro a vê-lo foi o imperador Yii às margens do rio amarelo, decorando a carapaça de uma tartaruga. O *lo-shu* apresenta um arranjo no formato de um quadrado, onde os números impares são representados pelas bolinhas brancas e os pares pelas bolinhas pretas (figura 1).

Este quadrado mágico é apresentado de outra forma atualmente, como podemos observar na figura 2. Quadrados similares a este são usados atualmente com muita frequência em jogos de raciocínio lógico, como o popular *sudoku*[8]

[7] Um quadrado mágico de ordem n é um arranjo quadrado de n^2 inteiros distintos dispostos de maneira tal que os números de uma linha qualquer, de uma coluna qualquer ou da diagonal principal têm mesma soma, chamada *constante mágica* do quadrado. O quadrado mágico se diz *normal* se os n^2 números que o formam são os n^2 primeiros números inteiros positivos (EVES, 2002, p. 269).

[8] Para maiores detalhes acesse: https://www.youtube.com/watch?v=9FhHk0OFBuc.

Figura 1 - Quadrado mágico Lo-shu como representado no “Livro das permutações”.



Fonte: http://www.mortesubitainc.org, 2018.

Figura 2 - Representação moderna do quadrado mágico chinês.

Fonte: http://www.ebah.com.br, 2018.

Esse fascínio por diagramas, levou o autor de um dos mais influentes livros Chineses da história *Nove capítulos sobre a Arte da Matemática*[9] a explorar o sistema de equações lineares simultânea a partir do problema 1, capítulo III que tem o seguinte enunciado.

> Três feixes de uma colheita de boa qualidade, dois feixes de uma colheita de qualidade regular e um feixe de uma colheita de má qualidade são vendidos por 39 dou. Dois feixes de boa, três de regular e um de má são vendidos por 34 dou. Um feixe de boa, dois de regular e três de má são vendidos por 26 dou. Qual o preço dos feixes para cada uma das qualidades?

Em uma notação moderna o problema pode ser escrito como um sistema de três equações e três incógnitas como:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases} . \tag{1}$$

Atualmente, podemos resolver esse problema através da teoria de escalonamento. Outrora, esse problema não era associado à teoria de matrizes, nomenclatura que surgiu por volta de 1850, como veremos a seguir. A teoria de matrizes surgiu do estudos de cônicas e de sistemas lineares, o que leva a crer que as primeiras noções de matrizes surgiram como consequência desse problema.

2.2.1 O surgimento da nomenclatura Matriz - século XIX

Os primeiros relatos sobre matrizes datam do séculos XIX, segundo Baumgart (2014, p. 53). As definições de matriz surgiram a partir da necessidade de uma escrita mais simples e organizada de trabalhos que eram embasados em determinantes. Acredita-se que o matemático japonês Seki Kowa (1683) já tinha a ideia de determinante. Ele sistematizou um método Chinês de resolução de equação linear que consistia em um arranjo de barras de bambu colocadas em quadrados sobre uma tábua. Tal arranjo era semelhante ao que usamos em determinantes. Embora a ideia de determinante já tivesse aparecido com Seki Kowa, o mérito da criação dessa criação é dado a Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) que sistematizou formalmente os determinantes. De acordo com

[9] Talvez o livro mais influente da Matemática Chinesa, contém 246 problemas sobre a mensuração de terras, agrícola, sociedades, engenharia, impostos, cálculo, solução de equações, volumes, procedimentos matriciais e propriedades dos triângulos retângulos.

Baumgart (2014, p. 52), “Numa carta ao marquês de L'Hospital, Leibniz fez uma discussão de um sistema de três equações lineares de duas incógnitas.”

$$\begin{cases} a_{10} + a_{11}x + a_{12}y = 0 \\ a_{20} + a_{21}x + a_{22}y = 0 \\ a_{30} + a_{31}x + a_{32}y = 0 \end{cases}, \tag{2}$$

fazendo as combinações necessárias para cancelar y, temos:

$$\begin{cases} (a_{10}a_{22} - a_{12}a_{20}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = 0 \\ (a_{10}a_{32} - a_{12}a_{30}) + (a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})x = 0 \end{cases}. \tag{3}$$

Fazendo as combinações necessárias para cancelar x, temos:

$$a_{10}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{30} + a_{12}a_{20}a_{31} = a_{10}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{20}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{30}, \tag{4}$$

ou,

$$(a_{10}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{30} + a_{12}a_{20}a_{31}) - (a_{10}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{20}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{30}) = 0, \tag{5}$$

que pode ser colocada na forma.

$$\begin{vmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Observamos no sistema acima a condição para que três retas, representadas por (2) tenham um ponto em comum. Segundo Baumgart (2014, p. 53), “A notação de barras verticais - hoje padronizada - usada em (6) foi introduzida por Cayley.”

Muitos outros matemáticos deram sua contribuição no desenvolvimento da teoria dos determinantes, entre eles, Gabriel Cramer (os inventou de forma independente), Théophile Vandermonde, Pierre Simon Laplace, Josef Maria Wronski e Augustin Louis Cauchy (atribuiu o nome determinante ao conceito). O desenvolvimento de determinantes contribuiu no surgimento do conceito de Matrizes que surgiu em meados do século XIX com a ajuda, principalmente, dos matemáticos Willian Rowan Hamilton, James Joseph Sylvester e Arthur Cayley como mencionamos nas seções a seguir.

2.2.1.1 Willian Rowan Hamilton (1805 - 1865)

Hamilton (figura 3) foi um dos maiores matemáticos Irlandeses da história, nascido em 1805 foi uma criança prodígio e aos treze anos de idade dominava algumas línguas estrangeiras. Ficou órfão cedo e foi criado por um tio. Hamilton apresentou desde cedo uma forte habilidade para escrever poesia. Somente aos quinze anos de idade Hamilton se interessou por Matemática e depois de ler *Arithmetica Universalis* de Newton passou a dominar o Cálculo e a Geometria Analítica. Após achar um erro em um artigo de Laplace, *Mécanique Céleste* de 1823, ele ficou conhecido e recebeu uma atenção considerável da comunidade matemática. Em 1824 Hamilton entrou na Universidade Trinity College, em Dublin, e lá obteve uma passagem vitoriosa. Em 1833 publicou um artigo sobre números complexos e recebeu o título de "Sir".

Figura 3 - W. R. Hamilton

Fonte: Introdução à história da matemática (Eves), 2018.

A contribuição crucial de Hamilton para o surgimento e o desenvolvimento da teoria de matrizes, está relacionada aos seus estudos referentes aos ternos e quádruplos de números reais. Hamilton se deparava com dificuldades na álgebra que não permitia uma quebra da lei da comutatividade, até que a álgebra dos quatérnios surgiu. Os trabalhos desenvolvidos por Hamilton sobre a teoria dos números complexos foi de fundamental importância para o desenvolvimento dos *quatérnios*[10], principalmente com a intenção de facilitar a notação na abordagem operatória, como mostrado abaixo:

Da multiplicação dos números complexos $z = a+bi$ e $w = c+di$, com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$, sabemos que:

$$z \times w = (a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i. \tag{7}$$

Hamilton utilizava outra notação para os números complexos, tratava o número complexo $z = a + bi$, como o par ordenado de números reais (a, b), como consequência, Hamilton definiu a multiplicação de números complexos da seguinte forma:

$$z \times w = (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc). \tag{8}$$

Com essa notação, Hamilton verificou que os números complexos eram extremamente convenientes para estudar os vetores e as rotações no plano. Com esse vislumbre, ele utilizou a notação dos números complexos juntamente com suas motivações e aplicações em Física e introduziu a teoria dos *quatérnios*. Nessa teoria, a multiplicação é definida da seguinte forma:

$$(a, b, c, d).(e, f, g, h) = (ae-bf-cg-dh, af+be+ch-dg, ag+ce+df-bh, ah+bg+de-cf). \tag{9}$$

Através dessa definição, podemos notar que a operação não é comutativa. Como exemplo, tomamos os *quatérnios* A = (0, 1, 0, 0) e B = (0, 0, 0, 1).

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = (0, 1, 0, 0)(0, 0, 0, 1) = (0, 0, -1, 0), \tag{10}$$

$$\mathrm{B} \times \mathrm{A} = (0, 0, 0, 1)(0, 1, 0, 0) = (0, 0, 1, 0).$$

$$\Longrightarrow \mathrm{A} \times \mathrm{B} \neq \mathrm{B} \times \mathrm{A}. \tag{11}$$

[10] Quádruplo ordenados de números reais (a, b, c, d).

Essa fora a primeira aparição de uma álgebra não comutativa. Segundo Eves (2002, p. 551), “Hamilton contava a história de que a ideia de abandonar a lei comutativa da multiplicação ocorreu-lhe num átimo, após quinze anos de cogitações infrutíferas, enquanto caminhava com a esposa ao longo do Royal canal perto de Dublin.”Esse resultado traria uma nova concepção a álgebra. Ainda de acordo com Eves (2002, p. 551), “Essa ideia tão pouco ortodoxa impressionou-o tanto que pegou seu canivete e com ele gravou a parte fundamental da tábua de multiplicação dos quatérnios numa das pedras da ponte Broughm.”Hoje há uma placa na ponte que nos conta essa história (figura 4).

Figura 4 - Placa alusiva ao surgimento da álgebra não comutativa

Fonte: http://vigo.ime.unicamp.br, 2018.

Apesar de Hamilton não ter escrito nenhum trabalho diretamente sobre a teoria de matrizes, ele já usava implicitamente alguns de seus conceitos. Seu trabalho com os *quatérnios* foram de grande valia para Cayley, matemático que recebeu os méritos pela “invenção”da teoria de matrizes. Segundo Baumgart (2014, p. 53), “Ainda que a ideia de matrizes estivesse implícita nos *quatérnios* de Hamilton [...], o mérito da invenção é geralmente conferido a Cayley, com data de 1857, embora Hamilton tenha obtido um ou dois resultados isolados em 1852.”

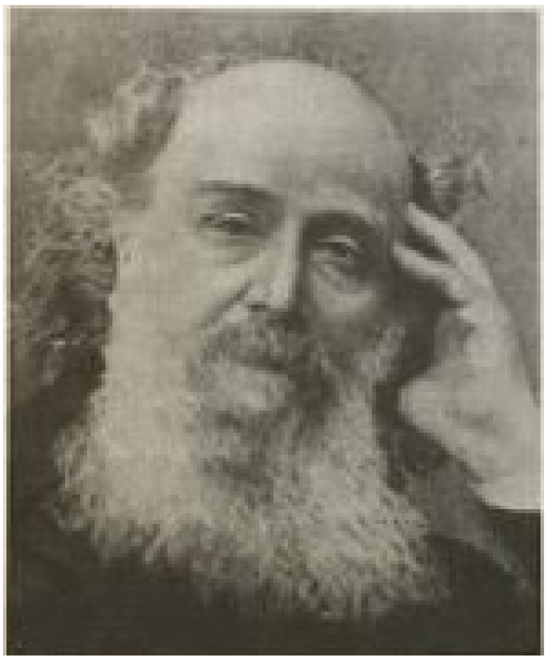
Infelizmente, em virtude do alcoolismo, Hamilton, após publicar seu grande trabalho, *Treatise on Quaternions* (1853), faleceu em 1865 sem conseguir completar seu texto *Elements of Quaternions.* Contudo, seus trabalhos serviram para outros matemáticos e, em particular, os quatérnions ganharam defensores incondicionais.

2.2.1.2 James Joseph Sylvester (1814 - 1897)

A denominação matriz surgiu depois das definições determinante, transformações lineares e formas quadráticas. Ela foi introduzida pelo matemático britânico James Joseph Sylvester em uma publicação ao tratar de problemas de natureza geométrica no *Philosophical Magazine* em 1850.

Sylvester (figura 5) nasceu em Londres. Atuou como professor de filosofia e matemática em universidades na Inglaterra e nos Estados Unidos por dois períodos de sua vida acadêmica. Entre 1855 e 1870 foi professor de matemática da Real Acadêmia Militar de Woolwich e em 1883, ocupou a cadeira de posição de Savilian Professor de Geometria em Oxford. Foi um matemático bastante ativo. Ao longo de sua vida esteve ligado a várias academias de ciências - nos Estados Unidos, Göttingen, Naples, Boston, St Petersburg, Berlim, para citar algumas. Foi o primeiro editor do American Journal of Mathematical e um grande contribuidor deste periódico. Ele também era apaixonado por poesia e música. Em uma nota de rodapé de um de seus artigos, *On Newton rule for the discovery of imaginary roots*, ele exclamou: "Não pode a música ser descrita como a matemática dos sentidos e a matemática como a música da razão? O espírito é o mesmo! Assim, o músico sente a matemática e o matemático pensa a música"(EVES, 2002, p. 562).

Figura 5 - J. J. Sylvester (1814 - 1897)



Fonte: Introdução à história da matemática (Eves), 2018.

Um ponto singular nos estudos de Sylvester foi a utilização de determinantes. Sylvester enunciou, através de artigos, em 1850 e 1851, características que o auxiliaria no futuro no estudo de quádricas. A generalização da técnica de extração de sistemas de determinantes foi baseada em uma representação em forma de tabela retangular à qual Sylvester denominou matriz. O principal elemento gerador de pesquisa para Sylvester, e que culminou com a ideia de matrizes, está relacionada com os tipos de contatos entre duas cônicas[11].

A ideia de Matrizes foi concebida apenas para auxiliar nos cálculos de determinantes e gerar respostas para identificar a quantidade de interseções entre duas cônicas, ou seja, a ideia principal de seu trabalho não está inteiramente ligada a matrizes, ele apenas utiliza esse arranjo como ferramenta facilitadora. Podemos dizer que a necessidade da existência de matrizes, assim como sua origem, está atrelada a um problema, nesse caso, ao problema da classificação dos tipos de contatos entre duas cônicas.

Na figura 6 são apresentadas os 4 tipos de contatos existentes entre duas cônicas.

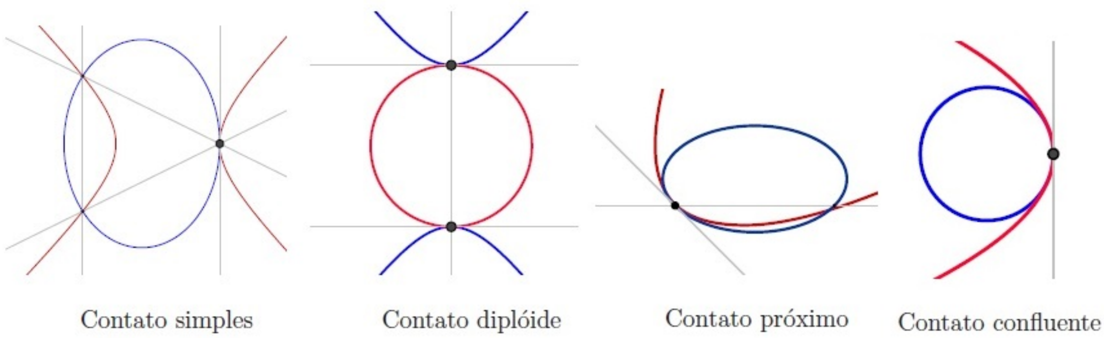
✓Contato simples: um ponto de interseção duplo;

✓Contato diplóide: dois pontos de interseção duplos;

✓Contato próximo: um ponto de interseção triplo;

✓Contato confluente: um ponto de interseção quádruplo.

Figura 6 - Contato entre duas cônicas



Fonte: História e ensino de matrizes: promovendo reflexões sobre o discurso matemático - Tese de doutorado (Aline Caetano da Silva Bernardes), 2018.

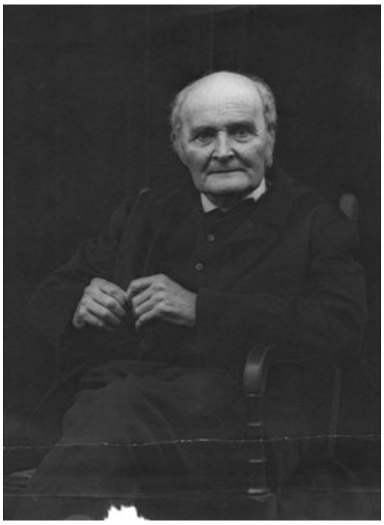
[11] Existem quatro tipos de contatos entre duas cônicas que podem ser caracterizados pela multiplicidade (2, 3 ou 4) do(s) ponto(s) de interseção no(s) qual(is) as cônicas se tangenciam.

2.2.1.3 Arthur Cayley (1821 - 1895)

Logo após os trabalhos iniciados por Sylvester sobre matrizes, Cayley (figura 7), matemático britânico, deu continuidade ao assunto e em 1858 publicou uma memória com definições e propriedades de matrizes, bem como suas demonstrações.

Cayley, nasceu em Richmond, Londres. Apesar de mostrar habilidade para matemática desde cedo, dividiu as suas atividades profissionais entre a lei e a Matemática durante cerca de 15 anos, até que foi eleito para a posição de Sadlerian Professor da Universidade de Cambridge em 1863, cadeira que ele manteve pelo resto de sua vida.

Figura 7 - A. Cayley



Fonte: http://trinitycollegechapel.com, 2018.

Com o seu estudo sobre a generalização de determinantes menores para determinantes de qualquer ordem surgiu o problema de enumeração desses sistemas. Assim, Cayley estruturou a ideia de matrizes de forma a melhor organizar os sistemas lineares e as formas quadráticas. Essa primeira noção de matrizes foi utilizada no artigo *Remarques Sur La notation des function algébriques* (CAYLEY, 1855).

Em 1858, Cayley, publicou uma memória sobre matrizes: *A Memoir on the Theory of Matrices no Philosophical Transactions*, nessa Cayley descreve sobre a definição de uma matriz e suas propriedades. Nessa memória, Cayley definiu matrizes como *"um conjunto organizado em forma de quadrado"*. As definições e operações de matrizes foram feitas a partir de sistemas lineares. A figura 8 nos mostra um exemplo de como Cayley escrevia um sistema linear na época. Inicialmente esse formato surgira para simplificar a escrita, forma esta é similar como a que utilizamos atualmente para escrever um sistema linear.

Figura 8 - Sistema linear segundo Cayley

$$\begin{aligned} \mathrm{X} &= ax + by + cz, \\ \mathrm{Y} &= a'x + b'y + c'z, \\ \mathrm{Z} &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned} \qquad (\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = \left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)(x, y, z),$$

Fonte: A Memoir on the Theory of Matrices no Philosophical Transactions (p. 17), 1958.

Nesse texto, Cayley descreve uma série de propriedades e operações entre as matrizes, como a multiplicação entre as mesmas (existência de uma álgebra não comutativa), a multiplicação de um escalar por uma matriz, o cálculo de uma matriz inversa, soma de matrizes, além de citar algumas matrizes especiais, como visto nas figura 9 e figura 10.

Figura 9 - Matriz nula e matriz identidade segundo Cayley

$$\left(\begin{array}{ccc} 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{array}\right)$$

Fonte: A Memoir on the Theory of Matrices no Philosophical Transactions (p. 18), 1958.

Como dissemos, Caley introduziu uma álgebra não comutativa através da multiplicação de matrizes (Figura 11). É importante citar que Cayley utilizou resultados obtidos pelo matemático William Hamilton que desenvolveu a teoria dos quatérnions, onde já havia, implicitamente, a ideia de matrizes. Segundo Baumgart (2014, p. 53), “Hamilton mostrou que é possível haver um sistema lógico em que a multiplicação não seja comutativa. Esse resultado indubitavelmente foi de grande valia para Caley.”

Na propriedade 11, em *A Memoir on the Theory of Matrices no Philosophical Transactions*, Cayley cita, explicitamente, a não comutatividade das matrizes. Podemos associar os estudos de Cayley com tranformações lineares do tipo:

Figura 10 - Soma de matrizes segundo Cayley

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \left(\begin{array}{ccc} a\ , & b\ , & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)(x, y, z), \quad (\mathbf{X}', \mathbf{Y}', \mathbf{Z}') = \left(\begin{array}{ccc} \alpha\ , & \beta\ , & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array}\right)(x, y, z)$$

give

$$(\mathbf{X}+\mathbf{X}', \mathbf{Y}+\mathbf{Y}', \mathbf{Z}+\mathbf{Z}') = \left(\begin{array}{ccc} a+\alpha\ , & b+\beta\ , & c+\gamma \\ a'+\alpha', & b'+\beta', & c'+\gamma' \\ a''+\alpha'', & b''+\beta'', & c''+\gamma'' \end{array}\right)(x, y, z)$$

and this leads to

$$\left(\begin{array}{ccc} a+\alpha\ , & b+\beta\ , & c+\gamma \\ a'+\alpha', & b'+\beta', & c'+\gamma' \\ a''+\alpha'', & b''+\beta'', & c''+\gamma'' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} a\ , & b\ , & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right) + \left(\begin{array}{ccc} \alpha\ , & \beta\ , & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array}\right)$$

Fonte: A Memoir on the Theory of Matrices no Philosophical Transactions (p. 19), 1958.

Figura 11 - Multiplicação de matrizes segundo Cayley

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \left(\begin{array}{ccc} a\ , & b\ , & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)(x, y, z), \quad (x, y, z) = \left(\begin{array}{ccc} \alpha\ , & \beta\ , & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array}\right)(\xi, \eta, \zeta),$$

give

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \left(\begin{array}{ccc} \mathrm{A}\ , & \mathrm{B}\ , & \mathrm{C} \\ \mathrm{A}', & \mathrm{B}', & \mathrm{C}' \\ \mathrm{A}'', & \mathrm{B}'', & \mathrm{C}'' \end{array}\right)(\xi, \eta, \zeta) = \left(\begin{array}{ccc} a\ , & b\ , & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} \alpha\ , & \beta\ , & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array}\right)(\xi, \eta, \zeta),$$

and thence, substituting for the matrix

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathrm{A}\ , & \mathrm{B}\ , & \mathrm{C} \\ \mathrm{A}', & \mathrm{B}', & \mathrm{C}' \\ \mathrm{A}'', & \mathrm{B}'', & \mathrm{C}'' \end{array}\right)$$

its value, we obtain

$$\left(\begin{array}{ccc} (a\ , b\ , c\ )(\alpha, \alpha', \alpha''), & (a\ , b\ , c\ )(\beta, \beta', \beta''), & (a\ , b\ , c\ )(\gamma, \gamma', \gamma'') \\ (a', b', c')(\alpha, \alpha', \alpha''), & (a', b', c')(\beta, \beta', \beta''), & (a', b', c')(\gamma, \gamma', \gamma'') \\ (a'', b'', c'')(\alpha, \alpha', \alpha''), & (a'', b'', c'')(\beta, \beta', \beta''), & (a'', b'', c'')(\gamma, \gamma', \gamma'') \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} a\ , & b\ , & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} \alpha\ , & \beta\ , & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array}\right)$$

Fonte: A Memoir on the Theory of Matrices no Philosophical Transactions (p. 20), 1958.

$$\mathrm{T}_1 = \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} , \tag{12}$$

$$\mathrm{T}_2 = \begin{cases} x" = ex' + fy' \\ y" = gx' + hy' \end{cases} , \tag{13}$$

onde o ponto (x, y) é levado ao ponto (x', y'), pela transformação T_1 e em seguida, transformamos, com T_2 o ponto (x', y') no ponto $(x", y")$. Os coeficientes *a, b, c, d, e, f, g, h* $\in \mathbb{R}$.

De (12) e (13), podemos verificar que tais transformações consecutivas são equivalentes a transformação composta $\mathrm{T}_2\mathrm{T}_1$:

$$\mathrm{T}_2\mathrm{T}_1 = \begin{cases} x" = (ae + cf)x + (be + df)y \\ y" = (ag + ch)x + (bg + dh)y \end{cases} . \tag{14}$$

Se repararmos, essa composição de transformações está associada a seguinte multiplicação de matrizes:

$$\begin{bmatrix} x" \\ y" \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Se fizermos a composição $\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2$, teremos:

$$\mathrm{T}_2 = \begin{cases} x' = ex + fy \\ y' = gx + hy \end{cases} , \tag{16}$$

$$\mathrm{T}_1 = \begin{cases} x" = ax' + by' \\ y" = cx' + dy' \end{cases} , \tag{17}$$

ou

$$\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2 = \begin{cases} x" = (ae + bg)x + (af + bh)y \\ y" = (ce + dg)x + (cf + dh)y \end{cases} . \tag{18}$$

Note que, nesse caso, a multiplicação de matrizes associada a composição da transformação é dada por:

$$\begin{bmatrix} x" \\ y" \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Notamos que $T_1T_2 \neq T_2T_1$, o que demonstra que a multiplicação entre matrizes não é comutativa.

Além do auxílio da Teoria de Resolução de Problema e do recurso à História da Matemática, afim de tornar o ensino de matrizes mais produtivo, faremos no próximo capítulo algumas abordagens teóricas e algumas sugestões de problemas para aplicação em sala de aula.

3 A TEORIA DE MATRIZES A PARTIR DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nosso objetivo é introduzir o conceito de matrizes a partir da resolução de problemas. Em geral, esse conteúdo é abordado no ensino médio no segundo ou terceiro ano sendo utilizado nos vestibulares mais tradicionais do Brasil, inclusive no Enem (Exame Nacional do Ensino Médio), sendo comumente apresentado aos alunos a partir de suas definições e propriedades. No entanto, acreditamos que essa não seja a melhor forma, já que abordando a teoria de matrizes dessa forma, tornaremos essa temática vazia, fazendo com que os discentes não consigam compreender a verdadeira função que as matrizes podem exercer tanto na Matemática como em aplicações em outras áreas. Segundo os PCN (BRASIL, 2000, p. 40), "A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana [...]."

Concordamos com Sanches quando ele diz que

> A álgebra das matrizes tem importância significativa para várias ciências e encontra, cada vez mais, aplicações em diversos setores como a Economia, a Engenharia e Tecnologia, etc. Se não ocorrer uma aprendizagem significativa e relevante dos conceitos de matrizes, os estudantes poderão apresentar dificuldades, em níveis mais avançados, para compreender e aplicar outros conceitos relacionados, tais como conceitos de programação, computação gráfica, custos de produção, teoria dos grafos, circuitos elétricos, modelos econômicos lineares, entre centenas de outros (SANCHES, 2002, p. 18).

Partindo dessa premissa, abordaremos alguns problemas que servirão de auxílio aos professores na busca de uma abordagem mais didática desse conteúdo. Dessa forma, unimos os dois assuntos que fazem parte integrante dessa dissertação, o ensino de Matrizes e o ensino através da resolução de problemas.

3.1 Definição de matrizes

Usualmente, matriz é apresentada como um arranjo retangular de números reais com m linhas e n colunas:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{m\times n} \qquad , \tag{20}$$

onde cada a_{ij}, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, representa o elemento que está na linha i e coluna j, como pode ser visto na matriz A.

Em 1858, Cayley definiu matriz como um conjunto de números organizado em forma de quadrado. Atualmente, Crilly define matrizes de forma similar: "As matrizes representam uma *álgebra multidimensional*" (CRILLY, 2017, p. 158). Para ele, a utilidade de matriz é conseguir escrever os números em blocos.

Ainda de acordo com esse autor,

> Uma vantagem crítica da álgebra das matrizes é que podemos pensar em vastos agrupamentos de números, por exemplo um conjunto de dados em estatística, como uma única entidade. Mais do que isso, podemos manipular esses blocos de números simples e eficientemente. Se quisermos somar ou multiplicar todos os números em dois conjuntos de dados, cada um considerando em mil números, não temos de efetuar mil cálculos - temos de efetuar apenas um (somando ou multiplicando as matrizes) (CRILLY, 2017, p. 158).

Acreditamos que não se deve introduzir o conteúdo de matrizes dessa forma, a partir de definições, por conta de seu caráter abstrato. As definições e conceitos da teoria de matrizes, ao nosso ver, devem ser introduzidas aos alunos com algum sentido. Nesse início, é crucial mostrar que essa teoria tem algum propósito, como, por exemplo, a organização de dados ou a aplicação em alguma área. Apresentamos a seguir alguns exemplos que podem ilustrar bem o que foi abordado.

Organização de dados: A tabela 1 representa a produção, em milhares de unidades, dos produtos 1, 2, 3 e 4, que uma companhia produz em cada uma de suas três fábricas que ficam no interior do Brasil.

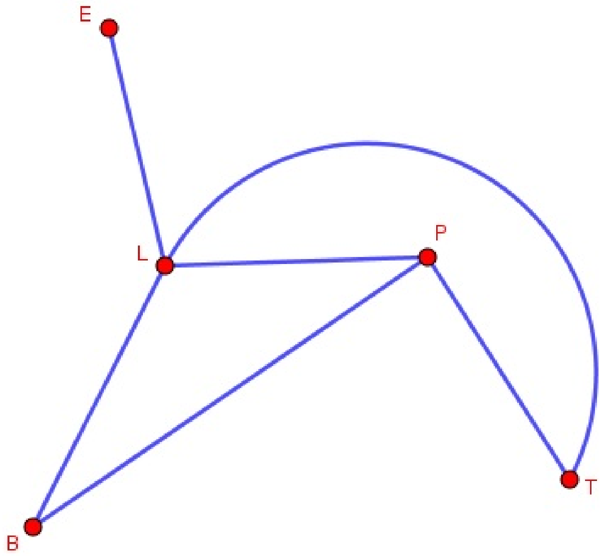
Tabela 1 - Organização de dados.

	Produto 1	Produto 2	Produto 3	Produto 4
Fábrica 1	7	5	0	1
Fábrica 2	0	4	3	7
Fábrica 3	3	2	0	2

Fonte: O autor, 2018.

Plano de voo: Um dos exemplos do uso de matrizes é a análise de uma rede de voos de companhias aéreas, envolvendo tanto aeroportos centrais quanto aeroportos secundários. Na realidade, esse problema envolve centenas de aeroportos. Tomaremos um pequeno exemplo envolvendo os aeroportos de Londres (L), Paris (P), Edimburgo(E), Bordeaux(B) e Toulouse (T). A rede apresentada na figura 12, mostra os possíveis vôos diretos que existem em várias cidades. Esta forma de apresentação é conhecida como grafo que é um importante ramo de Matemática e que não é o objetivo de estudo deste trabalho.

Figura 12 - Redes de viagem



Fonte: O autor, 2018.

Para analisar essa rede de vôos, os aeroportos utilizam computadores que fazem a leitura através de matrizes. Se há vôo direto da cidade i para cidade j, coloca-se 1, caso contrário, coloca-se 0:

$$\mathrm{A} = [a_{ij}] = \begin{cases} 1, \text{ se há vôo direto} \\ 0, \text{ se não há vôo direto} \end{cases} . \tag{21}$$

Tabela 2 - Existência de voos entre cidades.

	Londres	Paris	Edimburgo	Bordeaux	Toulouse
Londres	0	1	1	1	1
Paris	1	0	0	1	1
Edimburgo	1	0	0	0	0
Bordeaux	1	1	0	0	0
Toulouse	1	1	0	0	0

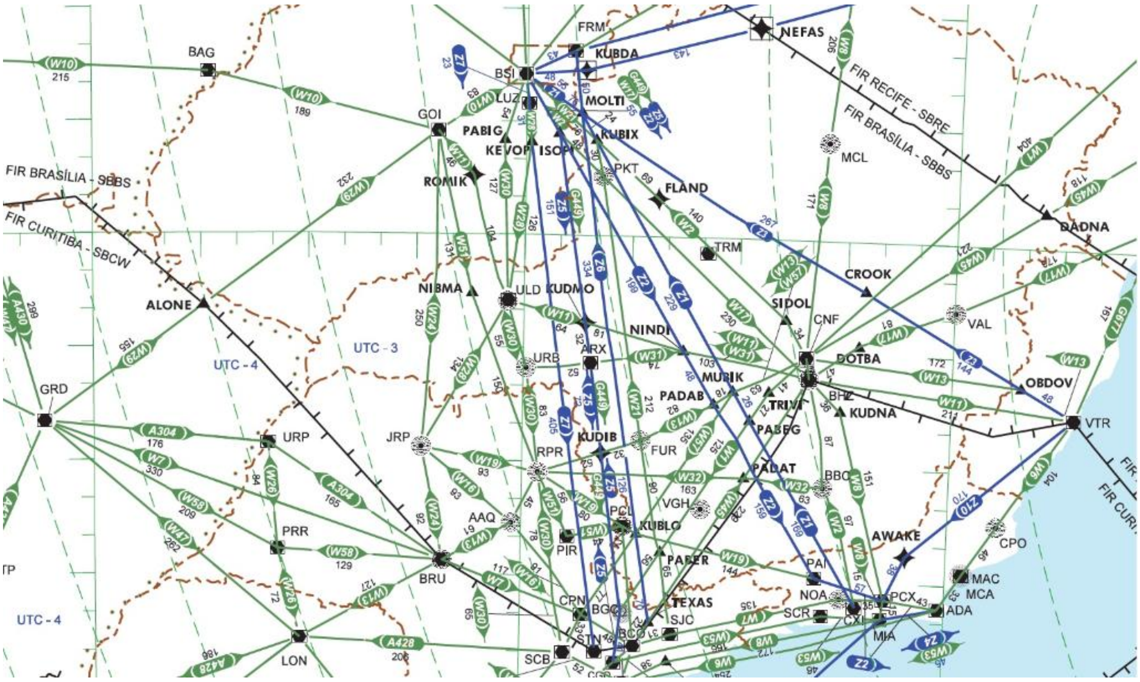
Fonte: O autor, 2018.

Em forma matricial, podemos representar a tabela 2 como:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \tag{22}$$

Inicialmente, parece que pela figura 12 fica mais fácil verificar quais são os pares de cidades que apresentam voos diretos, mas não podemos ignorar de que este é um exemplo reduzido em comparação com a realidade. As redes aéreas, em geral, são visualmente mais confusas como vemos no exemplo da figura 13. Essas redes serem analisadas fazendo uso de computadores que são programados para operar usando a álgebra matricial.

Figura 13 - Exemplo de rede aérea



Fonte: http://tarauacanoticias.blogspot.com.br, 2018.

Nos casos apresentados, podemos observar que a tabela serve como um elemento organizador. Em exemplos mais complexos, o uso de tabelas (matrizes) é essencial para a organização de dados e operação entre números, pois em alguns casos é mais vantajoso realizar operações entre as tabelas (matrizes) do que operações entre os números, como veremos, por exemplo, nas operações entre as matrizes. Algumas matrizes especiais surgem em vários problemas de forma curiosa. Para entendê-las, abordaremos alguns tipos especiais de matrizes antes de trabalharmos com as operações, sobre as mesmas.

3.2 Tipos de matrizes

▶ **Matriz quadrada:** É toda matriz que apresenta o número de linhas igual ao número de colunas.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 12 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 0 \end{bmatrix} \boxed{A = (a_{ij})_{m\times n}, \text{em que } m = n.} \tag{23}$$

Se A é uma matriz quadrada $n \times n$, podemos dizer que ela possui ordem n.

▶ **Matriz retangular:** É toda matriz em que o número de linhas é diferente do número de colunas.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & \pi \\ 12 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 0 & 12 \end{bmatrix} \boxed{A = (a_{ij})_{m\times n}, \text{em que } m \neq n.} \tag{24}$$

▶ **Matriz linha:** É toda matriz que possui apenas uma linha.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 3 & 56 \end{bmatrix} \boxed{A = (a_{ij})_{m\times n}, \text{em que } m = 1} \tag{25}$$

▶ **Matriz coluna:** É toda matriz que possui apenas uma coluna.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 17 \\ \pi \\ 13 \end{bmatrix} \boxed{A = (a_{ij})_{m\times n}, \text{em que } n = 1} \tag{26}$$

▶ **Matriz nula:** É toda matriz em que todo os elementos são iguais a zero.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boxed{A = (a_{ij})_{m\times n}, \text{em que } a_{ij} = 0, \forall\, a_{ij}} \tag{27}$$

▶ **Matriz triangular:** É toda matriz quadrada em que $a_{ij} = 0, \forall\, i > j$ (triangular inferior) ou $a_{ij} = 0, \forall\, i < j$ (triangular superior).

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{6} \end{bmatrix} \Longrightarrow \textbf{Triangular inferior} \tag{28}$$

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{4} & \boxed{23} \\ 0 & \boxed{3} & \boxed{-1} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{7} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{bmatrix} \Longrightarrow \textbf{Triangular superior} \tag{29}$$

▶ **Matriz diagonal:** É toda matriz quadrada em que $a_{ij} = 0, \forall\, i \neq j$.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{6} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \end{bmatrix} \tag{30}$$

Observação: Se a matriz é diagonal e todos os elementos da diagonal principal são iguais, a matriz é denominada **Matriz escalar.**

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{bmatrix} \Longrightarrow \textbf{Matriz escalar} \tag{31}$$

▶ **Matriz identidade:** É toda matriz quadrada de ordem n, indicada por I_n, tal que:

$$\mathrm{I}_n = (a_{ij})_{n\times n}, \text{tal que } a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \tag{32}$$

Exemplo:

$$\mathrm{I}_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \mathrm{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (...) \ \mathrm{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{33}$$

▶ **Matriz transposta:** Chama-se transposta da matriz $\mathrm{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, indicada por A^{T}, a matriz:

$$\boxed{\mathrm{B} = \mathrm{A}^T = (b_{ji})_{m \times n}, \text{onde } a_{ij} = b_{ji}, \forall\ 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n.} \tag{34}$$

Exemplo:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \sqrt[3]{4} & 3 & -7 & -2 & 1 \\ \pi & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & \sqrt{5} & 30 & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix} \therefore \ \mathrm{A}^T = \begin{bmatrix} \sqrt[3]{4} & \pi & 7 \\ 3 & 3 & \sqrt{5} \\ -7 & 0 & 30 \\ -2 & 0 & \frac{3}{4} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{35}$$

▶ **Matriz simétrica:** Uma matriz quadrada A, de ordem n, é dita simétrica se $\mathrm{A} = \mathrm{A}^T$.

Exemplo:

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & -3 \end{bmatrix} \boxed{a_{ij} = a_{ji}, \forall\ 1 \leq i \leq n \text{ e } 1 \leq j \leq n} \tag{36}$$

▶ **Matriz antissimétrica:** Uma matriz quadrada A, de ordem n, é dita antissimétrica se $\mathrm{A} = -\mathrm{A}^T$.

Exemplo:

$$\mathrm{A} = -\mathrm{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -7 \\ -3 & 7 & 0 \end{bmatrix} \boxed{\mathrm{A} = a_{ij} = -a_{ji}, \forall\ 1 \leq i \leq n \text{ e } 1 \leq j \leq n} \tag{37}$$

3.3 Problemas envolvendo operações entre matrizes

Com objetivo de dar maior sentido ao estudo de operações entre matrizes, tendo alunos do ensino médio como público alvo, faremos a abordagem das operações entre matrizes (soma e multiplicação) a partir de problemas. Acreditamos que abordando o assunto dessa forma, o aprendizado ocorre de forma mais significativa. De acordo com Polya,

> Se o professor desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar este objetivo (POLYA, 2006, p. 5).

3.3.1 Soma de matrizes

A abordagem feita nas operações entre matrizes, de forma geral, tem sido tradicional nas escolas. Esse tipo de abordagem, acaba valorizando mais as operações entre os números do que propriamente a operação entre as matrizes. Nos dias atuais, muitas ações requerem conhecimento matemático, mesmo sendo básico. De acordo com os princípios e critérios do guia de livros didáticos do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) *on line*[12], em uma sociedades como a nossa, permeadas por tecnologias de base científica e por um crescente acúmulo e troca das mais diversas informações, é consenso reconhecer que as competências matemáticas tornaram-se um imperativo[...]. Como já dissemos, a teoria de matrizes é imprescindível na computação, na resolução de sistemas lineares, entre outros. Na intenção de trazer um olhar mais interpretativo e investigativo, abordaremos alguns problemas envolvendo a soma de matrizes.

Problema 1: Uma pessoa possui 3 páginas em uma rede social e quer criar algumas métricas para medir o desempenho delas. Quando é publicado algo nessa rede social, podemos considerar que existam 3 categorias básicas de interação: os comentários, as curtidas e os compartilhamentos, com esses dados é possível ter um controle de desempenho dessas páginas. Sabe-se que no mês de janeiro de um determinado ano a página 1 obteve 100 comentários, 200 curtidas e 55 compartilhamentos, a página 2 obteve 250 comentários, 310 curtidas e 60 compartilhamentos, a página 3 obteve 20 comentários, 30 curtidas e 10 compartilhamentos. No mês de fevereiro desse mesmo ano, a página 1 obteve 120 comentários, 260 curtidas e 90 compartilhamentos, a página 2 obteve 100 comentários, 400 curtidas e 90 compartilhamentos e a página 3 obteve 60 comentários, 20

[12] O endereço onde encontram-se esses princípios e critérios é: http://www.fnde.gov.br/pnld-2017/

curtidas e 15 compartilhamentos. Determine a quantidade total de comentários, curtidas e compartilhamentos de cada uma dessa páginas nesse bimestre.

Solução esperada: É notório que a organização desse dados, apresentados mensalmente, facilita a resolução desse problema. Para isso, faremos a organização desses dados na tabela 3 e na tabela 4, uma relativa ao mês de janeiro e outra ao mês de fevereiro.

Tabela 3 - Interações no mês de janeiro.

JANEIRO	Comentário	Curtidas	Compartilhamentos
Página 1	100	200	55
Pagina 2	250	310	60
Página 3	20	30	10

Fonte: O autor, 2018.

Tabela 4 - Interações no mês de fevereiro.

FEVEREIRO	Comentário	Curtidas	Compartilhamentos
Página 1	120	260	90
Pagina 2	100	400	90
Página 3	60	20	15

Fonte: O autor, 2018.

Podemos escrever a tabela 3 e a tabela 4 em forma matricial.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 100 & 200 & 55 \\ 250 & 310 & 60 \\ 20 & 30 & 10 \end{bmatrix} \boxed{\text{JANEIRO}} \text{ e } \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 120 & 260 & 90 \\ 100 & 400 & 90 \\ 60 & 20 & 15 \end{bmatrix} \boxed{\text{FEVEREIRO}}. \tag{38}$$

Para saber a quantidade total de comentários, curtidas e compartilhamentos de cada uma dessas páginas nesse bimestre, basta adicionarmos a matriz A com a matriz B:

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 100 & 200 & 55 \\ 250 & 310 & 60 \\ 20 & 30 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 120 & 260 & 90 \\ 100 & 400 & 90 \\ 60 & 20 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 & 460 & 145 \\ 350 & 710 & 150 \\ 80 & 50 & 25 \end{bmatrix}. \tag{39}$$

Com esse tipo de abordagem fica mais claro para os alunos compreenderem o significado da soma de matrizes, nulificando o processo burocrático através de definições pré-estabelecidas. Com isso, possibilitamos a discussão com os alunos de uma forma intuitiva, como, por exemplo, fazendo perguntas com a finalidade de estabelecer condições para efetuar a soma entre duas ou mais matrizes. É possível somar matrizes de ordens distintas? Podemos somar matrizes de tipos distintos? Como somamos matrizes?

Apesar de alguns livros apresentarem o conteúdo com situações-problema (figura 14), é comum observar nos livros didáticos, uma série de exercícios mecânicos e que não trazem a perspectiva desejável para que o discente tenha pleno entendimento do assunto, como vemos na figura 15, no livro do Dante. Comumente, os alunos acham fácil somar/subtrair matrizes, mas os mesmos, caso não seja apresentado problemas, operam as matrizes ponderando somente as operações numéricas, o que é um equívoco.

Indubitavelmente, a prática de exercícios é importante para a fixação do conteúdo, mas não podemos tomar somente a aplicação de exercícios, de forma mecânica visando apenas o resultado final, como prática pedagógica. A resolução de problema é fundamental. De acordo com os princípios adotados pelo guia de livros didático (PNLD) *on line*[13], um princípio metodológico amplamente relevante é o de ensino e aprendizagem da Matemática baseados na resolução de problemas. Sem dúvida, um livro didático em que são propostos, de modo sistemático e consistente, problemas a serem resolvidos pelo estudante, contribui para o desenvolvimento da sua autonomia.

3.3.2 Multiplicação de matrizes

Como podemos observar na subseção 3.3.1, a soma de matrizes é feita elemento a elemento, ou seja, somamos elementos que estão nas mesmas posições, como podemos verificar abaixo com os elementos que estão na segunda linha e terceira coluna:

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}=\begin{bmatrix} 100 & 200 & 55 \\ 250 & 310 & \boxed{60} \\ 20 & 30 & 10 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 120 & 260 & 90 \\ 100 & 400 & \boxed{90} \\ 60 & 20 & 15 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 220 & 460 & 145 \\ 350 & 710 & \boxed{150} \\ 80 & 50 & 25 \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Será que a multiplicação de matrizes é feita dessa forma? Quais são as condições de existência para a multiplicação entre as matrizes?

De um modo geral, a multiplicação de matrizes é feita a partir da seguinte definição: Dadas as matrizes $\mathrm{A}_{m\times n}$ e $\mathrm{B}_{n\times q}$, a multiplicação da matriz A pela matriz B é dada pela equação (41).

$$\mathrm{A}\times\mathrm{B}=\mathrm{C}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}, \forall\ 1\leq i\leq m \text{ e } \forall\ 1\leq j\leq q. \quad (41)$$

[13] O endereço onde encontram-se esses princípios e critérios é: http://www.fnde.gov.br/pnld-2017/

Figura 14 - Soma/subtração de matrizes - Apresentação

6 Adição e subtração de matrizes

Acompanhe a seguinte situação:

O gerente de vendas de uma loja tem à sua disposição as tabelas de vendas mensais, em reais, dos seus três vendedores, por produto vendido. Veja:

Vendas em janeiro (R$)

Vendedor	Geladeiras	Fogões
Paulo	23 000,00	12 000,00
Germano	27 000,00	10 000,00
Rodolfo	19 000,00	15 000,00

Fonte: Dados fictícios.

Vendas em fevereiro (R$)

Vendedor	Geladeiras	Fogões
Paulo	21 000,00	10 000,00
Germano	16 000,00	6 000,00
Rodolfo	20 000,00	9 000,00

Fonte: Dados fictícios.

O gerente precisava saber as vendas do 1º bimestre, em reais por produto vendido, dos seus três vendedores. Nesse caso, ele somou os dados das duas tabelas (janeiro e fevereiro), obtendo a tabela dos dados do bimestre:

Vendas no 1º bimestre (R$)

Vendedor	Geladeiras	Fogões
Paulo	44 000,00	22 000,00
Germano	43 000,00	16 000,00
Rodolfo	39 000,00	24 000,00

Fonte: Dados fictícios.

Aproveite o exemplo para explorar mais análises dos resultados.

Para refletir
- Qual foi o melhor vendedor de geladeiras do bimestre? E de fogões? Paulo; Rodolfo.

Depois, o gerente precisava saber a evolução das vendas de janeiro para fevereiro: aumentaram? diminuíram? qual foi a diferença de faturamento entre janeiro e fevereiro?

Uma maneira de obter essas informações é calcular a diferença dos dados das duas primeiras tabelas (fevereiro e janeiro), obtendo a tabela da evolução das vendas de janeiro para fevereiro:

Evolução das vendas de janeiro para fevereiro (R$)

Vendedor	Geladeiras	Fogões
Paulo	−2 000,00	−2 000,00
Germano	−11 000,00	−4 000,00
Rodolfo	1 000,00	−6 000,00

Fonte: Dados fictícios.

Para refletir
- Qual vendedor teve a maior queda de vendas de geladeira de janeiro para fevereiro? Germano.

Esse exemplo ilustra as operações de adição e subtração de matrizes.

Fonte: MATEMÁTICA - CONTEXTO E APLICAÇÕES (PNLD 2018) - Autor: Luiz Roberto Dante, 2017.

Figura 15 - Soma/subtração de matrizes - Exercícios

Subtração de matrizes

Sendo A e B duas matrizes do tipo $m \times n$, denomina-se diferença entre A e B (representada por $A - B$) a soma da matriz A com a matriz oposta de B, isto é, $A - B = A + (-B)$.

Para refletir
Lembra-se da diferença entre números inteiros?
$3 - 4 = 3 + (-4)$

Por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 10 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 10 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 & -6 \\ 4 & -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 14 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercícios

3. Identifique os elementos a_{11}, a_{22} e a_{13} na matriz $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 4 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Escreva no caderno as matrizes:

a) $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ tal que $a_{ij} = i^2 + j^2$.

b) $X = (a_{ij})_{4 \times 2}$ de modo que $a_{ij} = 2i^2 - j$.

5. Escreva no caderno a matriz quadrada:

a) de ordem 2, cujo elemento genérico é $a_{ij} = 4i - 2j + 3$;

b) de ordem 3 tal que $a_{ij} = i^3 - 2j$. $\begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 6 & 4 & 2 \\ 25 & 23 & 21 \end{bmatrix}$

6. Seja a matriz quadrada $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$. Calcule a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária. 18

7. Sabendo que $\begin{bmatrix} a+b & b+c \\ 2b & 2a-3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 6 & 18 \end{bmatrix}$, determine a, b, c e d. $a = 6; b = 3; c = -4; d = -2$

8. Escreva no caderno a matriz identidade de ordem 2 (I_2) e a matriz identidade de ordem 3 (I_3). $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. Determine m e n para que se tenha $\begin{pmatrix} m+n & m \\ 0 & n \end{pmatrix} = I_2$. $m = 0; n = 1$

10. Determine a, b e c para que se tenha $\begin{pmatrix} a+b-1 & 0 \\ a-3c & b \\ 2b & 0 \end{pmatrix} = 0_{3 \times 2}$. $a = 1; b = 0; c = \frac{1}{3}$.

11. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, calcule:

a) $A + B - C$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $A - B + C$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $A - B - C$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

12. Dadas as seguintes matrizes quadradas de ordem 2:

A com $a_{ij} = \begin{cases} i + 2j, \text{ para } i \geq j \\ 0, \text{ para } i < j \end{cases}$ $A + B = B + A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 14 \end{bmatrix}$

e B com $b_{ij} = \begin{cases} i^3, \text{ para } i \geq j \\ 0, \text{ para } i < j \end{cases}$, calcule $A + B$ e $B + A$.

13. A e B são duas matrizes quadradas de ordem 2, cujos elementos são dados por $a_{ij} = 3i - 2j$ e $b_{ij} = (a_{ij})^2$. Calcule:

a) $A - B$ a) $A - B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -12 & -2 \end{bmatrix}$

b) $A + B$ b) $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 20 & 6 \end{bmatrix}$

14. Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz quadrada de ordem 2 tal que $a_{ij} = 2i + 3j - 5$, escreva no caderno a matriz oposta de A. $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$

15. Se $X = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 6 & -10 & 7 \end{bmatrix} + 0$, escreva no caderno X sabendo que 0 é a matriz nula do tipo 2×3.

$X = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 6 & -10 & 7 \end{bmatrix}$

Matrizes e determinantes 71

Fonte: MATEMÁTICA - CONTEXTO E APLICAÇÕES (PNLD 2018) - Autor: Luiz Roberto Dante, 2017.

Podemos, ainda, indicar aos alunos que o produto de matrizes é feito através da multiplicação de cada linha por cada coluna, elemento a elemento, como podemos observar no problema 1.

Problema 1: Dadas as matrizes A e B abaixo, determine o produto da matriz A pela matriz B, sendo,

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}. \tag{42}$$

Solução: Utilizando a definição (41) para $n = q = 3$, temos:

$$\begin{aligned}
&\text{Linha 1}\begin{cases} c_{11} = \sum_{k=1}^{2} a_{1k}.b_{k1} = a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} = 4.2 + 3.3 = 17 \\ c_{12} = \sum_{k=1}^{2} a_{1k}.b_{k2} = a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} = 4.4 + 3.4 = 28 \\ c_{13} = \sum_{k=1}^{2} a_{1k}.b_{k3} = a_{11}.b_{13} + a_{12}.b_{23} = 4.3 + 3.5 = 27 \end{cases} \\
&\text{Linha 2}\begin{cases} c_{21} = \sum_{k=1}^{2} a_{2k}.b_{k1} = a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} = 4.2 + 5.3 = 23 \\ c_{22} = \sum_{k=1}^{2} a_{2k}.b_{k2} = a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} = 4.4 + 5.4 = 36 \\ c_{23} = \sum_{k=1}^{2} a_{2k}.b_{k3} = a_{21}.b_{13} + a_{22}.b_{23} = 4.3 + 5.5 = 37 \end{cases} \\
&\text{Linha 3}\begin{cases} c_{31} = \sum_{k=1}^{2} a_{3k}.b_{k1} = a_{31}.b_{11} + a_{32}.b_{21} = 6.2 + 2.3 = 18 \\ c_{32} = \sum_{k=1}^{2} a_{3k}.b_{k2} = a_{31}.b_{12} + a_{32}.b_{22} = 6.4 + 2.4 = 32 \\ c_{33} = \sum_{k=1}^{2} a_{3k}.b_{k3} = a_{31}.b_{13} + a_{32}.b_{23} = 6.3 + 2.5 = 28 \end{cases}
\end{aligned} \tag{43}$$

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 17 & 28 & 27 \\ 23 & 36 & 37 \\ 18 & 32 & 28 \end{bmatrix}. \tag{44}$$

Abordar a multiplicação de matrizes desta forma pode não fazer sentido para os alunos, apenas mostra um algoritmo que podemos utilizar para obtenção de um resultado que torna a multiplicação de matrizes uma teoria sem muito sentido, além de acompanhar uma definição carregada em notações. A multiplicação de matrizes não é uma operação trivial, por isso devemos introduzir esse conceito de forma investigativa através de problemas. Com a intenção de fomentar o entendimento dos alunos nessa teoria, vamos apresentar problemas contextualizados de situações que envolvam essa operação.

Problema 2: Uma indústria automobilística produz carros nos modelos X e Y nas versões popular, luxo e superluxo. Nesses carros, são utilizadas na montagem peças dos tipos A, B e C.

• Do tipo A são utilizadas 4 peças em cada carro do modelo X e 3 peças em cada carro do modelo Y.

• Do tipo B são utilizadas 4 peças em cada carro do modelo X e 5 peças em cada carro do modelo Y.

• Do tipo C são utilizadas 6 peças em cada carro do modelo X e 2 peças em cada carro do modelo Y.

• Do carro de modelo X são fabricados 2 carros na versão popular, 4 na versão luxo e 3 na versão superluxo.

• Do carro de modelo Y são fabricados 3 carros na versão popular, 4 na versão luxo e 5 na versão superluxo.

Determine uma tabela que relacione a quantidade de peças de cada tipo a cada uma das versões.

Solução esperada: Inicialmente organizaremos os dados do enunciado na tabela 5 e na tabela 6.

Tabela 5 - Peça × Modelo.

	Modelo X	Modelo Y
Peça A	4	3
Peça B	4	5
Peça C	6	2

Fonte: O autor, 2018.

Tabela 6 - Modelo × Versão.

	Popular	Luxo	Superluxo
Modelo X	2	4	3
Modelo Y	3	4	5

Fonte: O autor, 2018.

A partir daí podemos abrir uma discussão a fim de investigar uma estratégia para que possamos determinar uma tabela que relacione a quantidade de peças de cada tipo a cada uma das versões.

Podemos notar que, por exemplo, na tabela 5, cada carro do modelo X são utilizadas 4 peças do tipo A e que em cada carro do modelo Y são utilizadas 3 peças do tipo A. Já na tabela 6, no modelo X são fabricados 2 carros na versão popular e no modelo Y são fabricados 3 carros na versão popular. Daí podemos observar que no modelo X teremos um total de $4.2 = 8$ peças do tipo A na versão popular e no modelo Y um total de $3.3 = 9$ peças do tipo A na versão popular. Totalizando 17 peças do tipo A na versão popular. De acordo com essa interpretação, teremos:

$\Longrightarrow$ Total de peças do tipo A na versão luxo $= 4.4 + 3.4 = 28$

$\Longrightarrow$ Total de peças do tipo A na versão superluxo $= 4.3 + 3.5 = 27$

$\Longrightarrow$ Total de peças do tipo B na versão popular $= 4.2 + 5.3 = 23$

$\Longrightarrow$ Total de peças do tipo B na versão luxo $= 4.4 + 5.4 = 36$

$\Longrightarrow$ Total de peças do tipo B na versão superluxo $= 4.3 + 5.5 = 37$

$\Longrightarrow$ Total de peças do tipo C na versão popular $= 6.2 + 2.3 = 18/$

$\Longrightarrow$ Total de peças do tipo C na versão luxo $= 6.4 + 2.4 = 32$

$\Longrightarrow$ Total de peças do tipo C na versão superluxo $= 6.3 + 2.5 = 28$

Assim, a tabela 7 relaciona a quantidade de peças de cada tipo a cada uma das versões.

Tabela 7 - Peça × Versão.

	Popular	Luxo	Superluxo
Peça A	17	28	27
Peça B	23	36	37
Peça C	18	32	28

Fonte: O autor, 2018.

É importante notar que a tabela 7 foi gerada através de uma investigação e interpretação do problema 2. A partir desse resultado a multiplicação de matrizes pode ser apresentada aos alunos de forma mais atraente, mostrando que as definições são oriundas de problemas, retirando, assim, a impressão que alguns resultados matemáticos são sem propósito, decorados e sem aplicações. De acordo com Ellenberg (2015, p. 21, grifo do autor), "temos uma tendência de ensinar matemática como uma longa lista de regras. Você as aprende numa ordem e deve obedecê-las, caso contrário tira nota baixa. *Isso não é matemática.*."Com esse pensamento, reforçamos a importância de dar significado ao aprendizado. Sabemos que alguns assuntos não são perfeitamente transparentes para nossa intuição. Mas é necessário incentivar nos alunos o pensamento intuitivo e o poder de dedução.

Comparando o problema 1 com o problema 2, percebemos que a multiplicação da matriz A (análoga a tabela 5) pela matriz B (análoga a tabela 6) gera o resultado da tabela 7 no problema 2. Com isso, o aluno possui um acesso transparente para o entendimento da definição dada para multiplicação de matrizes. É útil citar que o exemplo 2 ajuda aos alunos entenderem qual tipo de matriz é gerada pela multiplicação de duas matrizes, pois o resultado deste exemplo foi a tabela 7, que relaciona cada tipo de peça (localizado nas linhas da tabela 5) a cada versão (localizada nas colunas tabela 6), justificando que o produto de uma matriz do tipo **m x n** por uma do tipo **n x q** gera uma matriz do tipo **m x q**. Vale citar que poderíamos escrever a tabela de outra forma, mas sem dúvida sem alterar a resolução do problema.

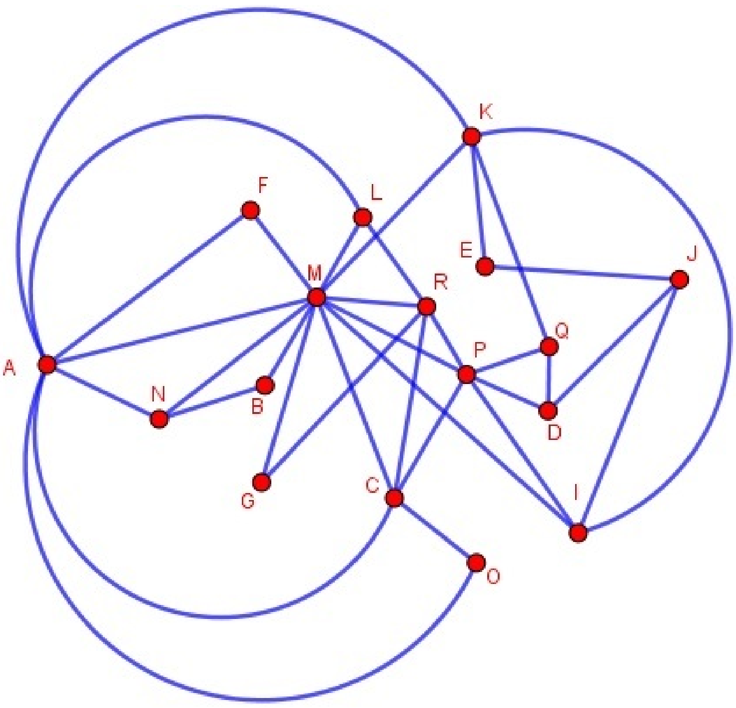
Problema 3: Observando a figura 12, de quantas formas distintas podemos viajar de Bordeaux para Toulouse fazendo uma escala?

Solução: Observando a figura 12, podemos constatar que temos duas formas distintas para fazer tal viagem:

Bordeaux $\Longrightarrow$ Paris $\Longrightarrow$ Toulouse ou Bordeaux $\Longrightarrow$ Londres $\Longrightarrow$ Toulouse

Observando a figura 16, de quantas formas distintas podemos viajar da cidade A para a cidade M com apenas uma escala?

Figura 16 - Rede de viagem 2



Fonte: O autor, 2018.

Nessa rede de voos, apenas com auxílio da imagem, teremos dificuldade de determinar essa quantidade de vôos. Como faremos essa contagem? Por observação? Há alguma aplicação matemática para nos auxiliar nessa determinação?

Para responder essas perguntas, voltaremos ao exemplo do plano de voo, na seção 3.1. A matriz que representa a quantidade de voos diretos da cidade i para a cidade j, tomando Londres = 1, Paris = 2, Edimburgo = 3, Bordeaux = 4 e Toulouse = 5, é

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{45}$$

O produto da matriz A pela matriz A, ou ainda, A^2, representa a matriz em que cada elemento representa a quantidade de voos da cidade i para a cidade j com exatamente uma escala.

$$\mathrm{A}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}. \tag{46}$$

Essa é umas das aplicações mais interessantes de multiplicação de matrizes. Na verdade, esse é um exemplo de aplicabilidade de grafos, conteúdo não visto no ensino médio, por isso, não é nossa intenção fazer essa aplicação utilizando sua estrutura assim como sua nomenclatura.

De fato, não é trivial notar que a matriz A^2 nos fornecerá a quantidade de voos da cidade i para a cidade j com exatamente uma escala. Mas por que isso acontece?

Considere a matriz, ou melhor, a tabela 8 para auxiliar nossa interpretação:

Tabela 8 - Existência de voos entre cidades.

	Londres	Paris	Edimburgo	Bordeaux	Toulouse
Londres	0	1	1	1	1
Paris	1	0	0	1	1
Edimburgo	1	0	0	0	0
Bordeaux	1	1	0	0	0
Toulouse	1	1	0	0	0

Fonte: O autor, 2018.

Pegaremos um elemento da matriz A^2 como exemplo. Tomaremos o elemento que está na quarta linha e na quinta coluna de A^2 que indica a quantidade de voos com exatamente uma escala da cidade de Bordeaux para Toulouse. No problema 3, com auxílio da figura 12, já podemos observar quais são os voos da cidade de Bordeaux para Toulouse com exatamente uma escala. Note que esse elemento surge da seguinte expressão:

$$\underbrace{1}_{a_{41}} \cdot \underbrace{1}_{a_{15}} + \underbrace{1}_{a_{42}} \cdot \underbrace{1}_{a_{25}} + \underbrace{0}_{a_{43}} \cdot \underbrace{0}_{a_{35}} + \underbrace{0}_{a_{44}} \cdot \underbrace{0}_{a_{45}} + \underbrace{0}_{a_{45}} \cdot \underbrace{0}_{a_{55}} = 2. \tag{47}$$

A multiplicação dos elementos a_{41} e a_{15}, indica que há voo da cidade de Bordeaux para Toulouse com uma escala em Londres. O fato do elemento a_{41} ser igual a 1, indica que há voo direto da cidade de Bordeaux para Londres. O fato do elemento a_{15} ser igual a 1, indica que há voo direto da cidade de Londres para Toulouse. Portanto há voo de Bordeaux para Toulouse passando por Londres.

De forma análoga o mesmo acontece com a multiplicação do elemento a_{42}, que indica que há voo da cidade de Bordeaux para Paris, por a_{25}, que indica que há voo da cidade de Paris para Toulouse. Portanto, podemos garantir que há voo de Bordeaux para Toulouse passando por Paris.

Se repararmos na tabela 8, representada pela matriz A, percebemos que não há possibilidade de fazer escala na cidade de Edimburgo, já que não há voo de Bordeaux para Edimburgo. E como não faz sentido denotar voo direto de uma cidade para ela mesmo, não corremos riscos de contar, de forma equivocada, voos para a mesma cidade e voos diretos como voos com uma escala, pois em cada elemento a_{ij} com $i = j$ (diagonal principal da matriz) colocamos 0. Ou seja, nesse caso, não faria sentido pensar em voo com uma escala da cidade de Bordeaux para cidade de Bordeaux e da cidade de Bordeaux para cidade de Toulouse passando pela cidade de Toulouse.

Dessa forma, podemos observar que se operarmos a quarta linha da matriz A (indicada pela cidade de Bordeaux) com a quinta coluna da matriz A (indicada pela cidade de Toulouse) obtemos a quantidade de voos com exatamente uma escala entre essas cidades.

É interessante notar que as matrizes A e A^2 são simétricas, ou ainda, são tais que $A = A^T$ e $A^2 = (A^2)^T$.

Dessa forma, observamos que, operando as linhas da matriz A com as colunas da matriz A, obtemos uma matriz em que cada elemento representa a quantidade de voos com exatamente uma escala da cidade i para a cidade j. Se quisermos saber, em particular, a quantidade de voos com exatamente uma escala, da cidade de Londres para Paris, basta operarmos a linha 1 com a coluna 2:

$$\underbrace{0}_{a_{11}} \cdot \underbrace{1}_{a_{21}} + \underbrace{1}_{a_{12}} \cdot \underbrace{0}_{a_{22}} + \underbrace{1}_{a_{13}} \cdot \underbrace{0}_{a_{23}} + \underbrace{1}_{a_{14}} \cdot \underbrace{1}_{a_{24}} + \underbrace{1}_{a_{15}} \cdot \underbrace{1}_{a_{25}} = 2. \tag{48}$$

Podemos representar a expressão pelo seguinte esquema:

$\underbrace{0}_{a_{11}}.\underbrace{1}_{a_{21}} = 0$: Londres $\not\Rightarrow$ Londres $\Rightarrow$ Paris

$\underbrace{1}_{a_{12}}.\underbrace{0}_{a_{22}} = 0$: Londres $\Rightarrow$ Paris $\not\Rightarrow$ Paris

$\underbrace{1}_{a_{13}}.\underbrace{0}_{a_{23}} = 0$: Londres $\Rightarrow$ Edimburgo $\not\Rightarrow$ Paris

$\underbrace{1}_{a_{14}}.\underbrace{1}_{a_{24}} = 1$: Londres $\Rightarrow$ Bordeaux $\Rightarrow$ Paris

$\underbrace{1}_{a_{15}}.\underbrace{1}_{a_{25}} = 1$: Londres $\Rightarrow$ Toulouse $\Rightarrow$ Paris

É interessante notar que na matriz A^n cada elemento representa a quantidade de voos com exatamente n escalas entre as cidades i e j.

Observando o problema 2 e o problema 3, podemos notar que a multiplicação de matrizes não é trivial. Como dissemos, nas escolas, esse conteúdo é visto de forma tradicional e os livros (figura 17) acabam pecando pela quantidade de exercícios burocráticos que conduzem os professores e encaminham as aulas para o marasmo.

É interessante que o professor estimule seus alunos a chegarem a conclusões referentes a propriedades oriundas da multiplicação de matrizes. Algumas propriedades realmente são difíceis de justificar, pois requerem um nível de Matemática mais avançado. Em contrapardida, os alunos podem trabalhar com algumas dessas propriedades a partir de casos particulares. O professor pode fazer perguntas para aguçar a curiosidade dos alunos a afirmar ou negar cada propriedade citada. As seguintes propriedades envolvendo a multiplicação de matrizes podem ser destacadas.

i) Em geral A.B $\neq$ B.A;

ii) Associativa: (A.B).C = A.(B.C);

iii) Trasposta do produto: (A.B)$^T = B^T.A^T$;

iv) Existência do elemento neutro: A.I = A = I.A;

v) Se A é uma matriz quadrada de ordem n e inversível, então A.$A^{-1} = I_n$.

Figura 17 - Multiplicação de matrizes - Exercícios

EXERCÍCIO RESOLVIDO

6 Determine os valores reais de **x** e **y** de modo que as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$ comutem.

Solução:

Devemos ter $A \cdot B = B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2x \\ -9 + 4y & -3x + 4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 3x & 4x \\ 2y - 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Daí:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2x \\ -9 + 4y & -3x + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 3x & 4x \\ 2y - 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6 = 6 - 3x & \Rightarrow x = 0 \\ 2x = 4x & \Rightarrow x = 0 \\ -9 + 4y = 2y - 3 & \Rightarrow y = 3 \\ -3x + 4 = 4 & \Rightarrow x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ e } y = 3$$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

36 Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 9 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.

Se $C = (c_{ij})_{3 \times 2}$ é a matriz produto $A \cdot B$, determine, se existirem, os elementos:

a) c_{22} **b)** c_{31} **c)** c_{33}

37 Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{6 \times 3}$, em que $a_{ij} = i + j$, e $B = (b_{jk})_{3 \times 4}$, em que $b_{jk} = 2j - k$. Sendo $C = (c_{ik})_{6 \times 4}$ a matriz produto $A \cdot B$, determine o elemento c_{43}.

38 Determine **x** e **y** reais, a fim de que: $\begin{pmatrix} 2 & x \\ y & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

39 Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**; definimos $A^2 = A \cdot A$. Assim, determine A^2 nos seguintes casos:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

40 Generalizando a definição dada no exercício anterior, temos:

Se $n \in \mathbb{N}^*$ e **A** é uma matriz quadrada, definimos $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{\textbf{n} \text{ fatores}}$.

Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, determine:

a) A^2 **b)** A^3 **c)** A^4 **d)** A^{35} **e)** A^{106}

41 Sabendo que $A = \begin{bmatrix} -4 & m \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $A^2 = \begin{bmatrix} 22 & -15 \\ -10 & m + 4 \end{bmatrix}$, determine o valor de **m**.

Fonte: MATEMÁTICA - CIÊNCIA E APLICAÇÕES (PNLD 2018) - Autor: Gelson Iezzi, 2017.

Acreditamos que essas propriedades, devam ser trabalhadas como consequência da multiplicação de matrizes. O professor não deve apresentá-las no primeiro contato do aluno com a multiplicação de matrizes, embora em alguns casos seja necessário, como por exemplo, em cursos preparatórios para Escolas Militares.

A seguir, faremos algumas aplicações de soma e multiplicação de matrizes, utilizando as transformações geométricas. Acreditamos que as transformações geométricas se constituem uma importante proposta de aplicação já que integram os conteúdos dos tópicos de matrizes e geometria.

3.3.3 Isometria

A Matemática tem papel central nas transformações e avanços tecnológicos. Por outro lado, as aplicações que corroboram para tal avanço ficam distantes dos alunos. Em muitos casos, algumas aplicações carecem de uma Matemática mais avançada, mas o papel do professor é aproximar os alunos dessas aplicações com objetivo de integrar conteúdos vistos normalmente de forma separada.

Com essa intenção, acreditamos que o conteúdo de matrizes pode oferecer ao professor algumas ferramentas que possibilitem essas aplicações. As transformações isométricas são bom exemplo disso. Habitualmente esse conteúdo é trabalhado na graduação de Matemática e graduações afins. Acreditamos que essas aplicações devam ser trabalhadas no ensino médio, já que, como dissemos, integra o assunto de matrizes e geometria. Com essa ideia trabalharemos algumas transformações isométricas que são aquelas que conservam tanto as medidas das figuras como a amplitude dos seus ângulos.

As Transformações lineares em $\mathbb{R}^2$ (duas dimensões) são muito utilizadas ao trabalharmos com imagens e na computação gráfica. Podemos perceber essas aplicações em filmes, jogos, cinemas, vídeo clipes, entre outros. Algumas habilidades, como homotetia, translações, rotações e simetria devem fazer parte do conteúdo programático do ensino médio. Essas transformações geométricas estimulam a ideia, o pensamento lógico e fortalecem o poder de dedução dos alunos.

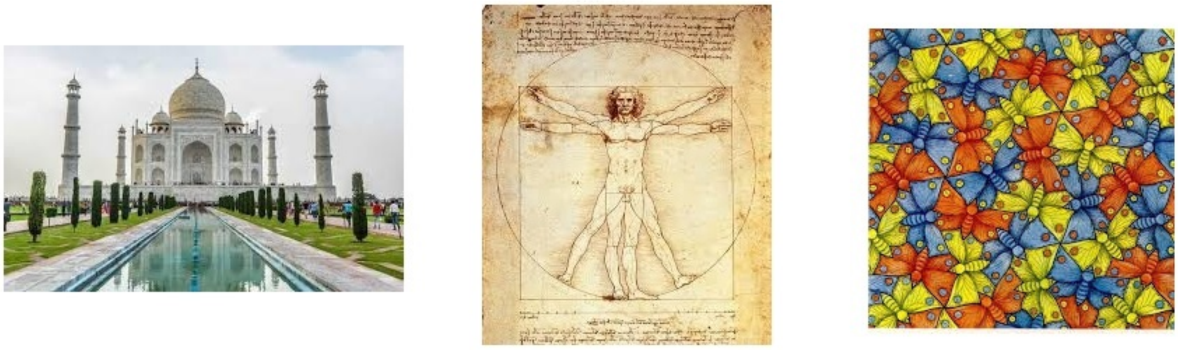
De acordo com os PCN,

> [...] as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca. Essas competências são importantes na compreensão e ampliação da percepção de espaço e construção de modelos para interpretar questões da Matemática e de outras áreas do conhecimento. De fato, perceber as relações entre as representações planas nos desenhos, mapas e na tela do computador com os objetos que lhes deram origem, conceber novas formas planas ou espaciais e suas propriedades a partir dessas representações são essenciais para a

> leitura do mundo através dos olhos das outras ciências [...] (BRASIL, 2000, p. 44).

Simetria: O conceito de simetria está atrelado à perfeição. Podemos ter inúmeros exemplos desse conceito. A simetria está presente na natureza, na arte, na arquitetura e nas ciências, como podemos ver na figura 18. Algumas obras ficaram famosas por remeter a sensação de proporções equilibradas e harmoniosas.

Figura 18 - Simetria e rotação aplicados à arte e à arquitetura.



(a) Tajmahal (b) Homem Vitruviano (c) Escher, M. C. ,(1948)

Fonte: O autor, 2018.

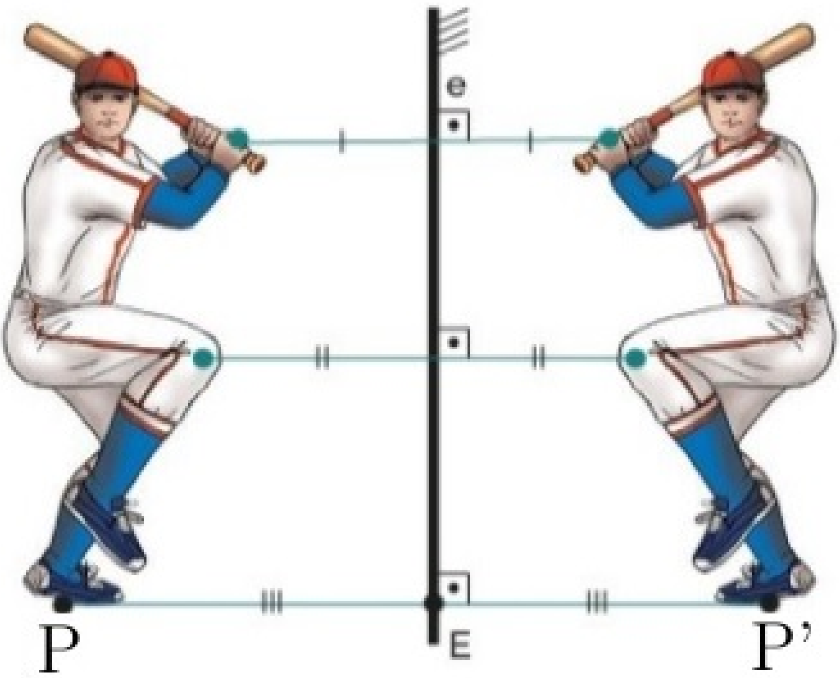
De acordo com a definição do dicionário Dicio *on line*[14], simetria é a correspondência de posição, de forma, de medida em relação a um eixo entre os elementos de um conjunto ou entre dois ou mais conjuntos. Na Matemática, principalmente na geometria, a simetria pode ser encontrada em diversos objetos: Polígonos regulares, triângulos isósceles, sólidos regulares, entre outros. Na geometria analítica e em desenho geométrico a simetria desempenha um papel fundamental. Existem dois tipos de simetria, a simetria axial e a simetria central.

Simetria axial: é uma transformção isométrica na qual todos os pontos P de uma figura coincidem com P', na outra figura, tomando como referência uma reta **e**, eixo de simetria, na qual os pontos P e P' equidistam de **e** e o segmento $\overline{PP'}$ é perpendicular ao eixo de simetria. Como exemplo de simetria axial podemos citar a imagem formada em um espelho (figura 19).

Simetria central: é uma transformação isométrica na qual cada ponto P está associado a um ponto P' de forma que P e P' equidistam de um ponto fixo O denominado centro de simetria e os pontos P, P' e O são colineares (figura 20).

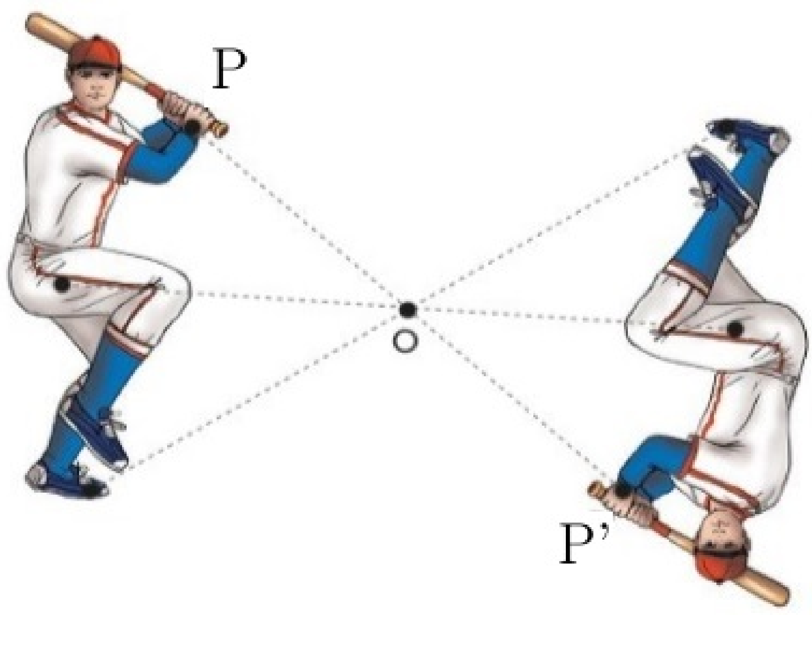
[14] Essa definição pode ser encontrada no endereço eletrônico: https://www.dicio.com.br/simetria/

Figura 19 - Simetria axial



Fonte: http://bahiense.portalsas.com.br, 2018.

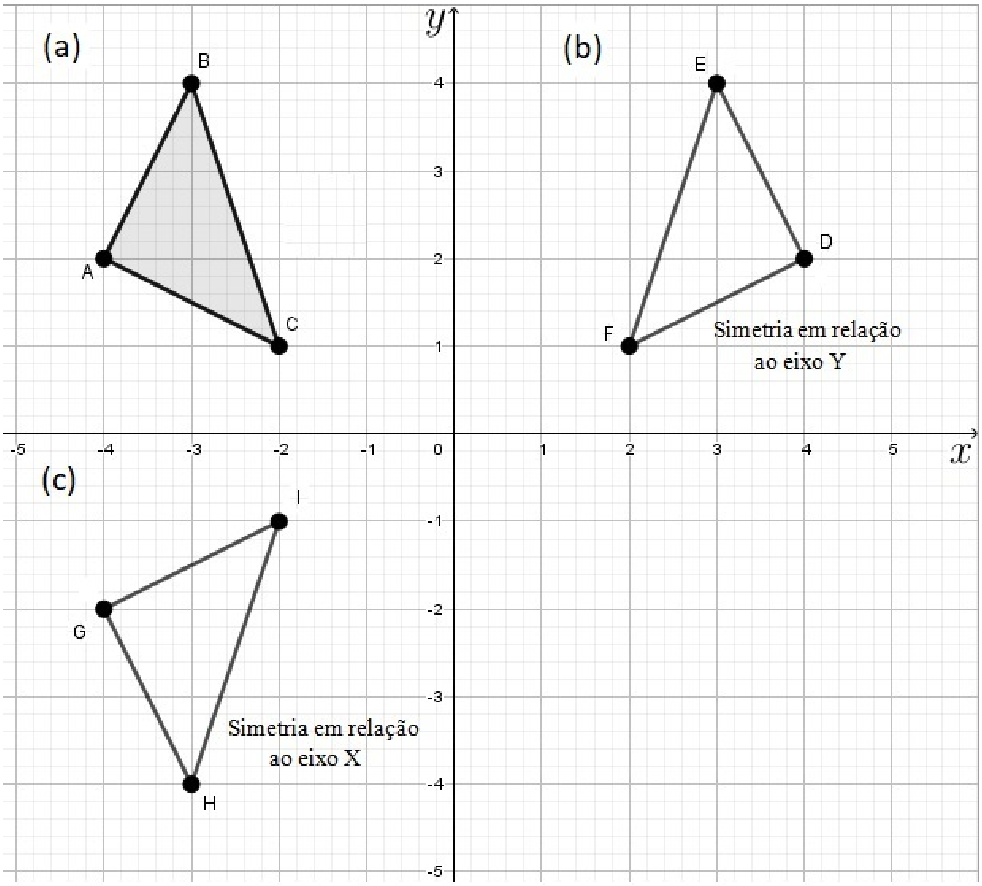
Figura 20 - Simetria central



Fonte: http://bahiense.portalsas.com.br, 2018.

A simetria serve como proposta de intervenção para mostrar aos alunos algumas aplicações de matrizes. Notadamente, são inúmeras as aplicações de simetria na Matemática. Tomaremos os casos particulares de simetria dos pontos no plano cartesiano, tendo o eixo das abscissas e da ordenadas como eixo de simetria (figura 21).

Figura 21 - Simetria no plano cartesiano



Fonte: O autor, 2018.

De acordo com a figura 21, tomando o eixo oy (ordenadas) como eixo de simetria, podemos observar que os pontos A, B e C são simétricos aos pontos E, F e G, respectivamente. Podemos denotar essa transformação pela notação $\mathrm{T}_1(x, y) = (x_1, y_1)$. Assim,

$$\begin{aligned} &\mathrm{T}_1(-4,2) = (4,2) \\ &\mathrm{T}_1(-3,4) = (3,4) \\ &\mathrm{T}_1(-2,1) = (2,1) \end{aligned} \quad . \tag{49}$$

Podemos notar que essa transformação pode ser tratada através de operações entre matrizes, veja:

Aplicação de soma: Podemos representar as coordenadas dos pontos A, B e C na seguinte tabela, com sua representação matricial M dada por (50).

	x	y
Coordenadas do ponto A	-4	2
Coordenadas do ponto B	-3	4
Coordenadas do ponto C	-2	1

$$\simeq \mathrm{M} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{50}$$

Da mesma forma, podemos representar as coordenadas dos pontos D, E e F na seguinte tabela, com sua representação matricial R dada por (51).

	x	y
Coordenadas do ponto D	4	2
Coordenadas do ponto E	3	4
Coordenadas do ponto F	2	1

$$\simeq \mathrm{R} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{51}$$

É possível somar alguma matriz a matriz M afim de obter a matriz R? Sim. Podemos resolver a seguinte equação matricial M + N = R. Obtendo N = M - R, como segue (52).

$$\mathrm{N} = \mathrm{M} - \mathrm{R} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4-(+4) & 0 \\ -3-(+3) & 0 \\ -2-(+2) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ -6 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}. \tag{52}$$

A Matemática é marcada por muitos resultados que podem e devem ser generalizados. Com essa intenção, podemos notar que tomando os pontos $\mathrm{A}_1 = (x_1,y_1)$, $\mathrm{A}_2 = (x_2, y_2)$, $\mathrm{A}_3 = (x_3, y_3)$, ..., $\mathrm{A}_n = (x_n, y_n)$, escritos da forma matricial, temos:

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix}. \tag{53}$$

Para obtermos a matriz R, que representa os pontos simétricos aos pontos citados, podemos somar a matriz P com a matriz Q.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix}}_{\mathrm{P}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -2x_1 & 0 \\ -2x_2 & 0 \\ -2x_3 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ -2x_n & 0 \end{bmatrix}}_{\mathrm{Q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -x_1 & y_1 \\ -x_2 & y_2 \\ -x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots \\ -x_n & y_n \end{bmatrix}}_{\mathrm{R}} \tag{54}$$

Vale citar que resultados semelhantes a esse são válidos para todos os quadrantes no plano cartesiano.

De forma similar, a simetria em relação ao eixo ox (abscissas), pode ser $\mathrm{T}_2(x, y) = (x_2, y_2)$, o que leva a escrita como (55).

$$\begin{aligned} &\mathrm{T}_2(-4, 2) = (-4, -2) \\ &\mathrm{T}_2(-3, 4) = (-3, -4) \qquad . \\ &\mathrm{T}_2(-2, 1) = (-2, -1) \end{aligned} \tag{55}$$

Para obtermos um ponto simétrico em relação ao eixo ox, basta trocarmos o sinal do ponto em sua coordenada y. Na representação matricial, basta realizarmos a operação abaixo:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2y_1 \\ 0 & -2y_2 \\ 0 & -2y_3 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & -2y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & -y_1 \\ x_2 & -y_2 \\ x_3 & -y_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & -y_n \end{bmatrix}. \tag{56}$$

Aplicação de multiplicação: Podemos associar a simetria, em relação aos eixos coordenados, a multiplicação de matrizes através de uma matriz transformação quadrada de ordem 2. Dessa forma, podemos achar os pontos D, E e F (figura 21), que são pontos simétricos aos pontos A, B e C, em relação ao eixo y. Chamaremos essa matriz transformação de T_y. Ao multiplicarmos a matriz M, que possui as coordenadas dos pontos A, B e C dispostas na horizontal, pela matriz T_y encontramos a matriz R que representa as coordenadas dos pontos D, E e F na horizontal.

$$\mathrm{M.T}_y = \mathrm{R} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{57}$$

Podemos observar que tal multiplicação, resultará na igualdade abaixo:

$$\mathrm{M.T}_y = \mathrm{R} = \begin{bmatrix} -4a+2c & -4b+2d \\ -3a+4c & -3b+4d \\ -2a+c & -2b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{58}$$

Resolvendo o sistema oriundo da multiplicação e igualdade de matrizes, obtemos a matriz T_y, matriz que aplica a simetria em relação ao eixo *oy*.

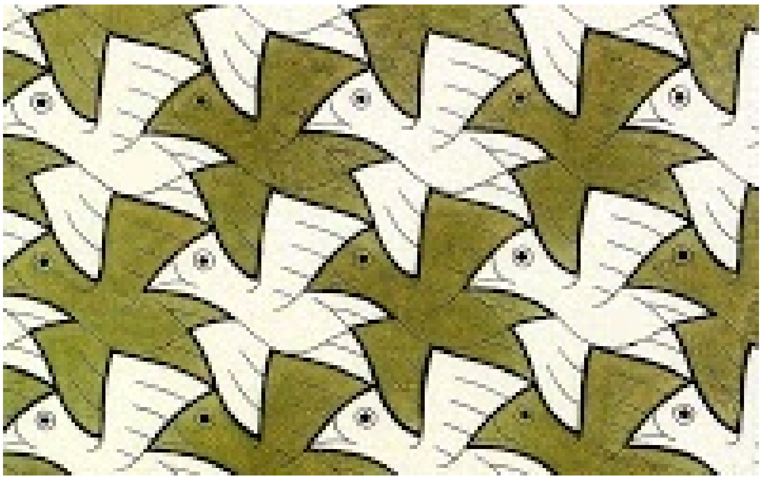
$$\mathrm{T}_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{59}$$

Aplicando a simetria em relação ao eixo *ox*, o desenvolvimento é análogo. Sendo assim, a matriz que faz a troca de coordenadas em relação ao eixo *ox* é dada por T_x:

$$\mathrm{T}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{60}$$

Translação: Assim como a operação de simetria, a de translação tem diversas aplicações. Podemos destacar as aplicações nas Artes (figura 22) e na Matemática.

Figura 22 - Escher, M. C., - Translação na arte



Fonte: http://blogmatematic.blogspot.com.br, 2018.

De acordo com Rezende e Queiroz,

> Sejam A e B dois pontos distintos no plano α. A translação T_{AB} : $\alpha \longrightarrow \alpha$ é a isometria no plano α, que leva um ponto X de α no ponto

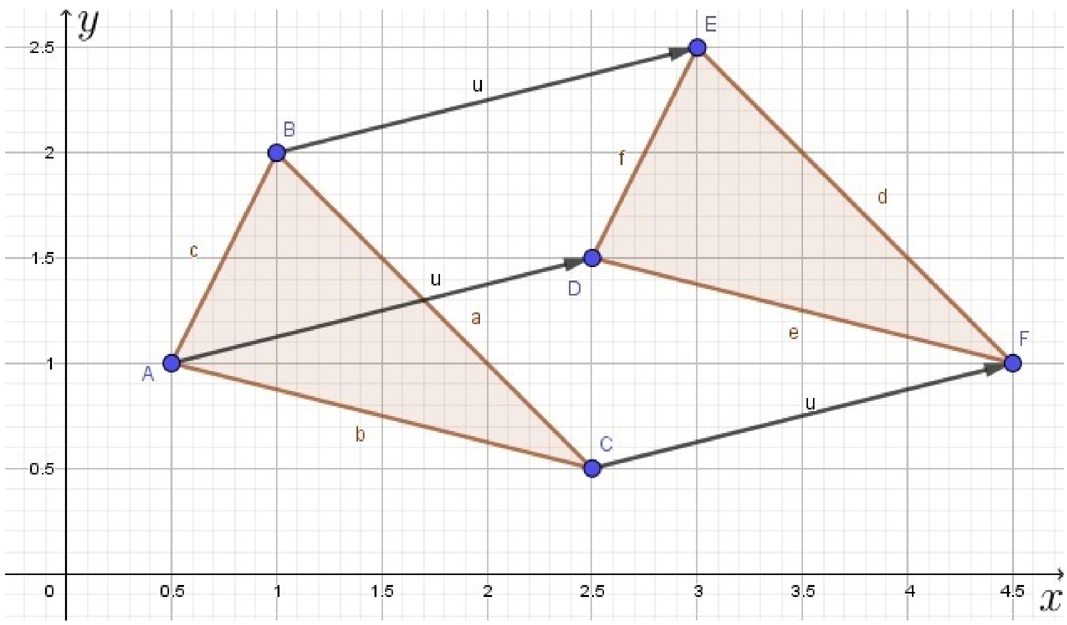
> $T_{AB}(X) = X'$, tal que $ABX'X$ é um paralelogramo, se A, B e X não são colineares. Se A, B e X são colineares, então T_{AB} é tal que $\overline{XX'}$ está na reta AB e os segmentos AX' e BX têm o mesmo ponto médio (REZENDE; QUEIROZ, 2000, p. 221).

Podemos associar a definição acima com a situação descrita na figura 23, onde o vetor $\vec{u}$ leva os pontos A, B e C nos pontos D, E e F, respectivamente. Se repararmos, aplicando a translação no triângulo ABC, cada um de seus vértices se deslocou 2 unidades no eixo *ox* e 0,5 unidade no eixo *oy*. Podemos associar esta transformação (T) à soma de matrizes M e U.

$$\mathrm{T} = \mathrm{M} + \mathrm{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_{\mathrm{D}} & y_{\mathrm{D}} \\ x_{\mathrm{E}} & y_{\mathrm{E}} \\ x_{\mathrm{F}} & y_{\mathrm{F}} \end{bmatrix}}_{\mathrm{T}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_{\mathrm{A}} & y_{\mathrm{A}} \\ x_{\mathrm{B}} & y_{\mathrm{B}} \\ x_{\mathrm{C}} & y_{\mathrm{C}} \end{bmatrix}}_{\mathrm{M}} + \underbrace{\begin{bmatrix} x_{\vec{u}} & y_{\vec{u}} \\ x_{\vec{u}} & y_{\vec{u}} \\ x_{\vec{u}} & y_{\vec{u}} \end{bmatrix}}_{\mathrm{U}}, \tag{61}$$

$$\mathrm{T} = \mathrm{M} + \mathrm{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_{\mathrm{D}} & y_{\mathrm{D}} \\ x_{\mathrm{E}} & y_{\mathrm{E}} \\ x_{\mathrm{F}} & y_{\mathrm{F}} \end{bmatrix}}_{\mathrm{T}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2.5 & 0.5 \end{bmatrix}}_{\mathrm{M}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0.5 \\ 2 & 0.5 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix}}_{\mathrm{U}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2.5 & 1.5 \\ 3 & 2.5 \\ 4.5 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathrm{T}}. \tag{62}$$

Figura 23 - Translação do triângulo ABC

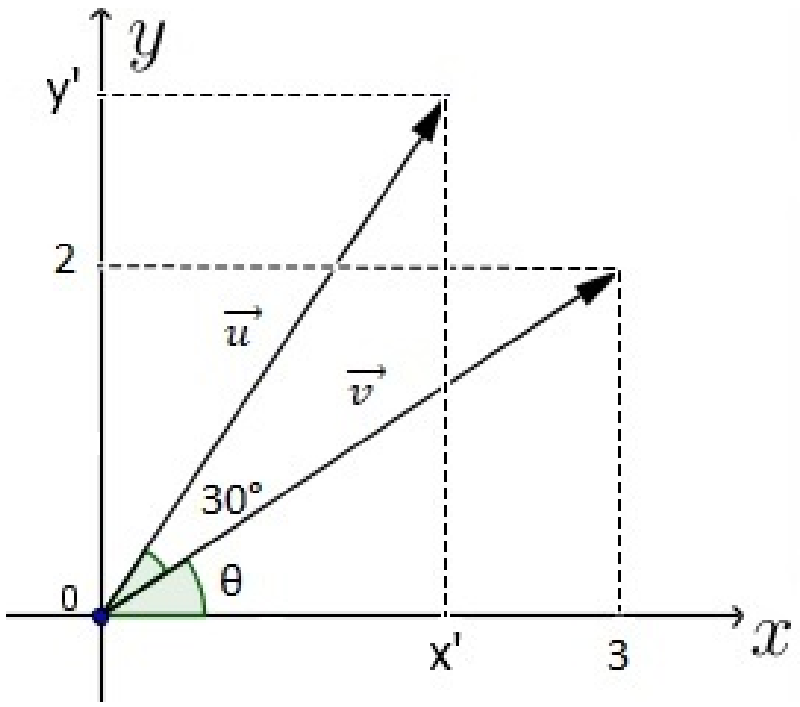


Fonte: O autor, 2018.

O que denota também mais uma aplicação de soma de matrizes. A seguir, veremos uma aplicação de multiplicação de matrizes oriunda da rotação de figuras.

Rotação: A rotação é um assunto importante para aplicações no ensino básico. De acordo com Rezende e Queiroz (2000, p. 226), "Uma figura tem simetria de rotação de um ângulo de θ, ou tem simetria θ-rotacional, quando ela coincide com sua imagem pela rotação do ângulo θ ao redor de seu centro."Na Matemática a rotação tem papel de destaque na trigonometria e nos estudos da geometria. Trataremos a operação de rotação no plano cartesiano. Abordamos o tema através de um problema motivador com o objetivo de integrar dois assuntos, a rotação e a multiplicação de matrizes. Para isso, faremos a rotação do vetor $\vec{v}$ = (3,2) de 30° no sentido anti-horário. O objetivo é determinar as coordenadas (x', y') do vetor $\vec{u}$ após a aplicação da operação rotação, como podemos ver na figura 24.

Figura 24 - Rotação do vetor $\vec{v}$



Fonte: O autor, 2018.

Com auxílio da trigonometria, assunto frequente no ensino médio, temos que:

$$sen(\theta) = \frac{2}{\sqrt{13}} \quad ; \quad cos(\theta) = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad , \tag{63}$$

$$cos(\theta + 30°) = \frac{x'}{\sqrt{13}} = \underbrace{cos(\theta).cos(30°) - sen(\theta).sen(30°)}_{\text{Adição de arcos}} = \frac{3\sqrt{3}-2}{2\sqrt{13}} \qquad , \tag{64}$$

$$sen(\theta + 30°) = \frac{y'}{\sqrt{13}} = \underbrace{sen(\theta).cos(30°) + sen(30°).cos(\theta)}_{\text{Adição de arcos}} = \frac{2\sqrt{3}+3}{2\sqrt{13}} \qquad . \tag{65}$$

De (63), (64) e (65) temos:

$$\vec{u} = \left(\frac{3\sqrt{3}-2}{2}, \frac{2\sqrt{3}+3}{2}\right). \tag{66}$$

Aparentemente a resolução desse problema não faz uso da teoria de matrizes. No entanto, podemos reorganizar a solução, escrevendo as coordenadas do vetor $\vec{u}$ como $\vec{u} =$ M. $\vec{v}$ onde (67) é a matriz de rotação do problema.

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} cos(30°) & -sen(30°) \\ sen(30°) & cos(30°) \end{bmatrix}, \tag{67}$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} cos(30°) & -sen(30°) \\ sen(30°) & cos(30°) \end{bmatrix}}_{\text{Matriz rotação}} . \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{68}$$

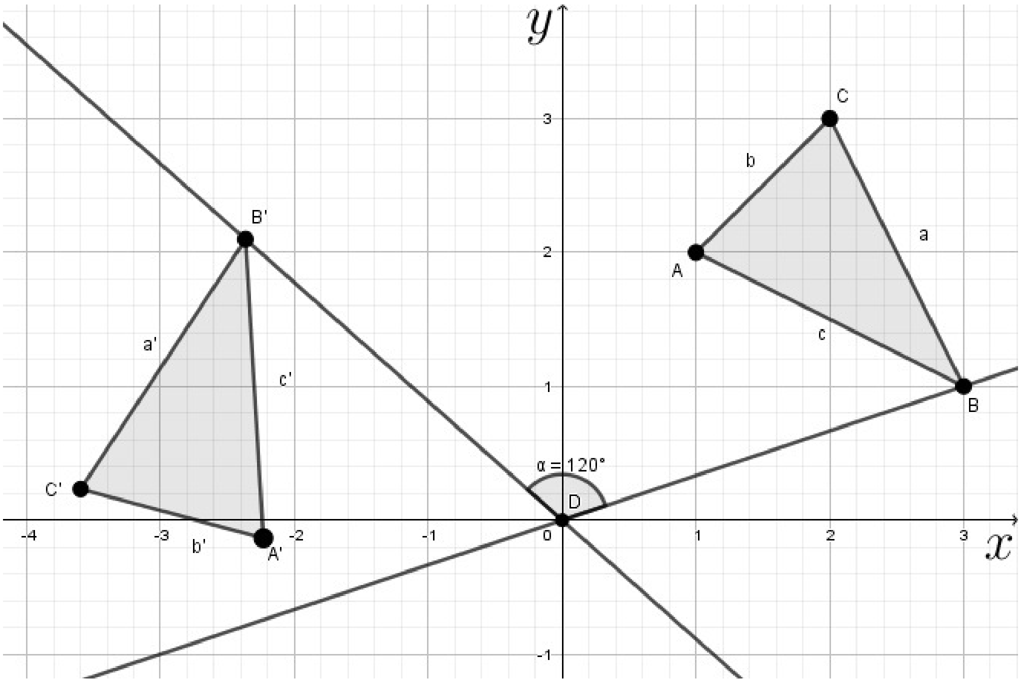
Desta forma, como representado na equação (68) determinar as coordenadas da rotação de um vetor, tem um aspecto mais organizado e pode facilitar a escrita. De modo geral, se quisermos fazer a rotação de um vetor $\vec{v} = (x, y)$ em α graus no sentido anti-horário, encontrando um vetor $\vec{u} = (x', y')$, basta fazermos a multiplicação de matrizes como é mostrado em (69).

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & cos(\alpha) \end{bmatrix}}_{\text{Matriz rotação}} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{69}$$

A partir da matriz rotação, podemos mostrar aos alunos a rotação de figuras planas (figura 25), como polígonos. É importante ressaltar que na figura 24 a soma $\theta + 30°$ representa um ângulo agudo. Vale evidenciar que se a soma $\theta + 30°$ representar um ângulo obtuso, o procedimento é análogo.

A seguir, determinamos as coordenadas dos vértices de um triângulo A'B'C', oriundo de uma rotação de 120° do triângulo ABC.

Figura 25 - Rotação de 120° do triângulo ABC



Fonte: O autor, 2018.

Aplicando a matriz rotação dada por (69) sobre as coordenadas dos pontos A, B e C, respectivamente, temos:

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} x_{\text{A'}} \\ y_{\text{A'}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} cos(120°) & -sen(120°) \\ sen(120°) & cos(120°) \end{bmatrix}}_{\text{Matriz rotação}} . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \\
&\therefore \text{A'} = (x_{\text{A'}}, y_{\text{A'}}) = \left(\frac{-1-2\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}-2}{2} \right).
\end{aligned} \tag{70}
$$

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} x_{\text{B'}} \\ y_{\text{B'}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} cos(120°) & -sen(120°) \\ sen(120°) & cos(120°) \end{bmatrix}}_{\text{Matriz rotação}} . \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
&\therefore \text{B'} = (x_{\text{B'}}, y_{\text{B'}}) = \left(\frac{-3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}-1}{2} \right).
\end{aligned} \tag{71}
$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_{\text{C'}} \\ y_{\text{C'}} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} cos(120^\circ) & -sen(120^\circ) \\ sen(120^\circ) & cos(120^\circ) \end{bmatrix}}_{\text{Matriz rotação}} . \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \\ \therefore \text{C'} = (x_{\text{C'}}, y_{\text{C'}}) &= \left(\frac{-2-3\sqrt{3}}{2}, \frac{2\sqrt{3}-3}{2} \right).\end{aligned} \quad (72)$$

Como vemos, a isometria tem aplicação direta nas operações entre matrizes, e podemos destacar a operação de soma e de multiplicação entre as matrizes. O tópico de isometria não é abordado por alguns livros, inclusive o livro adotado pela escola na qual fizemos a pesquisa. Com isso, nossa proposta é deixar como atividade a aplicação relacionada a esse conteúdo e que podem ser inspirado nos exemplos mostrados anteriormente.

No próximo capítulo, apresentaremos as atividades aplicadas em sala de aula, assim como suas análises. Por conta do calendário, não foi possível fazer aplicações sobre isometria, mas acreditamos que seja essencial fazer essas aplicações quando possível.

4 APLICAÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES

O objetivo desse capítulo é o de apresentar algumas atividades desenvolvidas em sala de aula, o público alvo assim como o direcionamento dado às aplicações de matrizes. Por fim, analisarmos informações coletadas das aplicações dos textos e a conclusão sobre a possibilidade em tratar o tópico matrizes através da abordagem de resolução de problemas.

4.1 Público alvo da pesquisa

O conteúdo abordado nessa pesquisa se refere à introdução da linguagem matricial, operações entre matrizes (com ênfase na multiplicação) e a resolução de sistemas. Essa aplicação foi feita para alunos do terceiro ano do ensino médio do Colégio Pedro II. Essa escola está localizada na cidade do Rio de Janeiro, no bairro Realengo. A aplicação foi realizada no segundo trimestre de 2017 e envolveu cinco turmas, 1301, 1303, 1307, 2304 e 2306. Os alunos que participaram tinham idade entre 17 e 19 anos e possuem rendimento escolar variado assim como nível sócio econômico.

O livro didático adotado pela equipe de matemática dessa instituição é o livro Matemática, do autor Manoel Paiva, editora Moderna, segunda edição. Para as aplicações foram utilizadas listas com problemas propostos.

4.2 Como as aulas e as atividades foram conduzidas

Com a intenção de comparar o rendimento das cinco turmas, as separamos em dois grupos. No grupo 1, composto pelas turmas 1307 e 2304, as aplicações da primeira e da quarta lista foram feitas depois das aulas teóricas. No grupo 2, composto pelas turmas 1301, 1303 e 2306, as aplicações da primeira e da quarta lista foram realizadas antes da explicação formal do conteúdo teórico. Podemos dizer que no grupo 1, as aplicações foram feitas embasadas no ensino de matrizes para a resolução de problemas, já no grupo 2 as aplicações consistem no ensino de matrizes através da resolução de problemas. De modo geral, essas aplicações possuem intenção qualitativa e são de natureza interpretativa. Os instrumentos para coleta e cálculo das estatísticas encontradas nesse capítulo foram os registros escritos pelos alunos em quatro listas de problemas que eles resolveram em sala de aula.

4.2.1 Primeira aplicação

Grupo 1:

Para o grupo 1, turmas 1307 e 2304 que contou com a participação de 53 alunos, foi realizada uma aula expositiva com as definições de Matrizes, tipos de matrizes e as operações de soma e multiplicação entre matrizes. A abordagem teórica foi feita de forma tradicional, sem nenhuma exposição de problemas. O objetivo dessa aplicação, além de gerar um material comparativo, era fundamentar a teoria e verifcar se os alunos conseguiriam resolver os problemas reconhecendo as definições e operações estudadas em sala, dando real significado ao aprendizado. A primeira lista estudada contém 4 problemas envolvendo soma de matrizes e multiplicação de matrizes, como podemos encontrar no apêndice B. A seguir, apresentamos os problemas, com algumas das soluções desenvolvidas pelos alunos e seus principais questionamentos.

Em um primeiro momento, é solicitado aos alunos que tivessem total comprometimento com a resolução dos problemas propostos e que prestassem atenção em cada detalhe. Conversei com eles sobre as estratégias utilizadas para a resolução de um problema genérico. Em seguida, entreguei as listas aos alunos e comecei a aplicação.

Problema 1: Observando a tabela abaixo, considere cinco cidades A, B, C, D e E; vamos indexar as linhas e colunas nessa tabela (73) 5x5 por essas cidades e colocar 1 na posição definida pela linha X e coluna Y se a cidade X possui uma estrada que a liga diretamente à cidade Y e vamos colocar 0 (zero), caso X não esteja ligada diretamente por uma estrada à cidade Y. Colocaremos também 1 na diagonal principal.

	A	B	C	D	E
A	1	0	1	1	0
B	0	1	1	0	1
C	0	1	1	0	1
D	1	1	0	1	1
E	0	1	0	0	1

. (73)

Observando a tabela dada por (73), determine quantos caminhos distintos há da cidade A para a cidade E, sabendo que em um caminho só é possível passar por alguma cidade uma única vez.

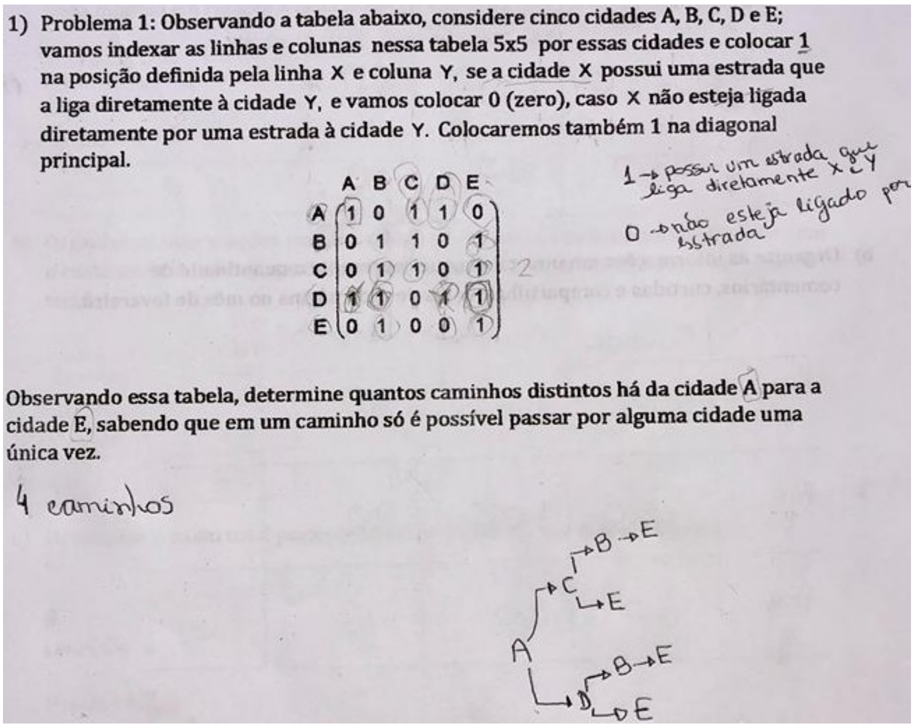
O objetivo desse problema é abordar a leitura de uma matriz e a interpretação das informações contidas nela.

Os alunos resolveram esse problema sem maiores dificuldades, sendo que alguns perguntaram se poderiam fazer caso a caso ou se haveria alguma técnica para achar todos os caminhos. Pedi para eles tentarem resolver da forma mais simples e intuitiva possível.

Ao final, todos os alunos conseguiram solucionar, sendo que alguns apresentaram parte da questão, não contando todos os caminhos possíveis como pode ser observado na figura 26, enquanto que outros recorreram ao auxílio do desenho, utilizando de certa forma, e sem saber, a teoria de grafos como é visto na figura 27.

De maneira geral, neste tipo de problema os alunos não tiveram dificuldades na sua interpretação e mesmo na busca de sua solução, mesmo que parcial.

Figura 26 - Solução incompleta de um aluno para o problema 1



1) **Problema 1: Observando a tabela abaixo, considere cinco cidades A, B, C, D e E; vamos indexar as linhas e colunas nessa tabela 5x5 por essas cidades e colocar 1 na posição definida pela linha X e coluna Y, se a cidade X possui uma estrada que a liga diretamente à cidade Y, e vamos colocar 0 (zero), caso X não esteja ligada diretamente por uma estrada à cidade Y. Colocaremos também 1 na diagonal principal.**

	A	B	C	D	E
A	1	0	1	1	0
B	0	1	1	0	1
C	0	1	1	0	1
D	1	1	0	1	1
E	0	1	0	0	1

1 → possui um estrada que liga diretamente X e Y

0 → não esteja ligado por estrada

Observando essa tabela, determine quantos caminhos distintos há da cidade A para a cidade E, sabendo que em um caminho só é possível passar por alguma cidade uma única vez.

4 caminhos

A → C → B → E

A → C → E

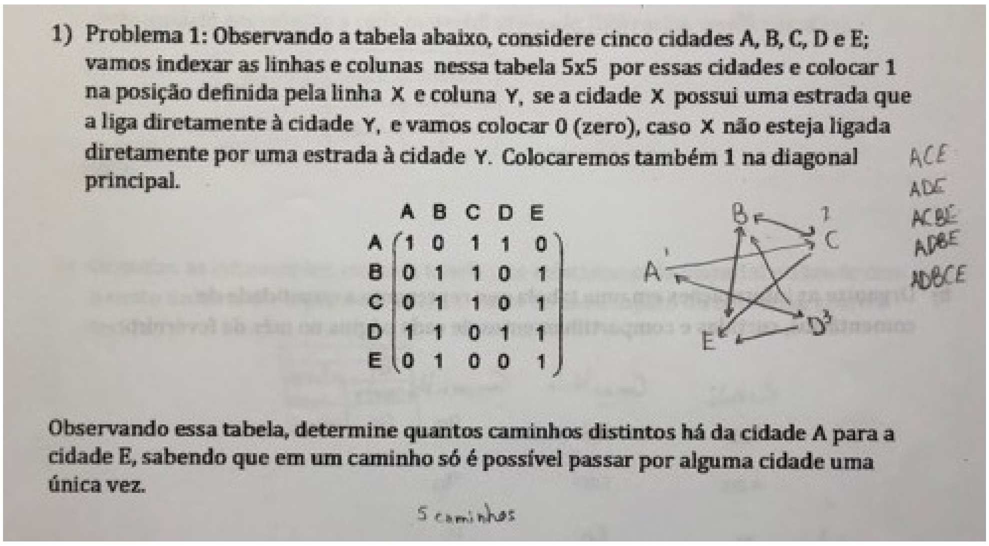
A → D → B → E

A → D → E

Fonte: O autor, 2018.

<u>Problema 2</u>: Uma pessoa possui 3 páginas em uma rede social e quer criar algumas métricas para medir o desempenho delas. Quando é publicado algo nessa rede social, podemos considerar que existam 3 categorias básicas de interação: os comentários, as curtidas e os compartilhamentos, e com esses dados é possível ter um controle de desempenho dessas páginas. Sabe-se que no mês de janeiro de um determinado ano a página 1 obteve 100 comentários, 200 curtidas e 55 compartilhamentos, a página 2 obteve 250 comentários, 310 curtidas e 60 compartilhamentos, a página 3 obteve 20 comentários, 30 curtidas e 10 compartilhamentos. No mês de fevereiro desse mesmo ano, a página 1 obteve 120 comentários, 260 curtidas e 90 compartilhamentos, a página 2 obteve 100 comentários, 400 curtidas e 90 compartilhamentos e a página 3 obteve 60 comentários, 20 curtidas e 15 compartilhamentos. Curiosamente, no mês de março desse mesmo ano, cada página obteve um total de comentários, curtidas e compartilhamentos igual a soma dos dois meses anteriores.

Figura 27 - Solução correta de um aluno para o problema 1



1) Problema 1: Observando a tabela abaixo, considere cinco cidades A, B, C, D e E; vamos indexar as linhas e colunas nessa tabela 5x5 por essas cidades e colocar 1 na posição definida pela linha X e coluna Y, se a cidade X possui uma estrada que a liga diretamente à cidade Y, e vamos colocar 0 (zero), caso X não esteja ligada diretamente por uma estrada à cidade Y. Colocaremos também 1 na diagonal principal.

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

ACE
ADE
ACBE
ADBE
ADBCE

Observando essa tabela, determine quantos caminhos distintos há da cidade A para a cidade E, sabendo que em um caminho só é possível passar por alguma cidade uma única vez.

5 caminhos

Fonte: O autor, 2018.

a) Organize as informações em uma tabela que represente a quantidade de comentários, curtidas e compartilhamentos de cada página no mês de janeiro;

b) Organize as informações em uma tabela que represente a quantidade de comentários, curtidas e compartilhamentos de cada página no mês de fevereiro;

c) Organize as informações em uma tabela que represente a quantidade de comentários, curtidas e compartilhamentos de cada página no mês de março.

A intenção desse problema é abordar a utilidade de organização das matrizes e a soma de matrizes através de um problema.

Os alunos não tiveram dificuldade em resolver esse problema sendo que alguns fizeram perguntas tais como:

"É para escrever em forma de matriz ou tabela?"

"As páginas ficam representadas na linha ou na coluna?"

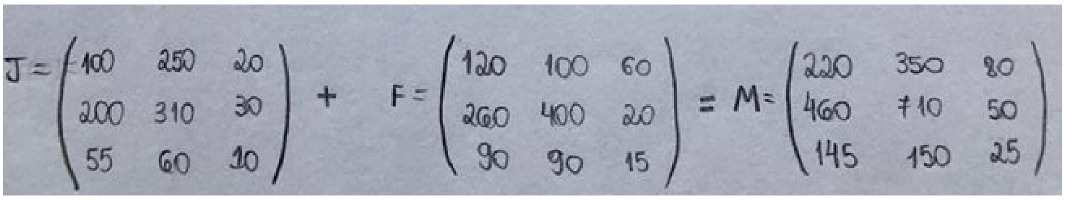
Para responder a primeira pergunta, relembrei aos alunos que quando definimos matrizes, o termo utilizado inicialmente foi tabela. Logo, eles podiam representar o conjunto de informações no formato de matriz ou tabela, pois estes são objetos similares.

Quanto à segunda pergunta, comuniquei a eles que poderíamos representar as páginas 1, 2 e 3 pelas colunas ou pelas linhas. No entanto, sugeri a eles que colocassem as páginas na horizontal (linha) e as interações (comentários, curtidas e compartilhamentos) na vertical (colunas).

Durante a aplicação perguntei aos alunos como eles estavam resolvendo a letra c.

A grande maioria dos alunos, nas duas turmas, justificaram a resposta através da soma das tabelas ou soma das matrizes encontradas nos itens a e b como visto na figura 28. Vale ressaltar que nessa solução o aluno utilizou sinais de igualdade de forma equivocada.

Figura 28 - Solução correta de um aluno para o problema 2 - Letra c



Fonte: O autor, 2018.

Em relação aos erros, maior parte deles estão relacionado à falta de atenção ou causados por soma equivocadas.

Problema 3: Uma indústria utiliza borracha, couro e tecido para fazer três modelos de sapatos. No modelo 1 são feitos 2 sapatos de borracha, 1 de couro e 1 de tecido. No modelo 2 é feito 1 sapato de borracha, 2 de couro e nenhum de tecido. No modelo 3 são feitos 2 sapatos de borracha, nenhum de couro e 2 de tecido. O custo de cada sapato de borracha é de R$10,00, cada sapato de couro tem o custo de R$50,00 e cada sapato de tecido tem o custo de R$30,00.

a) Organize as informações em uma tabela que represente a quantidade sapatos de cada modelo em relação a cada material utilizado (borracha, couro e tecido).

b) Organize as informações em uma tabela que relacione cada material utilizado com o custo unitário do sapato. Ou ainda, o custo de cada sapato de borracha, couro e tecido.

c) Determine o custo total para confeccionar cada um dos modelo de sapato.

d) Organize os dados encontrados no item anterior em uma tabela.

O objetivo desse problema era abordar a multiplicação de matrizes através de uma situação problema para que os alunos percebessem a utilização da multiplicação de matrizes.

Em um primeiro momento, alguns alunos se mostraram confusos ao organizar as tabelas, orientei aos alunos que eles poderiam organizar da forma que eles desejassem, mas por uma questão de padronização eles poderiam organizar os elementos do item a colocando os modelos (modelo 1, modelo 2 e modelo 3) na horizontal e os materiais (borracha, couro e tecido) na vertical. Já na letra b, comentei que eles poderiam organizar a tabela (matriz) com os materiais (borracha, couro e tecido) na horizontal e o custo na vertical. Alguns alunos não seguiram essa dica. Pedi aos alunos que tivessem atenção para o objetivo de cada item. O objetivo desse problema em que os alunos percebessem que para achar a solução adequada na letra c, poderíamos multiplicar as matrizes obtidas nos itens a e b, respectivamente, como colocado a seguir.

Solução:

a)

	Borracha	Couro	Tecido
Modelo 1	2	1	1
Modelo 2	1	2	0
Modelo 3	2	0	2

$$\simeq \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \tag{74}$$

b)

	Preço unitário em R$
Borracha	10,00
Couro	50,00
Tecido	30,00

$$\simeq \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 10,00 \\ 50,00 \\ 30,00 \end{bmatrix}. \tag{75}$$

c)

$$\mathrm{A} \ . \ \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 10,00 \\ 50,00 \\ 30,00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100,00 \\ 110,00 \\ 80,00 \end{bmatrix}. \tag{76}$$

d)

	Custo total em R$
Modelo 1	100
Modelo 2	110
Modelo 3	80

$$= \begin{bmatrix} 100,00 \\ 110,00 \\ 80,00 \end{bmatrix}. \tag{77}$$

Este objetivo não foi alcançado. Os alunos não perceberam que a solução da letra c era resultado da multiplicação das matrizes obtidas nas letras a e b. Apenas um aluno da turma 1307 me questionou sobre esse resultado e perguntou se podia obtê-lo pela multiplicação de matrizes. Outros alunos fizeram outras perguntas, e a partir delas, tivemos o seguinte diálogo:

- "Professor, eu não estou conseguindo relacionar a matrizes, pode fazer pela lógica?"

- "Vocês podem resolver interpretando os dados, tentando relacionar os elementos das duas tabelas e a partir dessa interpretação observar se há alguma relação entre as matrizes."

- "É para achar o custo total dos materias separados na letra c?"

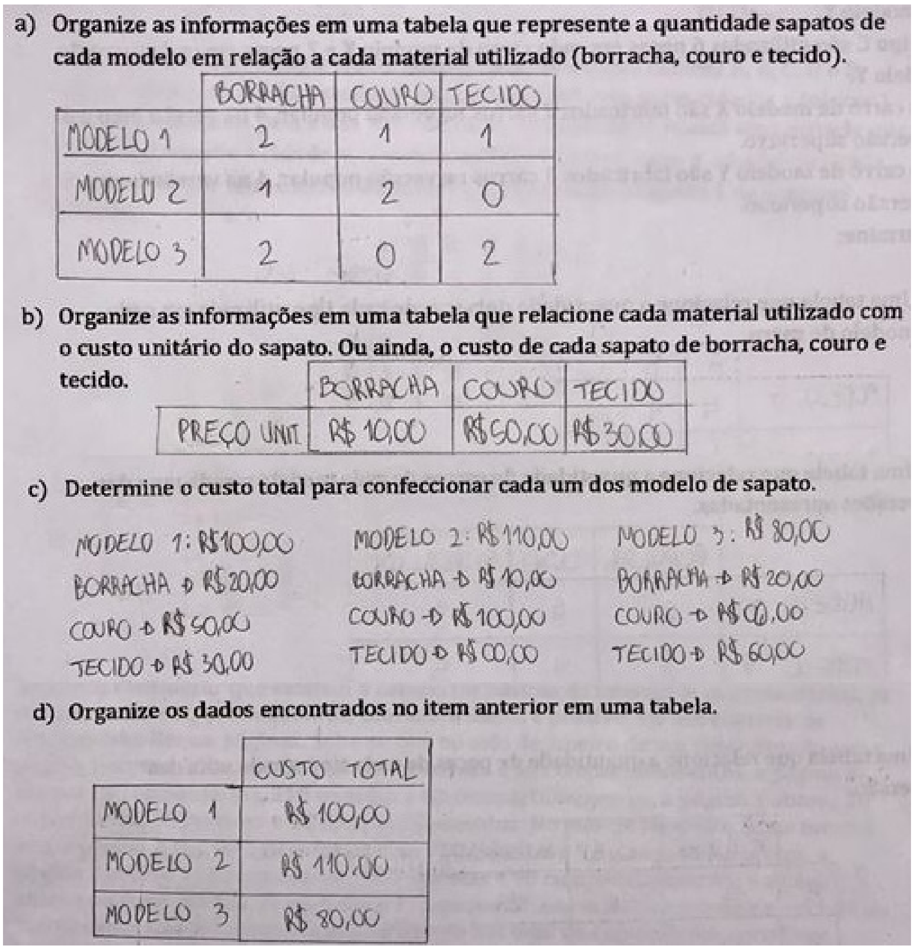
- "Prestem atenção no comando da questão. Na letra c o enunciado está claro."

- "A ideia desse trabalho é organizar ideias para fazer o ENEM?"

- "A resolução de problemas, nos ajuda em diversas atividades, inclusive no vestibular. Ao organizar ideias, vocês já estão treinando para o vestibular, principalmente para o ENEM."

Em geral, os alunos não tiveram dificuldade em resolver o problema 3, mesmo sem a utilização das operações entre matrizes. Parte dos alunos resolveu o problema interpretando os dados, coletando e organizando as informações em tabelas. Podemos observar na figura 29 o modelo de solução mais utilizado pelos alunos.

Figura 29 - Solução correta de um aluno para o problema 3



a) Organize as informações em uma tabela que represente a quantidade sapatos de cada modelo em relação a cada material utilizado (borracha, couro e tecido).

	BORRACHA	COURO	TECIDO
MODELO 1	2	1	1
MODELO 2	1	2	0
MODELO 3	2	0	2

b) Organize as informações em uma tabela que relacione cada material utilizado com o custo unitário do sapato. Ou ainda, o custo de cada sapato de borracha, couro e tecido.

	BORRACHA	COURO	TECIDO
PREÇO UNIT.	R$ 10,00	R$50,00	R$30,00

c) Determine o custo total para confeccionar cada um dos modelo de sapato.

MODELO 1: R$100,00
BORRACHA → R$20,00
COURO → R$ 50,00
TECIDO → R$ 30,00

MODELO 2: R$110,00
BORRACHA → R$ 10,00
COURO → R$100,00
TECIDO → R$ 00,00

MODELO 3: R$ 80,00
BORRACHA → R$ 20,00
COURO → R$ 00,00
TECIDO → R$ 60,00

d) Organize os dados encontrados no item anterior em uma tabela.

	CUSTO TOTAL
MODELO 1	R$ 100,00
MODELO 2	R$ 110,00
MODELO 3	R$ 80,00

Fonte: O autor, 2018.

Reforcei aos alunos que a intenção da letra c, era encontrar uma tabela que relacionasse apenas cada modelo de sapato com seu custo, conforme a tabela a seguir.

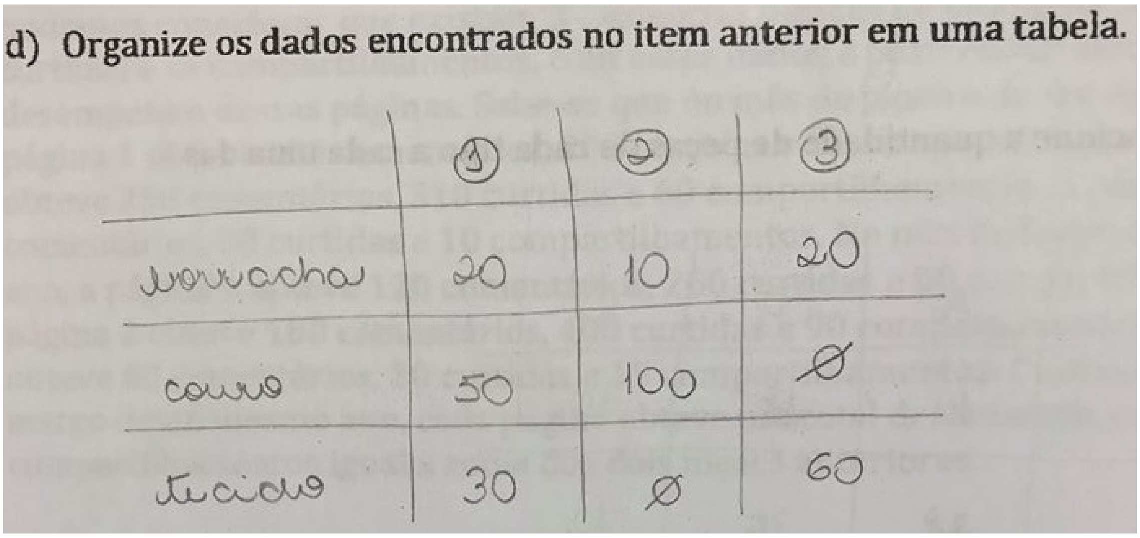
Tabela 9 - Modelo × Custo.

	Custo total em R$
Modelo 1	
Modelo 2	
Modelo 3	

Fonte: O autor, 2018.

No entanto alguns alunos o fizeram relacionando o preço de cada modelo a cada um dos materiais, borracha, couro e tecido (figura 30), o que consideramos uma solução incompleta.

Figura 30 - Solução incompleta de um aluno para o problema 3



d) Organize os dados encontrados no item anterior em uma tabela.

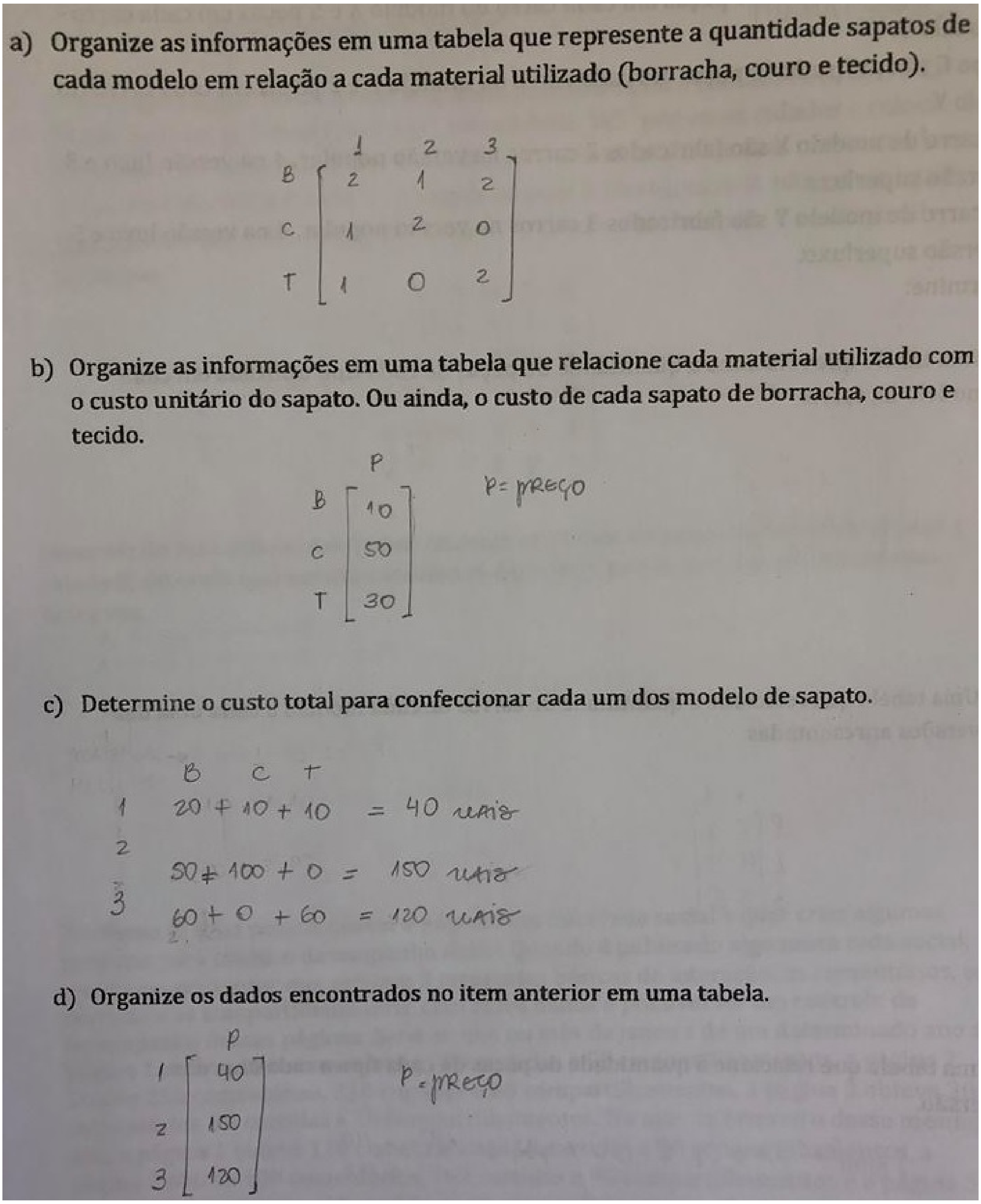
	1	2	3
borracha	20	10	20
couro	50	100	∅
tecido	30	∅	60

Fonte: O autor, 2018.

Entre as soluções equivocadas, podemos destacar a solução encontrada na figura 31.

Este aluno ao calcular o custo total de cada modelo não observou que o preço unitário do sapato era distinto em relação ao material utilizado. Calculou o custo do modelo 1, por exemplo, adotando o preço de cada sapato de borracha, couro e tecido igual a R$ 10,00. Na verdade, essa solução não adota a diferenciação dos preços entre os modelos, tornando desnecessária a separação dos sapatos pelo material, o que caracteriza uma interpretação equivocada do problema. Nesse caso, faltou atenção e entendimento na etapa de elaboração do plano, pois ele não associou os dados estabelecidos no enunciado com o que foi pedido. Ao perceber esse equivoco, torna-se importante que o professor assuma seu papel de orientador. Dessa forma, o aluno tende a ter mais precisão na resolução de problemas, relacionando os dados do enunciado com o que foi pedido.

Figura 31 - Solução incompleta de um aluno para o problema 3



a) **Organize as informações em uma tabela que represente a quantidade sapatos de cada modelo em relação a cada material utilizado (borracha, couro e tecido).**

$$\begin{array}{c} \\ B \\ C \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

b) **Organize as informações em uma tabela que relacione cada material utilizado com o custo unitário do sapato. Ou ainda, o custo de cada sapato de borracha, couro e tecido.**

$$\begin{array}{c} \\ B \\ C \\ T \end{array} \begin{array}{c} P \\ \begin{bmatrix} 10 \\ 50 \\ 30 \end{bmatrix} \end{array}$$

P= preço

c) **Determine o custo total para confeccionar cada um dos modelo de sapato.**

	B	C	T	
1	20 +	10 +	10	= 40 reais
2	50 +	100 +	0	= 150 reais
3	60 +	0 +	60	= 120 reais

d) **Organize os dados encontrados no item anterior em uma tabela.**

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} P \\ \begin{bmatrix} 40 \\ 150 \\ 120 \end{bmatrix} \end{array}$$

P = preço

Fonte: O autor, 2018.

Para reforçar a multiplicação de matrizes, colocamos no quarto problema, uma situação envolvendo essa operação, mas dessa vez o problema relaciona a multiplicação de uma matriz 3x2 com uma matriz 2x3, o que teoricamente causa mais dificuldade para os alunos. A seguir, vemos o problema 4, assim como algumas soluções dos alunos para esse problema.

Problema 4: Uma indústria automobilística produz carros nos modelos X e Y nas versões popular, luxo e superluxo. Nesses carros, são utilizadas na montagem peças dos tipos A, B e C.

- Do tipo A são utilizadas 4 peças em cada carro do modelo X e 3 peças em cada carro do modelo Y.

- Do tipo B são utilizadas 4 peças em cada carro do modelo X e 5 peças em cada carro do modelo Y.

Do tipo C são utilizadas 6 peças em cada carro do modelo X e 2 peças em cada carro do modelo Y.

- No carro de modelo X são fabricados 2 carros na versão popular, 4 na versão luxo e 3 na versão superluxo.

- No carro de modelo Y são fabricados 3 carros na versão popular, 4 na versão luxo e 5 na versão superluxo.

Determine:

a) Uma tabela que relacione a quantidade de peças de cada tipo utilizada em cada modelo de carro.

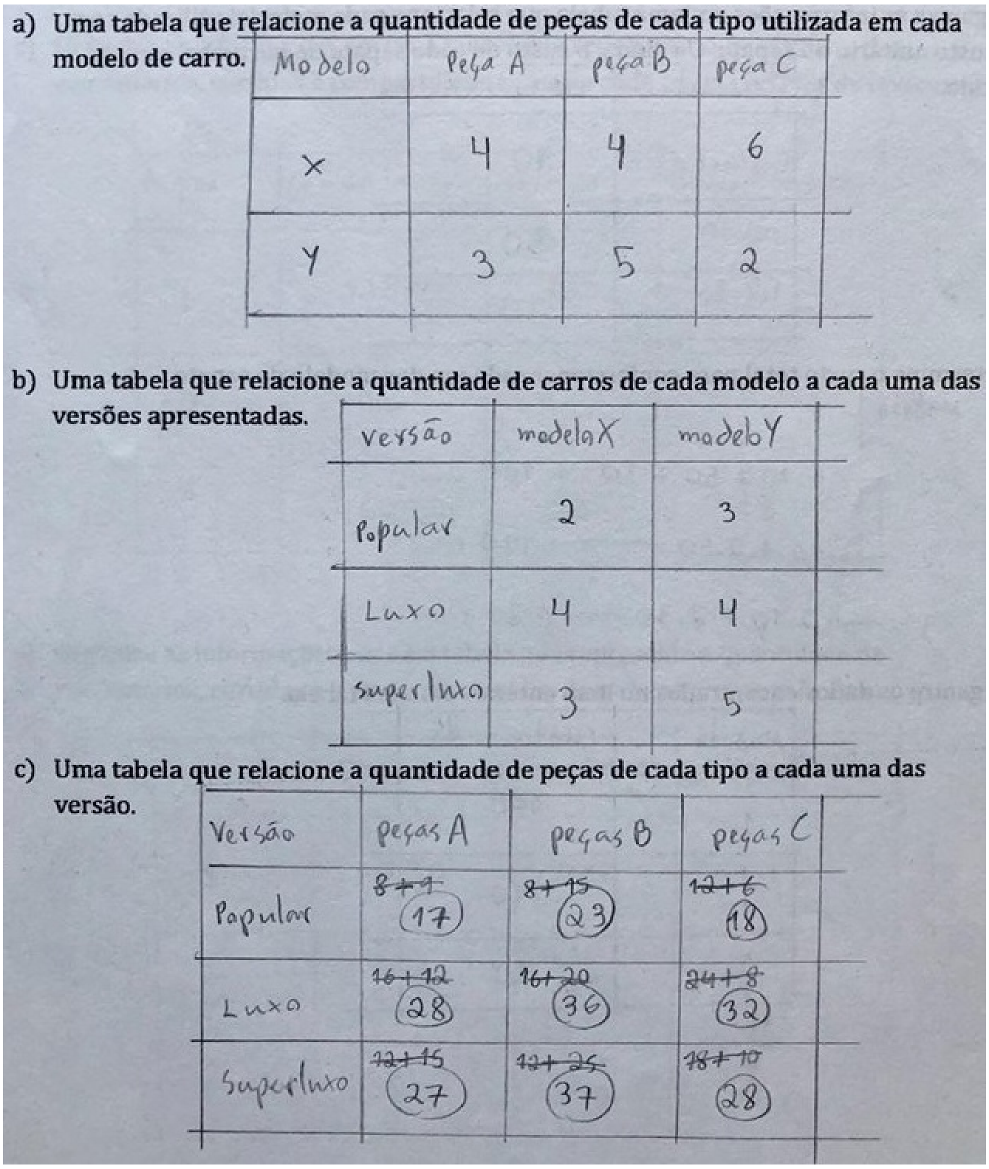
b) Uma tabela que relacione a quantidade de carros de cada modelo a cada uma das versões apresentadas.

c) Uma tabela que relacione a quantidade de peças de cada tipo a cada uma das versões.

Inicialmente alguns alunos se mostraram confusos ao organizar as tabelas, comentei, novamente, que eles poderiam organizar da forma que eles desejassem, mas sugeri que na letra a, colocassem cada tipo de peça na horizontal e cada modelo de carro na vertical, na letra b, disse que eles poderiam colocar cada modelo na horizontal e cada versão de carro na vertical. Mesmo fazendo essa orientação muitos alunos não a seguiram.

Esse problema foi o que causou maior dificuldade aos alunos. Tive essa constatação avaliando as resoluções apresentadas por eles, pois em sala, os alunos não pareciam demonstrar essa dificuldade. Não fizeram muitas perguntas relevantes. Entretanto, a turma obteve sucesso e resolveu da forma esperada, como podemos notar na figura 32.

Figura 32 - Solução correta de um aluno para o problema 4



a) Uma tabela que relacione a quantidade de peças de cada tipo utilizada em cada modelo de carro.

Modelo	Peça A	peça B	peça C
X	4	4	6
Y	3	5	2

b) Uma tabela que relacione a quantidade de carros de cada modelo a cada uma das versões apresentadas.

versão	modelo X	modelo Y
Popular	2	3
Luxo	4	4
superluxo	3	5

c) Uma tabela que relacione a quantidade de peças de cada tipo a cada uma das versão.

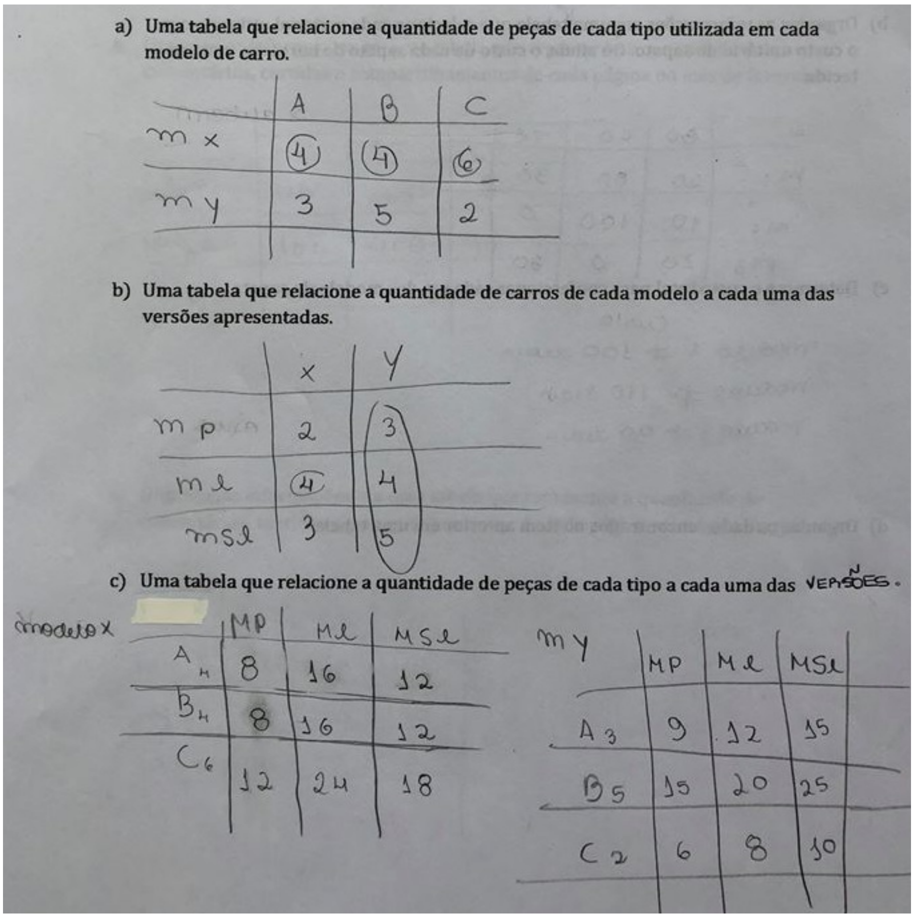
Versão	peças A	peças B	peças C
Popular	~~8+9~~ 17	~~8+15~~ 23	~~12+6~~ 18
Luxo	~~16+12~~ 28	~~16+20~~ 36	~~24+8~~ 32
Superluxo	~~12+15~~ 27	~~12+25~~ 37	~~18+10~~ 28

Fonte: O autor, 2018.

Alguns alunos obtiveram respostas incompletas para o item c, encontrando uma tabela que relaciona a quantidade de peças de cada tipo com cada uma das versões, considerando o modelo X separadamente do modelo Y. Podemos verificar isso na figura 33 .

É importante a valorização dessa solução. Pois pelo que podemos perceber, o aluno entendeu o problema, identificou as relações entre as matrizes ou entre as tabelas e elaborou um plano para obtenção das respostas. Para responder de acordo com o desejável, o aluno poderia, na letra c, somar as matrizes obtidas e assim chegar à resposta correta. Provavelmente o que faltou para esse aluno foi a revisão de sua solução. Se ele tivesse mais atenção poderia perceber que na letra c, pedimos uma tabela, apenas uma, que relacionasse diretamente a quantidade total de peças de cada tipo a cada uma das versões. Vale ressaltar que em sala de aula foi reforçado o objetivo de cada um dos itens do problema.

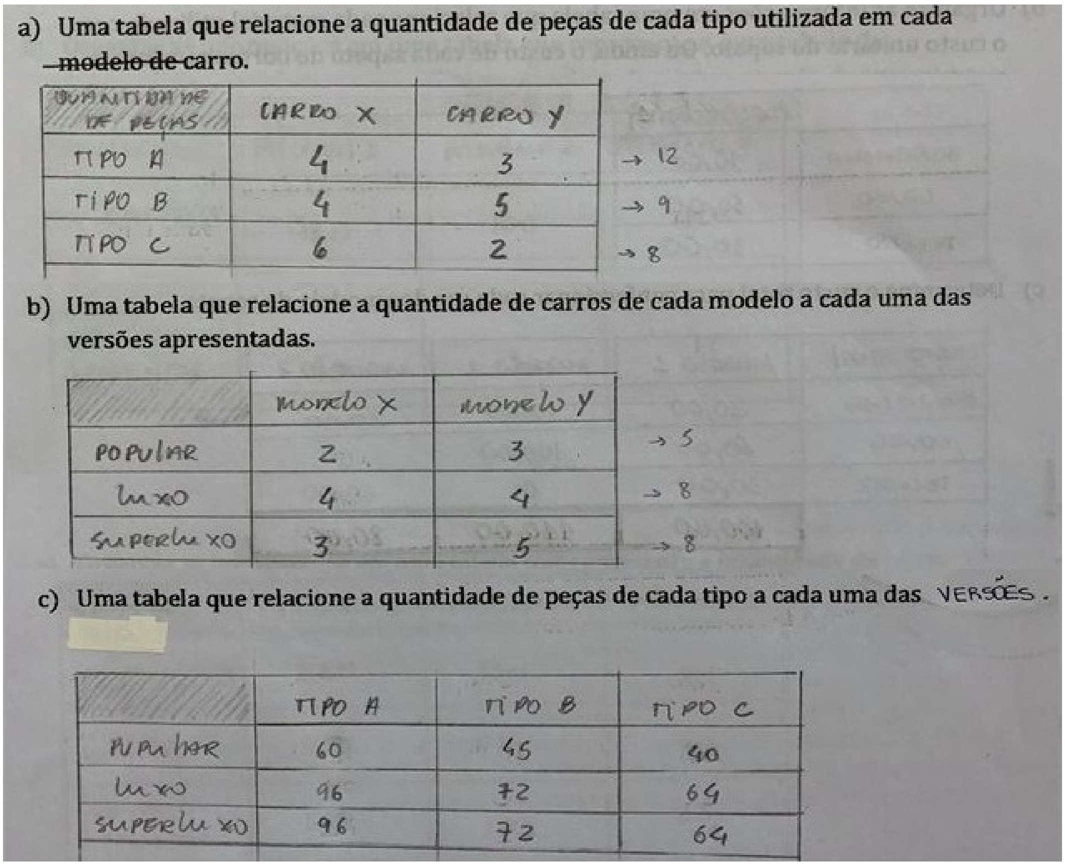
Figura 33 - Solução incompleta de um aluno para o problema 4



Fonte: O autor, 2018.

Alguns alunos não fizeram a letra c, embora todos tenham conseguido resolver a letra a e b. Vale destacar que também alguns não seguiram minha orientação de organização e padronização. Por falta de entendimento do enunciado percebemos que alguns alunos se equivocaram na solução. Podemos destacar soluções que desconsideraram a separação entre o modelo X e o Modelo Y como na figura 34 (erro comum em multiplicação de matrizes). Nesse caso, no item a o aluno desconsidera a separação entre os modelos e conta o total de peças de cada tipo no modelo X junto com o modelo Y. No item b, este mesmo aluno desconsidera a separação entre os modelos e conta o total de carros em cada versão no modelo X junto com o modelo Y. Notadamente, isso está equivocado. Pois cada modelo de carro apresenta quantidades diferentes de cada tipo de peça e a quantidade de carro de cada modelo é diferente em cada versão.

Figura 34 - Solução equivocada de um aluno para o problema 4



a) Uma tabela que relacione a quantidade de peças de cada tipo utilizada em cada ~~modelo de~~ carro.

QUANTIDADE DE PEÇAS	CARRO X	CARRO Y	
TIPO A	4	3	→ 12
TIPO B	4	5	→ 9
TIPO C	6	2	→ 8

b) Uma tabela que relacione a quantidade de carros de cada modelo a cada uma das versões apresentadas.

	modelo X	modelo Y	
POPULAR	2	3	→ 5
luxo	4	4	→ 8
superluxo	3	5	→ 8

c) Uma tabela que relacione a quantidade de peças de cada tipo a cada uma das VERSÕES.

	TIPO A	TIPO B	TIPO C
POPULAR	60	45	40
luxo	96	72	64
superluxo	96	72	64

Fonte: O autor, 2018.

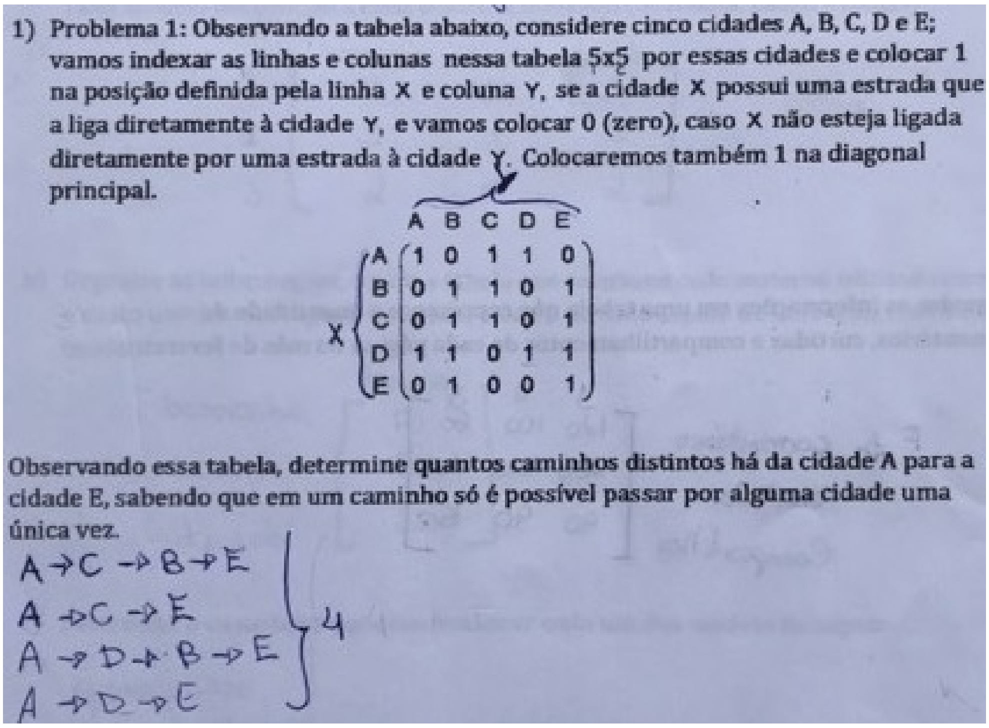
Vale evidenciar que este aluno, na primeira linha da matriz do item a, multiplicou 4 por 3. Em sua lógica, ele deveria somar 4 com 3.

Grupo 2:

Para o grupo 2, turmas 1301, 1303 e 2306 que contou com a participação de 79 alunos, a aplicação dos problemas foi feita antes da abordagem teórica sobre as operações entre matrizes. Essas turmas tiveram apenas uma aula de matrizes antes das aplicações. Nessa aula relacionamos tabelas e matrizes, assim como a linguagem utilizada em matrizes para identificar elementos a partir de sua posição (linha e coluna). Não trabalhamos as operações, assim como não tratamos das classificações entre as matrizes. Nosso objetivo é aplicar a teoria de resolução de problemas através de uma atividade de aprendizagem. Orientei aos alunos a resolverem os problemas interpretando os dados e tentando relacionar os elementos contidos nas tabelas. Antes da aplicação, conversei com os alunos brevemente sobre a teoria de resolução de problemas, destacando suas estratégias. Nesse grupo as atividades aplicadas foram as mesmas atividades aplicadas no grupo 1.

Problema 1: Nesse problema, poucos alunos não interpretaram bem o enunciado. Inicialmente, afirmaram que não existia caminho da cidade A para a cidade E. Li o enunciado com a turma e pedi a atenção deles para notar que no enunciado ele pede para determinar quantos caminhos distintos há da cidade A para a cidade E. Ele não pergunta se há caminho direto entre essas cidades. Nesse momento os alunos disseram entender o problema e começaram a resolvê-lo. Analisando as atividades, percebi que em muitos casos os alunos acharam 4 caminhos apenas, como podemos verificar nas figuras 35 e 36.

Figura 35 - Solução incompleta - Problema 1



1) **Problema 1: Observando a tabela abaixo, considere cinco cidades A, B, C, D e E; vamos indexar as linhas e colunas nessa tabela 5x5 por essas cidades e colocar 1 na posição definida pela linha X e coluna Y, se a cidade X possui uma estrada que a liga diretamente à cidade Y, e vamos colocar 0 (zero), caso X não esteja ligada diretamente por uma estrada à cidade Y. Colocaremos também 1 na diagonal principal.**

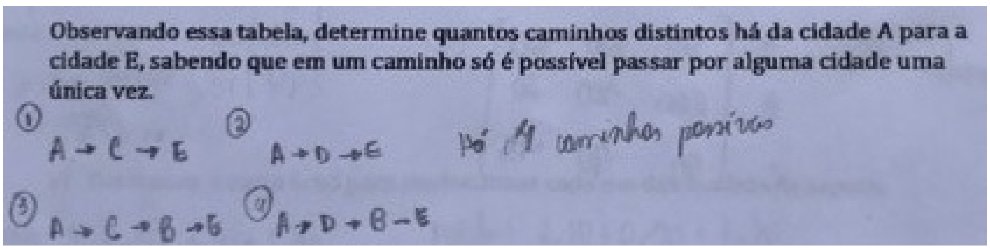
$$
\begin{array}{cc}
 & \overbrace{\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array}}^{Y} \\
X \left\{ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \right. & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Observando essa tabela, determine quantos caminhos distintos há da cidade A para a cidade E, sabendo que em um caminho só é possível passar por alguma cidade uma única vez.

$$
\left.\begin{array}{l} A \to C \to B \to E \\ A \to C \to E \\ A \to D \to B \to E \\ A \to D \to E \end{array}\right\} 4
$$

Fonte: O autor, 2018.

Figura 36 - Solução incompleta - Problema 1



Observando essa tabela, determine quantos caminhos distintos há da cidade A para a cidade E, sabendo que em um caminho só é possível passar por alguma cidade uma única vez.

1 $A \to C \to E$ 2 $A \to D \to E$ Só 4 caminhos possíveis

3 $A \to C \to B \to E$ 4 $A \to D \to B \to E$

Fonte: O autor, 2018.

<u>Problema 2</u>: Analisando as atividades e as reações em sala de aula, percebemos que esse problema foi o mais fácil para os alunos. Nenhum aluno apresentou dúvida e erro na resolução. Como dissemos, aplicamos essas atividades antes de abordar as operações entre as matrizes. Após as atividades fiz as seguintes perguntas para as turmas:

- "Vocês separaram os dados do enunciado em uma matriz ou uma tabela?"
- "Qual operação entre as tabelas/matrizes vocês usaram para responder a letra c?"
- "Como fazemos para somar duas matrizes?"

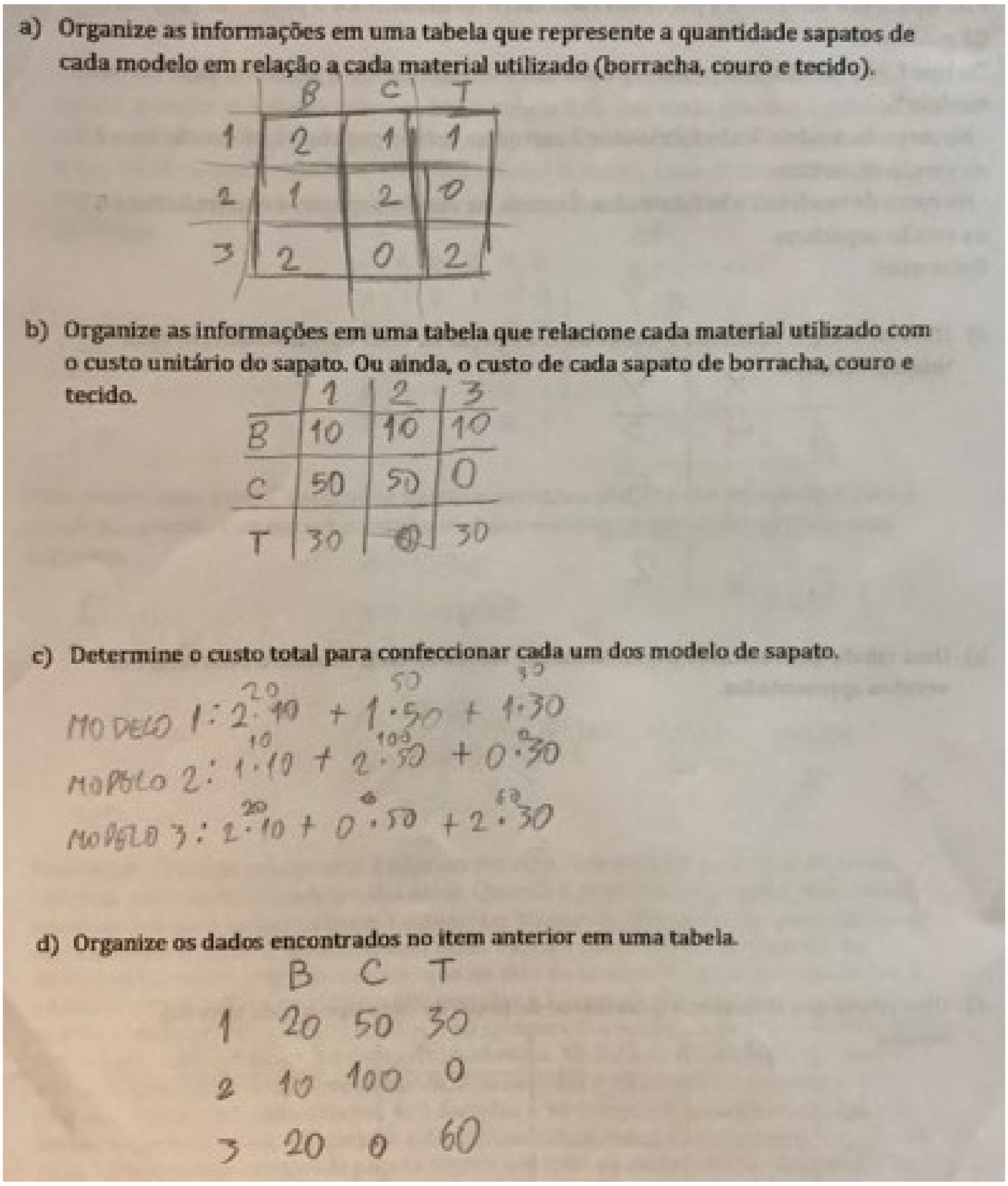
Os alunos me responderam com segurança. Para eles, matrizes e tabelas são elementos semelhantes. Em relação a operação, a resposta foi unânime. Todos afirmaram ter somado as tabelas/matrizes alegando que para somar matrizes podíamos somar elemento a elemento. Aproveitando a oportunidade, perguntei aos alunos se existia alguma condição de existência para soma de matrizes. Muitos deles responderam que as matrizes tinham que ser iguais. Notei que eles queriam dizer que elas precisam ter a mesma ordem e questionei que as matrizes do problema 2 não são iguais, rapidamente eles definiram corretamente. Alguns alunos perguntaram se poderiam colocar zero nas matrizes de ordem diferente. Disse que não. Perguntei a eles se aqui faria sentido ignorar a página 3 no mês de janeiro e ignorar a página 1 no mês de fevereiro e tentar relacionar essas matrizes para determinar a matriz que representa as interações nessas páginas no mês de março. Eles reponderam que não. Dessa forma, conseguimos chegar a uma conclusão sobre a condição de existência para soma de matrizes.

<u>Problema 3</u>: Grande parte dos alunos destas turmas resolveram o problema 3 sem grandes dificuldades, sendo que alguns apresentaram dificuldades no entendimento do enunciado, outros responderam a letra d, separando os sapatos de cada modelo em cada tipo de material conforme a figura 37. Vale ressaltar que ao ler o enunciado com eles, pedi que encontrassem uma tabela que relacionasse diretamente o custo total para confeccionar cada modelo, ou seja, uma tabela (matriz) Modelo $\times$ Custo.

Dentre as soluções incorretas, podemos destacar a solução da figura 38 na qual o aluno achou o custo total de cada tipo de material desconsiderando que o custo de cada sapato se diferencia pelo material utilizado. Nesse caso, tomando as quatro etapas descritas por Polya (2006, p. 4-5), faltou ao aluno atenção na fase de compreensão do problema (1ª fase) e da fase de verificação (4ª fase).

Ao comentar com os alunos sobre essa questão, perguntei a eles se poderíamos fazer alguma operação entre as tabelas encontradas nas letras a e b, respectivamente, o que não souberam dizer. Perguntei então, se sabiam multiplicar matrizes. Poucos alunos disseram que sim, pois tinha aprendido em curso pré-vestibular. Perguntei também se eles tinham resolvido o problema usando a multiplicação de matrizes e eles disseram que não. De fato, analisando as resoluções dos alunos, nenhuma delas apresenta como solução a multiplicação de matrizes. Eles resolveram interpretando os dados estabelecidos no enunciado.

Figura 37 - Solução incompleta - Problema 3



a) Organize as informações em uma tabela que represente a quantidade sapatos de cada modelo em relação a cada material utilizado (borracha, couro e tecido).

	B	C	T
1	2	1	1
2	1	2	0
3	2	0	2

b) Organize as informações em uma tabela que relacione cada material utilizado com o custo unitário do sapato. Ou ainda, o custo de cada sapato de borracha, couro e tecido.

	1	2	3
B	10	10	10
C	50	50	0
T	30	0	30

c) Determine o custo total para confeccionar cada um dos modelo de sapato.

MODELO 1: $\overset{20}{2 \cdot 10} + \overset{50}{1 \cdot 50} + \overset{30}{1 \cdot 30}$

MODELO 2: $\overset{10}{1 \cdot 10} + \overset{100}{2 \cdot 50} + \overset{0}{0 \cdot 30}$

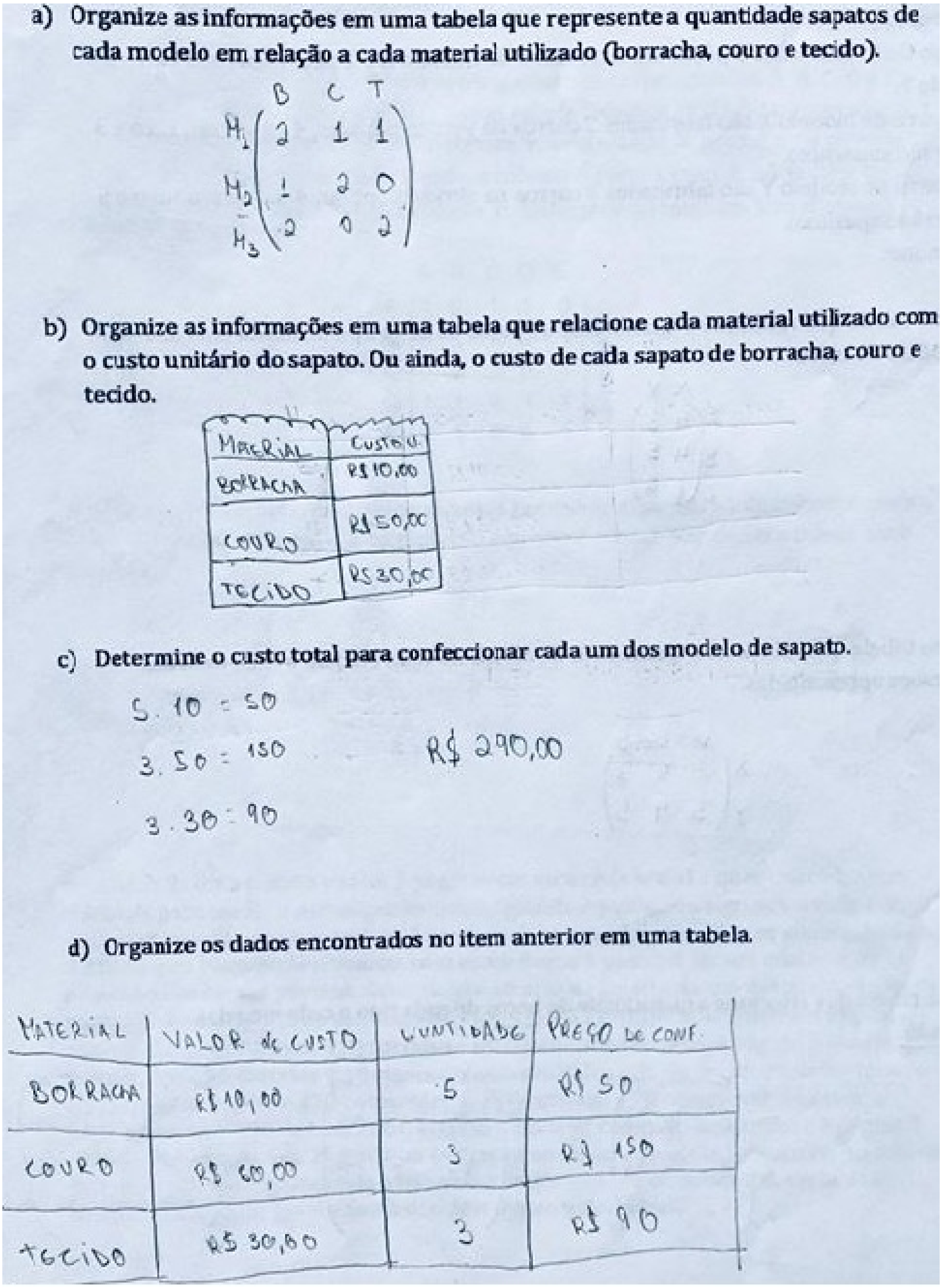
MODELO 3: $\overset{20}{2 \cdot 10} + \overset{0}{0 \cdot 50} + \overset{60}{2 \cdot 30}$

d) Organize os dados encontrados no item anterior em uma tabela.

	B	C	T
1	20	50	30
2	10	100	0
3	20	0	60

Fonte: O autor, 2018.

Figura 38 - Solução incorreta - Problema 3



a) Organize as informações em uma tabela que represente a quantidade sapatos de cada modelo em relação a cada material utilizado (borracha, couro e tecido).

$$\begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B & C & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) Organize as informações em uma tabela que relacione cada material utilizado com o custo unitário do sapato. Ou ainda, o custo de cada sapato de borracha, couro e tecido.

MATERIAL	CUSTO U.
BORRACHA	R$ 10,00
COURO	R$ 50,00
TECIDO	R$ 30,00

c) Determine o custo total para confeccionar cada um dos modelo de sapato.

5 . 10 = 50

3 . 50 = 150 R$ 290,00

3 . 30 = 90

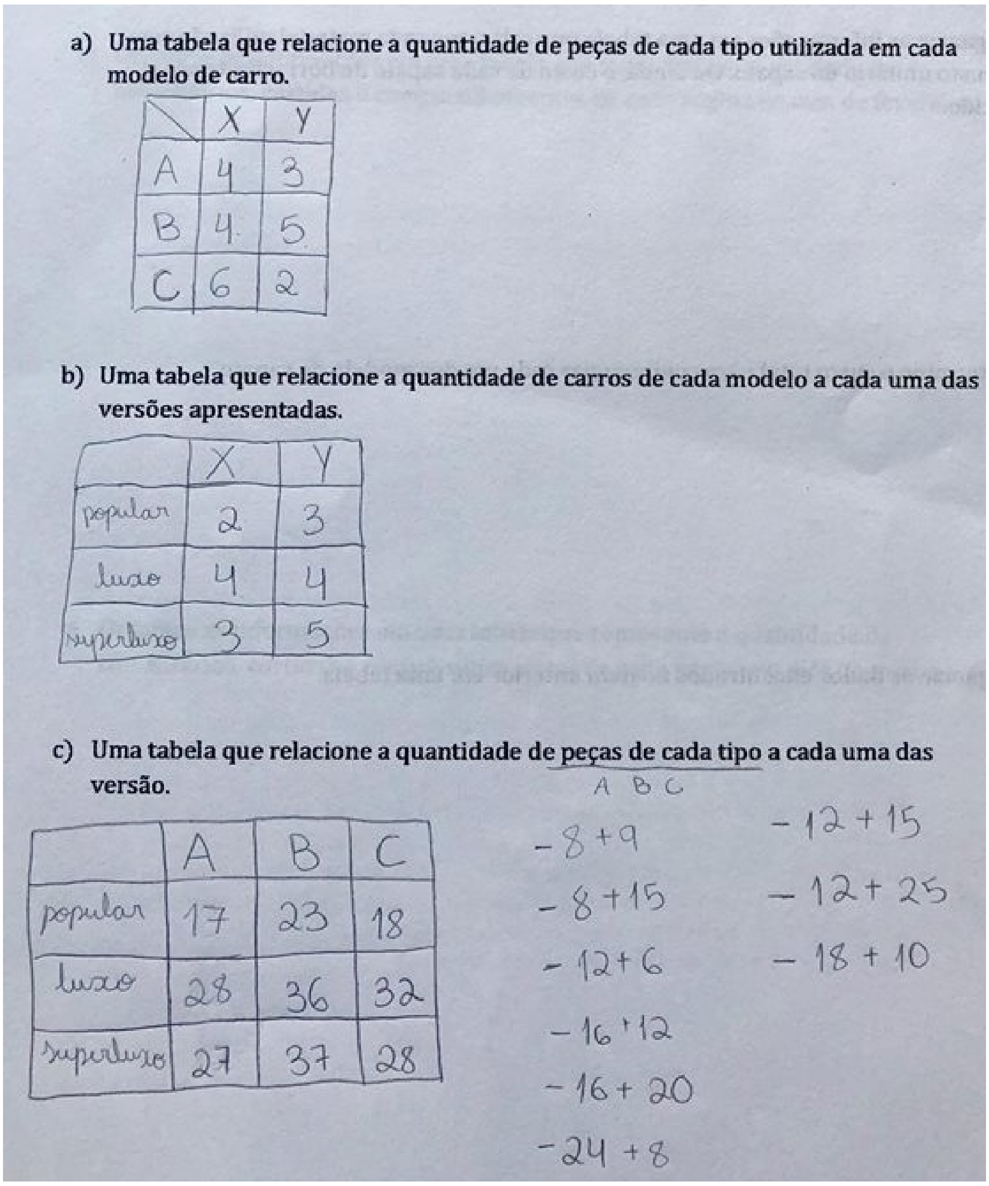
d) Organize os dados encontrados no item anterior em uma tabela.

MATERIAL	VALOR de CUSTO	QUANTIDADE	PREÇO DE CONF.
BORRACHA	R$ 10,00	5	R$ 50
COURO	R$ 60,00	3	R$ 150
TECIDO	R$ 30,00	3	R$ 90

Fonte: O autor, 2018.

Problema 4: Como já visto anteriormente o problema 4 é equivalente ao problema 3. Desse modo, é esperado que os alunos tenham desempenho parecido em ambos os problemas. Foi o que aconteceu, os alunos não tiveram muita dificuldade em resolvê-lo. Nenhum aluno alegou tê-lo resolvido por multiplicação de matrizes. Segundo os relatos eles o resolveram interpretando os dados e elaborando um plano para a resolução conforme a figura 39.

Figura 39 - Solução correta - Problema 4



a) **Uma tabela que relacione a quantidade de peças de cada tipo utilizada em cada modelo de carro.**

	X	Y
A	4	3
B	4	5
C	6	2

b) **Uma tabela que relacione a quantidade de carros de cada modelo a cada uma das versões apresentadas.**

	X	Y
popular	2	3
luxo	4	4
superluxo	3	5

c) **Uma tabela que relacione a quantidade de peças de cada tipo a cada uma das versão.**

	A	B	C
popular	17	23	18
luxo	28	36	32
superluxo	27	37	28

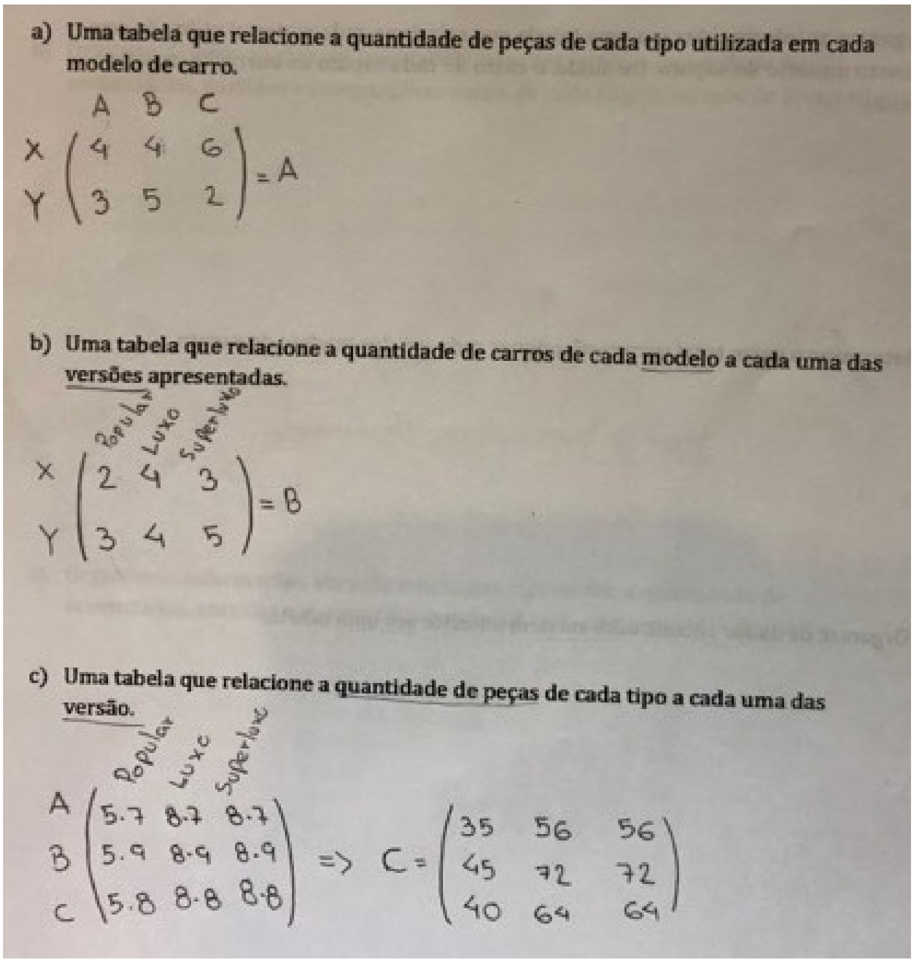
A B C

- 8 + 9
- 8 + 15
- 12 + 6
- 16 + 12
- 16 + 20
- 24 + 8
- 12 + 15
- 12 + 25
- 18 + 10

Fonte: O autor, 2018.

Entre as poucas soluções incorretas, podemos destacar a solução presente na figura 40. Nessa solução, para resolver a letra c, o aluno não levou em consideração a separação entre cada tipo de peça e os modelos de carro, assim como também não levou em consideração que a quantidade de carro de cada versão é separada por modelo de carro X e modelo Y. Podemos perceber que este aluno considerou que utilizam-se, por exemplo, 7 peças do tipo A e temos 5 carros na versão popular. Como dissemos ele ignora o fato de existirem modelos de carros diferentes, o que leva a achar um total de 35 peças utilizadas na versão popular.

Figura 40 - Solução incorreta - Problema 4

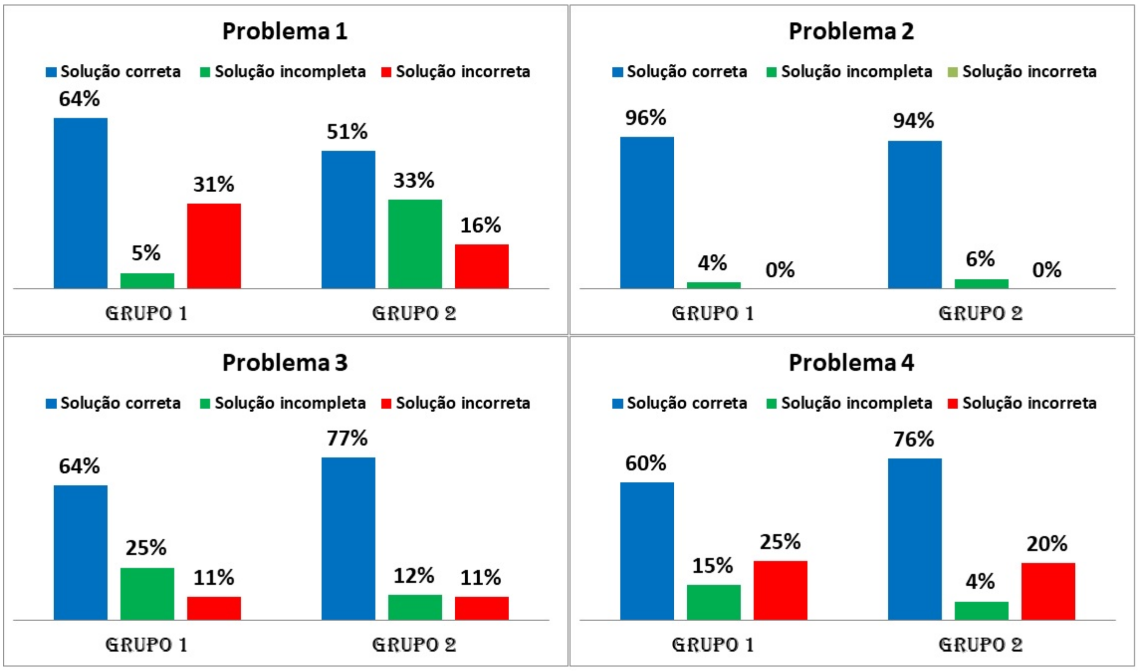


Fonte: O autor, 2018.

Com os alunos do grupo 2, utilizei o problema 4 para introduzir a multiplicação de matrizes. Resolvi inicialmente esse problema usando o mesmo artifício que eles usaram, isto é, interpretei os dados e os representei em tabelas (letra a e letra b) e por fim realizei o tratamento dessas informações, chegando a resposta na letra c. Em seguida, mostrei aos alunos a multiplicação de matriz a partir da definição e apresentamos assim uma solução para o problema 4. Esse momento foi muito produtivo, pois nos deu possibilidade de fazer as discussões sobre a multiplicação de matrizes e principalmente sobre a condição de existência para a realização dessa operação.

A seguir apresentamos as estatísticas dos resultados das aplicações dos problemas aos grupos 1 e 2. Ao todo tivemos 130 alunos envolvidos nesta atividade.

Figura 41 - Estatística da aplicação 1



Fonte: O autor, 2018.

Comparando os dados do grupo 1 com o grupo 2, verificamos que, aparentemente, os desempenhos foram semelhantes, como podemos ver na figura 41. No entanto ao avaliar as resoluções do grupo 1, percebemos que os alunos não conseguiram aplicar os conceitos teóricos previamente trabalhados aos problemas. Destacamos aqui os problemas 3 e 4 que envolviam a multiplicação de matrizes e nenhum aluno do grupo 1 utilizou a definição de multiplicação de matrizes para resolver esses problemas. Em contrapartida, os alunos do grupo 2 se mostraram mais interessados e aptos a conectar suas estratégias com a teoria sobre matrizes que foi apresentada à posteriori. Aqui lembro que foi utilizado principalmente o problema 4 como base para a introdução formal do conceito de multiplicação entre matrizes.

A partir dessas experiências, podemos concluir que o ensino de matrizes através da metodologia de resolução de problemas torna-se enriquecedor para os alunos que podem ter liberdade para expor suas ideias para os problemas propostos. Com isso os alunos podem criar habilidades como comparar, calcular, agrupar, observar, associar, reconhecer, justificar, localizar, distinguir, analisar, entre outras. O desenvolvimento dessas habilidades possibilita ao aluno aplicar e aprofundar o conteúdo já visto. Vale evidenciar que o ensino através da metodologia de resolução de problema se torna difícil em alguns casos, principalmente por conta do quantitativo de alunos em algumas turmas e por conta do conteúdo programático extenso. Dessa forma, o professor deve ter bom senso e se planejar para utilizar essa metodologia.

4.2.2 Segunda aplicação

Após as discussões sobre a primeira aplicação fizemos uma lista de exercícios de soma e multiplicação de matrizes além de abordar a teoria de matrizes inversas, seguida de uma segunda aplicação. O objetivo dessa aplicação é o de aprofundar o conceito de multiplicação de matrizes além de buscar uma motivação para as discussões sobre matrizes inversas. Nessa aplicação participaram 34 alunos do primeiro grupo e 78 alunos do segundo grupo. Lembramos que na primeira aplicação separamos as turmas em dois grupos. No primeiro aplicamos os problemas depois da abordagem teórica de soma e multiplicação de matrizes enquanto que no segundo grupo a aplicação foi realizada antes da abordagem teórica. Nessa aplicação, por conta do calendário, não foi possível trabalhar o ensino de matrizes através da resolução de problemas no grupo 2. Podemos encontrar a lista de problemas utilizada nessa aplicação no apêndice C.

Ao avaliar todo o material feito com as resoluções dos alunos notamos que o desempenho de ambos os grupos foi bastante similar. A seguir faremos os comentários sobre as aplicações dessa lista onde abordamos dois problemas. Faremos também as comparações entre os grupos.

O problema 1 é uma adaptação de uma questão que foi do vestibular da UERJ realizado em 1997.

Problema 1: (UERJ 1997 - adaptado) Observe os quadros I (tabela 10) e II (tabela 11), anunciados em uma livraria.

Tabela 10 - Quadro I

Quantidade	Edição luxo	Edição bolso
Livro A	76	240
Livro B	50	180

Fonte: http://www.vestibular.uerj.br, 2018.

Tabela 11 - Quadro II

Preço Unitário (em Reais)	Regular	Oferta
Ed. Luxo	8,00	6,00
Ed. Bolso	2,00	1,00

Fonte: http://www.vestibular.uerj.br, 2018.

a) Supondo que todos os livros A foram vendidos ao preço regular e todos os livros B foram vendidos ao preço de oferta, calcule a quantia arrecadada pela livraria na venda de todos esses livros.

b) Considere agora o quadro III (tabela 12), que indica a quantia arrecadada na venda de certa quantidade dos livros A e B (valores em reais).

Tabela 12 - Quadro III

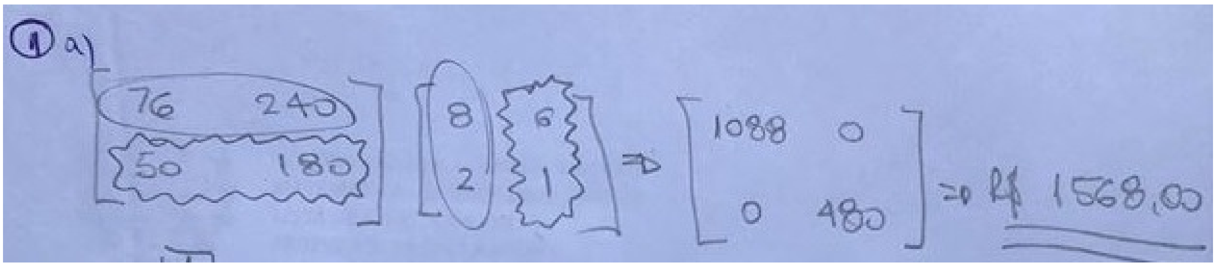
	Preço (Regular)	Preço (Oferta)
Livro A	720,00	440,00
Livro B	560,00	340,00

Fonte: http://www.vestibular.uerj.br, 2018.

Utilizando esses dados e os apresentados no quadro II (tabela 11), calcule a quantidade vendida do livro A (edição de luxo) e a quantidade vendida do livro B (edição de bolso).

Os alunos não mostraram dificuldades em resolver o item a, e destacamos na figura (42) um exemplo de solução correta de uma aluna. Nessa solução ela considerou todas as vendas do livro A no preço regular, encontrando o valor total por essa venda igual a R$ 1088,00 e todas as vendas do livro B no preço oferta, encontrando o valor total por essa venda igual a R$ 480,00. Desse modo, somando esses dois valores obteve uma venda no total de R$ 1568,00, considerando a venda dos Livros A e B.

Figura 42 - Solução correta - Problema 1 (a)



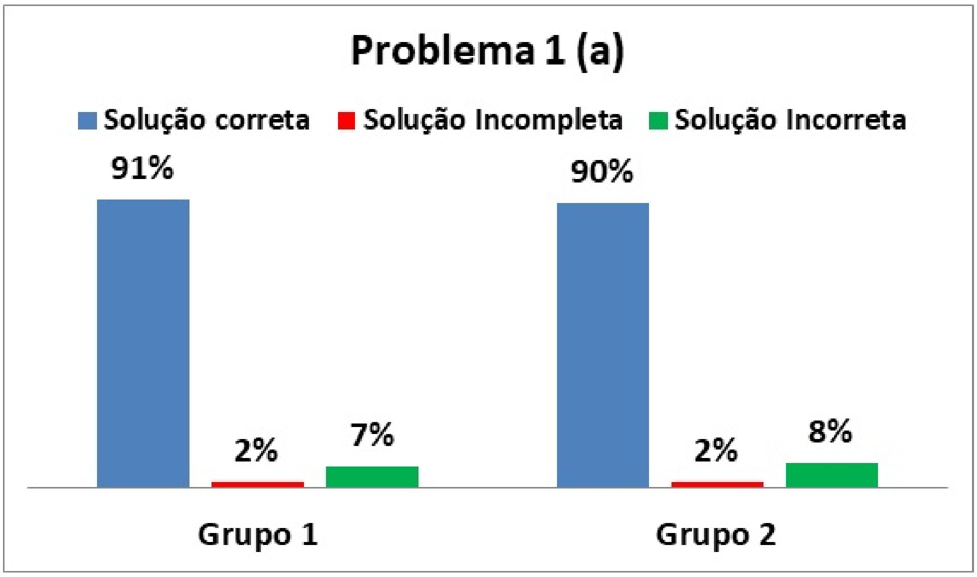
Fonte: O autor, 2018

Os grupos mostraram rendimento parecido nessa questão. Podemos notar essa similaridade observando as estatísticas desses grupos conforme a figura 43.

Antes dos alunos começarem a resolução do problema, eu o li com eles e destaquei que no item b o quadro II (tabela 11) e o quadro III (tabela 12) eram dados mas não sabíamos as quantidades de livros A e livros B em ambas as edições (luxo e bolso).

Os alunos ao resolverem esse problema não mostraram dificuldades e não fizeram perguntas relevantes. Apenas um aluno do grupo 2 me perguntou se a matriz correspondente ao quadro I multiplicada pela matriz correspondente do quadro II resultaria na Matriz correspondente ao quadro III. Orientei a esse aluno que verificasse se ao fazer isso, o valor total gasto em cada modelo de livro no preço regular e oferta, considerando a quantidade do quadro I, estaria de acordo com o valor exposto no quadro III. Relembrei ainda que o comando do item b, pede exatamente a quantidade de livro A (edição luxo) e de livro B (edição bolso).

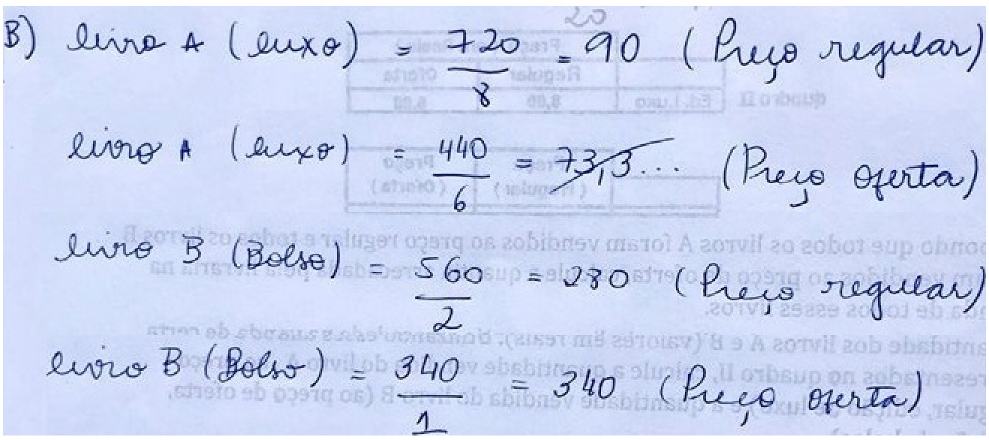
Figura 43 - Estatística da aplicação 2 - Problema 1 (a).



Fonte: O autor, 2018.

A maior parte dos alunos resolveu de forma correta o item b. Porém, analisando a resolução dos alunos, notamos que alguns não levaram em consideração a quantidade de livros do tipo A (edição bolso) e livros do tipo B (edição luxo). Na solução apresentada na figura 44 o aluno supôs não haver livro do tipo A na edição bolso e calculou a quantidade de livros em duas hipóteses: vendendo no preço regular ou no preço oferta. De forma análoga, ele não considerou a quantidade de livro do tipo B na edição luxo. Podemos notar nessa solução que o aluno descarta a venda do livro A no preço oferta, pois ele não encontrou uma quantidade inteira de livros.

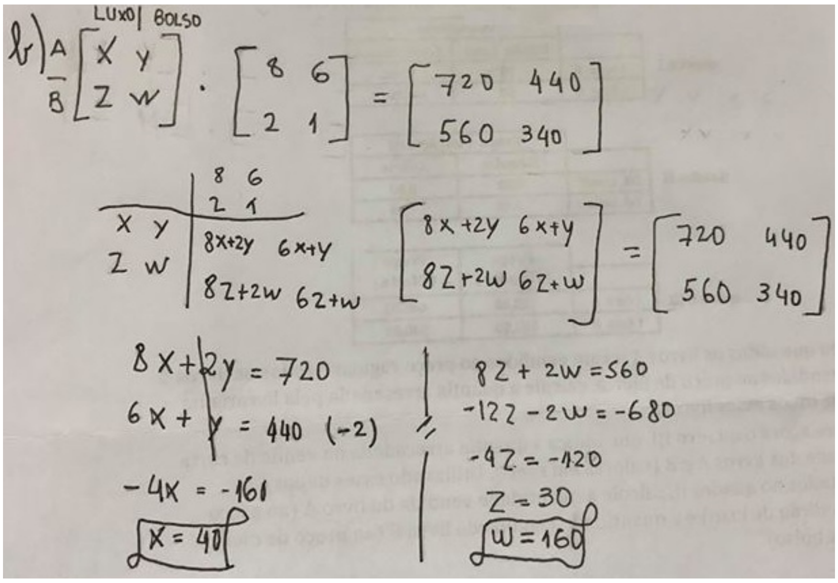
Figura 44 - Solução incorreta - problema 1 (b)



Fonte: O autor, 2018.

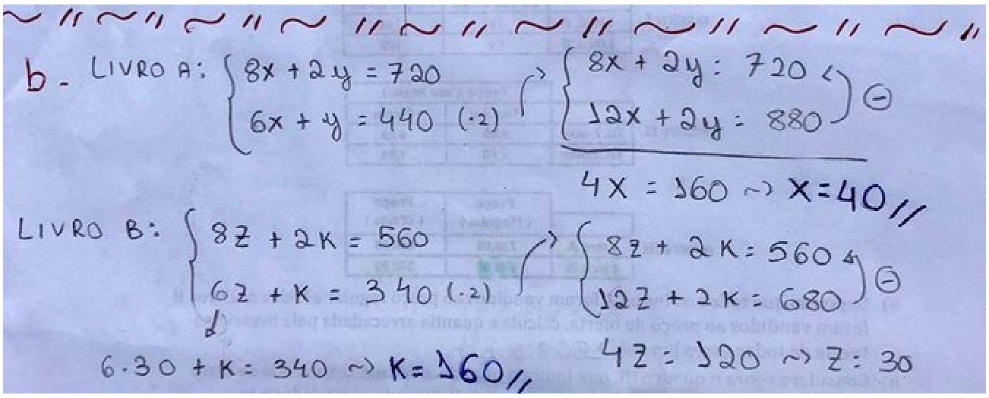
A seguir, as figuras 45 e 46 apresentam duas soluções corretas para o item b. Na primeira podemos observar que o aluno usou a multiplicação de matrizes.

Figura 45 - Solução correta - problema 1 (b)



Fonte: O autor, 2018.

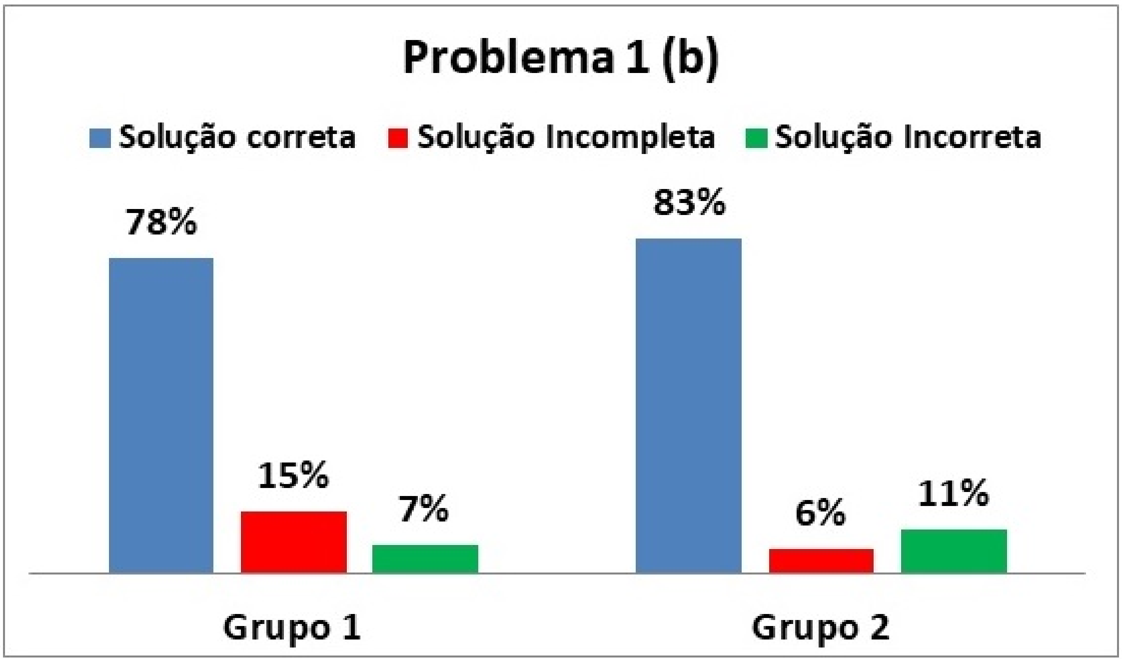
Figura 46 - Solução correta - problema 1 (b)



Fonte: O autor, 2018.

Verificamos, de acordo com a figura 47, que o desempenho foi similar nos dois grupos. Vale ressaltar que consideramos solução incompleta as soluções que tiveram erro de cálculo.

Figura 47 - Estatística da aplicação 2 - Problema 1 (b).



Fonte: O autor, 2018.

Para o problema dois, fiz a escolha de uma questão do vestibular da Universidade Estadual de Londrina (UEL - PR), como podemos ver a seguir. Esse problema envolve a codificação de uma mensagem. Ao resolver esse problema os alunos dependem da teoria de resolução de sistemas ou podem resolver por matriz inversa.

Problema 2: Uma das formas de se enviar uma mensagem secreta é por meio de códigos matemáticos, seguindo os passos:

1. Tanto o destinatário quanto o remetente possuem uma matriz chave C;

2. O destinatário recebe do remetente uma matriz P, tal que MC = P, onde M é a matriz mensagem a ser decodificada;

3. Cada número da matriz M corresponde a uma letra do alfabeto: a = 1, b = 2, c = 3, ... , z = 23;

4. Consideremos o alfabeto com 23 letras, excluindo as letras, k, w e y.

5. O número zero corresponde ao ponto de exclamação.

6. A mensagem é lida, encontrando a matriz M, fazendo correspondência número/letra e ordenando as letras por linhas da matriz conforme segue: $m_{11}m_{12}m_{13}m_{21}m_{22}m_{23}m_{31}m_{32}m_{33}$.

Considere as matrizes:

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{P} = \begin{bmatrix} 2 & -10 & 1 \\ 18 & 38 & 17 \\ 19 & 14 & 0 \end{bmatrix}. \quad (78)$$

Com base nos conhecimentos e nas informações descritas, determine a mensagem que foi enviada por meio da matriz M.

Antes dos alunos começarem a resolver, li o problema 2 com eles e sugeri que eles pensassem nas etapas de resolução de problema, tentassem identificar do que se tratava aquele problema e elaborassem um plano para resolvê-lo. Alguns me chamaram e responderam que se tratava de multiplicação de matrizes. Não confirmei. Alguns alunos perguntaram se poderiam resolver por matriz inversa. Pedi que eles verificassem se era possível e prestassem atenção na forma que iam fazer isso, pois o problema envolvia as matrizes M, C e P.

A intenção é que os alunos resolvessem do seguinte modo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}}_{\mathrm{M}} . \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathrm{C}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -10 & 1 \\ 18 & 38 & 17 \\ 19 & 14 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathrm{P}}. \quad (79)$$

Dessa multiplicação de matrizes, temos:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{11} - m_{12} + 2m_{13} & m_{13} \\ m_{21} & m_{21} - m_{22} + 2m_{23} & m_{23} \\ m_{31} & m_{31} - m_{32} + 2m_{33} & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -10 & 1 \\ 18 & 38 & 17 \\ 19 & 14 & 0 \end{bmatrix}. \quad (80)$$

Resolvendo o sistema oriundo da igualdade de matrizes, temos:

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 14 & 1 \\ 18 & 14 & 17 \\ 19 & 5 & 0 \end{bmatrix}. \quad (81)$$

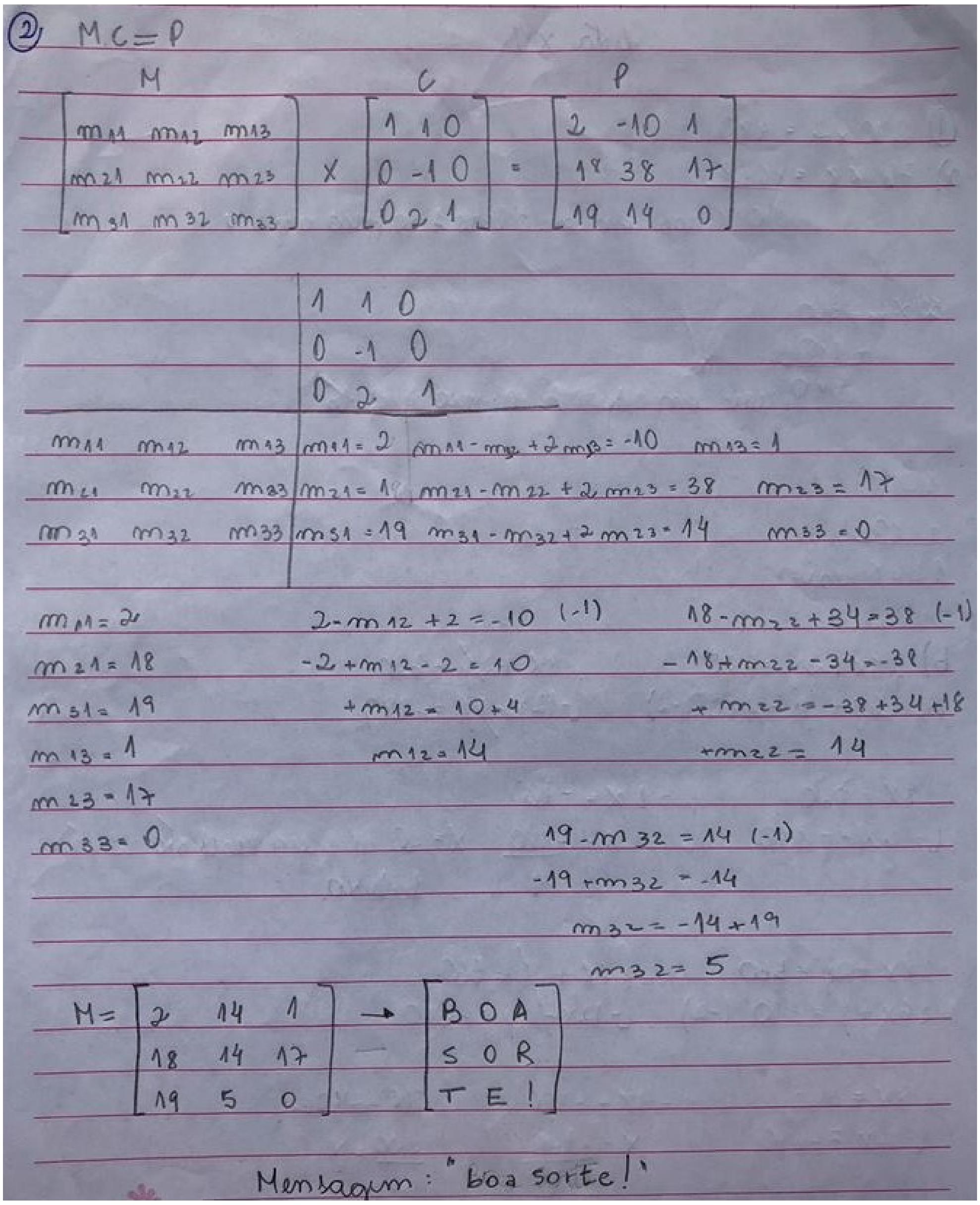
De acordo com a correspondência entre letras e números descrita no enunciado, temos que a mensagem secreta é **BOASORTE!**.

Os alunos podiam resolver o problema 2 utilizando a teoria de matriz inversa. Do seguinte modo:

$$\mathrm{M.C} = \mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{M.C.C}^{-1} = \mathrm{P.C}^{-1} \Rightarrow \mathrm{M} = \mathrm{P.C}^{-1}. \quad (82)$$

Acreditamos que a solução anterior seja mais rápida. Entre os alunos que conseguiram resolver, todos fizeram de forma similar ao que apresentamos. Podemos verificar a solução de um aluno na figura 48. Nenhum aluno tentou resolver por matriz inversa.

Figura 48 - Solução correta - problema 2 - Aplicação 2



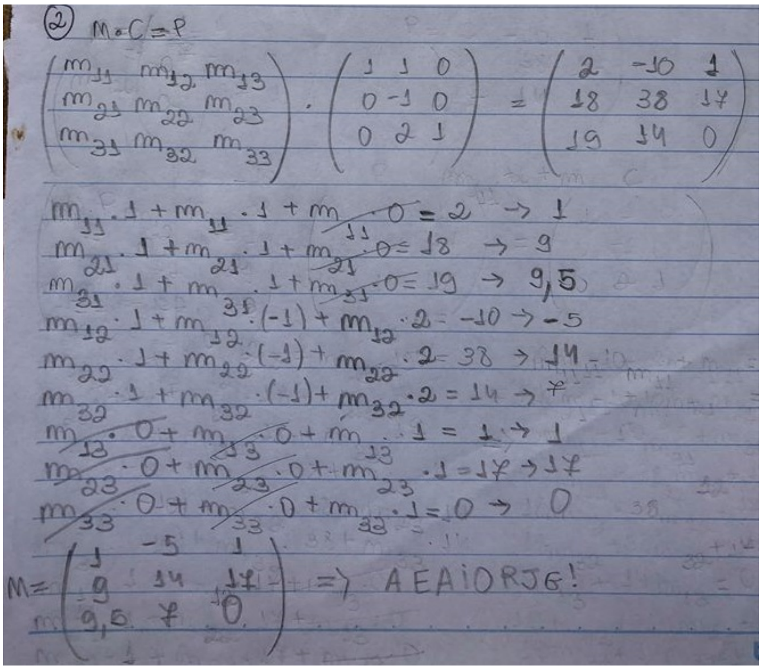
Fonte: O autor, 2018.

Alguns alunos, conseguiram interpretar o problema mas acabaram cometendo erro de cálculo. Consideramos essas soluções como incompletas (figura 49).

Outros conseguiram elaborar a ideia mas não desenvolveram a multiplicação entre as matrizes (figura 50). Essas soluções consideramos erradas, pois os alunos não desenvolveram a etapa de execução do plano.

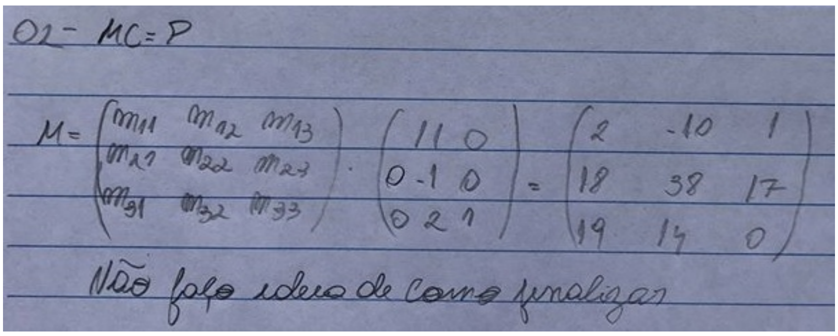
Após a segunda aplicação relembrei aos alunos o conceito de matrizes inversas, pois nenhum aluno tentou resolver dessa forma. Resolvi o problema 1 (b) encontrando a matriz inversa da matriz relativa ao quadro II (figura 11) e comentei que eles poderiam resolver o problema 2 pela matriz inversa, mas seria mais trabalhoso. Relembrei ainda que a multiplicação de matrizes não era comutativa.

Figura 49 - Solução incompleta - problema 2 - Aplicação 2



Fonte: O autor, 2018.

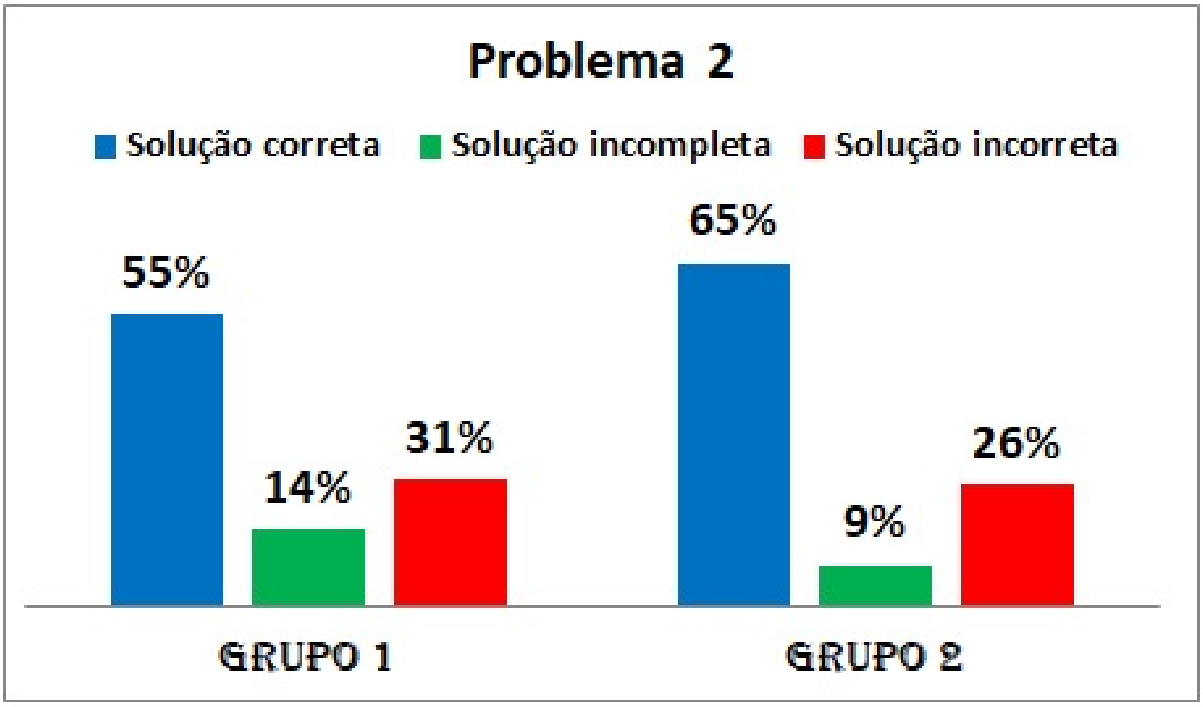
Figura 50 - Solução errada - problema 2 - Aplicação 2



Fonte: O autor, 2018.

O desempenho dos grupos foi similar. Podemos constatar tal afirmação na figura 51.

Figura 51 - Estatística da aplicação 2 - Problema 2.



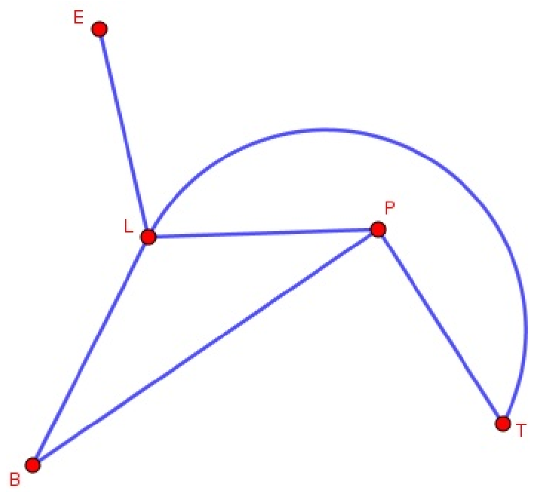
Fonte: O autor, 2018.

4.2.3 Terceira aplicação

O objetivo da terceira aplicação é abordar uma aplicação com contexto diferenciado para multiplicação de matrizes. Essa aplicação envolve um problema sobre plano de voo onde os alunos devem analisar a existência de voos entre cidades e a quantidade de voos entre duas cidades com exatamente uma escala. A ideia era que os alunos notassem no item d que ao calcular a matriz A^2 encontraríamos a matriz em que cada elemento a_{ij} representava a quantidade de voos da cidade i para a cidade j com exatamente uma escala. Essa aplicação contou com a participação de 36 alunos do grupo 1 e 75 alunos do grupo 2. Na terceira aplicação propomos um problema com 4 itens como podemos ver a seguir. A lista de problemas destinada a essa aplicação encontra-se no apêndice D.

Problema 1: A figura abaixo representa a rede de voos entre as cidades de Londres (L), Paris (P), Edimburgo (E), Bordeaux (B) e Toulouse (T). Considere que cada linha ligando duas cidades representa a existência de voo direto entre as mesmas.

Figura 52 - Redes de viagem



Fonte: O autor, 2018.

a) Determine uma matriz A quadrada 5x5 em que as linhas e as colunas serão representadas pelas cidades (de acordo com a tabela 13) e cada elemento a_{ij} terá valor 1 se houver voo direto entre as cidade i e j e valor 0 caso contrário.

Tabela 13 - Existência de voo entre cidades.

	Londres	Paris	Edimburgo	Bordeaux	Toulouse
Londres	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
Paris	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
Edimburgo	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
Bordeaux	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}
Toulouse	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}

Fonte: O autor, 2018.

b) Classifique a matriz A do item anterior.

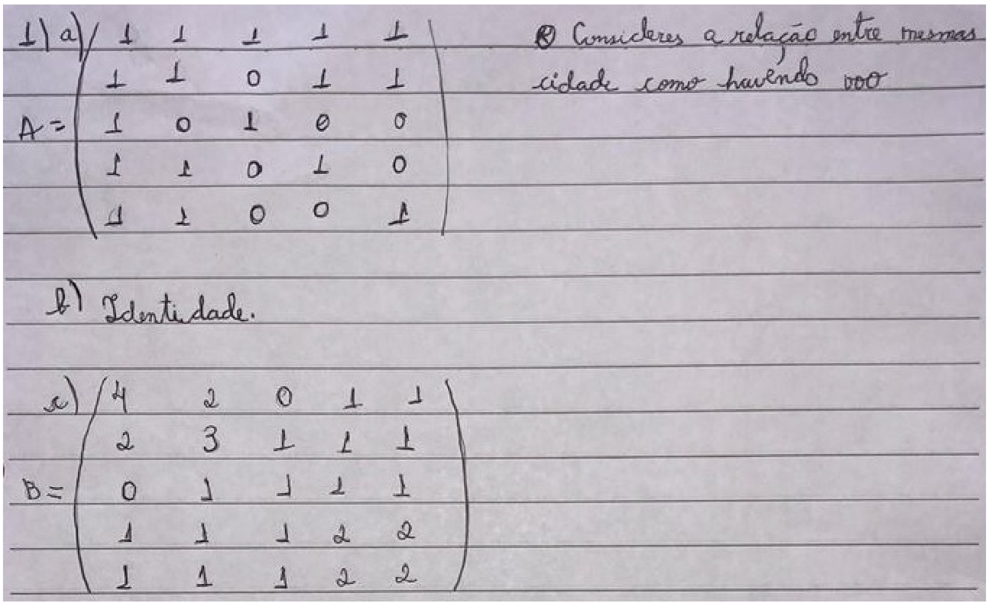
c) Construa uma matriz B, do mesmo modelo da matriz A, em que cada elemento b_{ij} representa a quantidade de viagens possíveis entre as cidades i e j com exatamente uma escala.

d) Podemos fazer alguma operação com a matriz A para obter a matriz B? Justifique sua resposta.

Já fizemos as discussões desse problema no capítulo 3. Essa aplicação foi a que os alunos mostraram mais dificuldades, levando em consideração que o objetivo principal dessa aplicação era a solução do item d. De forma geral, os alunos conseguiram fazer o item a, b e parte do c. O rendimento dos grupos foi similar, não houve discrepância nos resultados. Podemos verificar o rendimento dos alunos de acordo com as estatísticas na figura 57.

Ao iniciar a aplicação, em algumas turmas, alguns alunos perguntaram se podiam considerar voo de uma cidade para ela mesma. Os orientei sugerindo que eles pensassem se fazia sentido pegar um voo de uma cidade com destino a ela mesma, alguns deles perguntaram se esse problema era igual ao problema 1 da primeira aplicação. Disse que eles tinham que pensar nesse novo problema e tentar elaborar uma estratégia para resolvê-lo. Fazer cada item seguindo as estratégias de resolução de problema. Na verdade nesse problema no item a, não consideramos voo direto de uma cidade para ela mesma, ou seja, todos os elementos a_{ij}, com $i = j$, seriam iguais a zero. Mesmo com essa conversa, alguns alunos consideraram voo direto de uma cidade para ela mesma (figura 53). Essas soluções classificamos como incompleta. De modo geral, os alunos tiveram bastante facilidade em resolver esse item, como podemos observar nas estatísticas da figura 57.

Figura 53 - Solução incompleta - Aplicação 3



Fonte: O autor, 2018.

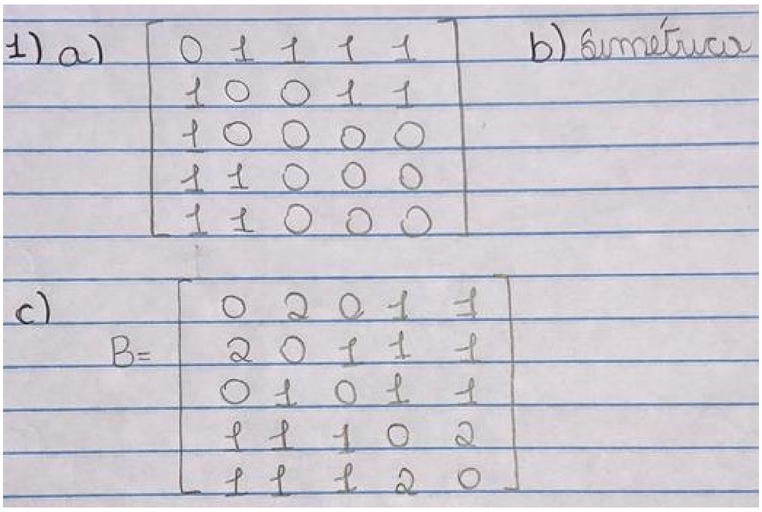
No item b, a intenção era que os alunos notassem que a matiz A era simétrica, alguns alunos classificaram a matriz como quadrada. Consideramos essa resposta incompleta.

No item c, alguns alunos perguntaram o que era uma escala. Após a explicação a maior parte dos alunos conseguiram fazer observando a figura. Esses alunos perguntaram se haveria outra forma de fazer. Sugeri que eles tentassem resolver toda a questão e tentassem responder esse questionamento, principalmente, após resolver o item d. Afim de aguçar a curiosidade deles, perguntei se seria viável resolver observando a figura para uma situação que envolvesse mais cidades. Eles responderam que não, mas em nenhuma turma tive uma resposta ou algum argumento que levasse a resolução correta.

Algumas soluções do item c não consideraram os voos que tinham origem e destino na mesma cidade. Durante a aplicação alguns alunos perguntaram se a diagonal da matriz desejável também era zero. Pedi que pensassem se haveria possibilidade de sair de uma cidade e voltar para ela mesma passando por outra cidade. Não relatei nenhum exemplo para não ser muito participativo na solução deles. Mas poderíamos destacar que a cidade Toulouse possui 2 voos com exatamente uma escala para ela mesmo. Podemos fazer escala na cidade de Paris e Londres e em seguida retornar a Toulouse.

Talvez pelo fato de não fazer sentido pegar um voo com escala para a mesma cidade, os alunos desconsideraram essa hipótese. Dessa forma, não consideramos essa solução errada, à classificamos como incompleta (figura 54). Poucos alunos resolveram o item c da forma que consideramos correta (figura 53).

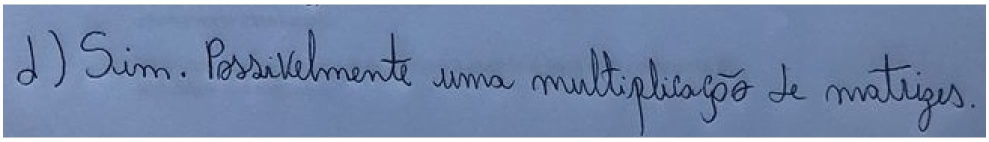
Figura 54 - Solução incompleta - Aplicação 3



Fonte: O autor, 2018.

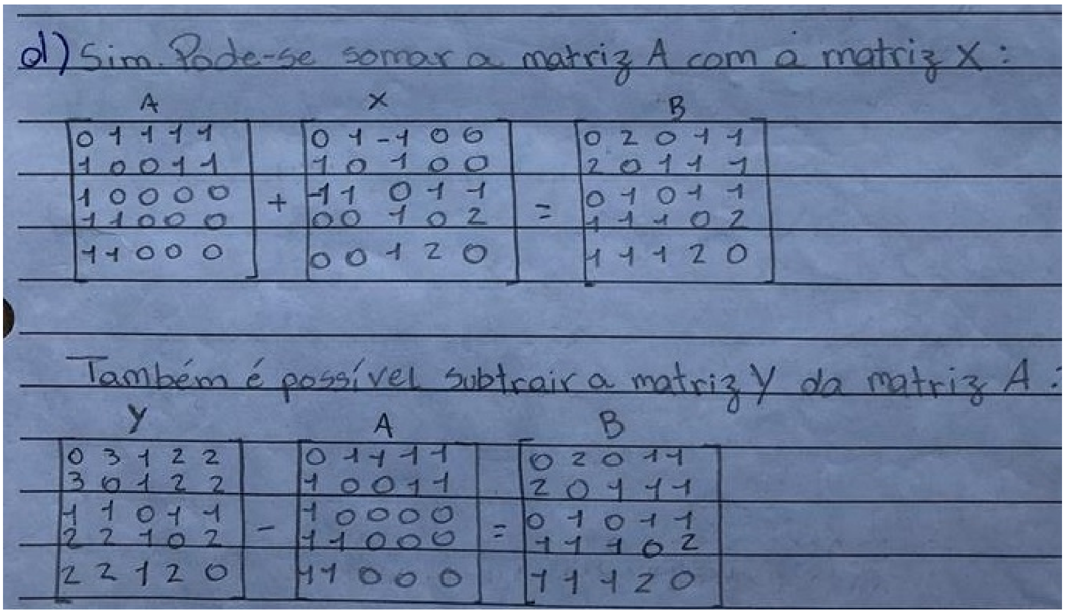
No item d, apenas dois alunos responderam corretamente. Vale ressaltar que mesmo tendo a resposta correta, que é multiplicar a matriz A pela matriz A, ou ainda, elevar a matriz A ao quadrado, alguns alunos não souberam explicar porque deveríamos fazer isso (figura 55). Alguns alunos perguntaram, durante a aplicação, se poderiam operar a matriz A com outra matriz. Pedi aos mesmos que lessem com atenção a pergunta do item d. Mesmo assim alguns continuaram em dúvida. Dessa forma, fui mais objetivo e li a pergunta com eles, o que confirmou que eles só poderiam utilizar operações da matriz A com a matriz A. Mesmo assim, eles mostraram muitas dificuldades em interpretar a situação através da operação entre matrizes. Sugeri que pensassem no que significaria através de alguma operação relacionar a matriz A com a matriz A. Perguntei se alguma dessas operações possuía algum significado. Relembrei ainda que esse resultado poderia ser comparado com o que encontraram na letra c. Sugeri que eles pensassem em algum problema correlato, no qual teríamos que justificar a operação entre duas matrizes. Mesmo com essa orientação, alguns alunos fizeram operações utilizando matrizes diferentes da matriz A (figura 56) ou não conseguiram justificar a resposta.

Figura 55 - Solução correta sem justificativa - Aplicação 3


d) Sim. Possivelmente uma multiplicação de matrizes.

Fonte: O autor, 2018.

Figura 56 - Solução incorreta - Aplicação 3


d) Sim. Pode-se somar a matriz A com a matriz X:

$$\begin{bmatrix} 0&1&1&1&1\\ 1&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0&1&-1&0&0\\ 1&0&1&0&0\\ -1&1&0&1&-1\\ 0&0&1&0&2\\ 0&0&1&2&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&2&0&1&1\\ 2&0&1&1&1\\ 0&1&0&1&1\\ 1&1&1&0&2\\ 1&1&1&2&0 \end{bmatrix}$$

(A, X, B)

Também é possível subtrair a matriz Y da matriz A:

$$\begin{bmatrix} 0&3&1&2&2\\ 3&0&1&2&2\\ 1&1&0&1&1\\ 2&2&1&0&2\\ 2&2&1&2&0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0&1&1&1&1\\ 1&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&2&0&1&1\\ 2&0&1&1&1\\ 0&1&0&1&1\\ 1&1&1&0&2\\ 1&1&1&2&0 \end{bmatrix}$$

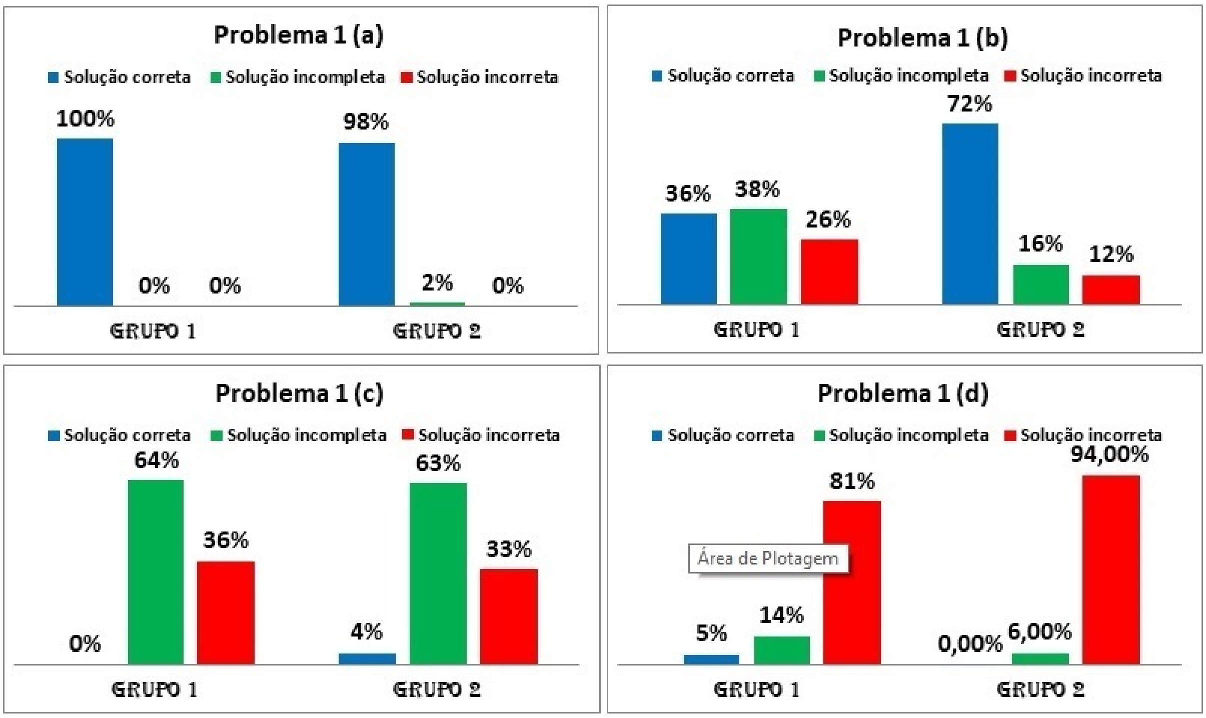
(Y, A, B)

Fonte: O autor, 2018.

Como já citamos, essa aplicação foi a que os alunos tiveram maior dificuldade. Mesmo sem observar as soluções feitas por eles, durante a aplicação já era possível verificar suas dificuldade, principalmente no item d (figura 57).

Ao terminar a aplicação muitos alunos, considerando os dois grupos, tiveram curiosidade em saber a solução correta. Separei alguns minutos no final de cada aula para comentar com eles a solução desse problema. Nos itens a, b e c eles não tiveram muitas dificuldades em entender, mesmo os alunos que tiveram dificuldade em resolver. É relevante citar que o item c eu fiz observando a figura.

Figura 57 - Estatística da aplicação 3.



Fonte: O autor, 2018.

Com a intenção de motiva-los a resolver o item d, fiz o seguinte passo a passo:

✓ Relembrei que ao multiplicar matrizes, operamos linha com coluna.

✓ Perguntei a eles o que significava operar (multiplicar) a linha dois da matriz A com a coluna 1 da Matriz A:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathrm{A} = \begin{bmatrix} \boxed{0} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{83}$$

✓ Em seguida escrevi a seguinte expressão oriunda da operação da segunda linha com primeira coluna, perguntei o que significava cada multiplicação da expressão a seguir.

$$\underbrace{1}_{a_{21}} \cdot \underbrace{0}_{a_{11}} + \underbrace{0}_{a_{22}} \cdot \underbrace{1}_{a_{21}} + \underbrace{0}_{a_{23}} \cdot \underbrace{1}_{a_{31}} + \underbrace{1}_{a_{24}} \cdot \underbrace{1}_{a_{41}} + \underbrace{1}_{a_{25}} \cdot \underbrace{1}_{a_{51}} = 2 \tag{84}$$

Dessa forma, construí uma solução análoga a solução a seguir.

Na multiplicação $\underbrace{1}_{a_{21}} . \underbrace{0}_{a_{11}}$ o 1 indica que há voo da cidade de Paris para cidade de Londres e o 0 indica que não há voo da cidade de Londres para a cidade de Londres. Portanto não há voo da cidade de Paris para Londres, passando por Londres.

$$\text{Paris} \Rightarrow \text{Londres} \nRightarrow \text{Londres}$$

Na multiplicação $\underbrace{0}_{a_{22}} . \underbrace{1}_{a_{21}}$ o 0 indica que não há voo da cidade de Paris para a cidade de Paris e o 1 indica que há voo da cidade de Paris para a cidade de Londres. Portanto não há voo da cidade de Paris para Londres, passando por Paris

$$\text{Paris} \nRightarrow \text{Paris} \Rightarrow \text{Londres}$$

Na multiplicação $\underbrace{0}_{a_{23}} . \underbrace{1}_{a_{31}}$ o 0 indica que não há voo da cidade de Paris para cidade de Edimburgo e o 1 indica que não há voo da cidade de Edimburgo para a cidade de Londres. Portanto não há voo da cidade de Paris para Londres, passando por Edimburgo.

$$\text{Paris} \nRightarrow \text{Edimburgo} \Rightarrow \text{Londres}$$

Na multiplicação $\underbrace{1}_{a_{24}} . \underbrace{1}_{a_{41}}$ o 1 indica que há voo da cidade de Paris para cidade de Bordeaux e o 1 indica que não há voo da cidade de Bordeaux para a cidade de Londres. Portanto há voo da cidade de Paris para Londres, passando por Bordeaux.

$$\text{Paris} \Rightarrow \text{Bordeaux} \Rightarrow \text{Londres}$$

Na multiplicação $\underbrace{1}_{a_{25}} . \underbrace{1}_{a_{51}}$ o 1 indica que há voo da cidade de Paris para cidade de Toulouse e o 1 indica que há voo da cidade de Toulouse para a cidade de Londres. Portanto há voo da cidade de Paris para Londres, passando por Toulouse.

$$\text{Paris} \Rightarrow \text{Toulouse} \Rightarrow \text{Londres}$$

Mostrei aos alunos que dessa forma temos duas possibilidades de Viajar de Paris para Londres fazendo exatamente uma escala. Comentei que ao multiplicar a “linha Paris”pela “coluna Londres”temos a quantidade de voos de Paris para Londres com uma escala. Deste modo, poderíamos generalizar e observar que cada elemento a_{ij} da matriz A^2 indica a quantidade de voos com exatamente uma escala da cidade i para a cidade j.

Apesar de ser a aplicação com menor aproveitamento, em relação ao acerto dos alunos, essa foi a aplicação que os alunos se mostraram mais interessados em fazer. Mesmo com as dificuldades, que muitas das vezes causa desinteresse, os alunos se mostram interessados em conseguir resolver. Por esse motivo, fiz a solução com eles dramatizando um pouco e levando em consideração os meus pensamentos que construíram os argumentos para resolver aquele problema, sempre com a intenção de dar sentido a cada ideia e a cada estratégia tomada. Segundo Polya (2006, p. 4), "[..] quando o professor resolve um problema em aula, deve dramatizar um pouco suas ideias e fazer a si próprio as mesmas indagações em que utiliza para ajudar os alunos."

Durante a resolução foi muito satisfatório observar empolgação da maior parte dos alunos em entender a construção dos argumentos necessários para a resolução. Conversei com eles sobre minhas dificuldades em resolver e entender esse problema na primeira vez que eu tive contato com ele. Comentei que é natural termos dificuldades quando não temos problemas parecidos com o que já estamos habituados a resolver, mas é interessante trabalhar com situações desconhecidas que nos causam a euforia, como a qual estava presenciando naquele momento. O ideal é tratar de problemas que nos deixem intrigados a ter uma boa ideia e que não esteja ligados a somente recordações mas a conhecimentos pré-adquiridos, como cita Polya (2006, p. 7), "Para ter uma boa ideia, não basta a simples recordação, mas não podemos ter nenhuma ideia boa sem relembrar alguns fatos pertinentes."

Para terminar essa aplicação perguntei a turma se era possível encontrar uma matriz em que cada elemento a_{ij} representasse a quantidade de voo com exatamente duas escalas da cidade i para a cidade j. Em todas as turmas alguns alunos responderam prontamente que poderíamos calcular A^3 e chegar a matriz desejável. Por conta do calendário não tive a oportunidade de fazer outra aplicação voltada a essa discussão, mas pedi que os alunos pensassem e argumentassem sobre aquele resultado posteriormente. Alguns alunos me procuraram em outro momento para fazer algumas discussões sobre esse problema.

4.2.4 Quarta aplicação

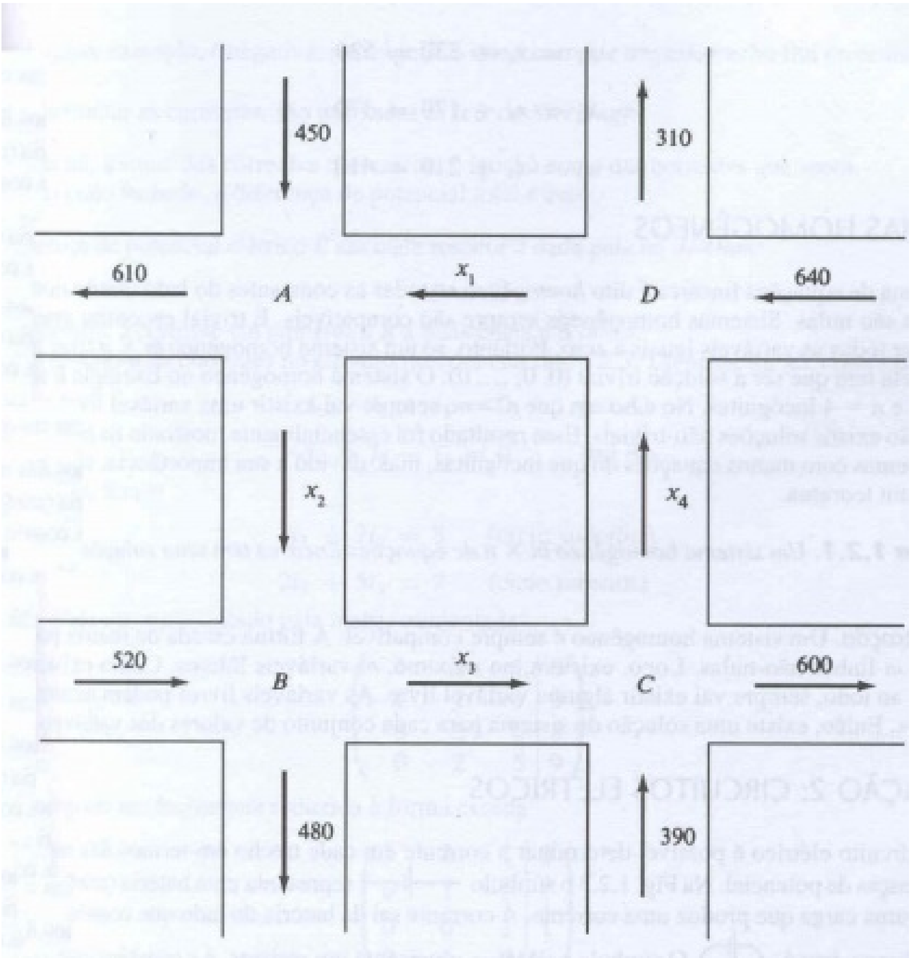
Grupo 1:

Depois das aulas sobre a teoria de matrizes e determinante, fizemos a quarta aplicação, essa foi destinada a resolução de sistemas lineares (como podemos ver no apêndice E) e foi conduzida de forma similar a primeira aplicação. O grupo 1, formado pelas turmas 1307 e 2304 que contou com 37 alunos nessa aplicação, teve uma aula teórica sobre a resolução de sistema linear. Nessa aula fizemos a resolução de sistemas com duas incógnitas e duas equações (sistema 2×2) e com três equações e três incógnitas (sistema 3×3), utilizando os métodos de substituição e adição. Vale ressaltar que não fizemos discussão de sistema.

Além de aplicar problemas clássicos, como o problema 3, nossa intenção na aplicação 4 é propor aos alunos problemas relacionados a resolução de sistemas lineares que contenham mais de uma solução e problemas que estejam integrados com outras disciplinas.

Problema 1: Em uma certa seção do centro, de determinada cidade, dois conjuntos de ruas de mão única se cruzam (figura 58). A média do número de veículos por hora que entram e saem dessa seção durante o horário de rush é dada no diagrama. Determine a quantidade de veículos entre cada um dos quatro cruzamentos em função de x_4.

Figura 58 - Tráfego de carros.



Fonte: Álgebra linear com aplicações, Steven J. Leon 4^a edição LTC, Rio de Janeiro 2008.

Dica: O número de veículos que entra em cada cruzamento tem que ser igual ao número de veículos que sai dele.

Solução esperada: Nesse problema, os alunos deveriam ter muita atenção na dica que foi dada. Utilizando essa dica, temos:

$$\underbrace{x_1 + 450 = x_2 + 610}_{\text{Cruzamento A}}. \tag{85}$$

$$\underbrace{x_2 + 520 = x_3 + 480}_{\text{Cruzamento B}}. \tag{86}$$

$$\underbrace{x_3 + 390 = x_4 + 600}_{\text{Cruzamento C}} \therefore x_3 = x_4 + 210. \tag{87}$$

$$\underbrace{x_4 + 640 = x_1 + 310}_{\text{Cruzamento D}} \therefore x_1 = x_4 + 330. \tag{88}$$

De (86) e (87), temos:

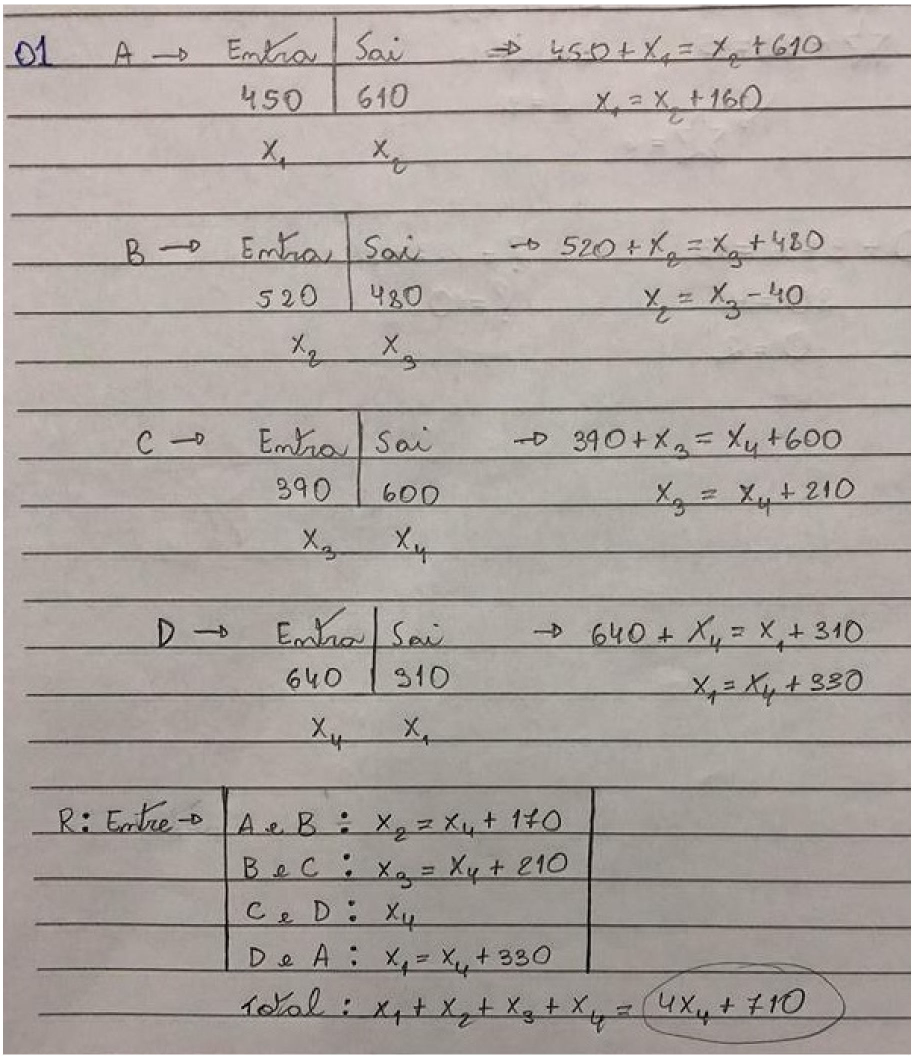
$$x_2 + 520 = \underbrace{x_4 + 210}_{x_3} + 480 \therefore x_2 = x_4 + 170. \tag{89}$$

Nessa aplicação os alunos não apresentaram muitas dúvidas. Alguns alunos perguntaram se deveriam achar o valor de x_4 para depois determinar o valor das outras incógnitas. Pedi a eles que lessem o enunciado com atenção e observassem que foi dada uma dica. Outros alunos peguntaram se o problema tinha a ver com o conteúdo de funções. Respondi que os conteúdos que aprendemos podem ser relacionados se for necessário. Um aluno me chamou e disse que não estava conseguindo resolver o sistema. Pedi, mais uma vez, que ele tivesse atenção ao enunciado.

Os alunos do grupo 1 tiveram o conteúdo de resolução de sistema no ensino fundamental no sétimo ano onde trabalharam com sistemas de duas incógnitas e duas equações e tiveram uma aula teórica de resolução de sistema que antecedeu a aplicação 4. Apesar disso, eles não tiveram, ao longo do ensino fundamental e médio, a teoria de discussão de sistemas lineares. Por isso não estão habituados a trabalhar com sistemas que possuem mais de uma solução. Acreditamos que as dúvidas apresentadas são naturais e surgiram por esse motivo.

Maior parte dos alunos conseguiu entender e resolver o problema determinando a quantidade de veículos entre cada um dos cruzamentos, como podemos observar na figura 59. Nessa solução o aluno colocou cada valor de x_1, x_2 e x_3, em função de x_4 e determinou a quantidade de total de veículos entre os cruzamentos em função de x_4, o que não era pedido no enunciado. Alguns alunos fizeram isso também. Consideramos essas soluções corretas, mas vale ressaltar que faltou atenção no enunciado e no momento de revisar a resposta e verificar se estava de acordo com o proposto.

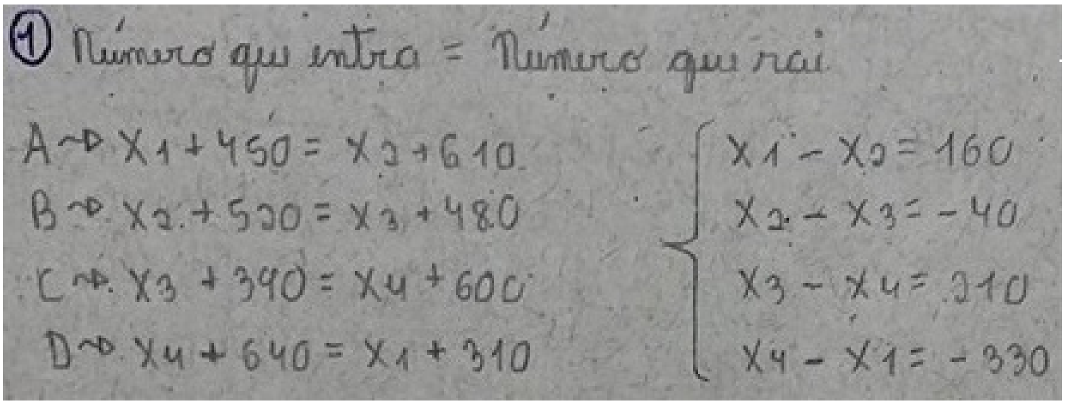
Figura 59 - Solução correta de um aluno, problema 1 - Aplicação 4.



Fonte: O autor, 2018.

Alguns alunos montaram as equações mas não responderam da forma desejada, como podemos ver na figura 60. Outros alunos não consideraram que alguns carros podem continuar no sentido que estão ou podem mudá-lo, como podemos verificar na solução apresentada na figura 61. Nessa solução, verificamos que para montar as equações foi levado em consideração que todos os carros continuariam no mesmo sentido, o que configura erro na etapa de entendimento do problema e no estabelecimento de um plano para resolvê-lo. Houve também erro na execução, já que em algumas equações há erro na quantidade de carros, como podemos observar na equação que leva em consideração o cruzamento A.

Figura 60 - Solução incompleta de um aluno, problema 1 - Aplicação 4.



1 Número que entra = Número que sai

$A \rightarrow x_1 + 450 = x_2 + 610$

$B \rightarrow x_2 + 520 = x_3 + 480$

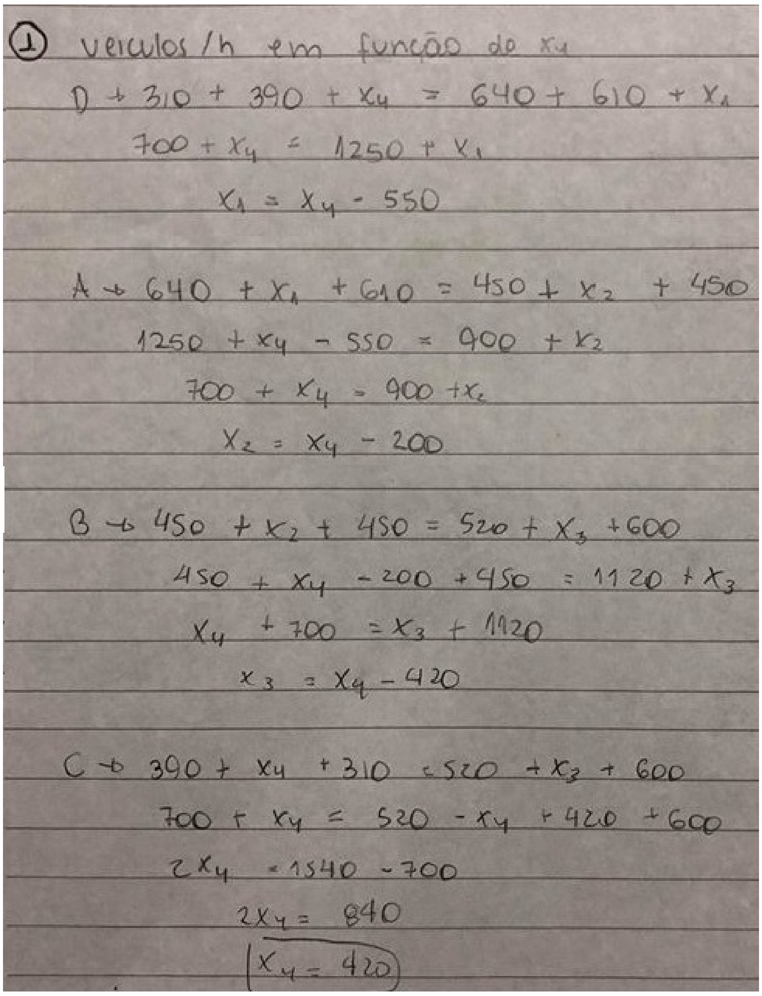
$C \rightarrow x_3 + 390 = x_4 + 600$

$D \rightarrow x_4 + 640 = x_1 + 310$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 160 \\ x_2 - x_3 = -40 \\ x_3 - x_4 = 210 \\ x_4 - x_1 = -330 \end{cases}$$

Fonte: O autor, 2018.

Figura 61 - Solução errada de um aluno, problema 1 - Aplicação 4.



1 veículos/h em função do x_4

$D \rightarrow 310 + 390 + x_4 = 640 + 610 + x_1$

$700 + x_4 = 1250 + x_1$

$x_1 = x_4 - 550$

$A \rightarrow 640 + x_1 + 610 = 450 + x_2 + 450$

$1250 + x_4 - 550 = 900 + x_2$

$700 + x_4 = 900 + x_2$

$x_2 = x_4 - 200$

$B \rightarrow 450 + x_2 + 450 = 520 + x_3 + 600$

$450 + x_4 - 200 + 450 = 1120 + x_3$

$x_4 + 700 = x_3 + 1120$

$x_3 = x_4 - 420$

$C \rightarrow 390 + x_4 + 310 = 520 + x_3 + 600$

$700 + x_4 = 520 - x_4 + 420 + 600$

$2x_4 = 1540 - 700$

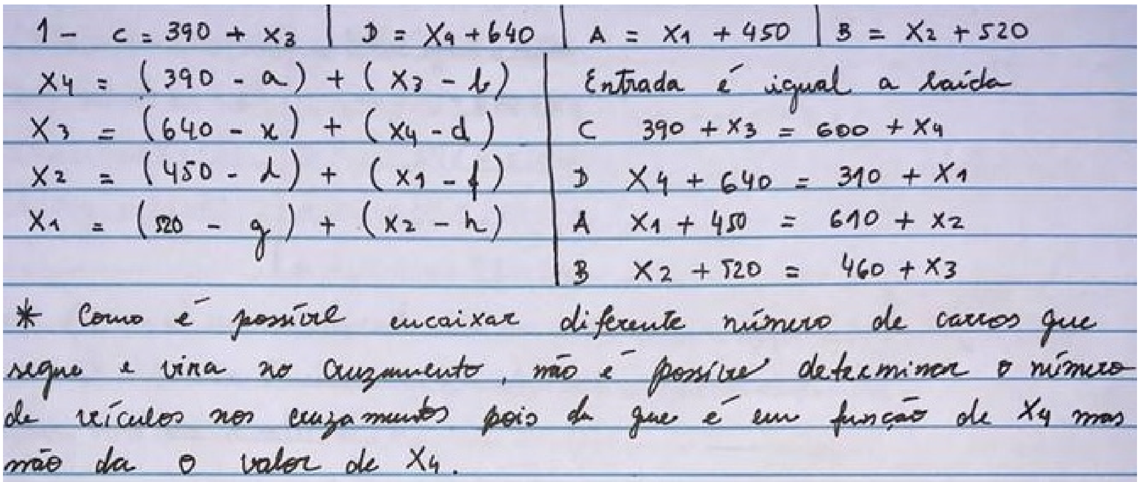
$2x_4 = 840$

$x_4 = 420$

Fonte: O autor, 2018.

Embora algumas soluções estejam incompletas, alguns alunos perceberam que não era possível determinar a quantidade de veículos entre cada um dos cruzamentos, como podemos ver na figura 62.

Figura 62 - Solução incompleta de um aluno, problema 1 - Aplicação 4.



1 – C = 390 + X3 | D = X4 + 640 | A = X1 + 450 | B = X2 + 520

X4 = (390 - a) + (X3 - b) | Entrada é igual a saída

X3 = (640 - x) + (X4 - d) | C 390 + X3 = 600 + X4

X2 = (450 - λ) + (X1 - f) | D X4 + 640 = 310 + X1

X1 = (520 - g) + (X2 - h) | A X1 + 450 = 610 + X2

| B X2 + 520 = 460 + X3

* Como é possível encaixar diferente número de carros que segue e vira no cruzamento, não é possível determinar o número de veículos nos cruzamentos pois dá que é em função de X4 mas não dá o valor de X4.

Fonte: O autor, 2018.

Problema 2: (UERJ 2007 - ADAPTADA) Observe a equação química que representa a fermentação do açúcar em (90):

$$xC_6H_{12}O_6 \longrightarrow yCO_2 + zC_2H_5OH \tag{90}$$

Uma das formas de equilibrar essa equação é igualar, em seus dois membros, as quantidades de átomos de cada elemento químico. Esse processo dá origem a um sistema linear. Determine esse sistema linear, o seu conjunto-solução em função de x e calcule os menores valores inteiros positivos de x, y e z que formam uma das soluções desse sistema.

O objetivo desse problema é que os alunos percebessem que o conteúdo de resolução de sistemas lineares pode ser integrado com conteúdos de outras disciplinas, como Química. Além disso, esse problema de balanceamento químico nos permite a trabalhar com sistemas lineares que possuem mais de uma solução. Acreditamos que é um bom exemplo para dar início a discussão de sistemas lineares. A seguir apresentamos a solução que esperamos que os alunos fizessem.

Solução esperada: Utilizando a informação do enunciado, temos:

$$\begin{cases} 6x = y + 2z \\ 12x = 6z \\ 6x = 2y + z \end{cases} . \tag{91}$$

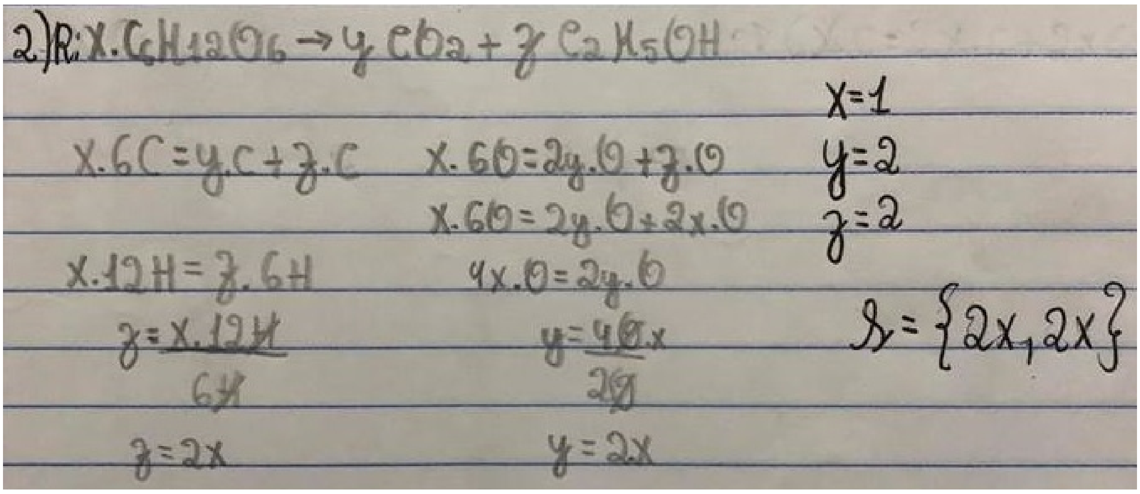
Desse sistema, podemos encontrar as seguintes relações em função de x, considerando x um número inteiro positivo.

$$z = 2x \text{ e } y = 2x \therefore S = (x, 2x, 2x) \Rightarrow S_{\text{Mínima}} = (1, 2, 2). \tag{92}$$

Esse problema foi resolvido sem maiores dificuldades. Muitos deles perguntaram se poderiam resolver através de conhecimentos químicos. Pedi a eles que seguissem o que o enunciado pedia. No enunciado estava claro que eles deveriam apresentar um sistema linear oriundo da equação química. Após essa conversa, os alunos não apresentaram algum comportamento que pudéssemos destacar.

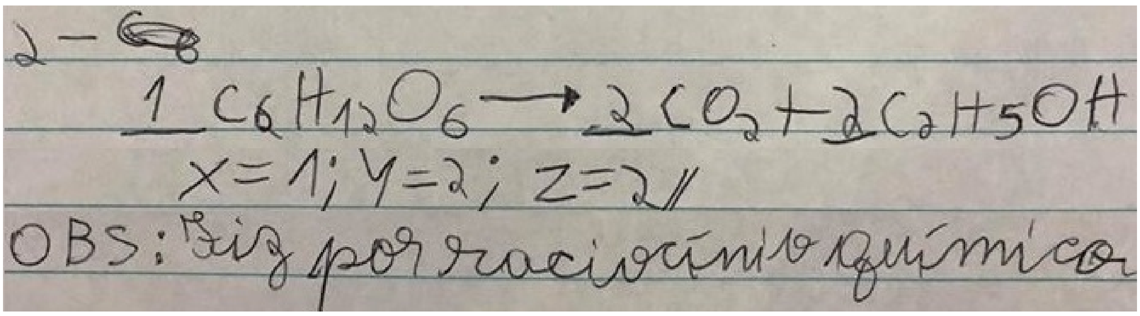
Embora alguns alunos não tenham utilizado uma notação adequada para a representação do sistema e para seu conjunto solução, parte deles resolveu de forma correta como podemos observar na figura 63.

Figura 63 - Solução correta de um aluno, problema 2 - Aplicação 4.



Fonte: O autor, 2018.

Figura 64 - Solução incompleta de um aluno, problema 2 - Aplicação 4.

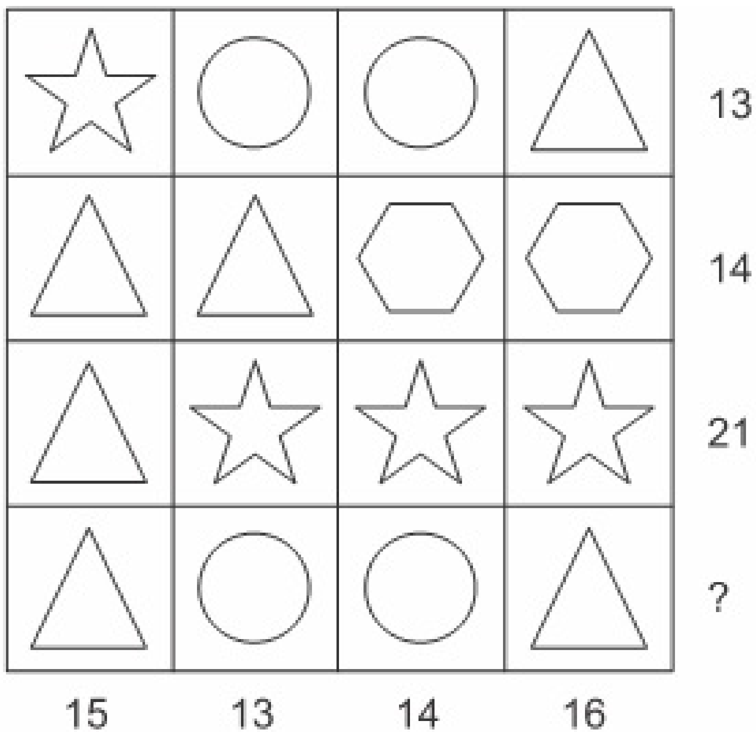


Fonte: O autor, 2018.

Mesmo destacando o enunciado, outros alunos resolveram utilizando aparentemente conhecimento químicos, adotando somente uma das soluções para balancear a equação química, como podemos ver na figura 64. Apesar do aluno provavelmente está resolvendo um sistema sem que isso esteja claro para ele, consideramos esse modelo de solução incompleto.

Problema 3: (Colégio Pedro II - 2013) Sabendo que cada figura no quadro abaixo representa um número, que os números escritos no final de cada linha e no final de cada coluna indicam a soma dos números naquela linha ou coluna, indique qual o número que deve substituir a interrogação.

Figura 65 - Quadro problema 3



Fonte: https://www.cp2.g12.br, 2018.

O objetivo desse problema é que os alunos conseguissem a partir da figura 65 escrever equações formando e resolvendo sistemas lineares para encontrar o número que deve substituir a interrogação.

Solução esperada: Representando a estrela por x, o triângulo por y e a circunferência por z, temos o seguinte sistema oriundo da primeira coluna e terceira linha:

$$\begin{cases} x + 3y = 15 \\ 3x + y = 21 \end{cases} . \tag{93}$$

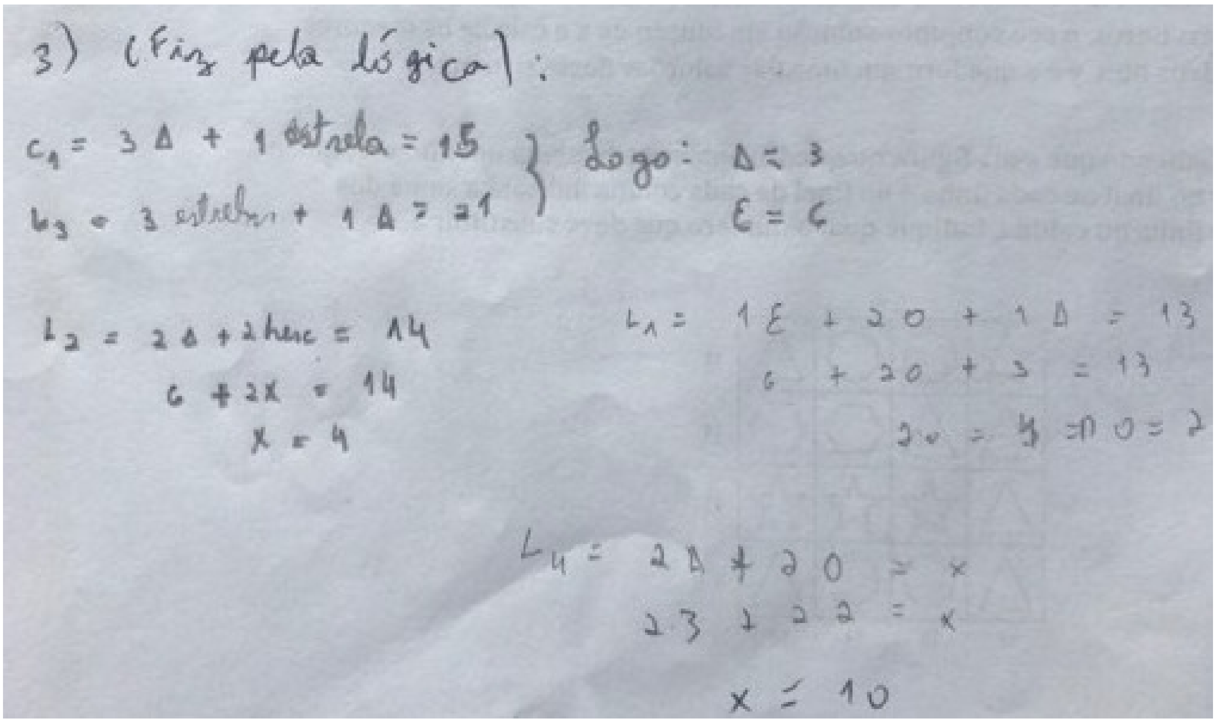
Resolvendo o sistema, temos $x = 6$ e $y = 3$. Observando a primeira linha da figura 65, temos:

$$x + 2z + y = 13 \Rightarrow z = 2. \tag{94}$$

Desse modo, o valor desconhecido, que pode ser representado pela expressão $2y + 2z$ é igual a 10. Vale ressaltar que não é necessário encontrar o número que substitui o hexágono, nessa solução. Nesse problema é necessário que os alunos tomem as estratégias corretas e escolham as linhas e colunas que facilitem sua resolução.

No problema 3, os alunos não apresentaram dúvidas. Apenas alguns alunos perguntaram se “poderiam fazer por lógica”zz. Respondi que eles poderiam traçar qualquer estratégia para resolver esse problema. Vale ressaltar que para alguns alunos “resolver pela lógica”é resolver o sistema oriundo do problema por tentativa sem resolvê-lo por métodos tradicionais, como podemos ver na figura 66. Nessa solução o aluno montou o sistema utilizando os símbolos contidos no enunciado, o que está correto, mas encontrou o valor de alguns símbolos por tentativa.

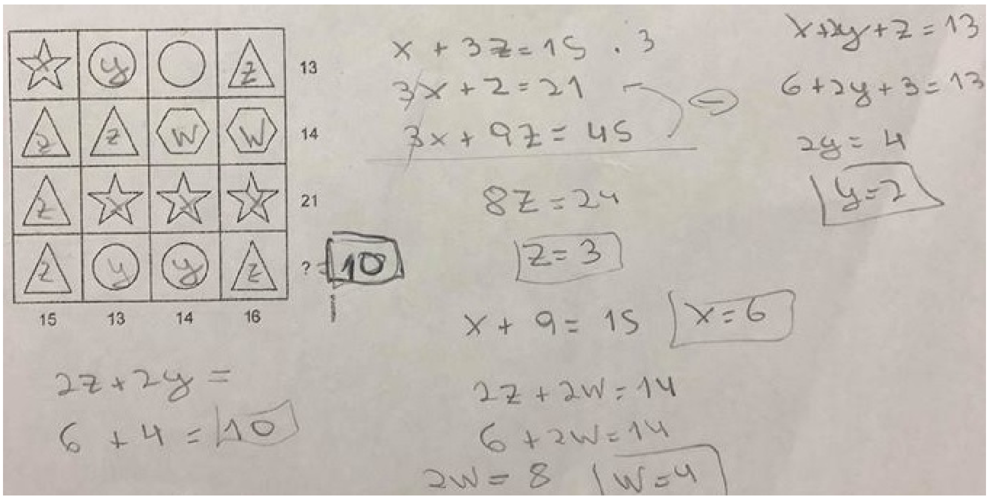
Figura 66 - Solução por tentativa de um aluno, problema 3 - Aplicação 4.



Fonte: O autor, 2018.

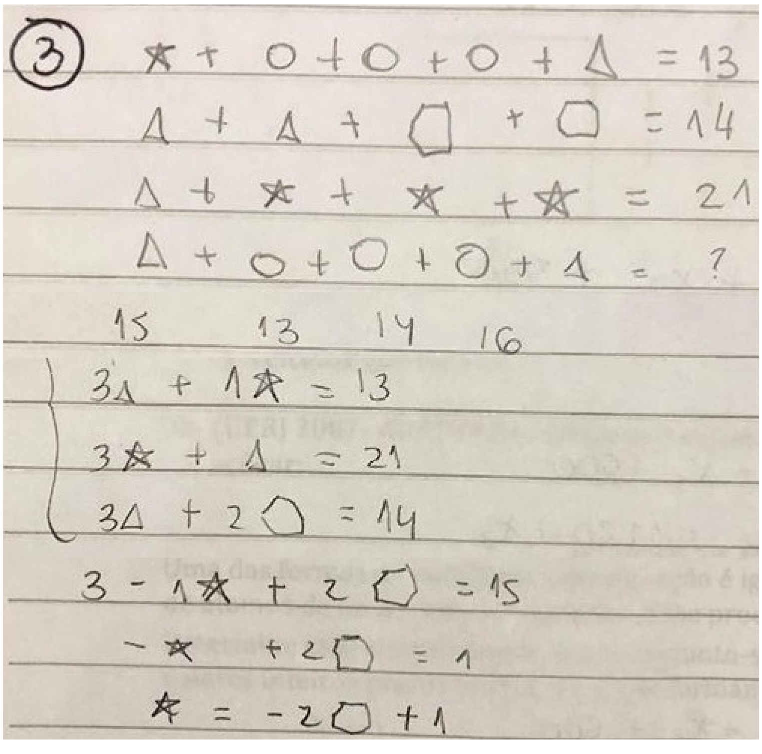
Mesmo não cumprindo o objetivo principal, não consideramos essa solução errada. Consideramos esse modelo de resolução incompleta. Em geral, como podemos ver na figura 67, os alunos resolveram de forma similar ao que apresentamos como solução esperada.

Figura 67 - Solução correta de um aluno, problema 3 - Aplicação 4.



Fonte: O autor, 2018.

Figura 68 - Solução errada de um aluno, problema 3 - Aplicação 4.



Fonte: O autor, 2018.

Destacamos que nessa solução, o aluno achou o valor que deve substituir o hexágono. O que não é necessário. Possivelmente, esse aluno definiu em sua estratégia determinar o valor de todos os símbolos para encontrar o valor que substitui a interrogação.

Alguns alunos escreveram as equações que representam as situações descritas pelo enunciado formando sistemas lineares, mas não resolveram de forma correta, como podemos ver na figura 68.

Grupo 2:

O grupo 2, formado pelas turmas 1301, 1303 e 2306, contou com 83 alunos nessa aplicação. Nesse grupo fizemos a aplicação antes da aula teórica. Vale ressaltar que os alunos já conheciam métodos de resolução de sistema linear 2×2, conteúdo visto no sétimo ano do ensino fundamental do Colégio Pedro II.

Nesse grupo alguns alunos perguntaram se a lista de problemas era destinada a resolução de sistema linear. Respondi aos alunos que a lista era destinada a resolução de problemas e que eles deveriam associar os enunciados, as boas ideias e seus conhecimentos para resolver cada problema da lista.

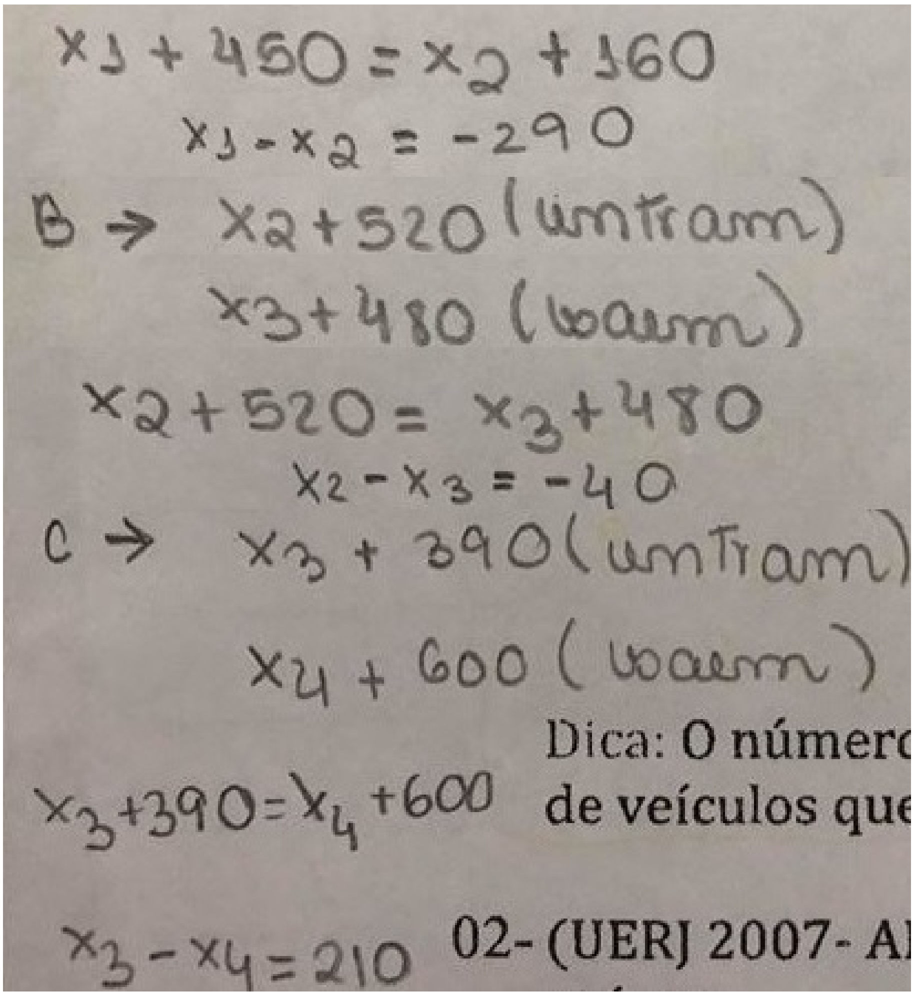
Problema 1: No primeiro problema os alunos não demonstraram muitas dúvidas relevantes. Alguns disseram não ter entendido o enunciado e outros me chamaram e avisaram que não estavam conseguindo determinar o valor de x_4 e perguntaram se existe algum método para determiná-lo. Sugeri que eles tivessem atenção no enunciado e elaborassem, a partir das estratégias de resolução de problema, um plano para determinar o que foi pedido. Maior parte dos alunos conseguiu fazer a questão inteira ou parcialmente. Alguns alunos usaram a dica de forma correta, mas não responderam da forma desejada como podemos ver na figura 69.

Problema 2: No problema 2 os alunos apresentaram bastante insegurança em resolver através de sistemas lineares, como podemos ver na figura 70. Nessa solução o aluno não determinou a menor solução inteira positiva, como foi pedido no enunciado.

Com a intenção de dar mais segurança aos alunos, conversei com eles sobre a importância de expor ideias para aqueles problemas. A intenção da aplicação dos problemas não era determinar o que estava certo ou errado. Apesar do acerto ser importante, o mais importante era aprender a traçar estratégias para resolver os problemas e consequentemente ter abertura para que possam surgir boas ideias para solucionar alguns problemas.

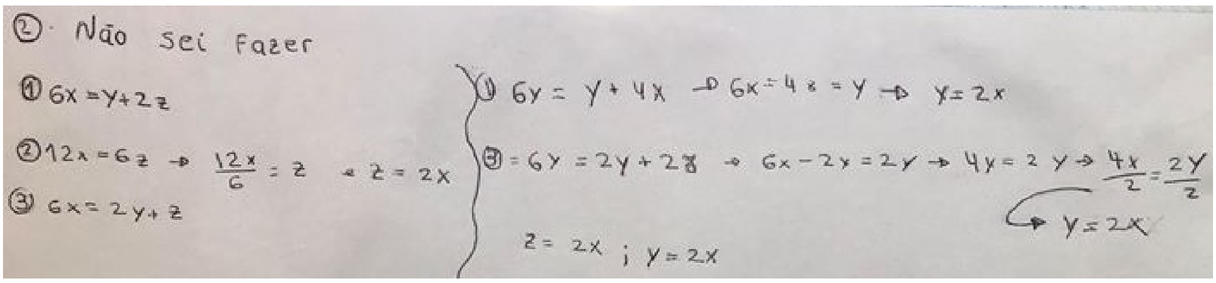
Em todas as turmas os alunos disseram saber resolver por Química, através de balanceamento químico. O interessante é que em alguns casos os alunos disseram ter mais de uma forma de balancear a equação química apresentada. Essa percepção dos alunos, que possivelmente não é oriunda de sistemas lineares, nos permite introduzir o conteúdo de discussão de sistemas lineares de forma investigativa.

Figura 69 - Solução incompleta de um aluno, problema 1 - Aplicação 4.



Fonte: O autor, 2018.

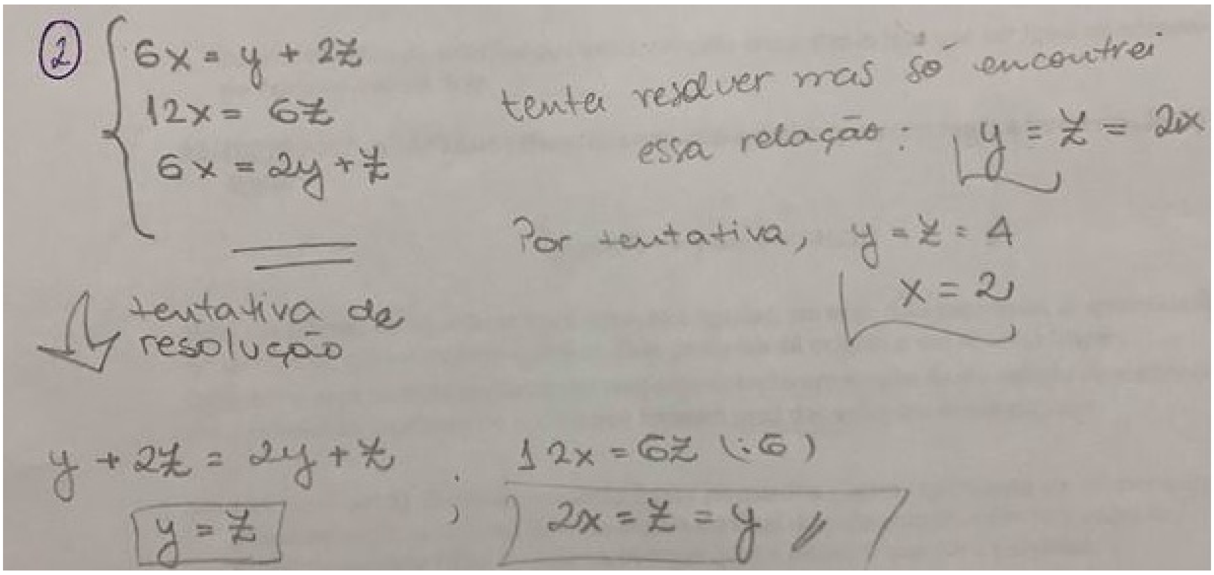
Figura 70 - Solução incompleta de um aluno, problema 2 - Aplicação 4.



Fonte: O autor, 2018.

O rendimento em relação ao problema 2, foi similar ao rendimento do problema 1. A maioria dos alunos conseguiu resolver a questão de forma correta ou conseguiram resolver parcialmente. As soluções parciais se dividem em achar a menor solução inteira positiva sem resolver o sistema, como na figura 64 ou determinar y e z em função de x e determinar a solução incorreta, como podemos ver na figra 71.

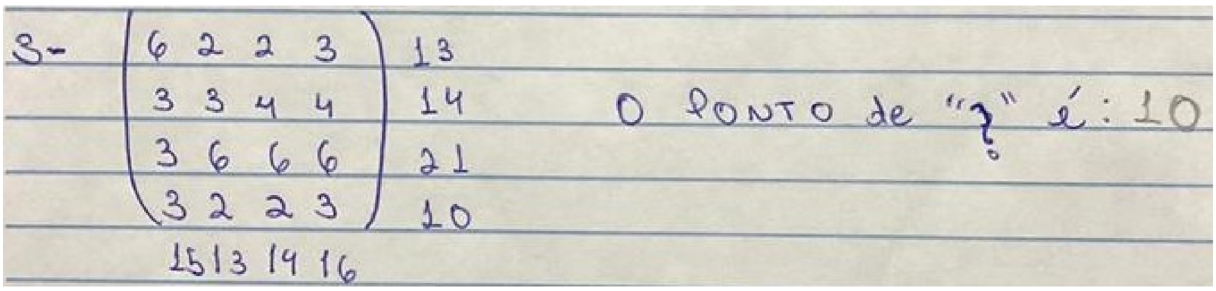
Figura 71 - Solução incompleta de um aluno, problema 2 - Aplicação 4.



Fonte: O autor, 2018.

Problema 3: No problema 3, a maior parte das dúvidas estava associada a possibilidade de resolver o problema por tentativa, alguns alunos resolveram dessa forma e erraram. Alguns aparentemente resolveram por tentativa, esse modelo de resolução, como vemos na figura 72, consideramos incompleta.

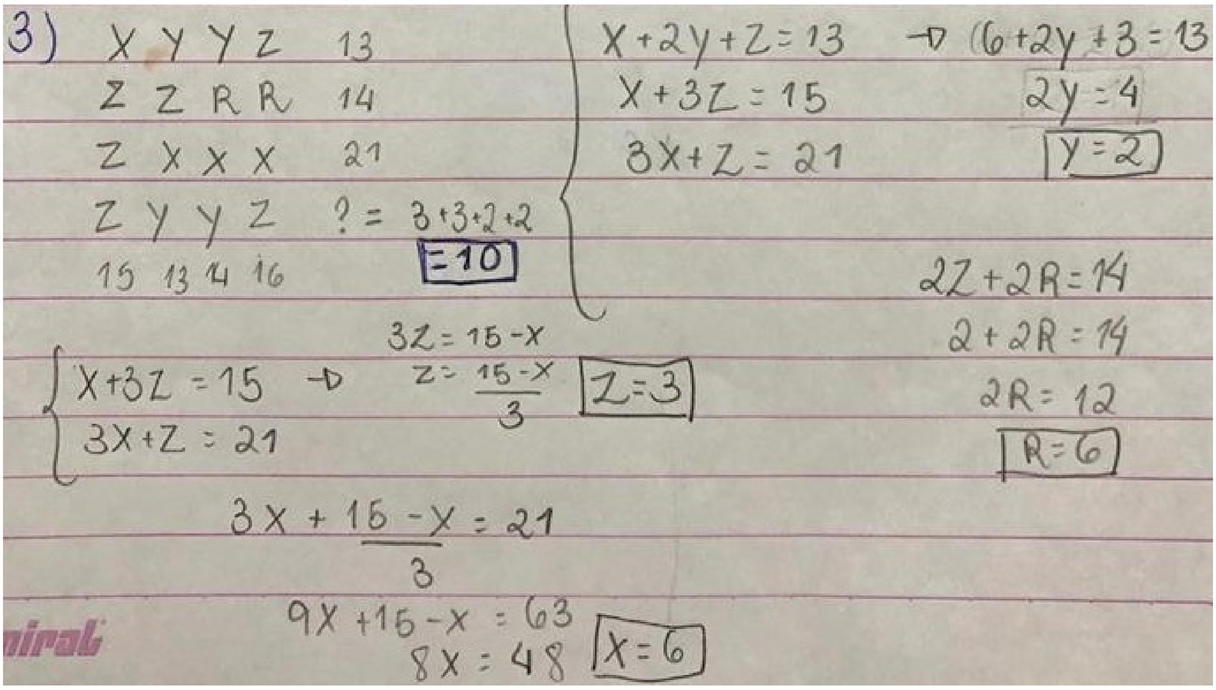
Figura 72 - Solução incompleta de um aluno, problema 3 - Aplicação 4.



Fonte: O autor, 2018.

Maior parte das soluções apresentadas pelos alunos utilizam sistemas lineares. Essas soluções seguem a mesma proposta que fizemos na solução esperada, como podemos ver na figura 73. Vale destacar que as soluções que utilizaram sistemas lineares e apresentaram erro na resolução do sistema, consideramos errada apesar de evidenciar que na etapa de elaboração do plano os alunos tiveram bom rendimento. Nesse caso os alunos não cumpriram corretamente a etapa de execução do plano, onde eles aplicam os procedimentos matemáticos. Além disso, não cumpriram a etapa de retrospecto. Nessa etapa, os alunos poderiam verificar se os valores encontrados se encaixavam com os valores dados na tabela.

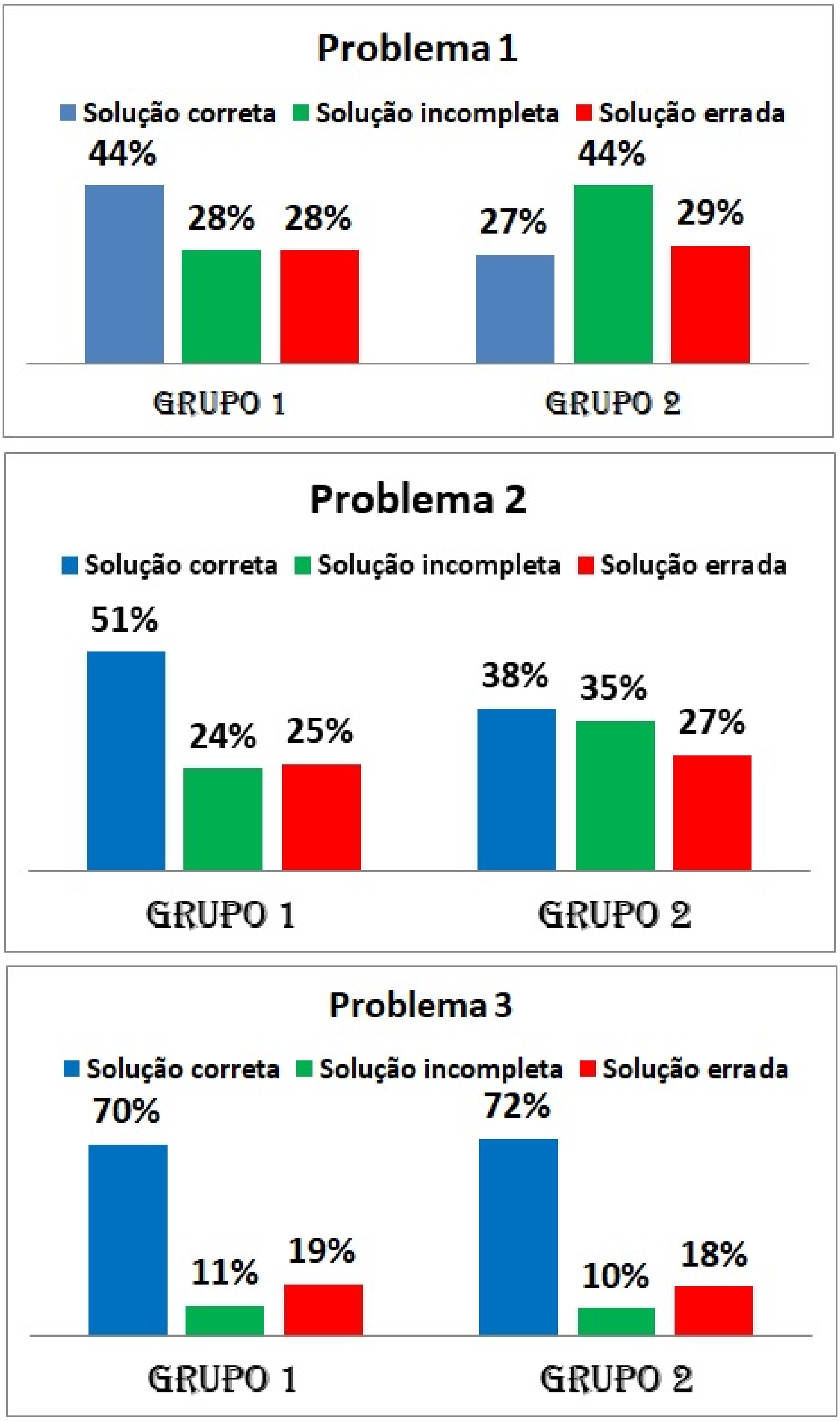
Figura 73 - Solução correta de um aluno, problema 3 - Aplicação 4.



Fonte: O autor, 2018.

Na quarta aplicação o rendimento do grupo 1 foi similar ao rendimento do grupo 2, como podemos verificar na figura 74. Apesar disso, os alunos do grupo 1 tiveram um desempenho melhor na etapa de execução do plano. Provavelmente a aula teórica teve influência nesse resultado.

Figura 74 - Estatística da aplicação 4.



Fonte: O autor, 2018.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Indubitavelmente o maior ensinamento que tive ao escrever essa dissertação está associado ao papel do professor no ensino da Matemática. Ao longo da minha trajetória profissional, sempre tive o objetivo de mostrar aos alunos os melhores caminhos para se chegar a solução de um problema. Acreditava que ao mostrar aos alunos as soluções mais curtas e mais elegantes para os problemas melhoraria o seu rendimento, potencializando a aprendizagem. Não percebia que ao resolver problemas sem dar o tempo e o ambiente necessário estava caminhando no sentido contrário a isso. Ao resolver problemas com os alunos o que eu fazia muitas vezes, sem perceber, era desmotivá-los. Muitas vezes ouvi os alunos perguntando: “como eu vou pensar nisso?”A resposta em muitos casos era: estuda! Lecionando dessa forma, pude perceber depois desse trabalho que ao apresentar soluções de problemas aos alunos, sejam simples ou complexos, estava sendo egoísta, pois ao preparar as aulas, acabava cumprindo todas as etapas da resolução de problema, mas ao lecionar apenas apresentava as soluções, não dando o devido protagonismo aos alunos.

Dessa forma, embora o conteúdo programático esteja dividido em um calendário justo, acreditamos que estratégias como a resolução de problema deve ser parte integrante do programa de Matemática e o professor deve usar essa metodologia de forma regular e consistente, pois dessa maneira o aluno pode melhorar seu rendimento gerenciando suas próprias ideias, acertos, erros e criando novas habilidades, tais como: identificar, distinguir, reconhecer, relacionar, comparar, hipotetizar, resolver, entre outras.

De acordo com esse pensamento, fizemos as aplicações que se encontram no capítulo 4 dessa dissertação. Embora tenhamos separados as cinco turmas em dois grupos, como já citamos, podemos perceber, de acordo com as estatísticas, que os grupos apresentaram rendimentos similares. Portanto, acreditamos que a grande vantagem em fazer essas aplicações esteja no fato de ter utilizado a metodologia de resolução de problema, pois isso trouxe um diferencial nas aulas e para os alunos trouxe uma liberdade de expor ideias e praticar a Matemática sem estar embasados em regras previamente estabelecidas. É importante ressaltar que muitos alunos contestaram o fato das aulas de Matemática não serem embasadas na metodologia de resolução de problema e lamentaram ter essa oportunidade somente no terceiro ano.

Concluo essa dissertação com uma percepção, em relação ao ensino de Matemática, diferente de quando comecei a escrevê-la. Esse trabalho me mostrou que sempre temos que estar atento as mudanças e tentar adaptar as melhores estratégias de ensino de acordo com cada necessidade. Dessa maneira, acredito que a metodologia de resolução de problema é uma estratégia fundamental que auxilia o professor de Matemática a essa difícil tarefa que é ensinar Matemática.

REFERÊNCIAS

ALLEVATTO, N. S. G. et al. *Resolução de Problema: Teoria e Prática*. 1. ed. Jundiaí - SP: Paco Editorial, 2014.

BAUMGART, J. K. *Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula*. 3. ed. Campinas SP: Editora atual, 2014.

BÍBLIA. A.T. Gênesis. Português. *Bíblia Sagrada*. 34. ed. São Paulo: Ed. Ave Maria, 1982. cap. 19.

BOYER, C. B. B. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental. MEC, 1997. 33 p. Disponível em: ⟨http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf⟩. Acesso em: 28 mar. 2017.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental. MEC, 1998. 39-42 p. Disponível em: ⟨http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf⟩. Acesso em: 17 jun. 2017.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio: Matemática*. Brasília: Ministério da educação, 2000. Disponível em: ⟨http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf⟩. Acesso em: 14 nov. 2017.

CAYLEY, A. Remarque sur la notation de fonctions algébrigues. *Crelle*, v. 50, p. 282–285, 1855.

CRILLY, T. *50 ideias matemáticas que você precisa conhecer*. 1. ed. São Paulo: Editora Planeta do Brasil LTDA, 2017.

DAMBROS, A. A. *O conhecimento do desenvolvimento histórico dos conceitos matemático e o ensino de matemática: possíveis relações*. Paraná: [s.n.], 2006. 183 p.

D'AMBROSIO, B. S. A evolução da resolução de problemas no currículo matemático. In: I SEMINÁRIO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMA, Rio Claro. *Anais...* Rio Claro: UNESP, 2008. p. 1.

D'AMBROSIO, U. *Educação matemática da teoria à prática*. 17. ed. Campinas, SP: Editora Papirus, 2009.

DANTE, L. R. Tese de livre docência, *Criatividade e resolução de problemas na prática educativa matemática*. Rio Claro, SP: [s.n.], 1988. 192 p.

ELLENBERG, J. *O poder do pensamento matemático*. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2015.

EVES, H. *Introdução de história da matemática*. 3. ed. Campinas SP: Editora da Unicamp, 2002.

LOPES, A. J. Resolução de problemas: observações a partir do desempenho dos alunos. Educação Matemática em Revista, São Paulo, p. 33–40, 1994.

MENDES, I. *Matemática e investigação em sala de aula*: tecendo redes cognitivas na aprendizagem. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MOREIRA, M. A. O que é afinal aprendizagem significativa? *Revista de teoría, investigación y práctica educativa*, La laguna, Espanha, n. 25, p. 29–56, Mar 2012.

ONUCHIC, L. d. L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas: tecendo redes cognitivas na aprendizagem. *Mathematics Teaching in the Middle School*, UNESP, São Paulo, 1999.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, MARIA APARECIDA VIGGIANI; BORBA, MARCELO DE CARVALHO (ORGS.). São Paulo: Educação Matemática: pesquisa em movimento, 2004. p. 221.

PEREIRA, A. L.; RAMOS, A.; CARNEIRO, T. *Problemas matemáticos: caracterização, importância e estratégias de resolução.* São Paulo: IME-USP, 2001. Disponível em: ⟨http://www.miniweb.com.br/ciencias/artigos/resolucao_problemas.pdf⟩. Acesso em: 29 jun. 2018.

POLYA, G. *A arte de resolver problema.* 2. ed. Rio de Janeiro: Ed. Interciência, 2006.

RESNICK, L. . C. Cognición y aprendizaje. *Anuario Psicología. Nº 69*, 1996.

REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. *Geometria euclidiana plana e construções geométrica.* 1. ed. São Paulo: Editora Unicamp, 2000.

ROMANATTO, M. C. *Resolução de problemas nas aulas de Matemática.* São Carlos, SP: Revista Eletrônica de Educação: UFSCar, v. 6, n. 1, Mai. 2012. 299-311 p.

SANCHES, M. H. F. *Efeitos de uma estratégia diferenciada dos conceitos de matrizes.* 2002. 115 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — UNICAMP, São Paulo, 2002.

SCHOENFELD, A. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In: D. A. GROUWS (ED.), HANDBOOK OF RESEARCH ON MATHEMATICS TEACHING AND LEARNING: A PROJECT OF THE NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. New York - NY: Macmillan Publishing Co, 1992. p. 334–370.

SOARES, M. T. C.; PINTO, N. B. *Metodologia de resolução de problema.* Rio de janeiro: [s.n.], 2001. Disponível em: ⟨http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_24/metodologia.pdf⟩. Acesso em: 10 fev. 2017.

SOUZA, A. B. *A resolução de problemas como estratégia didática para o ensino da matemática.* Brasília: Universidade Católica de Brasília, 2005. Disponível em: ⟨http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22005/ArianaBezerradeSousa.pdf⟩. Acesso em: 30 jun. 2018.

SOUZA, V. H. G. d. O uso de vários registros na resolução de inequações: Uma abordagem funcional gráfica. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

STEWART, I. *Os maiores problemas matemáticos*. 1. ed. Rio de janeiro: Editora Zahar, 2014.

VALE, I.; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A. *Ensinar matemática com resolução de problemas*. Viana do Castelo: [s.n.], 2015. 42 p. Disponível em: ⟨https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/2568813/mod_resource/content/2/Vale%2C%20Pimentel%20e%20Barbosa%20-%20Ensinar%20Matem%C3%A1tica%20com%20Resolu%C3%A7%C3%A3o%20de%20Problemas.pdf⟩.

APÊNDICE A – Abraham Wald e os furos de bala que faltam.

Essa história, como muitas outras da Segunda Guerra Mundial, começa com os nazistas expulsando um judeu da Europa e termina com os nazistas lamentando esse ato. Abraham Wald nasceu em 1902, na cidade que na época se chamava Klausenburg e era parte do Império Austro-Húngaro.

Neto de rabino e filho de um padeiro, o jovem Wald logo demonstrou talento na matemática. Foi admitido na Universidade de Viena onde se sentiu atraído por temas abstratos e recônditos até pelos padrões da Matemática pura: teoria dos conjuntos e espaços métricos. Mais tarde, emigrou para os Estados Unidos.

Em Nova York, Wald fez parte, durante a Segunda Guerra, do Grupo de Pesquisa Estatística (SRG, *Statistical Research Group*), um programa sigiloso que mobilizava o poderio dos estatísticos para o esforço de guerra — algo semelhante ao Projeto Manhattan, exceto porque as armas desenvolvidas eram equações, e não explosivos. O SRG era efetivamente em Manhattan, no número 401 da West 118th street, em Morningside Heights, apenas a uma quadra da Universidade de Columbia.

O talento matemático ali disponível correspondia à gravidade da tarefa. Nas palavras de W. Allen Wallis, diretor do SRG, "foi o mais extraordinário grupo de estatísticos já organizado, levando em conta tanto a quantidade quanto a qualidade". Frederick Mosteller, que mais tarde fundaria o Departamento de Estatística de Harvard, estava lá. Como também Leonard Jimmie Savage, o pioneiro da teoria da decisão. Norbert Wiener, matemático do Instituto Tecnológico de Massachusetts e criador da cibernética, dava uma passada por ali de tempos em tempos. A esse grupo se juntava Milton Friedman, futuro ganhador do Nobel de Economia, que se tornava assim a quarta pessoa mais inteligente na sala. O mais inteligente era Wald que era professor de Allen Wallis em Columbia e funcionava como uma espécie de eminência Matemática do grupo.

Um dia, os matemáticos receberam uma questão dos militares. Eles queriam blindar seus aviões contra os caças inimigos. Mas a blindagem tornava as aeronaves mais pesadas, e aviões mais pesados são mais difíceis de manobrar e usam mais combustível. Blindar demais os aviões é um problema; blindar de menos, também. Em algum ponto intermediário há uma situação ideal. Os militares foram ao SRG com alguns dados que julgaram úteis. Quando os aviões voltavam de suas missões, estavam cobertos de furos de balas. Mas os danos não eram distribuídos uniformemente. Havia muitos furos na fuselagem e quase nenhum no motor. Parecia fazer mais sentido, portanto, blindar mais a fuselagem. Será?

A blindagem, segundo Wald, não deveria ir aonde os furos de bala estavam, mas aonde os furos não estavam. A grande sacada foi simplesmente perguntar: onde estavam os furos de bala que faltavam? Aqueles que estariam sobre todo o revestimento do motor caso os danos tivessem se distribuído de forma igual pelo avião? Wald estava bastante seguro a esse respeito. Os furos de balas que faltavam estavam nos aviões que faltavam. A razão dos aviões voltarem com menos pontos atingidos no motor era que os atingidos no motor não voltavam. A grande quantidade de aviões que retornava à base com a fuselagem semelhante a um queijo suíço era forte evidência de que os tiros sofridos pela fuselagem podem ser tolerados.

Eis aqui um grande truque matemático que trona o quadro completamente claro: estabeleça algumas variáveis como zero. Nesse caso, a variável a pinçar é a probabilidade de um avião que leve um tiro no motor conseguir permanecer no ar. Estabelecer essa probabilidade como zero significa que um único tiro no motor sem dúvida derruba o avião. Qual deveria ser a aparência dos dados nesse caso? Você teria aviões com furos de bala ao longo das asas, da fuselagem, do nariz, mas nenhum no motor. O analista militar tem duas opções para explicar isso: Ou as balas alemãs atingem qualquer parte do avião, menos o motor, ou o motor é o ponto de vulnerabilidade total. Ambas as situações explicam os dados, mas esta última faz mais sentido.

As recomendações de Wald foram rapidamente materializadas, e ainda eram empregadas pela Marinha e pela Força Aérea na Guerra da Coréia e do Vietnã. Não sei dizer exatamente quantos aviões americanos elas salvaram, embora os analistas de dados descendentes do SRG e que hoje são militares devam fazer uma boa ideia a respeito. Uma coisa que o establishment de defesa americano tem tradicionalmente compreendido muito bem é que os países não vencem guerras somente sendo mais corajosos que o outro lado, nem mais livres, nem um pouco preferido por Deus. Os vencedores em geral são os caras que têm 5% a menos de aviões derrubados, ou que utilizam 5% menos combustível, ou que nutrem sua infantaria 5% a mais com 95% do custo. Esse não é o tipo de coisa que figure nos filmes de guerra, mas que constitue a própria guerra. E há Matemática em cada passo do caminho.

Por que Wald viu o que os oficiais, que tinham conhecimento e compreensão muito mais vastos dos combates aéreos, não conseguiram ver? Tudo volta para seus hábitos matemáticos. Um matemático sempre pergunta: "Quais são as premissas? Elas se justificam?"Essa maneira de pensar pode parecer irritante, mas também muito produtiva. Nesse caso, os oficiais tinham uma premissa involuntária, de que os aviões que voltavam eram uma amostra aleatória de todos os aviões. Se isso fosse verdade, você poderia tirar conclusões sobre a distribuição dos furos de bala em todos os aviões examinando a distribuição dos furos apenas nos aviões sobreviventes. Uma vez reconhecendo que a hipótese é esta, basta um instante para perceber que ela está totalmente errada; não há motivo para esperar que os aviões apresentem uma probabilidade igual de sobrevivência, independentemente de onde são atingidos.

As informações contidas nesse apêndice foram retiradas do livro: O poder do pensamento matemático: a ciência de como não estar errado (ELLENBERG, 2015, p. 11-18).

APÊNDICE B – Lista da primeira aplicação.

COLÉGIO PEDRO II – CAMPUS: REALENGO
MATEMÁTICA – 3º ANO (MÉDIO)
RESOLUÇÃO DE PROBLEMA – Lista XIV
PROFESSOR: THIAGO BORGES
ALUNO: ______________________________ TURMA: ________

Problema 1: Observando a tabela abaixo (figura 75), considere cinco cidades A, B, C, D e E; vamos indexar as linhas e colunas nessa tabela 5x5 por essas cidades e colocar 1 na posição definida pela linha e coluna se a cidade possui uma estrada que a liga diretamente à cidade e vamos colocar 0 (zero), caso não esteja ligada diretamente por uma estrada à cidade Colocaremos também 1 na diagonal principal.

Figura 75 - Existência de estradas entre cidades

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Fonte: O autor, 2018.

Observando essa tabela, determine quantos caminhos distintos há da cidade A para a cidade E, sabendo que em um caminho só é possível passar por alguma cidade uma única vez.

Problema 2: Problema 2: Uma pessoa possui 3 páginas em uma rede social e quer criar algumas métricas para medir o desempenho delas. Quando é publicado algo nessa rede social, podemos considerar que existam 3 categorias básicas de interação: os comentários, as curtidas e os compartilhamentos, com esses dados é possível ter um controle de desempenho dessas páginas. Sabe-se que no mês de janeiro de um determinado ano a página 1 obteve 100 comentários, 200 curtidas e 55 compartilhamentos, a página 2 obteve 250 comentários, 310 curtidas e 60 compartilhamentos, a página 3 obteve 20 comentários, 30 curtidas e 10 compartilhamentos. No mês de fevereiro desse mesmo ano, a página 1 obteve 120 comentários, 260 curtidas e 90 compartilhamentos, a página 2 obteve 100 comentários, 400 curtidas e 90 compartilhamentos e a página 3 obteve 60 comentários, 20 curtidas e 15 compartilhamentos. Curiosamente, no mês de março desse mesmo ano, cada página obteve um total de comentários, curtidas e compartilhamentos igual a soma dos dois meses anteriores.

a) Organize as informações em uma tabela que represente a quantidade de comentários, curtidas e compartilhamentos de cada página no mês de janeiro.

b) Organize as informações em uma tabela que represente a quantidade de comentários, curtidas e compartilhamentos de cada página no mês de fevereiro.

c) Organize as informações em uma tabela que represente a quantidade de comentários, curtidas e compartilhamentos de cada página no mês de março.

Problema 3: Uma indústria utiliza borracha, couro e tecido para fazer três modelos de sapatos. No modelo 1 são feitos 2 sapatos de borracha, 1 de couro e 1 de tecido. No modelo 2 é feito 1 sapato de borracha, 2 de couro e nenhum de tecido. No modelo 3 são feitos 2 sapatos de borracha, nenhum de couro e 2 de tecido. O custo de cada sapato de borracha é de R$10,00, cada sapato de couro tem o custo de R$50,00 e cada sapato de tecido tem o custo de R$30,00.

a) Organize as informações em uma tabela que represente a quantidade sapatos de cada modelo em relação a cada material utilizado (borracha, couro e tecido).

b) Organize as informações em uma tabela que relacione cada material utilizado com o custo unitário do sapato. Ou ainda, o custo de cada sapato de borracha, couro e tecido.

c) Determine o custo total para confeccionar cada um dos modelo de sapato.

d) Organize os dados encontrados no item anterior em uma tabela.

Problema 4: Uma indústria automobilística produz carros nos modelos X e Y nas versões popular, luxo e superluxo. Nesses carros, são utilizadas na montagem peças dos tipos A, B e C.

- Do tipo A são utilizadas 4 peças em cada carro do modelo X e 3 peças em cada carro do modelo Y.

- Do tipo B são utilizadas 4 peças em cada carro do modelo X e 5 peças em cada carro do modelo Y.

- Do tipo C são utilizadas 6 peças em cada carro do modelo X e 2 peças em cada carro do modelo Y.

- No carro de modelo X são fabricados 2 carros na versão popular, 4 na versão luxo e 3 na versão superluxo.

- No carro de modelo Y são fabricados 3 carros na versão popular, 4 na versão luxo e 5 na versão superluxo.

Determine:

a) Uma tabela que relacione a quantidade de peças de cada tipo utilizada em cada modelo de carro.

b) Uma tabela que relacione a quantidade de carros de cada modelo a cada uma das versões apresentadas.

c) Uma tabela que relacione a quantidade de peças de cada tipo a cada uma das versões.

APÊNDICE C – Lista da segunda aplicação.

COLÉGIO PEDRO II – CAMPUS: REALENGO
MATEMÁTICA – 3º ANO (MÉDIO)
RESOLUÇÃO DE PROBLEMA – Lista XV
PROFESSOR: THIAGO BORGES
ALUNO: ______________________________ TURMA: ________

Problema 1: (UERJ 1997 - adaptado) Observe os quadros I (tabela 14) e II (tabela 15), anunciados em uma livraria.

Tabela 14 - Quadro I

Quantidade	Edição luxo	Edição bolso
Livro A	76	240
Livro B	50	180

Fonte: http://www.vestibular.uerj.br, 2018.

Tabela 15 - Quadro II

Preço Unitário (em Reais)	Regular	Oferta
Ed. Luxo	8,00	6,00
Ed. Bolso	2,00	1,00

Fonte: http://www.vestibular.uerj.br, 2018.

a) Supondo que todos os livros A foram vendidos ao preço regular e todos os livros B foram vendidos ao preço de oferta, calcule a quantia arrecadada pela livraria na venda de todos esses livros.

b) Considere agora o quadro III (tabela 16), que indica a quantia arrecadada na venda de certa quantidade dos livros A e B (valores em reais).

Tabela 16 - Quadro III

	Preço (Regular)	Preço (Oferta)
Livro A	720,00	440,00
Livro B	560,00	340,00

Fonte: http://www.vestibular.uerj.br, 2018.

Utilizando esses dados e os apresentados no quadro II (tabela 14), calcule a quantidade vendida do livro A (edição de luxo) e a quantidade vendida do livro B (edição de bolso).

Problemas 2: Uma das formas de se enviar uma mensagem secreta é por meio de códigos matemáticos, seguindo os passos:

1. Tanto o destinatário quanto o remetente possuem uma matriz chave C;

2. O destinatário recebe do remetente uma matriz P, tal que MC = P, onde M é a matriz mensagem a ser decodificada;

3. Cada número da matriz M corresponde a uma letra do alfabeto: a = 1, b = 2, c = 3, ... , z = 23;

4. Consideremos o alfabeto com 23 letras, excluindo as letras, k, w e y.

5. O número zero corresponde ao ponto de exclamação.

6. A mensagem é lida, encontrando a matriz M, fazendo correspondência número/letra e ordenando as letras por linhas da matriz conforme segue: $m_{11}m_{12}m_{13}m_{21}m_{22}m_{23}m_{31}m_{32}m_{33}$.

Considere as matrizes:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 2 & -10 & 1 \\ 18 & 38 & 17 \\ 19 & 14 & 0 \end{bmatrix} \tag{95}$$

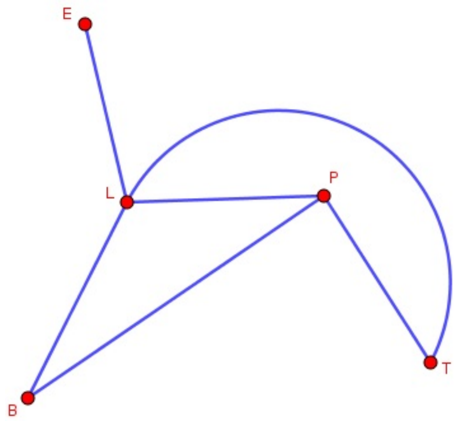
Com base nos conhecimentos e nas informações descritas, determine a mensagem que foi enviada por meio da matriz M.

APÊNDICE D – Lista da terceira aplicação.

COLÉGIO PEDRO II – CAMPUS: REALENGO
MATEMÁTICA – 3º ANO (MÉDIO)
RESOLUÇÃO DE PROBLEMA – Lista XVI
PROFESSOR: THIAGO BORGES
ALUNO: ____________________________ TURMA: ________

Problemas 1: A figura abaixo representa a rede de voos entre as cidades de Londres (L), Paris (P), Edimburgo (E), Bordeaux (B) e Toulouse (T). Considere que cada linha ligando duas cidades representa a existência de voo direto entre as mesmas.

Figura 76 - Redes de viagem



Fonte: O autor, 2018.

a) Determine uma matriz A quadrada 5x5 em que as linhas e as colunas serão representadas pelas cidades (de acordo com a tabela 17) e cada elemento aij terá valor 1 se houver voo direto entre as cidade i e j e valor 0 caso contrário.

Tabela 17 - Existência de voo entre cidades.

	Londres	Paris	Edimburgo	Bordeaux	Toulouse
Londres	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
Paris	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
Edimburgo	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
Bordeaux	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}
Toulouse	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}

Fonte: O autor, 2018.

b) Classifique a matriz A do item anterior.

c) Construa uma matriz B, do mesmo modelo da matriz A, em que cada elemento bij representa a quantidade de viagens possíveis entre as cidades i e j com exatamente uma escala.

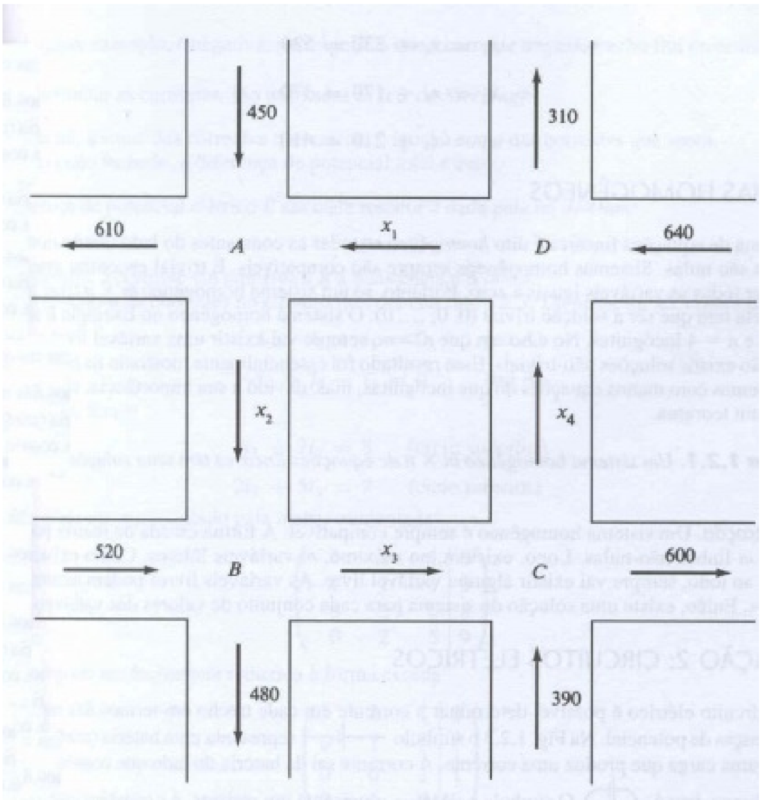
d) Podemos fazer alguma operação com a matriz A para obter a matriz B? Justifique sua resposta.

APÊNDICE E – Lista da quarta aplicação.

COLÉGIO PEDRO II – CAMPUS: REALENGO
MATEMÁTICA – 3º ANO (MÉDIO)
RESOLUÇÃO DE PROBLEMA – Lista XVII
PROFESSOR: THIAGO BORGES
ALUNO: ________________________________ TURMA: ________

Problema 1: Em uma certa seção do centro, de determinada cidade, dois conjuntos de ruas de mão única se cruzam (figura 77). A média do número de veículos por hora que entram e saem dessa seção durante o horário de rush é dada no diagrama. Determine a quantidade de veículos entre cada um dos quatro cruzamentos em função de x_4.

Figura 77 - Tráfego de carros.



Fonte: Álgebra linear com aplicações, Steven J. Leon 4ª edição LTC, Rio de Janeiro 2008.

Dica: O número de veículos que entra em cada cruzamento tem que ser igual ao número de veículos que sai dele.

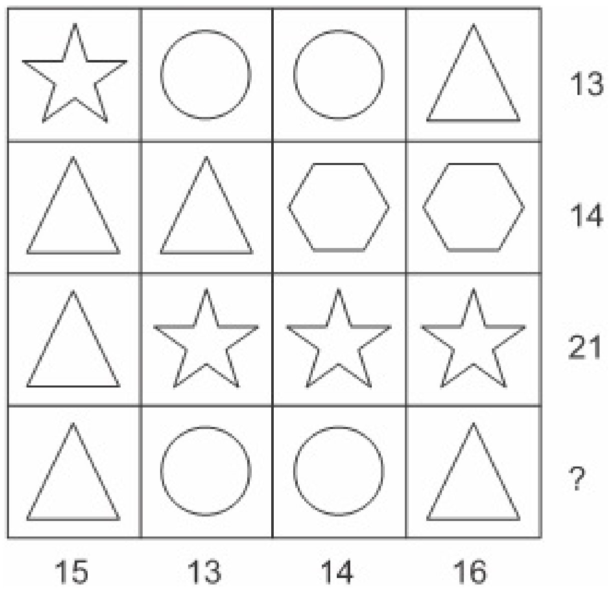
Problema 2: (UERJ 2007 - ADAPTADA) Observe a equação química que representa a fermentação do açúcar em (96):

$$xC_6H_{12}O_6 \longrightarrow yCO_2 + zC_2H_5OH \tag{96}$$

Uma das formas de equilibrar essa equação é igualar, em seus dois membros, as quantidades de átomos de cada elemento químico. Esse processo dá origem a um sistema linear. Determine esse sistema linear, o seu conjunto-solução em função de x e calcule os menores valores inteiros positivos de x, y e z que formam uma das soluções desse sistema.

Problema 3: (Colégio Pedro II - 2013) Sabendo que cada figura no quadro abaixo representa um número, que os números escritos no final de cada linha e no final de cada coluna indicam a soma dos números naquela linha ou coluna, indique qual o número que deve substituir a interrogação.

Figura 78 - Quadro problema 3



Fonte: https://www.cp2.g12.br, 2018.