Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Faculdade de Ciências Econômicas
Programa de Pós-Graduação em Ciências Econômicas

Luis Bolívar Rodrigo Matte Novoa

VIX e os Modelos Paramétricos de Volatilidade: uma Análise Comparativa

Rio de Janeiro
2017

Luis Bolívar Rodrigo Matte Novoa

VIX e os Modelos Paramétricos de Volatilidade: uma Análise Comparativa

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Econômicas, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Economia Quantitativa.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Antônio Lucena Aiube

Rio de Janeiro

2017

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/REDE SIRIUS/BIBLIOTECA CCS/B

N945 Novoa, Luis Bolívar Rodrigo Matte.
VIX e os modelos paramétricos de volatilidade: uma análise comparativa / Luis Bolívar Rodrigo Matte Novoa. – 2017.
60 f.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Antônio Lucena Aiube.
Dissertação (mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Ciências Econômicas.
Bibliografia: f.43-47.

1. Economia – Teses. 2. Mercado financeiro – Teses. 3. Administração de risco – Teses. 4. Mercado futuro – Teses. I. Aiube, Fernando Antônio Lucena. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Faculdade de Ciências Econômicas. III. Título.

CDU 336.76

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

_____ _____

Assinatura Data

Luis Bolívar Rodrigo Matte Novoa

VIX e os Modelos Paramétricos de Volatilidade: uma Análise Comparativa

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Econômicas, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Economia Quantitativa.

Aprovada em 07 de 12 de 2017.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fernando Antônio Lucena Aiube (Orientador)

PPGCE – UERJ

Prof. Dr. Carlos Alberto Gonçalves da Silva

PPGCE – UERJ

Prof. Dr. Ariel Levy

Universidade Federal Fluminense

Prof. Dr. Tara Keshar Nanda Baidya

Universidade do Grande Rio

Rio de Janeiro

2017

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a meus pais, Bolívar e Carmelita, e meu irmão Pablo, pois eles são meu porto seguro e o motivo de eu ter esta oportunidade.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Fundação de Apoio e Amparo à Pesquisa do Rio de Janeiro (FAPERJ) pelo apoio financeiro prestado ao longo destes dois anos de curso e à Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) pela oportunidade de estudo.

Aos meus pais pelo apoio financeiro e psicológico durante esta jornada.

A Deus por me conceder esta oportunidade e também por me ajudar espiritualmente.

Aos professores Carlos Alberto e Fernando Aiube por fomentarem em mim o interesse pela área de finanças e também pela produção científica realizada nestes dois anos.

Por fim, agradeço aos meus colegas da pós-graduação e demais amigos por me acolherem e fazerem com quem eu me sentisse em casa nesta cidade.

RESUMO

NOVOA, L. B. R. M. *VIX e os Modelos Paramétricos de Volatilidade: uma Análise Comparativa*. 2017. 56 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Econômicas) – Programa de Pós-Graduação em Ciências Econômicas, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

O VIX é uma medida de volatilidade implícita criada em 1993 pela *Chicago Board Options Exchange*, que se referia inicialmente ao S&P100, e atualmente ao S&P500. Seu uso pelos agentes do mercado financeiro impulsionou a discussão acadêmica sobre qual seria o estimador mais eficiente da volatilidade. Neste embate, estão os modelos de volatilidade histórica, implícita e estocástica. O presente estudo se concentra na discussão da volatilidade histórica e implícita, já que são as mais utilizadas pelo mercado. As previsões do VIX, de um modelo AR (1) GJR-GARCH (1,1) e do *RiskMetrics* são comparadas através de medidas de perda e regressões, a fim de determinar sua relevância, efetividade e dominância relativas. Percebe-se que o *RiskMetrics* é o menos eficiente das três métricas, que o VIX é o mais eficiente para a verificação imediata da volatilidade, e que o GJR-GARCH é melhor para previsões de médio e longo prazo.

Palavras-chave: VIX. S&P500. Volatilidade. GARCH.

ABSTRACT

NOVOA, L. B. R. M. *VIX and the Parametric Models of Volatility: a Comparative Analysis*. 2017. 56 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Econômicas) – Programa de Pós-Graduação em Ciências Econômicas, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

VIX is a measure for the implicit volatility. Created in 1993 by Chicago Board Options Exchange, it was first related to S&P100, and nowadays is related to S&P500. Its use by finance practitioners boosted the academic discussion about which estimator would be the most efficient. The implied volatility, the historical one and the stochastic one are included in this debate. The present study concentrates itself in the discussion between historical and implicit volatility, because they are the most used by the market. The forecasts of VIX, AR(1)GJR-GARCH(1,1) and *RiskMetrics* are compared through measures of loss and regressions, to determinate its relevance, effectiveness and dominance among them. It was noted that *RiskMetrics* was the least efficient, VIX is the best for immediate verification of the volatility and GJR-GARCH is better for mid to long term forecasts.

Keywords: VIX. S&P500. Volatility. GARCH.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 -Trajetória do VIX e do S&P500 27
Figura 2 -Retornos do S&P500 28
Figura 3 -Comparação entre a Vol. Realizada e as Previsões para todos os Horizontes..... 33

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 -Testes Estatísticos e seus P-Valores 29
Tabela2 -Modelos GARCH e GJR-GARCH 31
Tabela3 -Estatísticas Descritivas 34
Tabela4 -Regressão Simples 35
Tabela5 -Regressão com Defasagem 37
Tabela6 -Regressão Múltipla – Análise de Dominância 39
Tabela7 -Medidas de Perda 40
Tabela8 -Escolha do Melhor Preço de Exercício com Vencimento Próximo 55
Tabela9 -Escolha do Melhor Preço de Exercício com Vencimento Distante 55
Tabela 10 -Escolha das Opções de Venda Fora-do-Dinheiro 56
Tabela 11 -Escolha das Opções de Compra Fora-do-Dinheiro 56
Tabela 12 -Preço Médio das Opções Consideradas com Vencimento Próximo 57
Tabela 13 -Preço Médio das Opções Consideradas com Vencimento Distante 57
Tabela 14 -Contribuição de cada Opção com Vencimento Próximo 58
Tabela 15 -Contribuição de cada Opção com Vencimento Distante 59

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO **10**

1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA **12**

2 METODOLOGIA **16**

2.1 Média Condicional **16**

2.2 Variância Condicional 17

2.2.1 ARCH 17

2.2.2 GARCH 18

2.2.3 GJR-GARCH 19

2.2.4 IGARCH 19

2.2.5 RiskMetrics 20

2.3 Escolha do Melhor Modelo **20**

2.4 O Índice de Volatilidade VIX **21**

2.5 Previsões **23**

2.6 Regressões Comparativas **25**

3 RESULTADOS **27**

3.1 Dados **27**

3.2 Volatilidade Histórica **29**

3.3 Análise Conjunta das Previsões **32**

CONCLUSÃO **41**

REFERÊNCIAS **43**

APÊNDICE A – Derivação do VIX a partir dos Preços das Opções 47

APÊNDICE B – Exemplo Numérico de Cálculo do VIX 54

INTRODUÇÃO

Desde a proposição do modelo de apreçamento de opções por Black e Scholes em 1973, e a introdução do conceito de volatilidade implícita, o mercado passou a usá-lo como uma forma rápida e prática de se obter a volatilidade de ações baseado nos preços de suas opções. Em vista deste fato, a *Chicago Board Options Exchange* (CBOE) desenvolveu o índice de volatilidade do S&P100 (VIX), posteriormente reformulado e transferido para o S&P500, o que levou ao desenvolvimento de índices similares para outros mercados pela própria CBOE e também por outras bolsas ao redor do mundo.

A relação inversa entre a cotação do S&P500 e do VIX fez com que o mercado o adotasse como um termômetro do receio dos investidores. Momentos de crise fazem com que o VIX apresente níveis altos. Este comportamento possibilitou o uso do índice para estratégias de proteção, já que em 2006 foram lançadas opções sobre o VIX. Assim, investidores podem investir em posições contrárias às suas expectativas para limitar a perda de suas carteiras caso o S&P500 não se comporte da forma esperada.

O debate acadêmico a respeito de qual medida de volatilidade é mais fiel à realidade é tão antigo quanto a utilização da volatilidade implícita no dia-a-dia do mercado financeiro. A comparação com a volatilidade histórica, calculada através de modelos que consideram a heterocedasticidade condicional autorregressiva, e a volatilidade calculada por modelos baseados em processos estocásticos (nomeada como volatilidade estocástica nos estudos realizados), foi feita em diversos trabalhos acadêmicos ao longo destes últimos 40 anos.

A criação do VIX estendeu este debate, até porque o índice adotou uma nova metodologia para o cálculo da volatilidade implícita, o que levou a academia a analisar a validade disto, o quanto o índice super ou subestimaria a volatilidade realizada, a relação de causa e efeito entre eles, sua relação com a volatilidade histórica, dentre outros questionamentos, parte dos quais estão expostos na revisão bibliográfica deste trabalho.

Soma-se a este cenário a prática dos profissionais do mercado financeiro, que se utilizam do *RiskMetrics*, uma metodologia baseada no IGARCH, para realizar gerenciamento de risco de forma ágil, ressignificando o caráter trabalhoso de outros modelos de volatilidade histórica.

Em vista disto, este estudo toma por objetivo principal a análise destes três métodos de previsão da volatilidade, testando sua efetividade e comparando-os, buscando entender qual é mais fiel à volatilidade realizada. A definição do melhor modelo de heterocedasticidade

condicional autorregressiva para o S&P500 no período de janeiro de 2004 a abril de 2017 e a previsão da volatilidade gerada por ele e pelos outros métodos são elencadas como objetivos secundários.

A dissertação se divide da seguinte maneira: o próximo capítulo trata da revisão bibliográfica, com um estudo básico da metodologia atual do VIX e um compilado de artigos que foram tomados como base para a elaboração deste estudo. O capítulo 2 discorre sobre a metodologia a ser empregada. O capítulo 3 apresenta a história recente do S&P500 e do VIX, os resultados das previsões feitas com os três métodos e a análise de como eles se relacionam com a volatilidade realizada e com os concorrentes. O seguinte capítulo é a conclusão, que apresenta um resumo dos resultados e considerações a respeito do uso do VIX e da volatilidade histórica. O último capítulo lista todas as referências bibliográficas aqui utilizadas.

1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Simon (2003) estuda o Índice de Volatilidade do Nasdaq (VXN), que é calculado a partir das opções do índice Nasdaq 100 (NDX), no período de janeiro de 1995 a maio de 2002, buscando analisar a resposta da volatilidade a períodos em que as opções da Nasdaq 100 apresentam retornos positivos e negativos. A resposta do VXN para mudanças nos indicadores técnicos também é avaliada. Por fim, o poder preditivo do VXN para a volatilidade condicional do NDX é avaliado. Para isso, foram utilizadas modelos de mínimos quadrados ordinários com e sem *dummies*, o GJR-GARCH e médias móveis exponencialmente ponderadas. O artigo conclui que há correlação negativa entre VXN e retornos do NDX, e as bolhas que ocorreram no período não afetam esta relação. O GJR-GARCH não capturou essa correlação para retornos positivos. Concluiu-se também que as previsões do VXN são úteis, porém superestimadas.

Giot (2005a) calculou o *Value at Risk* (VaR) comparando o uso das volatilidades histórica e implícita em três períodos distintos: agosto de 1994 a maio de 1997 (baixa volatilidade e tendência positiva no mercado), junho de 1997 a março de 2000 (alta volatilidade e tendência positivo) e abril de 2000 a janeiro de 2003 (alta volatilidade e tendência negativa). Os índices de volatilidade implícita utilizados foram o VIX em suas duas metodologias, o VXN e o VXO, que é baseado no S&P 100. A volatilidade histórica foi obtida pelos modelos GJR-GARCH, com e sem o uso de volatilidade implícita, e pelo *RiskMetrics*. Os modelos que usaram volatilidade implícita foram tão bons quanto os outros. Nenhum modelo foi afetado pelas mudanças de mercado, concluindo-se que utilizar a volatilidade implícita para calcular o VaR é válido e seguro.

Giot (2005b) avalia a relação entre volatilidade implícita e os retornos presentes e futuros do mercado de ações para S&P100 e Nasdaq100 nos mesmos períodos analisados no artigo anterior, visando a representação de diferentes cenários de mercados. Através de modelos de mínimos quadrados ordinários com o uso de *dummies*, foi constatado que existe uma relação negativa entre mudanças na volatilidade implícita e nos índices. Ela é assimétrica para o S&P100 e o VIX. Constatou-se também que períodos de alta volatilidade implícita indicam que o mercado está desvalorizado, representando oportunidade de compra para lucro à longo prazo.

Jiang e Tian (2007) examinam a nova metodologia do VIX adotada em 2003, buscando verificar sua validade. Para isso, foi feita uma comparação entre o VIX e as

volatilidades calculadas através do modelo de Black & Scholes e por simulações de Monte Carlo. Verificou-se que o VIX faz superestimações da volatilidade das opções do S&P500. Portanto, foi proposto um método de suavização que se baseia na interpolação de preços de exercício e extrapolação dos mesmos para que a função de probabilidade atenda aos níveis de volatilidade implícita conhecidos. Ao ser aplicado para o período de janeiro de 1996 a maio de 2004, o método mostrou-se mais preciso na descrição da volatilidade.

Whaley (2009) faz uma resenha a respeito do VIX, explicando sua história e seu modo de cálculo antes e depois da mudança de metodologia. Ele também faz um breve estudo sobre a relação entre o VIX e o mercado acionário, utilizando-se de um modelo de mínimos quadrados ordinários onde as mudanças no VIX são regredidas contra a as mudanças no S&P500 e uma *dummie* para o S&P500 em tendência de queda. Verificou-se uma correlação negativa entre as mudanças no VIX e as do S&P500. Há ainda estudos sobre o comportamento do VIX em períodos de estabilidade, como usar o VIX para prever volatilidades futuras, e quão eficaz é o método proposto. O autor também lista alguns índices pelo mundo que foram inspirados no VIX. Conclui-se que o índice é um indicador do receio dos investidores.

Adhikari e Hilliard (2014) fazem um estudo da causalidade, prêmio de risco e poder de previsão entre a volatilidade implícita e a realizada utilizando o VIX e o VXO (índice de volatilidade do S&P100). Os dados utilizados são de 16 de janeiro de 1990 para o primeiro, e 02 de fevereiro de 1986 para o segundo, até 12 de dezembro de 2008 para ambos. Os métodos utilizados foram a causalidade de Granger, o vetor de correlação de erros (VEC), uma análise de *treshold* e uma regressão da volatilidade implícita sendo dependente da volatilidade realizada do período em questão e do anterior. Concluem que tanto VIX como VXO são "causados" pela volatilidade realizada, e a recíproca não pode ser observada. A dimensão das volatilidades realizadas anteriores modifica a influência da volatilidade realizada atual. Como a volatilidade realizada causa a volatilidade implícita, concluiu-se que esta última não é eficiente para prever volatilidade realizada futura. Também foi notado prêmio de risco negativo.

Fernandes, Medeiros e Scharth (2014) buscam compreender o comportamento estatístico do novo VIX frente a ele mesmo e a vários possíveis influenciadores. O período de 02 de janeiro de 1992 a 15 de janeiro de 2013 foi analisado através de um processo heterogêneo autorregressivo (HAR) puro e três com variáveis exógenas, sendo que um é normal, outro é assimétrico e o último é estimado com a ajuda de redes neurais. As variáveis exógenas incluem o volume de negociação do S&P500, os preços futuros do petróleo cru, a

taxa de câmbio do dólar frente a uma seleção de moedas, o *spread* do crédito através das obrigações da agência *Moody's*, a diferença entre rendimentos de títulos do tesouro americano de diferentes maturidades e entre a taxa de juros alvo e a efetiva do Fundo Federal (FED). Observou-se que o VIX não depende da taxa de juros do FED ou do *spread* de crédito. Dependência negativa foi observada para os retornos do S&P500 e os preços futuros do petróleo. Já o volume do S&P500 e a taxa de câmbio afetam de forma positiva. O modelo HAR puro se mostrou o mais apropriado para previsão.

Kanas (2014) estuda a capacidade da volatilidade histórica de representar a relação positiva entre risco e retorno, testando a utilidade do uso da volatilidade implícita como variável exógena. Os dados foram modelados com GARCH, GARCH exponencial e *component* GARCH, testando-os para as distribuições normal, t de *student* e *Generalized Error Distribution* (GED). Foram utilizadas observações do S&P100 e do VIX no período de 02 de janeiro de 1986 a 31 de dezembro de 2008. A inclusão da volatilidade implícita em todos os modelos e distribuições fez com que a relação positiva entre risco e retorno prevalecesse, permitindo a conclusão de que a volatilidade implícita possui a informação das expectativas do mercado a respeito da volatilidade vindoura, portanto, é importante incluí-la no cálculo da volatilidade histórica.

Lee e Ryu (2014) estudam as dinâmicas entre o índice da bolsa da Coreia do Sul (KOSPI 200) e seu índice de volatilidade implícita (VKOSPI), de acordo com o regime de mercado em que se encontram. Para isso, os dados de 02 de janeiro de 2003 a 28 de junho de 2013 foram submetidos ao modelo de correção de erro vetorial com *treshold* (TVEC), separando-os em dois regimes. O regime baixo abarca as condições típicas de mercado, enquanto que o alto apresenta volatilidade extremamente elevada. Através do modelo, notou-se que a correlação negativa entre KOSPI 200 e VKOSPI é mais acentuada no regime alto. Períodos anteriores de VKOSPI só se relacionam positivamente com KOSPI 200 neste regime, enquanto que períodos anteriores de KOSPI 200 se relacionam de forma positiva com VKOSPI apenas no regime baixo. Por fim, no regime alto KOSPI 200 é mais vulnerável a choques no VKOSPI.

Shaikh e Padhi (2014) comparam a volatilidade implícita e as providas pelo GJRGARCH e pelo *RiskMetrics*, buscando descobrir qual é a melhor para previsão da volatilidade realizada. O trabalho foi realizado utilizando os dados da bolsa de valores indiana (Nifty) e seu índice de volatilidade (India VIX) no período de 01 de novembro de 2007 a 30 de abril de 2013. O modelo GJR-GARCH revelou forte persistência da volatilidade do Nifty. Regressões univariadas comprovaram que a medida da volatilidade implícita foi a melhor em

produzir previsões. As regressões abrangentes, que levam em conta a volatilidade realizada do período anterior, mostraram que este dado não agrega informação para a previsão, sendo dispensável.

Chandra e Thenmozhi (2015) examinam o índice da bolsa de valores da Índia (Nifty) e seu índice de volatilidade (India VIX), buscando entender se há efeito assimétrico e se a volatilidade instantânea é melhor capturada pelo India VIX do que por métodos tradicionais. Eles avaliam também o uso dele para gerenciamento de risco e estratégia de mercado. A volatilidade histórica foi obtida através dos modelos GARCH e EGARCH, e uma regressão de quantis foi usada para examinar a relação dos retornos do Nifty com o India VIX. Duas formas de calcular a volatilidade realizada foram empregadas, assim como uma medida da volatilidade integrada *ex-post*. O período abordado se inicia em 01 de março de 2009 e termina em 30 de novembro de 2012. O India VIX se provou o melhor para prever a volatilidade realizada, e apresentou uma relação negativa com os retornos do Nifty. Entretanto, em movimentos fortes de alta, os dois tendem a se mover de forma independente, enquanto que na baixa forte a relação não é tão significante nos quartis mais altos. A pesquisa também concluiu que mudanças altas no India VIX podem ser usadas como sinalização para mudança entre portfolios.

Bongiovanni, Vincentiis e Isaia (2016) comparam o poder preditivo do VIX com outras formas de estimação, analisando o impacto do surgimento das opções sobre o índice em 2006 e seu desempenho em períodos turbulentos na estimação da volatilidade realizada. Ele busca também avaliar sua utilidade no gerenciamento de risco. Os dados, que vão de janeiro de 1995 a dezembro de 2014, foram divididos em dois subperíodos no ano de 2006. Tanto a volatilidade implícita como a histórica foram utilizadas em uma regressão multivariada onde a volatilidade realizada era a variável dependente. A volatilidade histórica foi determinada pelos modelos de média móvel simples, exponencial e GARCH. Posteriormente, as volatilidades foram aplicadas no cálculo do *Value-at-Risk* (VaR). Os resultados mostraram que o VIX, apesar de viesado, tem melhor poder explicativo da volatilidade realizada que os outros métodos em períodos normais. Na crise de 2008, os *outliers* causaram problemas de colinearidade. A introdução das opções em 2006 não surtiu efeito sobre o poder preditivo dele. A falha do VIX em 2008 o fez ter um desempenho ruim no VaR, mesmo que em períodos de VIX baixo o desempenho tenha sido significativamente melhor. A volatilidade das médias móveis simples teve o melhor desempenho. VIX e GARCH foram similares, mas o segundo apresentou perdas médias menores.

2 METODOLOGIA

O objeto de modelagem será a série de retornos do S&P500 no período de 02 de janeiro de 2004 a 28 de abril de 2017. Os retornos serão obtidos submetendo a série dos preços de fechamento do S&P500 à seguinte transformação:

$$r_t = \log(p_t) - \log(p_{t-1}) \tag{1}$$

onde r_t é o retorno na forma logarítmica, p_t é o preço de fechamento na data "t" e p_{t-1} é o preço de fechamento na data "t-1".

Esta série será analisada por meio dos testes de Jarque e Bera (1987), Ljung e Box (1978), o teste KPSS de Kwiatkowski et al. (1992) e o Dickey-Fuller Aumentado de Said e Dickey (1984), além da análise visual pelo correlograma e pelo histograma, com o intuito de identificar se ela é estacionária, autocorrelacionada e se possui distribuição normal. Depois desta avaliação, o próximo passo são as modelagens da média condicional e da variância condicional.

2.1 Média Condicional

De acordo com Box e Jenkins (1976), os modelos ARIMA se baseiam na premissa de que os períodos passados contêm informações relevantes a respeito dos períodos atuais e, portanto, variáveis podem ser modeladas dessa forma. A estimação é feita através de Mínimos Quadrados Ordinários. Box e Jenkins (1976 apud LAURENT et al., 2006) apresenta a equação da seguinte forma:

$$\Psi(L)(y_t - \mu_t) = \Theta(L)\varepsilon_t \tag{2}$$

onde L é o operador de defasagem,y_té a variável modelada, ε_t são as inovações, $\psi(L) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \psi_i L^i$ e $\Theta(L) = 1 + \sum_{j=1}^{s} \theta_j L^j$. O μ_t é usado para a introdução de variáveis explicativas no modelo ARMA. Caso uma delas seja a variância condicional ou o desvio padrão condicional, diz-se que o modelo trabalha com ARCH "na média". A seguir, a expressão do μ_t:

$$\mu_t = \mu + \sum_{i=1}^{n_1} \delta_i x_{i,t} + \vartheta \sigma_t^k \quad (3)$$

onde $x_{i,t}$ são as variáveis explicativas e σ_t^k representa o desvio padrão condicional, caso k = 1 ou a variância condicional, caso k = 2.

Box e Jenkins (1976) recomenda um procedimento para se trabalhar com os modelos ARMA que consiste nos seguintes passos:

(a) Identificação - A ordem dos componentes AR e MA é determinada através da análise das funções de autocorrelação (FAC) e autocorrelação parcial (FACP).

(b) Estimação - Faz-se a estimação dos parâmetros autorregressivos e de médias móveis, e verifica-se a significância de cada um.

(c) Verificação - Testam-se os resíduos do modelo, com o objetivo de verificar se a autocorrelação e a heterocedasticidade foram eliminadas. Nesta etapa também se verificam os critérios de informação para determinar qual o melhor modelo.

(d) Previsão - Dado que Y_{t-1} e Y_t sejam conhecidos, é possível utilizar o modelo ARMA para fazer previsões.

2.2 Variância Condicional

2.2.1 ARCH

Engle (1982 apud LAURENT et al., 2006) foi o primeiro a desenvolver um modelo de variância condicional sob a premissa de que as variâncias dos períodos passados afetam o termo de inovação, conforme ilustrado na equação abaixo:

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t \quad (4)$$

onde ε_t é o termo de inovação e z_t é um processo independente e identicamente distribuído com média zero e variância 1. Conforme pressuposto, ε_t é afetado pelo desvio padrão condicional (σ_t), que pode ser extraído da variância condicional calculada pelo modelo ARCH(q), que relaciona a variância condicional dos períodos com as inovações dos períodos passados, descrito a seguir:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \tag{5}$$

onde cada α indica a contribuição das inovações de cada período para a volatilidade prevista. A positividade do modelo somente é garantida caso $\omega > 0$ e $\alpha_i > 0$. Para que haja convergência nas previsões de volatilidade, é necessário que $\sum_{i=0}^{q} \alpha_i > 0$.

2.2.2 GARCH

Bollerslev (1986 apud LAURENT et al., 2006) desenvolveu uma generalização deste modelo usando restrições não lineares, tornando-o mais parcimonioso. O modelo GARCH(p,q) é calculado por:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \tag{6}$$

que pode ser representado com o operador de defasagem L da seguinte maneira:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(L)\varepsilon_t^2 + \beta(L)\sigma_t^2 \tag{7}$$

onde as variâncias condicionais dos períodos passados também passam a afetar os períodos atuais através dos coeficientes β, em conjunto com os termos de inovação passados, representados pelos coeficientes α. A soma dos αs e βs mostra a persistência dos choques. Quanto mais próximo a um, maior é o tempo necessário para que um choque se dissipe.

Bollerslev (1986 apud LAURENT et al., 2006) impôs como restrições para positividade que $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$ e $\beta_j \geq 0$, dado que i = 1, ..., q e j = 1, ..., p. Entretanto, Nelson e Cao (1992 apud LAURENT et al., 2006) realizaram um estudo onde mostram que estas restrições são muito rígidas, e que há casos em que a variância condicional é positiva mesmo que algum dos coeficientes sejam negativos. Portanto, através do relaxamento das restrições eles garantiram condições suficientes de positividade para os modelos GARCH(1,q) e GARCH(2,q) com base na seguinte representação:

$$\sigma_t^2 = \omega[1 - \beta(L)]^{-1} + \alpha(L)[1 - \beta(L)]^{-1}\varepsilon_t^2 \tag{8}$$

que só é válida se todas as raízes de $|1-\beta(L)|=0$ estiverem fora do círculo unitário. Neste caso, as restrições de positividade são $\omega[1-\beta(L)]^{-1}>0$ e todos os polinômios de $\alpha(L)[1-\beta(L)]^{-1}$ sejam maiores ou iguais a zero.

2.2.3 GJR-GARCH

A ocorrência do efeito alavancagem, um fato estilizado em finanças, não é representado pelo modelo GARCH. Segundo Bouchaud, Matacz e Potters (2001), este efeito foi discutido primeiramente por Black, em 1976. Em vista disso, modelos que buscavam incorporar este efeito surgiram, dentre eles o GJR-GARCH, que foi desenvolvido por Glosten, Jagannathan e Runkle (1993). Laurent et al. (2006) apresenta o modelo da seguinte forma:

$$\sigma_t^2=\omega+\sum_{i=1}^{q}(\alpha_i\varepsilon_{t-i}^2+\gamma_i S_{t-i}^{-}\varepsilon_{t-i}^2)+\sum_{j=1}^{p}\beta_j\sigma_{t-j}^2 \tag{9}$$

onde o efeito alavancagem é captado por γ_i, caso a variável *dummy* S_{t-i}^{-} seja igual a 1, que se dá quando o retorno é negativo.

Este modelo é muito próximo ao modelo TARCH de Zakoian (1994), mas se diferencia deste, pois calcula a variância condicional, enquanto que o TARCH calcula o desvio-padrão condicional.

2.2.4 IGARCH

Uma das informações mais importantes geradas pelos modelos GARCH é a persistência, que é medida pela soma dos α_i e dos β_j. Quando esta é próxima a um, significa que a persistência é alta. Entretanto, há casos em que a persistência é igual a um e, portanto, demandam o uso do IGARCH. Este modelo foi desenvolvido por Engle e Bollerslev (1986 apud LAURENT et al., 2006), e parte do seguinte rearranjo da equação 9:

$$[1-\alpha(L)-\beta(L)]\varepsilon_t^2=\omega+[1-\beta(L)](\varepsilon_t^2-\sigma_t^2) \tag{10}$$

Dado que o polinômio $[1-\alpha(L)-\beta(L)]$ contenha uma raiz unitária, o modelo IGARCH(p,q) é gerado na seguinte forma:

$$\phi(L)(1-L)\varepsilon_t^2 = \omega + [1-\beta(L)](\varepsilon_t^2 - \sigma_t^2) \tag{11}$$

onde $\phi(L) = [1-\alpha(L)-\beta(L)](1-L)^{-1}$ é de ordem *max{p,q}* − 1. Isolando a variância condicional, temos:

$$\sigma_t^2 = \frac{\omega}{[1-\beta(L)]} + \left\{1 - \frac{\phi(L)(1-L)}{[1-\beta(L)]}\right\}\varepsilon_t^2 \tag{12}$$

Este modelo não será usado nesta dissertação, mas foi apresentado para melhor compreensão do modelo *RiskMetrics*, já que este é baseado no IGARCH.

2.2.5 RiskMetrics

Segundo Laurent et al. (2006), o grupo de gerenciamento de risco J. P. Morgan desenvolveu o *RiskMetrics*, que nada mais é que um IGARCH(1,1) com os coeficientes ARCH e GARCH fixos. Sua simplicidade garantiu que sua utilização se tornasse padrão entre profissionais do mercado financeiro. Ele se apresenta da seguinte forma:

$$\sigma_t^2 = \omega + (1-\lambda)\varepsilon_t^2 + \lambda\sigma_t^2 \tag{13}$$

com ω fixado em 0 e λ em 0,94 para dados diários.

2.3 Escolha do Melhor Modelo

Os modelos de média e variância condicional serão selecionados de acordo com a significância de seus parâmetros e os critérios de informação Akaike, Schwarz, Hannan Quinn e Shibata, bem como suas capacidades em eliminar a autocorrelação e a heterocedasticidade de seus resíduos.

Após os melhores modelos para cada classe de modelo GARCH serem escolhidos, cada um será testado de acordo com seu poder preditivo. Para isto, serão aplicadas as funções de perda utilizadas por Wei, Wang e Huang (2010), expostas a seguir:

$$MEQ = \frac{\sum_{t=1}^{n}(\sigma_t^2 - \hat{\sigma}_t^2)^2}{n} \tag{14}$$

$$MEA = \frac{\sum_{t=1}^{n}|\sigma_t^2 - \hat{\sigma}_t^2|^2}{n} \tag{15}$$

$$MEQH = \frac{\sum_{t=1}^{n}(1 - \sigma_t^2/\hat{\sigma}_t^2)^2}{n} \tag{16}$$

$$MEAH = \frac{\sum_{t=1}^{n}|1 - \sigma_t^2/\hat{\sigma}_t^2|^2}{n} \tag{17}$$

onde n é o número de períodos previstos, $\hat{\sigma}_t^2$ é a volatilidade calculada pelas previsões e σ_t^2 é a volatilidade realizada, que é o *benchmark* deste estudo. O MEQ é a média do erro quadrado e o MEA é a média do erro absoluto. MEQH e MEAH são os mesmos índices ajustados para a heterocedasticidade.

De acordo com Sadorsky (2006 apud WEI; WANG; HUANG, 2010) e Kang, Kang e Yoon (2009 apud WEI; WANG; HUANG, 2010), a variância estimada pode ser extraída diretamente dos retornos observados, simplesmente elevando-os ao quadrado. O modelo que apresentar os menores índices são os mais precisos.

Estas funções de perda também serão aplicadas posteriormente para analisar as previsões descritas na próxima seção.

2.4 O Índice de Volatilidade VIX

De acordo com Rhoads (2011), o CBOE *Volatility Index* (VIX) foi criado pela *Chicago Board Options Exchange* (CBOE) com base no artigo "*Derivatives on Market Volatility: Hedging Tools Long Overdue*", publicado em 1993 por Robert Whaley. Inicialmente, baseava-se em oito opções do S&P100 para determinar a volatilidade implícita deste mercado. Em 2003, uma nova metodologia foi adotada, e o índice passou a se basear no S&P500, já que as opções desta bolsa passaram a ser mais negociadas do que as do S&P100. O número de opções consideradas no cálculo também aumentou. Agora são utilizadas todas as opções de compra e venda *out of the money* (o exercício da opção gera prejuízo) e *at the*

money(a compra ou venda de ações pelo exercício da opção se dá pelo mesmo preço que o negociado em bolsa).

Segundo a CBOE (2014), em 2014 houve inovação na forma de cálculo do VIX, com a adição das *SPX Weeklys*, que são opções que vencem em outras sextas que não as convencionalmente utilizadas pelas opções normais. Atualmente, a seguinte fórmula é usada no cálculo do VIX:

$$\sigma^2 = \frac{2}{T}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta K_i}{K_i^2}e^{RT}Q(K_i) - \frac{1}{T}\left[\frac{F}{K_0} - 1\right]^2 \tag{18}$$

onde σequivale a VIX/100. T é o tempo restante para o vencimento da opção. F é a cotação esperada do S&P500, extraída a partir do preço de exercício que apresenta a menor diferença de preço entre opções de compra e de venda. K_0 é o primeiro preço de exercício abaixo do F calculado. K_i é o preço de exercício da opção fora do dinheiro "i". ΔK_i é a diferença entre os preços de exercício acima e abaixo de K_i divididos por dois. Para as opções que estão nos extremos da faixa de preços de exercício selecionada, o ΔK_i é simplesmente a diferença entre K_i e o preço de exercício vizinho. R é a taxa livre de risco, que toma por base os títulos públicos americanos que vencerão em datas próximas às opções em questão, e $Q(K_i)$ é o preço médio entre as opções de compra e venda de cada preço de exercício. A derivação desta equação encontra-se descrita no apêndice 1.

O tempo restante (T) é calculado em minutos, através da seguinte fórmula:

$$T = \frac{M_C + M_S + M_O}{M} \tag{19}$$

onde M_C são os minutos restantes para a meia noite do dia em questão, M_S são os minutos contidos no período da meia noite às 8:30, para opções SPX normais, e 15:00 para opções SPX semanais, M_O são os minutos contidos entre a data em questão e a data de vencimento, e M é o total de minutos do ano. O tempo é contado desta forma porque a CBOE atualiza o VIX a cada cinco minutos (CBOE, 2014).

Para o cálculo da cotação "desejada" pelas opções (F), reúnem-se todas as opções de compra e venda com o mesmo vencimento, classificando-as de acordo com seu preço de exercício. Em seguida, calcula-se a média dos preços de compra e venda de cada opção para cada preço de exercício. Com os preços médios das opções de compra e vende em mãos, faz-

se a subtração deles para encontrar o preço de exercício com a menor diferença entre o preço da opção de compra e o preço da opção de venda. Este preço de exercício e o preço de suas opções serão usados na seguinte fórmula:

$$F = K + e^{RT}(C - P) \tag{20}$$

onde S é o preço de exercício, C é o preço da opção de compra e P é o preço da opção de venda. As demais notações são as mesmas das fórmulas anteriores (CBOE, 2014).

É importante notar que não são todas as opções "fora do dinheiro" que são utilizadas no cálculo do VIX. Após a determinação de K_0, os preços de compra e venda das opções "fora do dinheiro" são analisados. Preços de exercício com opções cujos preços de compra são nulos são desconsiderados. Caso dois preços de exercício consecutivos apresentem opções cujos preços de compra são nulos, os preços de exercício subsequentes também são desconsiderados CBOE (2014).

Segundo a CBOE (2014), o cálculo é feito com uma média ponderada entre as volatilidades implícitas de duas datas de vencimento, uma próxima, que não deve ser menor que 23 dias, e uma distante, que não deve ser maior que 37 dias. Um exemplo prático deste cálculo está descrito no apêndice 2.

Uma vez calculado, o VIX se referirá à volatilidade esperada para os próximos 30 dias, ou 22 dias úteis. Como a base do cálculo é a volatilidade esperada pelas opções, este índice é referido como *forward-looking*, já que retrata as expectativas do mercado para o futuro (CBOE, 2014).

2.5 Previsões

As previsões foram feitas conforme recomendado por Shaikh e Padhi (2014), seguindo a regra da "raiz quadrada do tempo", proposta por Giot (2005a). Os horizontes de tempo escolhidos foram de 1, 5, 10, 22 e 66 passos à frente, referentes à, respectivamente, um dia, uma semana, duas semanas, um mês e três meses a frente, contados apenas os dias úteis. O VIX do período t deverá ser tratado pela seguinte fórmula:

$$\sigma_{VIX\,k,t} = VIX_t \sqrt{\frac{k}{360}} \tag{21}$$

onde k é o horizonte (número de passos a frente).

A previsão do modelo *RiskMetrics* será feita pela seguinte equação:

$$\sigma_{RM\ t} = \omega + (1 - \lambda)r_t^2 + \lambda\sigma_{RM\ t-1} \tag{22}$$

com λ fixado em 0,94 para dados diários, conforme a prática do mercado. r_t é o retorno diário do S&P500.

Para adequar esta previsão aos horizontes de k passos a frente, ela deve ser submetida à seguinte fórmula:

$$\sigma_{RM\ k,t} = \sqrt{k\sigma_{RM\ t}} \tag{23}$$

A previsão do modelo GJR-GARCH usa duas equações: uma para o primeiro passo, e outra para os demais. Para demonstrar de forma simplificada, as equações de um modelo GJR-GARCH(1,1) serão expostas. A do primeiro passo está descrita a seguir:

$$h_{t+1} = \omega + \alpha\varepsilon_t^2 + \beta h_t + \gamma S_t^- \varepsilon_t^2 \tag{24}$$

A seguinte equação é utilizada para os demais passos:

$$h_{t+k} = \omega + (\alpha + \beta + 0{,}5\gamma)h_{t+k-1} \tag{25}$$

onde k é o número de passos da previsão. Nota-se que γ está multiplicado por 0,5, pois não se sabe a possibilidade dos próximos eventos serem bons ou ruins. Portanto, assume-se uma probabilidade de 50% de chances de uma notícia ruim ocorrer em cada período, o que justifica a contribuição de metade do γ para a volatilidade prevista.

Calculados todos os passos necessários, eles devem ser transformados para o horizonte, de acordo com a seguinte equação:

$$\sigma_{GJR\ k,t} = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} h_{t+j}} \tag{26}$$

É importante ressaltar que o número de passos da previsão deve ser igual ao horizonte pretendido. Portanto, cada horizonte requer uma previsão diferente, dada a variação no número de passos.

Por fim, o *benchmark* do estudo também deve ser adequado aos horizontes. Portanto, os retornos quadrados são submetidos à seguinte equação:

$$\sigma_{RV\ k,t} = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} r_{t+j}^2} \tag{27}$$

que se refere à volatilidade *ex-post* do período [t+1,t+k], enquanto que as outras equações calculam a volatilidade *ex-ante*, ou esperada por cada previsão.

Todas as previsões foram feitas com base no conceito de "não-sobreposição", que consiste em desconsiderar as previsões feitas a partir de amostras que já estejam dentro de uma previsão. Para exemplificar, imagine que a observação 1 do VIX foi usada para calcular um horizonte de 5 passos à frente. Os períodos de 2 a 6 estariam sendo cobertos por esta previsão, então a próxima observação a ser utilizada seria a sexta, que geraria previsões nos períodos 7 a 12, gerando uma série composta apenas por previsões não sobrepostas.

Este conceito foi apresentado por Christensen e Prabhala (1998 apud SHAIKH; PADHI, 2014), que apontou problemas de autocorrelação em previsões geradas com sobreposição, o que levava a distorções em suas propriedades estatísticas. Sendo assim, estas previsões não eram confiáveis.

2.6 Regressões Comparativas

As previsões serão análisadas e comparadas não apenas com as medidas de perdas já mencionadas na seção 2.3, mas também com três regressões utilizadas por Shaikh e Padhi (2014). A primeira é a seguinte regressão univariada:

$$\sigma_{RV\ k,t} = \pi_0 + \pi_1 \sigma_{PREV\ k,t} + \varepsilon_t \tag{28}$$

onde PREV se refere às previsões discutidas anteriormente. VIX, GJR-GARCH e *Risk-Metrics*.

Através desta regressão, é possível verificar se as previsões carregam informações a respeito da volatilidade realizada, averiguando se π_1 é significativo e diferente de zero. Também é feito um teste conjunto de Wald para averiguar se $\pi_0 = 0$ e $\pi_1 = 1$. Caso o teste não seja capaz de rejeitar a hipótese nula, sabe-se que a previsão em questão não é viesada.

A segunda regressão é similar à primeira, mas conta um regressor adicional: uma observação defasada da volatilidade realizada, conforme a equação a seguir:

$$\sigma_{RV\ k,t} = \pi_0 + \pi_1 \sigma_{PREV\ k,t} + \pi_2 \sigma_{RV\ k,t-1} + \varepsilon_t \tag{29}$$

Esta regressão é útil para verificar se a previsão abarca de forma satisfatória as informações providas no período passado pela volatilidade realizada. Isto é feito verificando se $\pi_2 = 0$, mas o teste conjunto de Wald também é empregado neste caso, sob a hipótese nula de que $\pi_1 = 1$ e $\pi_2 = 0$. Caso o teste não possa rejeitá-la, então fica comprovado com uma certeza maior que a previsão está representando ou utilizando toda a informação disponibilizada pela volatilidade realizada passada.

A última regressão também é multivariada, e envolve duas previsões por vez, conforme pode ser visto a seguir:

$$\sigma_{RV\ k,t} = \phi_0 + \phi_1 \sigma_{PREV1\ k,t} + \phi_2 \sigma_{PREV2\ k,t} + \varepsilon_t \tag{30}$$

onde PREV1 se refere a uma das previsões, e PREV2 se refere a outra distinta.

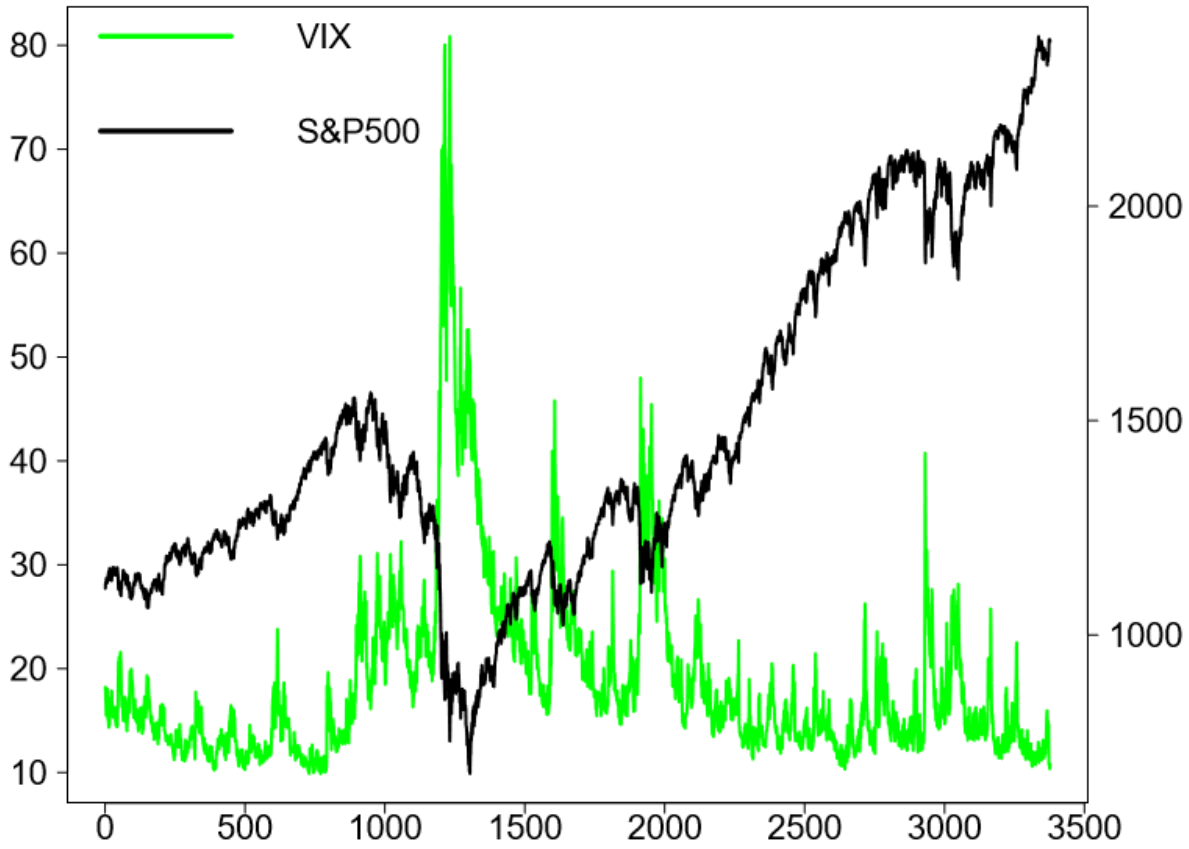
Todas as previsões são testadas umas contra as outras nesta regressão, a fim de verificar qual delas prevalece sobre as outras, um conceito denominado por Shaikh e Padhi (2014) como “dominância”. Caso uma delas seja estatisticamente não significativa ou tenha um coeficiente menor que a outra, então ela é dominada pela outra. Para identificar regressões com multicolinearidade, o *Variance Inflation Factor* (VIF) foi calculado, e a regressão que apresentou valor maior que 10 foi desconsiderada da análise.

3 RESULTADOS

3.1 Dados

O período considerado se inicia em janeiro de 2004, mês em que o VIX passou a se referir ao S&P500, e termina em dezembro de 2016. A trajetória do VIX e do S&P500 são apresentadas na figura 1, enquanto que os retornos do S&P500 são mostrados na figura 2. Percebe-se que entre 2004 e 2008 (entre os momentos 0 e 1111) há um crescimento estável do S&P500, e, portanto, o VIX registra uma volatilidade estável, raramente ultrapassando 20%. Com a chegada da crise do *subprime*, as sucessivas derrocadas na cotação do S&P500 foram seguidas fielmente por inicial agitação entre 20 e 30% no VIX, chegando ao auge da crise, em 2009 (momento 1213), quando a marca de 80% foi superada.

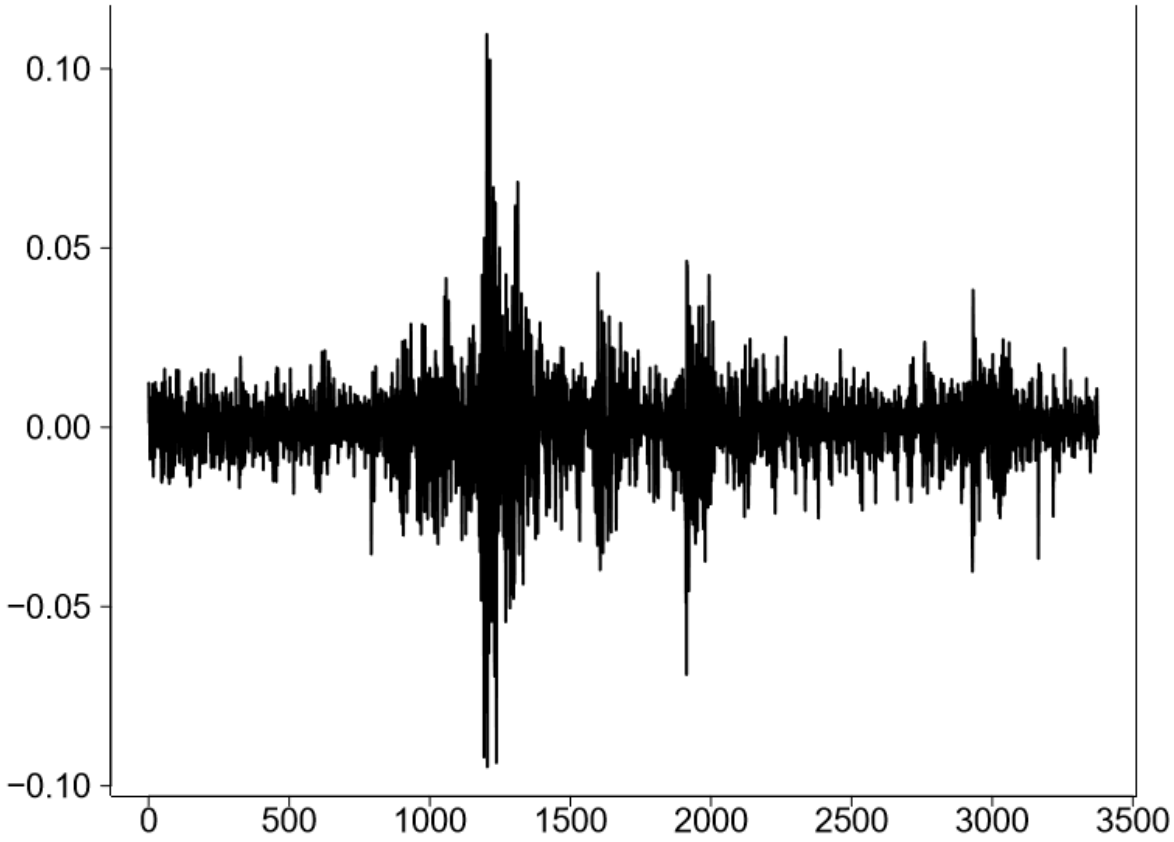
Figura 1 - Trajetória do VIX e do S&P500



Nota: o eixo vertical esquerdo se refere ao VIX, e o direito ao S&P500.

Fonte: O autor, 2017.

Figura 2 – Retornos do S&P500



Fonte: O autor, 2017.

A segunda grande perturbação, que fez o índice saltar de pouco menos de 20% para 45,79% em maio de 2010 (momento 1606), foi causada pelo evento que ganhou o nome de *Flash Crash* de 2010. Segundo SEC e CFTC (2010), a Crise da Dívida Europeia foi responsável por isso, já que notícias do risco de insolvência da Grécia se espalharam naquele dia, aumentando drasticamente a procura por proteção contra este possível evento.

Conforme reportado por Riley (2011) na CNN, em agosto de 2011 (momento 1945) a agência *Standards & Poors* rebaixou os Estados Unidos em sua classificação de confiança do pagamento da dívida pública. O país, que antes estava classificado como AAA (sem risco), passou para AA+. Isto causou queda nas principais bolsas estadunidenses, incluindo o S&P500, e o VIX registrou um salto de mais de 20 pontos percentuais durante o evento.

O último salto notável do VIX ocorreu em agosto de 2015 (momento 2930). Segundo Mikolajczak (2015), a queda nas bolsas foi causada por conta de uma desvalorização inesperada do Yuan, a moeda chinesa, e também pela crescente expectativa de uma desaceleração da economia chinesa. O VIX, que se encontrava entre 10 e 20% desde fevereiro daquele ano, passou subitamente à 40,75%.

Comparando os dois gráficos, percebe-se que o VIX responde bem tanto às quedas do S&P500 como às aglomerações de alta volatilidade apresentadas no gráfico 2, que ocorrem em concomitância aos períodos de queda do S&P500.

Tabela 1 – Testes Estatísticos e seus P-Valores

Teste	Valor	P-Valor
Jarque Bera	275,39	0
KPSS	16,426	0,009
Dickey-Fuller Aumentado	-1,082	0,9255
Ljung-Box	3368,8	0

Nota: A coluna "Valor" se refere aos valores estatísticos usados em cada teste.
Fonte: O autor, 2017.

Os testes para averiguar a normalidade, a estacionariedade e a autocorrelação da série foram realizados. O teste Jarque-Bera apontou que a série não segue uma distribuição normal. Os testes Dickey-Fuller Aumentado e KPSS tem hipóteses nulas contrárias. A do KPSS é a de que a série é estacionária, enquanto que a do Dickey-Fuller Aumentado é de que a série não é estacionária. Observa-se que o primeiro não pode rejeitar a hipótese nula, enquanto que o segundo rejeitou sua hipótese nula. Conclui-se que a série é estacionária e não precisa ser defasada para ser modelada. O teste Ljung-Box não pode rejeitar sua hipótese nula de que não há autocorrelação. Sendo assim, a série está apta a ser modelada através dos modelos ARIMA e GARCH.

3.2 Volatilidade Histórica

Os retornos do S&P500 foram usados para o cálculo da volatilidade histórica através dos modelos GARCH e GJR-GARCH no *software OxMetrics 5*, com o uso do pacote *G@RCH* 5.0 . As distribuições utilizadas foram a normal e t assimétrica, sendo que apenas a normal se mostrou capaz de produzir modelos que respeitassem todas as suas restrições e eliminassem satisfatoriamente a autocorrelação e a heterocedasticidade de seus resíduos. A tabela 2 apresenta os melhores modelos de cada tipo.

A forma equacionária do modelo ARMA(1,1)-GARCH(2,1) se divide em duas partes. A primeira é a da média condicional, representada pelo ARMA(1,1), conforme visto a seguir:

$$y_t = 0{,}000532 + 0{,}672205y_{t-1} - 0{,}727675\varepsilon_{t-1} \quad (31)$$

A segunda é a variância condicional, representada pelo GARCH(2,1), conforme observado abaixo:

$$\sigma_t^2 = 0{,}0000013651 + 0{,}057843\varepsilon_{t-1}^2 + 1{,}464611\sigma_{t-1}^2 - 0{,}535179\sigma_{t-2}^2 \quad (32)$$

Da mesma forma, o modelo AR(1)-GJR-GARCH(1,1) também se divide em dois, sendo a média condicional representada por AR(1), de acordo com a equação a seguir:

$$y_t = -0{,}040926y_{t-1} \quad (33)$$

Enquanto que a variância condicional é representada por GJR-GARCH(1,1), descrito a seguir:

$$\sigma_t^2 = 0{,}0000021671 - 0{,}0322672\varepsilon_t^2 + 0{,}206909S_{t-1}^{-}\varepsilon_{t-1}^2 + 0{,}906891\sigma_{t-1}^2 \quad (34)$$

Foi escolhido o melhor entre o GARCH e o GJR-GARCH para representar a volatilidade histórica. A escolha entre os dois foi importante para averiguar os benefícios do uso de um modelo assimétrico de previsão. O modelo RiskMetrics com α igual à 0,06 e β igual à 0,94 também foi levado à análise das regressões, dado seu extenso uso por profissionais de finanças.

Os melhores modelos encontrados foram o ARMA(1,1)-GARCH(2,1) e AR(1)GJR-GARCH(1,1), ambos na distribuição normal. A soma do α e dos β no modelo GARCH é igual a 0,987275, o que revela alta persistência dos choques, e abre precedentes para o uso de modelos de memória longa, algo que pode ser explorado em trabalhos futuros. Além disso, o modelo eliminou a autocorrelação no teste Box-Pierce em todas as defasagens avaliadas. A heterocedasticidade de seus resíduos, conforme visto no teste Box-Pierce para os resíduos quadrados, foi eliminada nas defasagens de 20 e 50 períodos. Já o teste ARCH-LM (ENGLE, 1982) aponta que a heterocedasticidade foi eliminada nas defasagens de 5 e 10 períodos.

O modelo GJR-GARCH apresentou γ significativo e positivo, indicando que existe o efeito alavacagem. Notícias ruins fazem a volatilidade do S&P500 ser maior em 0,206909. A soma de α e β é igual a 0,874624, o que mostra que neste modelo também há persistência dos choques.

Tabela 2 - Modelos GARCH e GJR-GARCH

Parâmetro	**ARMA(1,1)GARCH(2,1)**	**AR(1)GJR(1,1)**
Constante	0,000532 (4,42)***	
AR(1)	0,672205 (4,774)***	-0,040926 (-2,259)**
MA(1)	-0,727675 (-5,394)***	
ω	0,0000013651 (4,048)***	0,0000021671 (4,897)***
α	0,057843 (4,4098)***	-0,032267 (-4,372)***
β_1	1,464611 (9,516)***	0,906891 (63,81)***
β_2	-0,535179 (-3,809)***	
γ		0,206909 (7,632)***
Log (L)	10208,673	10279,45
AIC	-6,531160	-6,577753
BIC	-6,517611	-6,568075
SH	-6,531170	-6,577758
HQ	-6,526297	-6,574279
Q(5)	3,79554 [0,284405]	6,39269 [0,17166787]
Q(10)	7,41451 [0,4926395]	9,76235 [0,3700648]
Q(20)	17,1339 [0,5139161]	19,5994 [0,4190333]
Q(50)	51,97 [0,3219753]	53,8079 [0,2954567]
$Q^2(5)$	8,89941 [0,011682]	11,4557 [0,0095006]
$Q^2(10)$	14,6307 [0,0410359]	16,9564 [0,0305666]
$Q^2(20)$	21,9213 [0,1877659]	23,2854 [0,1798611]
$Q^2(50)$	42,0118 [0,6788403]	44,9572 [0,5982795]
ARCH-LM(2)	3,6418 [0,0263]	5,1586 [0,0058]
ARCH-LM(5)	1,7053 [0,1299]	2,3411 [0,0393]
ARCH-LM(10)	1,3837 [0,1812]	1,7701 [0,0607]
MSE	0,00000001587	0,00000001488
ME	-0,00005928	-0,0000518
MAE	0,0000914	0,00008479
RMSE	0,000126	0,000122

Os valores em parênteses correpondem ao valor da estatística t de cada parâmetro. * se refere à significância de 10%, ** de 5% e *** de 1%. Os valores em colchetes se referem ao p-valor de cada teste.
Fonte: O autor, 2017.

A autocorrelação foi eliminada de forma satisfatória em todas as defasagens, conforme o teste Box-Pierce nos resíduos (Q). O mesmo teste feito nos resíduos quadrados (Q^2) aponta que a heterocedasticidade foi eliminada para 20 e 50 passos anteriores, enquanto

que o teste ARCH-LM não é capaz de observar o mesmo para defasagens menores, como 10 ou 5 passos.

A comparação entre os critérios de informação Akaike, Schwarz, Shibata, Hannan Quinn e o log da verossimilhança dos dois modelos mostra total domínio do GJR-GARCH sobre o GARCH, e todas as medidas de erro de previsão também foram favoráveis ao GJR. Portanto, mesmo que o modelo ARMA(1,1)-GARCH(2,1) tenha sido mais eficiente em eliminar a heterocedasticidade, o modelo AR(1)-GJR-GARCH(1,1) apresenta uma capacidade melhor de representação dos dados, mantendo a capacidade de eliminar a heterocedasticidade dos resíduos nas defasagens mais distantes (20 e 50). Portanto, este modelo foi escolhido para representar a volatilidade histórica nas regressões comparativas.

3.3 Análise Conjunta das Previsões

O painel apresentado na figura 3 apresenta os gráficos das previsões de volatilidade do GJR-GARCH, do VIX e do RiskMetrics em comparação com a volatilidade realizada, sendo que esta é referida apenas como “Real”. Os horizontes de tempo são de um, 5, 10, 22 e 66 passos à frente, contando respectivamente com 3375, 675, 337, 153 e 51 observações, dada a metodologia de não-sobreposição empregada. Para todos os resultados apresentados nesta seção, foi utilizado o *software* R versão 3.4.2.

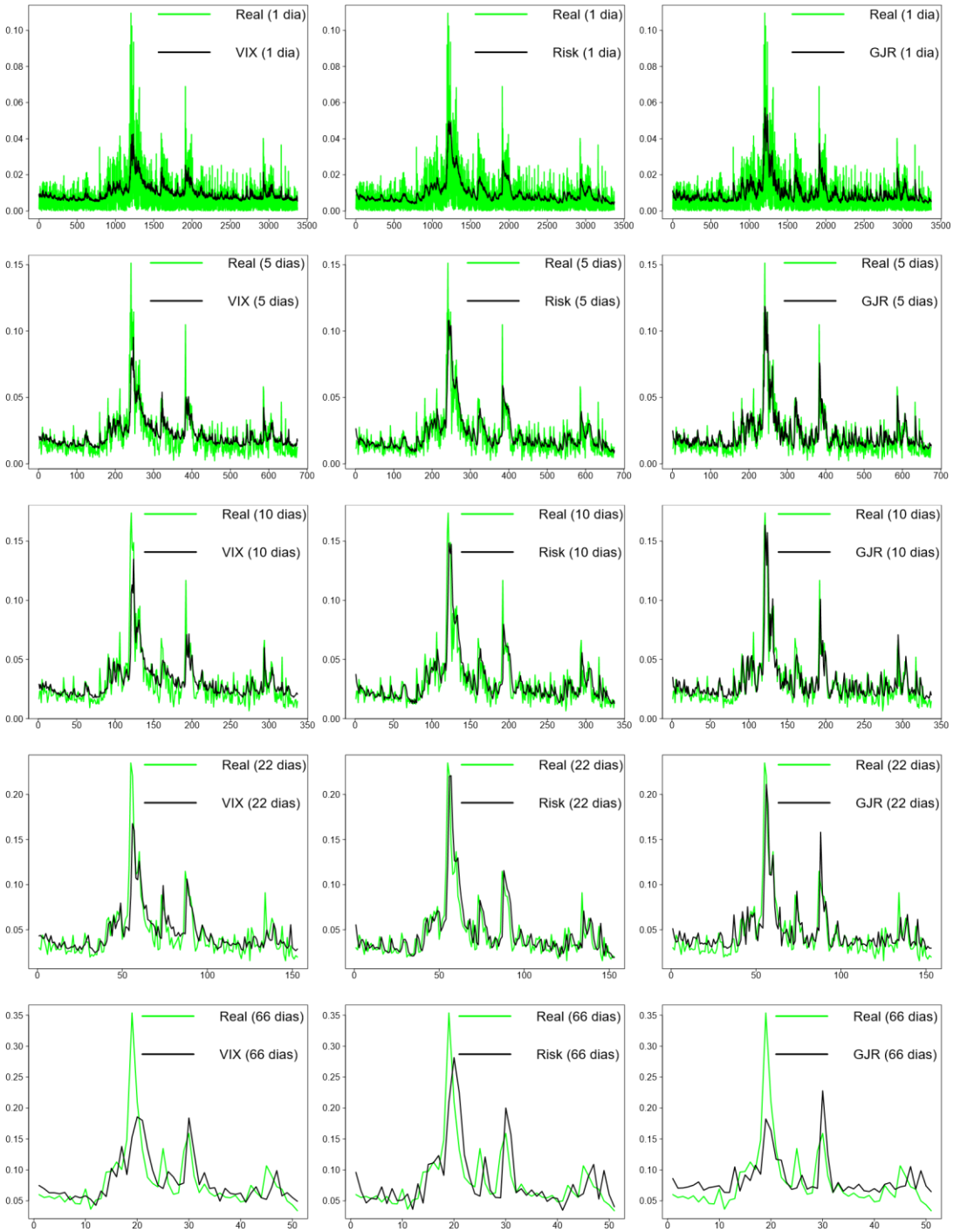
Observando os gráficos, nota-se que as previsões seguiram a volatilidade realizada em quase todos os horizontes. No de 66 passos percebe-se um descolamento nas previsões do VIX e do RiskMetrics, enquanto que a do GJR-GARCH mantém um comportamento similar à volatilidade realizada, apesar de superestimá-la fora da crise de 2008, e subestimá-la quando esta acontece. Nos outros horizontes, todas as previsões tiveram comportamento similar à volatilidade realizada, apesar de subestimá-la.

As estatísticas descritivas estão expostas na tabela 3. A primeiro momento, nota-se que a média e o desvio padrão de todas foram muito próximas. Entretanto, é possível notar que as médias das previsões do VIX, RiskMetrics e GJR-GARCH são sempre maiores que a da volatilidade realizada, com exceção do VIX no horizonte de 66 passos.

Na análise do desvio padrão, nota-se o inverso. A volatilidade realizada sempre apresenta maiores desvios-padrão que as previsões. A previsão do RiskMetrics é a que apresenta desvio-padrão mais próximo da volatilidade realizada, seguida do GJR-GARCH e

do VIX. Esta ordem só não se mantém no horizonte de 66 passos, onde o GJR-GARCH passa a apresentar o menor desvio-padrão.

Figura 3 - Comparação entre a Volatilidade Realizada e as Previsões para todos os Horizontes



Fonte: O autor, 2017.

Tabela 3 - Estatísticas Descritivas

Série (Horizonte)	**Mínima**	**Máxima**	**Média**	**Desvio Padrão**
Realizada (1)	0,0000	0,1096	0,0076	0,0091
VIX (1)	0,0052	0,0426	0,0100	0,0047
RiskMetrics (1)	0,0036	0,0498	0,0099	0,0065
GJR-GARCH (1)	0,0042	0,0571	0,0099	0,0064
Realizada (5)	0,0022	0,1512	0,0207	0,0165
VIX (5)	0,0118	0,0953	0,0223	0,0107
RiskMetrics (5)	0,0082	0,1081	0,0222	0,0146
GJR-GARCH (5)	0,0106	0,1186	0,0223	0,0140
Realizada (10)	0,0066	0,1737	0,0301	0,0223
VIX (10)	0,0175	0,1348	0,0314	0,0154
RiskMetrics (10)	0,0127	0,1483	0,0313	0,0203
GJR-GARCH (10)	0,0163	0,1634	0,0316	0,0195
Realizada (22)	0,0156	0,2349	0,0458	0,0317
VIX (22)	0,0246	0,1676	0,0466	0,0229
RiskMetrics (22)	0,0193	0,2208	0,0472	0,0313
GJR-GARCH (22)	0,0283	0,2111	0,0478	0,0265
Realizada (66)	0,0340	0,3538	0,0814	0,0520
VIX (66)	0,0427	0,1857	0,0806	0,0353
RiskMetrics (66)	0,0348	0,2815	0,0831	0,0508
GJR-GARCH (66)	0,0636	0,2279	0,0852	0,0314

Fonte: O autor, 2017.

A tabela 4 apresenta os dados das regressões simples feitas entre a volatilidade realizada e as previsões para todos os horizontes, conforme indicado pela equação 28, que está reescrita a seguir

$$\sigma_{RV\ k,t} = \pi_0 + \pi_1 \sigma_{PREV\ k,t} + \varepsilon_t \tag{28}$$

onde π_1 se refere à previsão que está sendo usada como regressora da volatilidade realizada, indicada na primeira coluna. Nota-se que em todas as previsões ele foi significativo, o que indica que ele carrega informação a respeito do período previsto.

Tabela 4 - Regressão Simples

Série (Horizonte)	π_0	π_1	R^2 Ajustado	Teste de Wald
VIX (1)	-0,0033 (-11,22)***	1,0968 (40,62)***	0,3283	356,49 [<2,2e-16]
RiskMetrics (1)	0,0002 (0,814)	0,7442 (36,548)***	0,2835	469,74 [<2,2e-16]
GJR-GARCH (1)	-0,0005 (-2,261)**	0,8167 (40,502)***	0,3270	420,25 [<2,2e-16]
VIX (5)	-0,0073 (-8,495)***	1,2573 (36,132)***	0,6593	72,548 [<2,2e-16]
RiskMetrics (5)	0,0015 (2,039)**	0,8669 (30,925)***	0,5863	34,892 [2,65e-08]
GJR-GARCH (5)	-0,0010 (-1,513)	0,9733 (37,800)***	0,6793	21,451 [2,198e-05]
VIX (10)	-0,0077 (-5,044)***	1,2069 (27,502)***	0,6921	25,618 [2,736e-06]
RiskMetrics (10)	0,0034 (2,404)**	0,8538 (22,679)***	0,6044	17,559 [0,0002]
GJR-GARCH (10)	-0,0004 (0,353)	0,9655 (28,801)***	0,7115	6,5578 [0,0377]
VIX (22)	**-0,0055 (-1,539)**	**1,0987 (16,095)*** **	**0,6293**	**2,3905 [0,3026]**
RiskMetrics (22)	0,0079 (2,776)***	0,8035 (16,070)***	0,6286	16,263 [0,0003]
GJR-GARCH (22)	**-0,0008 (-0,256)**	**0,9744 (17,334)*** **	**0,6633**	**2,0329 [0,3619]**
VIX (66)	**-0,0009 (-0,064)**	**1,0199 (6,698)*** **	**0,4673**	**0,0368 [0,9818]**
RiskMetrics (66)	0,0201 (2,035)**	0,7374 (7,253)***	0,5079	6,7835 [0,0336]
GJR-GARCH (66)	**-0,0200 (-1,338)**	**1,1898 (7,221)*** **	**0,5056**	**1,8848 [0,3897]**

Os valores em parênteses correspondem ao valor da estatística t de cada parâmetro. * se refere à significância de 10%, ** de 5% e *** de 1%. Os valores em colchetes se referem ao p-valor de cada teste.

Fonte: O autor, 2017.

π_1 demonstrou resultados similares para todos os horizontes, exceto o de 66 passos. O valor do VIX se manteve entre 1,09 e 1,26, enquanto que o RiskMetrics esteve entre 0,74 e 0,87, e o GJR-GARCH entre 0,81 e 0,98. Em 66 passos o GJR-GARCH apresenta 1,19, seguido do VIX, 1,02 e o RiskMetrics, 0,74.

O teste conjunto de Wald foi empregado para verificar se os estimadores não são viesados. A hipótese nula de que $\pi_0 = 0$ e $\pi_1 = 1$ só não foi rejeitada mesmo a 10% de significância para o VIX e o GJR-GARCH nos horizontes de 22 e 66 passos a frente, indicadas em negrito na tabela. Uma análise menos criteriosa poderia também incluir o GJR-GARCH no horizonte de 10 passos e o *RiskMetrics* de 66 passos, visto que em ambos a hipótese nula não poderia ser rejeitada em uma significância de 1%. Dado que o intercepto foi muito próximo a zero em todas as regressões, é possível afirmar que as outras previsões não passaram no teste por apresentar viés em relação à informação da volatilidade futura disponível.

Estes resultados indicam que todas as previsões em todos os horizontes carregam informações a respeito da volatilidade realizada. Entretanto, apenas as previsões cujo teste de Wald não teve sua hipótese nula rejeitada demonstraram não ser viesadas. Estas são as previsões em negrito.

A tabela 5 apresenta as regressões múltiplas descritas na equação 29, reescrita aqui:

$$\sigma_{RV\ k,t} = \pi_0 + \pi_1 \sigma_{PREV\ k,t} + \pi_2 \sigma_{RV\ k,t-1} + \varepsilon_t \tag{29}$$

Observa-se que os π_1 são significativos, ou seja, a constatação de que as previsões contêm informações da volatilidade realizada se mantém. A previsão do RiskMetrics apresenta significâncias de 10 e 5% para 10 e 22 passos a frente, respectivamente.

Os π_0 novamente ficam próximos a zero, enquanto que os π_2 apresentam sempre coeficientes menores que os π_1. A única regressão para a qual isso não se verifica é a da previsão do RiskMetrics para 10 passos a frente. Assim, conclui-se que a as previsões estão conseguindo representar boa parte da informação disponível no momento em que elas são geradas.

Tabela 5 – Regressão com Defasagem

Série (Horizonte)	π_0	π_1	π_2	R^2 Ajustado	Teste de Wald
VIX (1)	-0,0037(-12,294)***	1,216 (36,243)***	-0,1037 (-3,658)***	0,3350	47,998 [3,779e-11]
RiskMetrics (1)	0,0002(0,828)	0,7517 (31,247)***	-0,0099 (-0,572)	0,2834	157,92 [<2,2e-16]
GJR-GARCH (1)	-0,0008 (-3,360)**	0,9671 (36,954)***	-0,1624 (-8,861)***	0,3423	162,88 [<2,2e-16]
VIX (5)	-0,0054 (-5,685)*	0,9788 (14,069)***	0,2068 (4,600)***	0,6694	77,388 [<2,2e-16]
RiskMetrics (5)	0,0019 (2,686)***	0,5024 (9,223)***	0,3708 (7,700)***	0,6200	83,673 [<2,2e-16]
GJR-GARCH (5)	**0,0010 (-1,366)**	**0,9562 (15,010)*** **	**0,0160 (0,297)**	**0,6795**	**1,1439 [0,5644]**
VIX (10)	-0,0041 (-2,368)**	0,7866 (7,383)***	0,3166 (4,305)***	0,7078	41,846 [8,189e-10]
RiskMetrics (10)	0,0046 (3,528)***	0,1761 (1,840)*	0,6642 (7,611)***	0,6634	75,425 [<2,2e-16]
GJR-GARCH (10)	**-0,0002 (0,144)**	**0,8062 (7,958)*** **	**0,1480 (1,671)* **	**0,7143**	**3,8322 [0,1472]**
VIX (22)	-0,0002 (-0,039)	0,6244 (3,339)***	0,3680 (2,715)***	0,6447	9,5194 [0,0086]
RiskMetrics (22)	0,0081 (2,837)***	0,6593 (2,126)**	0,1460 (0,475)	0,6294	15,419 [0,0004]
GJR-GARCH (22)	**0,0009 (0,284)**	**0,7086 (4,940)*** **	**0,2425 (2,015)** **	**0,6719**	**4,2604 [0,1188]**
VIX (66)	**0,0019 (0,131)**	**0,8627 (2,924)*** **	**0,1250 (0,620)**	**0,4602**	**0,3987 [0,8193]**
RiskMetrics (66)	0,0218 (2,194)**	1,0193 (3,879)***	-0,2972 (-1,150)	0,5167	7,829 [0,01995]
GJR-GARCH (66)	-0,0165 (-1,120)	0,9085 (4,155)***	0,2543 (1,911)*	0,5334	5,0385 [0,0805]

Os valores em parênteses correspondem ao valor da estatística t de cada parâmetro. * se refere à significância de 10%, ** de 5% e *** de 1%. Os valores em colchetes se referem ao p-valor de cada teste.

Fonte: O autor, 2017.

Novamente foi feito o teste conjunto de Wald, tendo como hipótese nula $\pi_1 = 1$e $\pi_2 = 0$. Objetiva-se com ele saber se a previsão extraiu toda a informação do período anterior. A hipótese nula não pode ser rejeitada para o GJR-GARCH de 5, 10 e 22 passos a frente e o VIX de 66 passos a frente, dispostos em negrito na tabela. O GJR-GARCH e o *RiskMetrics* de 66 passos a frente não pode ter sua hipótese nula rejeitada, se for adotado um nível de significância de 1%. Estas previsões teriam sido capazes de extrair toda a informação do período anterior.

A tabela 6 reporta as regressões múltiplas de análise de dominância, conforme descritas pela equação 30, aqui reescrita:

$$\sigma_{RV\ k,t} = \phi_0 + \phi_1 \sigma_{PREV1\ k,t} + \phi_2 \sigma_{PREV2\ k,t} + \varepsilon_t \qquad (30)$$

As previsões RiskMetrics e GJR-GARCH são referidas apenas como “Risk” e “GJR” por questões de espaço. Para cada série “PREV1 vs. PREV2”, $\phi_1$se referirá sempre a PREV1, e ϕ_2a PREV2. Os parâmetros dominantes foram escritos em negrito para facilitar a leitura da tabela.

O *Variance Inflation Factor* (VIF) é um fator utilizado para identificar multicolinearidade, que ocorre quando seu valor é superior a 10. Isto só ocorreu na regressão que compara o VIX e o RiskMetrics no horizonte de 22 passos a frente, portanto, ela não será levada em consideração na análise.

Os interceptos novamente se apresentam muito próximos a zero, o que permite inferir que a quase totalidade das informações foram captadas pelos parâmetros das regressões. Com exceção do horizonte de 1 passo a frente, a previsão do GJR-GARCH dominou todas as outras, embora nos horizontes de 5 e 10 passos a diferença entre os coeficientes do GJR-GARCH e do VIX tenha sido menor que 10, ou seja, o VIX ainda disputa de forma competitiva nestes horizontes.

O *RiskMetrics* foi dominado em quase todos os horizontes. O de 66 passos foi a exceção, onde o VIX foi fortemente dominado por todas as outras previsões. Com base nestes dados, percebe-se que o VIX perde dominância quando sua previsão é extrapolada para 3 meses, o que está em conformidade com a natureza do próprio indicador, já que o VIX se propõe a representar a volatilidade de 1 mês a frente. Portanto, extrapolar o indicador prejudica muito seu poder preditivo. Assim, o uso da volatilidade histórica para previsões maiores que um mês seria mais indicado.

Tabela 6 – Regressão Múltipla – Análise de Dominância

Série (Horizonte)	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	R^2 Ajustado	VIF
VIX (1)	-0,0035 (-10,316)***	**1,1682 (15,035)*** **	-0,0556 (-0,981)	0,3283	8,2816
RiskMetrics (1)	-0,0006 (-2,501)**	0,0944 (1,974)**	**0,7290 (14,927)*** **	0,3277	5,8713
GJR-GARCH (1)	-0,0024 (-7,405)***	0,4162 (8,121)***	**0,5829 (8,486)** **	0,3410	6,5971
VIX (5)	-0,0070 (-7,173)***	**1,2040 (12,017)*** **	0,0416 (0,568)	0,6590	8,2811
RiskMetrics (5)	-0,0012 (-1,705)*	0,1247 (2,156)**	**0,8556 (14,172)*** **	0,6811	5,5262
GJR-GARCH (5)	-0,0045 (-5,168)***	**0,5981 (9,046)*** **	0,5317 (6,134)**	0,6959	6,9512
VIX (10)	-0,0080 (-4,695)***	**1,2495 (9,764)*** **	-0,0343 (-0,354)	0,6913	8,4804
RiskMetrics (10)	-0,0006 (-0,479)	0,1012 (1,363)	**0,8704 (11,246)*** **	0,7122	5,3435
GJR-GARCH (10)	-0,0045 (-2,959)***	**0,5938 (6,563)*** **	0,5050 (4,404)***	0,7265	7,6863
VIX (22)	-7,414e-07 (0,000	0,5695 (2,633)***	0,4073 (2,573)**	0,6426	10,4138
RiskMetrics (22)	0,0006 (0,191)	0,2847 (2,351)**	**0,6644 (4,645)*** **	0,6731	6,6676
GJR-GARCH (22)	-0,0042 (-1,268)	**0,6577 (4,659)*** **	0,3984 (2,438)**	0,6740	6,5143
VIX (66)	0,0144 (0,965)	0,2138 (0,512)	**0,5984 (2,061)** **	0,5004	8,0349
RiskMetrics (66)	-0,0055 (-0,337)	0,4007 (2,022)**	**0,6283 (1,961)* **	0,5349	4,0190
GJR-GARCH (66)	-0,0194 (-1,313)	**0,7837 (2,477)** **	0,4216 (1,497)	0,5178	3,7802

Os valores em parênteses correspondem ao valor da estatística t de cada parâmetro. * se refere à significância de 10%, ** de 5% e *** de 1%. Os valores em colchetes se referem ao p-valor de cada teste.

Fonte: O autor, 2017.

As medidas de perda de cada previsão foram apresentadas na tabela 6. Seus valores foram multiplicados por potências de 10 para evidenciar quais previsões tiveram melhor desempenho. Os melhores indicadores foram destacados em negrito. Apenas no horizonte de 1 passo houve superioridade clara do VIX em relação aos outros. Nos outros horizontes, houve empate entre o VIX e o GJR-GARCH, cada um apresentando melhor desempenho em dois indicadores dos quatro utilizados.

Tabela 7 - Medidas de Perda

Série (Horizonte)	**MEQ***	**MEA****	**MEQH*****	**MEAH*****
VIX (1)	**6,1456**	5,7914	**4,6172**	**5,7687**
RiskMetrics (1)	6,7548	5,9086	5,4954	6,0534
GJR-GARCH (1)	6,2604	**5,7085**	4,8550	5,8038
VIX (5)	10,2418	6,8006	**1,6259**	**3,0970**
RiskMetrics (5)	11,8086	7,1799	2,3184	3,4125
GJR-GARCH (5)	**8,9803**	**6,7838**	1,6827	3,1913
VIX (10)	16,4235	**8,2201**	1,2626	**2,6220**
RiskMetrics (10)	20,6321	9,1254	1,8795	3,0331
GJR-GARCH (10)	**14,5788**	8,3642	**1,2414**	2,7435
VIX (22)	37,3494	**11,5106**	1,3447	**2,5242**
RiskMetrics (22)	40,8077	13,1026	1,7380	2,9027
GJR-GARCH (22)	**33,8427**	12,1433	**1,2761**	2,6284
VIX (66)	138,6333	**22,7554**	1,3318	**2,6624**
RiskMetrics (66)	145,6776	25,6275	1,7907	3,0262
GJR-GARCH (66)	**133,5076**	24,7611	**1,2029**	2,7232

* Valores multiplicados por 10^5.** Valores multiplicados por 10^3. *** Valores multiplicados por 10.
Fonte: O autor, 2017.

CONCLUSÃO

O presente estudo buscou analisar a eficiência de diversos modelos de previsão, utilizando como *benchmark* a volatilidade realizada, calculada através dos retornos do S&P500. Os modelos comparados foram o VIX, como representante da volatilidade implícita, um AR(1) GJR-GARCH(1,1), para a volatilidade histórica, e o *RiskMetrics*, que é utilizado como alternativa rápida pelo mercado.

A análise das regressões comparativas revelou que todas as previsões para os diferentes horizontes continham informação a respeito da volatilidade futura, mas apenas GJR-GARCH e VIX apresentaram previsões não-viesadas em alguns deles. Estes também foram os únicos capazes de utilizar toda a informação dos períodos anteriores nas previsões. O *RiskMetrics* de 66 passos a frente pode ser também interpretado desta forma, caso se considere a significância de 1% para não rejeitar a hipótese nula.

A regressão múltipla de análise de dominância revelou que VIX é predominante no horizonte de um passo à frente. Apesar de ser dominado nos horizontes de 5 e 10 passos, ele continua competitivo, com coeficientes próximos aos do GJR-GARCH. Já no de 66 passos, ele é superado inclusive pelo *RiskMetrics*.

A superioridade do VIX no primeiro horizonte se mostra também nas medidas de perda. Para os outros horizontes, VIX e GJR-GARCH empatam nas medidas conquistadas, não deixando claro qual deles seria melhor por essa métrica.

Conclui-se, então, que o VIX é uma medida de volatilidade mais adequada ao curtíssimo prazo, já que todas as análises apontam para sua superioridade no horizonte de um passo à frente. O AR(1)GJR-GARCH(1,1), representando a volatilidade histórica, tem dominância clara nos demais horizontes, ainda que as medidas de perda revelem uma disputa acirrada entre ele e o VIX.

O fato de que a previsão do *RiskMetrics* dominou a do VIX no horizonte de 66 passos reforça a proposta do índice de representar a volatilidade de um mês a frente, já que em todos os outros, o *RiskMetrics* não era dominante. Ao se extrapolar o VIX, ele perde poder preditivo. Portanto, é seguro dizer que ele seria mais apropriado para ser referência no dia-a-dia do mercado, enquanto que a volatilidade histórica tem uma utilidade maior para o planejamento de carteiras, tendo em vista o longo prazo.

Estes resultados são diferentes dos encontrados por Shaikh e Padhi (2014), que em seu estudo no mercado indiano, identificaram que o India VIX seria o melhor para fazer

previsões, seguido pelo *RiskMetrics* e o GJR-GARCH. As regressões comparativas revelaram que o India VIX também perde poder preditivo depois de extrapolado para três meses.

Sugere-se para estudos posteriores a comparação do VIX com modelos GARCH de memória longa, a fim de estudar se o uso de modelos mais complexos seria capaz de superar a predição do VIX no curto prazo, ou se eles são capazes de se definirem como os melhores modelos para os horizontes de 5, 10 e 22 passos a frente, algo que o GJR-GARCH não foi capaz de fazer.

REFERÊNCIAS

ADHIKARI, Binay K; HILLIARD, Jimmy E. The VIX, VXO and Realised Volatility: a Test of Lagged and Contemporaneous Relationships. *International Journal of Financial Markets and Derivatives*, Inderscience Publishers Ltd, v. 3, n. 3, p. 222–240, 2014.

BOLLERSLEV, Tim. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, Elsevier, v. 31, n. 3, p. 307–327, 1986.

BONGIOVANNI, Alessio; VINCENTIIS, Paola De; ISAIA, Eleonora. The VIX Index: Forecasting Power and Perfomance in a Risk Management Framework. *Journal of Financial Management, Markets and Institutions*, Società editrice il Mulino, v. 4, n. 2, p. 129–144, 2016.

BOUCHAUD, Jean-Philippe; MATACZ, Andrew; POTTERS, Marc. Leverage Effect in Financial Markets: The Retarded Volatility Model. *Physical Review Letters*, APS, v. 87, n. 22, p. 228701, 2001.

BOX, George EP; JENKINS, Gwilym M. *Time Series Analysis: Forecasting and Control, Revised ed*. [S.l.]: Holden-Day, 1976.

CBOE. The CBOE Volatility Index–VIX. *White Paper*, p. 1–23, 2014.

CHANDRA, Abhijeet; THENMOZHI, M. On Asymmetric Relationship of India Volatility Index (India VIX) with Stock Market Return and Risk Management. *Decision*, Springer, v. 42, n. 1, p. 33–55, 2015.

CHRISTENSEN, Bent J; PRABHALA, Nagpurnanand R. The Relation between Implied and Realized Volatility. *Journal of Financial Economics*, Elsevier, v. 50, n. 2, p. 125–150, 1998.

ENGLE, Robert F. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 987–1007, 1982.

ENGLE, Robert F; BOLLERSLEV, Tim. Modelling the Persistence of Conditional Variances. *Econometric reviews*, Taylor & Francis, v. 5, n. 1, p. 1–50, 1986.

FERNANDES, Marcelo; MEDEIROS, Marcelo C; SCHARTH, Marcel. Modeling and Predicting the CBOE Market Volatility Index. *Journal of Banking &Finance*, Elsevier, v. 40, p. 1–10, 2014.

GIOT, Pierre. Implied Volatility Indexes and Daily Value at Risk Models. *The Journal of Derivatives*, Institutional Investor Journals, v. 12, n. 4, p. 54–64, 2005a.

———. Relationships between Implied Volatility Indexes and Stock Index Returns. *The Journal of Portfolio Management*, Institutional Investor Journals, v. 31, n. 3, p. 92–100, 2005b.

GLOSTEN, Lawrence R; JAGANNATHAN, Ravi; RUNKLE, David E. OntheRelationbetweentheExpectedValueandtheVolatilityoftheNominal Excess Return on Stocks. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 48, n. 5, p. 1779–1801, 1993.

JARQUE, Carlos M; BERA, Anil K. A Test for Normality of Observations and Regression Residuals. *International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique*, JSTOR, p. 163–172, 1987.

JIANG, George J; TIAN, Yisong S. Extracting Model-Free Volatility from Option Prices: An Examination of the VIX Index. *The Journal of Derivatives*, Institutional Investor Journals, v. 14, n. 3, p. 35–60, 2007.

KANAS, Angelos. Uncovering a Positive Risk-Return Relation: the Role of Implied Volatility Index. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, Springer, v. 42, n. 1, p. 159–170, 2014.

KANG, SangHoon; KANG, Sang-Mok; YOON, Seong-Min. Forecasting Volatility of Crude Oil Markets. *Energy Economics*, Elsevier, v. 31, n. 1, p. 119–125, 2009.

KWIATKOWSKI, Denis et al. Testing the Null Hypothesis of Stationarity against the Alternative of a Unit Root: How Sure are we that Economic Time Series have a Unit Root? *Journal of econometrics*, Elsevier, v. 54, n. 1-3, p. 159–178, 1992.

LAURENT, Sébastien et al. *Estimating and Forecasting ARCH Models using G@RCH 5*. [S.l.], 2006.

LEE, Jaeram; RYU, Doojin. Regime-Dependent Relationships between the Implied Volatility Index and Stock Market Index. *Emerging Markets Finance and Trade*, Taylor & Francis, v. 50, n. 5, p. 5–17, 2014.

LJUNG, Greta M; BOX, George EP. On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models. *Biometrika*, JSTOR, p. 297–303, 1978.

MIKOLAJCZAK, Chuck. *China fears Hand Wall St. its Worst Day since 2011*. Thomson Reuters, 2015. Disponível em: <http://www.reuters.com/article/ us-markets-stocks-usa-idUSKCN0QQ15Y20150821>.

NELSON, Daniel B; CAO, Charles Q. Inequality Constraints in the Univariate GARCH Model. *Journal of Business &Economic Statistics*, Taylor & Francis, v. 10, n. 2, p. 229–235, 1992.

RHOADS, Russell. *Trading VIX Derivatives: Trading and Hedging Strategies Using VIX Futures, Options, and Exchange Traded Notes*. [S.l.]: John Wiley& Sons, 2011. v. 503.

RILEY, Charles. S&P Downgrades U.S. Credit Rating. *CNN Money, August*, v. 6, p. 127–40, 2011.

SADORSKY, Perry. Modeling and Forecasting Petroleum Futures Volatility. *Energy Economics*, Elsevier, v. 28, n. 4, p. 467–488, 2006.

SAID, Said E; DICKEY, David A. Testing for Unit Roots in Autoregressive-Moving Average Models of Unknown Order. *Biometrika*, Biometrika Trust, v. 71, n. 3, p. 599–607, 1984.

SEC, US; CFTC, US. Findings regarding the Market Events of May 6, 2010. *Washington DC*, 2010.

SHAIKH, Imlak; PADHI, Puja. The Forecasting Performance of Implied Volatility Index: Evidence from India VIX. *Economic Change and Restructuring*, Springer, v. 47, n. 4, p. 251–274, 2014.

SIMON, David P. The NASDAQ Volatility Index during and after the Bubble. *The Journal of Derivatives*, Institutional Investor Journals, v. 11, n. 2, p. 9–24, 2003.

WEI, Yu; WANG, Yudong; HUANG, Dengshi. Forecasting Crude Oil Market Volatility: Further Evidence using GARCH-Class Models. *Energy Economics*, Elsevier, v. 32, n. 6, p. 1477–1484, 2010.

WHALEY, Robert E. Understanding the VIX. *The Journal of Portfolio Management*, v. 35, n. 3, p. 98–105, 2009

XIN, Mao. *The VIX Volatility Index*. Project Report, Department of Mathematics, Uppsala University, Sweden, 2011.

ZAKOIAN, Jean-Michel. Threshold Heteroskedastic Models. *Journal of Economic Dynamics and control*, Elsevier, v. 18, n. 5, p. 931–955, 1994.

APÊNDICE A – Derivação do VIX a partir dos Preços das Opções

Segundo Xin (2011), os preços das ações seguem a seguinte equação estocástica diferencial:

$$\frac{dS}{S} = (r - q)dt + \sigma dz \tag{35}$$

onde S é o preço da ação, r é a taxa livre de risco, q são os dividendos, σ é a volatilidade e z é um processo de Wiener para uma medida de probabilidade com neutralidade de risco.

Aplicando o lema de Itô, temos:

$$dlnS = \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz \tag{36}$$

Assim, ao subtrairmos a equação 36 da equação 35, temos:

$$\frac{dS}{S} - dlnS = (r - q)dt + \sigma dz - \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt - \sigma dz$$

$$\frac{dS}{S} - dlnS = \frac{\sigma^2}{2}dt \tag{37}$$

Integrando esta equação do tempo 0 ao tempo T, temos:

$$\int_0^T \frac{\sigma^2}{2}dt = \int_0^T \frac{dS}{S} - \int_0^T dlnS \;\Rightarrow\; \frac{\sigma^2}{2}T = \int_0^T \frac{dS}{S} - (lnS_t - lnS_0)$$

$$\frac{\sigma^2}{2}T = \int_0^T \frac{dS}{S} - ln\frac{S_t}{S_0}$$

$$\sigma^2 = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{dS}{S} - \frac{2}{T}ln\frac{S_t}{S_0} \tag{38}$$

A partir desta última equação, é possível obter seu valor esperado através de uma medida de probabilidade neutra ao risco, chegando ao seguinte:

$$E[\sigma^2] = \frac{2}{T} E\left[\int_0^T \frac{dS}{S}\right] - \frac{2}{T} E\left[ln\frac{S_t}{S_0}\right] \tag{39}$$

Calculando o valor esperado da equação 35, temos:

$$E\left[\int_0^T \frac{dS}{S}\right] = (r-q)T$$

que é usada na equação 39 para se obter o seguinte:

$$E[\sigma^2] = \frac{2}{T}(r-q)T - \frac{2}{T} E\left[ln\frac{S_t}{S_0}\right] \tag{40}$$

O comportamento das cotações é determinado por:

$$S_t = S_0 e^x$$

onde X é um processo aleatório de distribuição normal definido por:

$$X = \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma z(T)$$

cujo valor esperado e variância são:

$$E[X] = \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)T \quad e \quad Var[X] = \sigma^2 T$$

Logo, o valor esperado de S_t é:

$$E[S_t] = S_0 exp\left[E[X] + \frac{VAR[X]}{2}\right] = S_0 e^{(r-q)T}$$

Definindo o valor esperado de S_t como F_0, que representa o preço de exercício de uma opção com maturidade no tempo T, e aplicando-o na equação 40, temos:

$$E[\sigma^2] = \frac{2}{T} ln \frac{F_0}{S_0} - \frac{2}{T} E\left[ln \frac{S_t}{S_0}\right] \tag{40}$$

Agora, considerando uma opção de venda, teremos:

$$\int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} \max(K - S_T, 0)\, dK$$

onde S^* é um valor qualquer de S. Se $S^* < S_T$, então:

$$\int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} \max(K - S_T, 0)\, dK = 0$$

Se $S^* > S_T$, então:

$$\int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} \max(K - S_T, 0)\, dK = \int_{S_T}^{S^*} \frac{1}{K^2} (K - S_T) dK$$

$$\left(lnK + \frac{S_T}{K}\right)\Big|_{S_T}^{S^*} = ln \frac{S^*}{S_T} + \frac{S_T}{S^*} - 1$$

Considerando a opção de compra, temos:

$$\int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} \max(S_T - K, 0)\, dK$$

Para $S^* > S_T$:

$$\int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} \max(S_T - K, 0)\, dK = 0$$

Para $S^* < S_T$:

$$\int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} \max(S_T - K, 0)\, dK = \int_{S^*}^{S_T} \frac{1}{K^2} \max(S_T - K)\, dK$$

$$\left(-\frac{S_T}{K} - lnK\right)\Big|_{S^*}^{S_T} = -1 - lnS_T + \frac{S_T}{S^*} + lnS^* = ln\frac{S^*}{S_T} + \frac{S_T}{S^*} - 1$$

Portanto, somando todas as possibilidades das opções de compra e venda, temos:

$$\int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} \max(K - S_T, 0)\, dK + \int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} \max(S_T - K, 0)\, dK = ln\frac{S^*}{S_T} + \frac{S_T}{S^*} - 1$$

para qualquer valor de S^*. Então:

$$ln\frac{S_T}{S^*} = \frac{S_T}{S^*} - 1 - \int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} \max(K - S_T, 0)\, dK - \int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} \max(S_T - K, 0)\, dK \qquad (42)$$

Assim, o valor esperado é:

$$E\left[ln\frac{S_T}{S^*}\right] = E\left[\frac{S_T}{S^*} - 1\right] - E\left[\int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} \max(K - S_T, 0)\, dK\right] - E\left[\int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} \max(S_T - K, 0)\, dK\right]$$

Nota-se que:

$$E\left[\int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} \max(K - S_T, 0)\, dK\right] = e^{RT} p(K)$$

$$E\left[\int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} \max(S_T - K, 0)\, dK\right] = e^{RT} c(K)$$

onde p(K) é o preço da opção de venda e c(K) é o preço da opção de compra. Aplicando este conceito ao valor esperado, juntamente com $F_0 = E[S_T]$, temos:

$$E\left[ln\frac{S_T}{S^*}\right] = \frac{F_0}{S^*} - 1 - \int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} e^{RT} p(K) - \int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} e^{RT} c(K) \tag{43}$$

Tomando a relação $ln\frac{S_T}{S_0}$, temos:

$$ln\frac{S_T}{S_0} = lnS_T - lnS_0 = lnS_T + lnS^* - lnS^* - lnS_0 = ln\frac{S_T}{S^*} + ln\frac{S^*}{S_0}$$

cujo valor esperado é:

$$E\left[ln\frac{S_T}{S_0}\right] = E\left[ln\frac{S_T}{S^*}\right] + E\left[ln\frac{S^*}{S_0}\right] = E\left[ln\frac{S_T}{S^*}\right] + ln\frac{S^*}{S_0} \tag{44}$$

Retomando a equação 41, temos:

$$E[\sigma^2] = \frac{2}{T} ln\frac{F_0}{S_0} - \frac{2}{T} E\left[ln\frac{S_T}{S_0}\right] = \frac{2}{T} ln\frac{F_0}{S_0} - \frac{2}{T}\left(E\left[ln\frac{S_T}{S^*}\right] + ln\frac{S^*}{S_0}\right)$$

$$E[\sigma^2] = \frac{2}{T} ln\frac{F_0}{S_0} - \frac{2}{T} ln\frac{S^*}{S_0} - \frac{2}{T} E\left[ln\frac{S_T}{S^*}\right]$$

Aplicando a equação 43, temos:

$$E[\sigma^2] = \frac{2}{T} ln\frac{F_0}{S_0} - \frac{2}{T} ln\frac{S^*}{S_0} - \frac{2}{T}\left[\frac{F_0}{S^*} - 1 - \int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} e^{RT} p(K) - \int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} e^{RT} c(K)\right]$$

$$E[\sigma^2] = \frac{2}{T}(lnF_0 - lnS_0 - lnS^* + lnS_0) - \frac{2}{T}\left(\frac{F_0}{S^*} - 1\right) + \frac{2}{T}\left[\int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} e^{RT} p(K) + \int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} e^{RT} c(K)\right]$$

$$E[\sigma^2] = \frac{2}{T} ln\frac{F_0}{S^*} - \frac{2}{T}\left(\frac{F_0}{S^*} - 1\right) + \frac{2}{T}\left[\int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} e^{RT} p(K) + \int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} e^{RT} c(K)\right] \tag{45}$$

que é a variância esperada para o período de zero a T.

Assumindo que todos os preços de exercício das opções são conhecidos, e que $K_1 < K_2 < \ldots < K_N$, e definindo S^* como o primeiro preço de exercício abaixo de F_0, é possível aproximar as integrais da seguinte forma:

$$\int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} e^{RT} p(K) - \int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} e^{RT} c(K) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta K}{K_i^2} e^{RT} Q(K_i) \tag{46}$$

sendo que para i = 1, $\Delta K_1 = K_2 - K_1$. Para i = n, $\Delta K_n = K_n - K_{n-1}$. Para 1 < i < n, $\Delta K_i = \frac{K_{i+1} - K_{i-1}}{2}$. $Q(K_i)$é o preço da opção de venda quando $K < S^*$, o preço da opção de venda quando $K < S^*$ e a média dos preços das opções de compra e venda quando $K = S^*$.

Com isto, a equação 45 pode ser escrita da seguinte forma:

$$E[\sigma^2] = \frac{2}{T}\left[ln\frac{F_0}{S^*} - \frac{2}{T}\left(\frac{F_0}{S^*} - 1\right)\right] + \frac{2}{T}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta K}{K_i^2} e^{RT} Q(K_i)\right] \tag{47}$$

Aplicando o polinômio de McLaurin a $ln\frac{F_0}{S^*}$, temos:

$$ln\frac{F_0}{S^*} = \left(\frac{F_0}{S^*} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{F_0}{S^*} - 1\right)^2 + o\left[\left(\frac{F_0}{S^*} - 1\right)^2\right]$$

que pode ser aproximado para:

$$ln\frac{F_0}{S^*} = \left(\frac{F_0}{S^*} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{F_0}{S^*} - 1\right)^2$$

$$ln\frac{F_0}{S^*} - \left(\frac{F_0}{S^*} - 1\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{F_0}{S^*} - 1\right)^2 \tag{48}$$

Ao introduzir este conceito na equação 47, chega-se à equação utilizada pela CBOE no cálculo do VIX:

$$E[\sigma^2] = \frac{2}{T}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{F_0}{S^*} - 1\right)^2\right] + \frac{2}{T}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta K}{K_i^2} e^{RT} Q(K_i)\right]$$

$$E[\sigma^2] = -\frac{1}{T}\left[\left(\frac{F_0}{S^*} - 1\right)^2\right] + \frac{2}{T}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta K}{K_i^2} e^{RT} Q(K_i)\right] \tag{49}$$

APÊNDICE B – Exemplo Numérico de Cálculo do VIX

De acordo com a CBOE (2014), o cálculo do VIX envolve duas datas de vencimento de opções, uma próxima, com mais de 23 dias, e uma distante, com menos de 37 dias. No exemplo dado, os preços são observados às 9:46 do primeiro dia, as opções com vencimento próximo vencerão em 25 dias, às 8:30, por se tratarem de opções normais, e as distantes em 32, às 15:00, por se tratarem das opções *SPX Weekly*, com vencimento no fim do pregão.

Com estes dados, prossegue-se para o cálculo do tempo restante até o vencimento. Para isto, usa-se a equação 19, reescrita a seguir:

$$T = \frac{M_C + M_S + M_O}{M} \tag{19}$$

Aplicando ao exemplo da CBOE (2014), tem-se:

T_1 = (854 + 510 + 34.560)/525.600 = 0,0683486

T_2 = (854 + 900 + 44.640)/525.600 = 0,0882686

Para calcular a cotação esperada do S&P500 (F), é necessário reunir todas as opções de compra e venda de mesma expiração, e encontrar o preço de exercício cuja diferença de preço entre as opções de compra e venda sejam menores, conforme as tabelas a seguir:

Tabela 8 - Escolha do Melhor Preço de Exercício com Vencimento Próximo

Preço de Exercício	Opção de Venda	Opção de Compra	Diferença
1940	38,45	15,25	23,20
1945	34,70	16,55	18,15
1950	31,10	18,25	12,85
1955	27,60	19,75	7,85
1960	24,25	21,30	2,95
1965	**21,05**	**23,15**	**2,10**
1970	18,10	25,05	6,95
1975	15,25	27,30	12,05
1980	12,75	29,75	17,00

Fonte: CBOE (2014).

Tabela 9 - Escolha do Melhor Preço de Exercício com Vencimento Distante

Preço de Exercício	Opção de Venda	Opção de Compra	Diferença
1940	41,05	18,80	22,25
1945	37,45	20,20	17,25
1950	34,05	21,60	12,45
1955	30,60	23,20	7,40
1960	**27,30**	**24,90**	**2,40**
1965	24,15	26,90	2,75
1970	21,10	28,95	7,85
1975	18,30	31,05	12,75
1980	15,70	33,50	17,80

Fonte: CBOE (2014).

Os valores escolhidos são aplicados na equação 20:

$$F = K + e^{RT}(C - P) \tag{20}$$

O exemplo atribui a R_1o valor de 0,0305%, e a R_2o valor de 0,0286%. Conforme os valores escolhidos nas duas tabelas, obtém-se:

$$F_1 = 1965 + e^{0,000305 \,.\, 0,0683486}(21,05 - 23,15) = 1962,89996$$

$$F_2 = 1960 + e^{0,000286 \cdot 0,0882686}(27,30 - 24,90) = 1962,40006$$

Calculados os F, determina-se o K_0, que é o preço de exercício logo abaixo do F. Para ambos os casos será 1960. Agora escolhe-se quais as opções fora-do-dinheiro serão incluídas no cálculo. As opções cujos preços de venda forem iguais a zero não serão incluídas. Quando duas opções seguidas apresentam preço zero, todas as opções subsequentes serão descartadas. Isto pode ser verificado nas tabelas a seguir.

Tabela 10 - Escolha das Opções de Venda Fora-do-Dinheiro

Preço de Exercício	**Preço de Venda**	**Preço de Compra**	**Incluir?**
1345	0	0,15	Não
1350	0,05	0,15	Não
1355	0,05	0,35	Não
1360	0	0,35	Não
1365	0	0,35	Não
1370	0,05	0,35	Sim
1375	0,10	0,15	Sim
1380	0,10	0,20	Sim

Fonte: CBOE (2014).

Tabela 11 - Escolha das Opções de Compra Fora-do-Dinheiro

Preço de Exercício	**Preço de Venda**	**Preço de Compra**	**Incluir?**
2095	0,05	0,35	Sim
2100	0,05	0,15	Sim
2120	0	0,15	Não
2125	0,05	0,15	Sim
2150	0	0,1	Não
2175	0	0,05	Não
2200	0	0,05	Não
2225	0,05	0,1	Não
2250	0	0,05	Não

Fonte: CBOE (2014).

Escolhidas todas as opções consideradas, calcula-se a média dos seus preços de compra e venda, conforme disposto nas tabelas a seguir.

Tabela 12 - Preço Médio das Opções Consideradas com Vencimento Próximo

Preço de Exercício	Tipo de Opção	Preço Médio
1370	Venda	0,2
1375	Venda	0,125
1380	Venda	0,15
...	...	...
1950	Venda	18,25
1955	Venda	19,75
1960	Média Venda/Compra	22,775
1965	Compra	21,05
1970	Compra	18,1
...	...	...
2095	Compra	0,2
2100	Compra	0,1
2125	Compra	0,1

Fonte: CBOE (2014).

Tabela 13 - Preço Médio das Opções Consideradas com Vencimento Distante

Preço de Exercício	Tipo de Opção	Preço Médio
1275	Venda	0,075
1325	Venda	0,15
1350	Venda	0,15
...	...	...
1950	Venda	21,60
1955	Venda	23,20
1960	Média Venda/Compra	26,1
1965	Compra	24,15
1970	Compra	21,10
...	...	...
2125	Compra	0,1
2150	Compra	0,1

2200	Compra	0,08

Fonte: CBOE (2014).

O próximo passo é calcular a contribuição de cada preço de exercício para a volatilidade implícita. Por exemplo, a contribuição do preço de exercício 1370 nas opções de vencimento próximo seria:

$$\frac{\Delta K_{1370}}{K_{1370}^2} e^{R_1 T_1} Q(K_{1370}) = \frac{5}{1370^2} e^{0,000305\ .\ 0,0683486}(0,2) = 0,0000005328$$

Feito isso, soma-se as contribuições e multiplica-se por 2/*T*. A seguir estão dispostas tabelas com as contribuições de cada preço de exercício.

Tabela 14 - Contribuição de cada Opção com Vencimento Próximo

Preço de Exercício	**Tipo de Opção**	**Contribuição**
1370	Venda	0,0000005328
1375	Venda	0,0000003306
1380	Venda	0,0000003938
...	...	...
1950	Venda	0,0000239979
1955	Venda	0,0000258376
1960	Média Venda/Compra	0,0000296432
1965	Compra	0,0000272588
1970	Compra	0,0000233198
...	...	...
2095	Compra	0,0000002278
2100	Compra	0,0000003401
2125	Compra	0,0000005536

Fonte: CBOE (2014).

Tabela 15 - Contribuição de cada Opção com Vencimento Distante

Preço de Exercício	**Tipo de Opção**	**Contribuição**
1275	Venda	0,0000023069
1325	Venda	0,0000032041
1350	Venda	0,0000020577
...	...	...
1950	Venda	0,0000284031
1955	Venda	0,0000303512
1960	Média Venda/Compra	0,0000339711
1965	Compra	0,0000312732
1970	Compra	0,0000271851
...	...	...
2125	Compra	0,0000005536
2150	Compra	0,0000008113
2200	Compra	0,0000007748

Fonte: CBOE (2014).

Somando todas as contribuições e dividindo por 2/*T*, tem-se:

$$\frac{2}{T_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta K}{K_i^2}e^{R_1T_1}Q(K_i) = 0{,}018495$$

$$\frac{2}{T_2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta K}{K_i^2}e^{R_2T_2}Q(K_i) = 0{,}018838$$

Usando estes valores no resto da equação, tem-se:

$$\sigma_1^2 = 0{,}018495 - \frac{1}{0{,}0683486}\left(\frac{1962{,}89996}{1960} - 1\right)^2 = 0{,}01846292$$

$$\sigma_2^2 = 0{,}018838 - \frac{1}{0{,}0882686}\left(\frac{1962{,}40006}{1960} - 1\right)^2 = 0{,}01882101$$

Calculadas as duas volatilidades implícitas, faz-se a ponderação de acordo com o tempo, através da seguinte fórmula:

$$VIX = 100\sqrt{\left[T_1\sigma_1^2\left(\frac{N_{T_2} - N_{30}}{N_{T_2} - N_{T_1}}\right) + T_2\sigma_2^2\left(\frac{N_{30} - N_{T_1}}{N_{T_2} - N_{T_1}}\right)\right]\frac{N_{365}}{N_{30}}} \qquad (50)$$

onde N_{T_1} são os minutos que faltam para o vencimento das opções de vencimento próximo, N_{T_2} são os minutos que faltam para o vencimento das opções de vencimento distante, N_{30} são os minutos de um mês e N_{365} são os minutos de 365 dias.

Aplicando todos os valores a esta fórmula, calcula-se:

$$VIX = 100\left\{\left[0{,}0683486\,.\,0{,}0184629\left(\frac{46.394 - 43.200}{46.394 - 35.942}\right) + 0{,}0882686\,.\,0{,}018821\left(\frac{43.200 - 35.924}{46.394 - 35.924}\right)\right]\frac{525.600}{43.200}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

VIX = 13,685821