Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Matemática e Estatística

Rodolfo Pereira Araújo

Estratégias de exploração de vizinhança com GPU para problemas de otimização

Rio de Janeiro
2018

Rodolfo Pereira Araújo

Estratégias de exploração de vizinhança com GPU para problemas de otimização

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Computacionais, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Igor Machado Coelho

Coorientador: Prof. Dr. Leandro Augusto Justen Marzulo

Rio de Janeiro

2018

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ/REDE SIRIUS/BIBLIOTECA CTC/A

A663 Araújo, Rodolfo Pereira.
Estratégias de exploração de vizinhança com GPU para problemas de otimização. – 2018.
91f.: il.

Orientador: Igor Machado Coelho
Coorientador: Leandro Augusto Justen Marzulo
Dissertação (Mestrado em Ciências Computacionais) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Programação (Computadores). 2. Processamento eletrônico de dados - Teses. 3. Heurística - Teses. 3. Otimização matemática - Teses. I. Coelho, Igor Machado. II. Marzulo, Leandro Augusto Justen. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV.Título.

CDU 004.42

Patricia Bello Meijinhos CRB7/5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Rodolfo Pereira Araújo

Estratégias de exploração de vizinhança com GPU para problemas de otimização

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Computacionais, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 9 de Outubro de 2018
Orientadores:

Prof. Dr. Igor Machado Coelho (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Leandro Augusto Justen Marzulo (Coorientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Igor Machado Coelho (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Profª. Drª. Cristiana Barbosa Bentes
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Uéverton dos Santos Souza
Universidade Federal Fluminense - UFF

Rio de Janeiro
2018

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer à Deus, que me iluminou com as pessoas que colocou no meu caminho durante esta jornada e por toda minha vida.

Agradeço à minha esposa Izabel por todo apoio, carinho, companheirismo e amizade.

À minha mãe, pai, irmão e minha família que sempre foram os pilares na minha vida e realizações.

Aos meus orientadores, Igor e Marzulo, pelo empenho dedicado à elaboração deste trabalho e por confiarem em mim nesta empreitada. E a todos os professores da UERJ, por todo o conhecimento proporcionado para minha formação, o que contribuiu para este trabalho.

Agradeço também ao laboratório de pesquisa operacional do Instituto de Computação da UFF por ceder as máquinas para execução dos testes computacionais.

RESUMO

ARAÚJO, Rodolfo Pereira. *Estratégias de exploração de vizinhança com GPU para problemas de otimização*. 2018. Dissertação (Mestrado em Ciências Computacionais) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Problemas de otimização são de grande importância para diversos setores da indústria, desde o planejamento de produção até escoamento e transporte de produtos. Diversos problemas de interesse se enquadram na classe NP-Difícil, sendo desconhecidos algoritmos para resolvê-los de forma exata em tempo polinomial. Assim, estratégias heurísticas com capacidade de escapar de ótimos locais de baixa qualidade (meta-heurísticas) são geralmente empregadas. A busca local é, em geral, a etapa mais custosa, em termos de tempo computacional, do processo de uma meta-heurística. Desta forma torna-se muito importante fazer bom uso dos recursos nela utilizados. Esta dissertação estuda o emprego de múltiplas estratégias de vizinhança utilizadas paralelamente para explorar um espaço de vizinhança maior e com melhor aproveitamento dos recursos computacionais. O processamento paralelo das estratégias de vizinhança é implementado em nível de grão fino, através de processamento em GPU, e grão grosso, por meio de processamento multi core e processamento em rede, sendo os dois níveis combinados num ambiente heterogêneo, para arquiteturas von Neumann e dataflow.

Palavras-chave: Meta-heurística, Busca Local, Dataflow, Graphics Processing Unit, Variable Neighborhood Descent.

ABSTRACT

ARAÚJO, Rodolfo Pereira. *Neighborhood exploration strategies using GPU for optimization problems*. 2018. Dissertação (Mestrado em Ciências Computacionais) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Optimization problems have big importance in the industry field, from production management to production outflow and product transportation. Many problems of interest are classified as NP-Hard, so there is no known algorithm to find the exact solution in a polinomial time. Therefore heuristic strategies with the ability to escape from poor quality local optima (meta-heuristics) are generally employed. In general, the local search is the most costly, in computational time, phase of a meta-heuristic, becoming mandatory a good use of the available resources. The parallel processing of neighborhood strategies is implemented at the fine grain level through GPU processing and coarse grain through multi-core processing and network processing, the combination of the two level parallelization in a heterogeneous environment for von Neumann architectures and dataflow.

Keywords: Meta-heuristics, Local Search, Dataflow, Graphics Processing Unit, Variable Neighborhood Descent.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ALGORITMOS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Muitos dos problemas encontrados no dia-a-dia podem possuir inúmeras soluções, que, em geral, detêm um fator de satisfação associado (e.g.: lucro obtido, custo de utilização). Nessa linha, o ramo da otimização atua no estudo destes de modo a buscar minimizar ou maximizar o valor da função objetivo (satisfação) associada.

Quando é necessário resolver problemas de otimização um campo promissor é o das meta-heurísticas, contudo, estes algoritmos podem demandar muito tempo de processamento, especialmente ao resolver problemas em grandes instâncias. Isto posto, podemos ressaltar que a utilização de métodos eficientes para resolução de tais problemas é deveras importante.

Otimização trata problemas NP-Difíceis (GAREY; JOHNSON, 1990), que geralmente surgem em cenários práticos, como o roteamento de um conjunto de veículos para entregas e coletas, ou visitar um conjunto de cidades percorrendo a menor rota possível. Este último é conhecido como Problema do Caixeiro Viajante (PCV), um dos mais importantes (e não resolvidos) problemas no campo da ciência da computação. Devido à sua combinatoriedade natural, não existe algoritmo conhecido que resolva o PCV em tempo polinomial. Todavia, muitos algoritmos heurísticos e combinações de métodos exatos com métodos heurísticos são capazes de resolver o PCV para instâncias com milhares de cidades. Como uma variante menos explorada do PCV, consideramos o Problema da Mínima Latência (PML), que é uma nuance onde todos os nós precisam ser visitados, mas o custo é o somatório do valor acumulado das distâncias ponto a ponto.

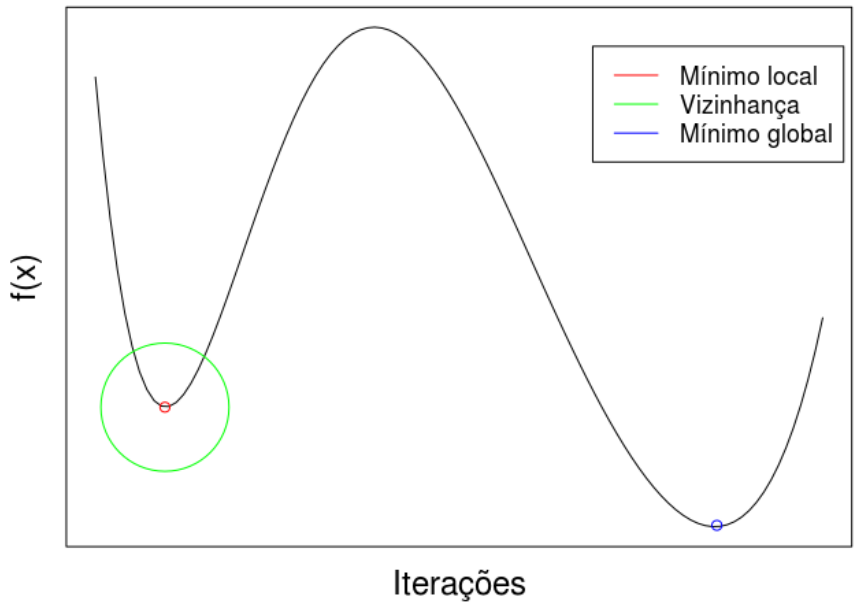
Dentro do ramo das meta-heurísticas, uma parte importante são os algoritmos de busca, que, inicialmente, recebem uma solução para um problema e rastreiam seu espaço de busca para então retornar a melhor solução encontrada. O espaço de busca é um super conjunto de algumas estratégias de vizinhança para a solução atual e as que surgirem.

Conforme pode ser visto na Figura 1, um método de otimização explora o espaço de busca a procura da solução que apresente o melhor valor de função objetivo. Podemos ver no círculo verde um sub-conjunto de soluções próximas da solução atual, é sinalizado em vermelho a melhor solução na na região atual do espaço de busca e em azul a melhor solução para o problema.

Muitos trabalhos recentes produziram algoritmos que obtiveram resultados eficientes utilizando *Randomized Variable Neighborhood Descent* (RVND) (SOUZA et al., 2010; SILVA et al., 2012; SUBRAMANIAN; UCHOA; OCHI, 2013), cuja ideia principal é utilizar um conjunto de vizinhanças (um sub-conjunto de soluções segundo um determinado critério) de forma que, ao se atingir um mínimo local para uma estratégia de vizinhança ainda pode existir um vizinho, em outra vizinhança, com valor de função objetivo melhor que o já encontrado.

Uma boa alternativa para melhorar o tempo de processamento destes problemas é pela utilização de programação paralela (GENDREAU; POTVIN, 2010), contudo a maioria dos algoritmos de otimização até então projetados foram feitos para funcionarem de forma "naturalmente" sequencial, criando uma árdua tarefa, muitas vezes hercúlea, para

Figura 1 – Espaço de busca explorado por um método de otimização. São indicados mínimo local, mínimo global e vizinhança, conceitos que serão definidos a frente.



os programadores que desejam alterar a implementação do algoritmo para rodar de forma paralela. A abordagem mais utilizada para paralelização de meta-heurísticas consiste em escolher métodos ou partes do método que podem ser executadas independentemente e lançar sua execução paralela (*Bag-of-Tasks*). Não obstante apenas alguns trabalhos científicos são dedicados a realmente re-projetar estes algoritmos para aproveitar o poder de arquiteturas paralelas de forma profunda (RIOS et al., 2017b; RIOS et al., 2017a; ARAUJO et al., 2018).

Assim os bons resultados encontrados com o RVND motivaram a implementação de uma versão paralela do mesmo. O *Distributed Variable Neighborhood Descent* (DVND), proposto em (RIOS et al., 2018), é uma versão paralela do método de busca *Variable Neighborhood Descent* (VND), neste trabalho foi adotada uma visão dataflow para o algoritmo, concebendo assim uma implementação do *DVND* segundo o modelo dataflow. A arquitetura multi-core do DVND torna possível explorar diferentes vizinhanças simultaneamente (com diferentes implementações de busca local), e escolher o melhor resultado dos métodos de busca.

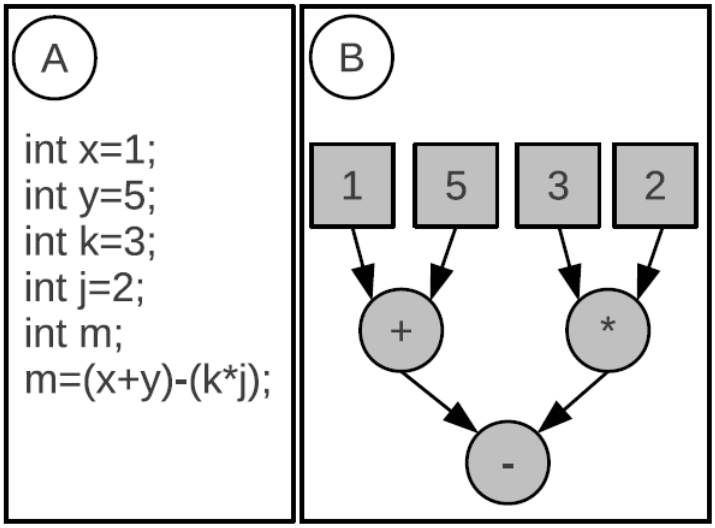
Em abordagens tradicionais para paralelização de aplicações são empregadas arquiteturas *Multiple Instruction Multiple Data* (*MIMD*) (FLYNN, 1972), onde cada elemento de processamento possui *streams* de instruções e dados independentes. Desta forma, o desenvolvedor pode particionar as tarefas de sua aplicação para que sejam executadas em *threads* ou processos, mapeadas nos elementos de processamento. A comunicação entre tarefas pode ser realizada por memória compartilhada (multiprocessadores ou *multicores*) ou por troca de mensagens (como em *clusters* de computadores). Estes processadores seguem o modelo de Von Neumann, no qual a execução de uma instrução é guiada pelo fluxo de controle, de forma que a ordem das instruções no programa prescreve o que o processador deve fazer passo a passo. Este modelo assume que um *program counter* é usado para indicar a próxima instrução a ser executada e estas podem alterar o estado da máquina ao alterar valores de uma estrutura de armazenamento global, como um banco

de registradores, cache ou memória principal.

Trabalhos recentes em modelos e linguagens de programação paralela (ALVES et al., 2011; DURAN et al., 2011; BALAKRISHNAN; SOHI, 2006; GUPTA; SOHI, 2011; TBB..., accessed on August 8, 2014.; BOSILCA et al., 2012; GIORGI et al., 2014) geraram novos *frameworks* para o modelo de programação dataflow, em diferentes níveis de abstração e granularidade, como solução para representar programas considerando as operações como ponto de vista principal, permitindo assim uma modelagem mais fácil de muitos problemas de alta performance. Está claro que, em alguns casos, o esforço de programação (medido em termos de tempo de programação ou linhas de código) é consideravelmente reduzido quando se utiliza programação dataflow para paralelizar as aplicações, se compararmos com as ferramentas tradicionais como OpenMP ou Pthreads. Além disso, o desempenho da execução de aplicações desenvolvidas conforme o modelo dataflow pode ser comparado com métodos tradicionais (ALVES et al., 2011; ALVES; MARZULO; FRANCA, 2013).

A Figura 2 mostra um paralelo entre a versão Von Neumann de um código, no quadro A, e a implementação da mesma computação segundo o modelo dataflow, exemplificada no quadro B. Pelo quadro B pode-se perceber que as execuções das operações $x + y$ e $k * j$ podem ser executadas em qualquer ordem, ou mesmo simultaneamente, sem alterar o resultado final do processamento.

Figura 2 – Exemplo de conversão código para grafo de dependências, conforme apresentado em (MARZULO, 2011).



Nota: O quadro A mostra um trecho de código e o quadro B o grafo dataflow associado.

Usualmente a programação dataflow é feita instanciando trechos de código e os conectando em um grafo de acordo com suas dependências de dados, livrando assim o programador de grande parte da complexidade da programação paralela uma vez que esta, bem como a sincronização, são realizados pelo ambiente de execução dataflow. O modelo dataflow expõe naturalmente o paralelismo, instruções são executadas conforme suas dependências de dados (na ordem do fluxo de dados, dataflow), i.e., instruções são disparadas assim que seus operandos estão disponíveis, dessa forma o desafio passa a ser modelar o grafo de dependências das operações tendo como uma importante decisão a se tomar o tamanho do grão de cada nó do grafo, de forma a comportar o paralelismo sem sobrecarregar o algoritmo, podendo causar um *overhead* desnecessário na troca de

mensagens.

Motivação

Inúmeras aplicações práticas podem utilizar meta-heurísticas para resolver problemas de otimização, sendo comum para muitos desses processos sua etapa final ser constituída de um algoritmo de busca local. Este, por sua vez, faz uso de estratégias de vizinhança para enumerar o espaço de busca. Versões clássicas do processos de busca local utilizam uma vizinhança em conjunto com uma estratégia de exploração (Primeira melhora, Melhor vizinho), abrindo assim espaço para algoritmos que utilizem múltiplas vizinhanças e estratégias de exploração diferentes.

Poucos são os trabalhos da literatura que combinam estratégias de vizinhança diferentes como em *Variable Neighborhood Descent* (*VND*) e mais raros são os trabalhos que usam diferentes estratégias de exploração de vizinhança como em (RIOS et al., 2017b).

Objetivos

Este estudo visa propor estratégias diferenciadas de solução de problemas de otimização, para tanto podemos enumerar os seguintes objetivos:

- Apresentar uma implementação em dataflow para o método RVND e comparar seus resultados em termos de tempo e qualidade da solução;
- Diminuir a necessidade de troca de mensagens e o overhead no *Scheduler* da biblioteca Sucuri ao possibilitar a escolha do destino no nó do grafo;
- Implementação em dataflow do método DVND, fazendo uso do nó de flip flop para simular uma memória global;
- Propor uma nova estratégia de vizinhança capaz de aproveitar operações realizadas em diferentes nós de processamento;
- Indicar uma estratégia para combinação de movimentos de vizinhanças diferentes.

Estrutura deste documento

O restante deste trabalho é organizado conforme segue:

- Capítulo 1: descreve os fundamentos teóricos e termos utilizados nessa dissertação, no desenvolvimento deste capítulo são caracterizados e ilustrados os termos e meta-heurísticas utilizados por descrições independentes;
- Capítulo 2: descreve e apresenta os algoritmos propostos para resolver o Problema da Mínima Latência mas não se limitando a este problema. Este capítulo detalha os métodos bem como seus componentes e pseudocódigos;
- Capítulo 3: mostra os resultados computacionais deste trabalho. Os métodos dataflow DVND e GDVND propostos podem utilizar diferentes estratégias e da mesma forma podem ser aplicados a problemas variados;
- Capítulo 3.6.3: apresenta as conclusões do trabalho desenvolvido nessa dissertação com as propostas de trabalhos futuros.

1 REVISÃO DE LITERATURA E CONCEITUAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo tem como objetivo introduzir os conceitos teóricos básicos utilizados no documento e bases para apresentar os métodos.

1.1 Problemas de decisão

Um problema Π^D é dito um problema de decisão quando seu conjunto solução é composto apenas pelos elementos *Sim* e *Não*, ou seja:

$$\begin{aligned} \Pi^D &: D \rightarrow Im \\ Im &= \{Sim, N\tilde{a}o\} \end{aligned} \tag{1.1}$$

São exemplos de problemas de decisão:

- Seja $x \in C$, sendo x um número pertencente ao conjunto C, x é o menor número deste conjunto?
- Seja um grafo $G = (V,A)$ denotado pelos arestas A e vértices V, existe um caminho do vértice x para o vértice y com custo menor que c?

1.2 Problemas de otimização

Seja Π um problema, S o conjunto de soluções viáveis para o mesmo e f a função objetivo que associa uma solução s_i a um valor numérico então temos:

$$\begin{aligned} S &= \{s_1, s_2, \ldots s_{|S|}\} \\ f &: S \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Um problema de otimização, em geral, pode ser de minimização ou de maximização. Π é um problema de minimização se ele consiste em determinar uma solução s^* tal que:

$$s^* \in S \mid f(s^*) \leq f(s), \forall s \in S \tag{1.3}$$

De forma análoga um problema de maximização pode ser dado por:

$$s^* \in S \mid f(s^*) \geq f(s), \forall s \in S \tag{1.4}$$

Os problemas de otimização podem ser divididos em dois tipos:

- Otimização contínua: nesse tipo de problema pelo menos uma das variáveis x de Π pode assumir infinitos valores;
- Otimização combinatória: problemas em que toda variável x de Π é discreta, podendo assumir apenas um número finito ou infinito porém contável de valores reais.

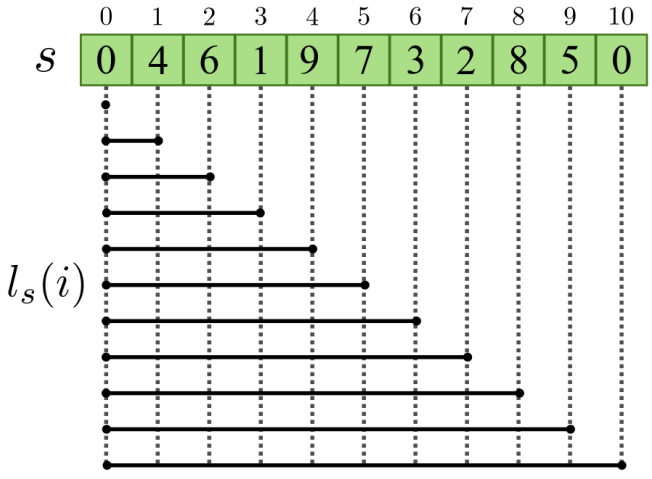
Desta forma, existe um número finito de soluções viáveis para um problema de otimização combinatória. Para todo problema de decisão existe um problema de otimização associado, tomemos como exemplo os problemas de decisão da seção 1.1 e teremos os seguintes problemas de otimização:

- Seja um conjunto C, encontrar $x \in C \mid x \leq y, \forall y \in C$.
- Seja um grafo $G = (V,A)$ denotado pelas arestas A e vértices V, encontrar o menor caminho do vértice x para o vértice y.

1.3 **Problema da mínima latência**

O Problema da Mínima Latência (PML) é um problema de otimização, sendo uma variante do PCV no qual o objetivo é minimizar o tempo de chegada (ou latência) aos vértices, e não a distância ou tempo da rota, como no problema original. O PML pode ser definido como um grafo direcionado $G = (V,A)$, onde $V = \{0,1,\ldots,n\}$ é um conjunto de vértices e $A = \{(i,j) : i,j \in V, i \neq j\}$ um conjunto de arestas que conectam os vértices. Para cada arco (i,j) existe um tempo de viagem associado igual a $t(i,j)$. O vértice 0 representa o ponto de saída (depósito) e os demais os clientes a serem visitados. O tempo de chegada (ou latência) a um cliente $i \in V$, é denotado por $l(i)$, o qual é definido pelo tempo de viagem do depósito até o vértice i.

Figura 3 – Exemplo de solução com as latências de cada cidade e cálculo da função objetivo (de (RIOS, 2016)).



$$l_s(i) = \sum_{k=1}^{i} d_s(k-1,k)$$

$$f(s) = \sum_{i=0}^{n} l_s(i)$$

O objetivo do PML é, iniciando do depósito, determinar o ciclo Hamiltoniano s que minimize a latência total expressa por $L(s) = \sum_{i=0}^{n} l(i)$, como pode ser visto na Figura 3. Assim sendo, uma solução viável do PML consiste numa permutação de n clientes determinando a ordem de visita dos mesmos. Tomemos o exemplo a seguir, se $n = 9$,

$s = (0,8,3,7,1,4,2,5,6,0)$ é uma solução viável para o PML (de fato, qualquer permutação 1..8 começando e terminando no vértice zero é uma solução viável).

Apesar da formulação simples e de sua grande aplicação na otimização de latência em redes, o PML é um problema complexo, sendo provado que o PML é NP-Difícil (SILVA et al., 2012). A despeito da semelhança na formulação do PML com a do PCV a sua função objetivo é mais complexa de ser calculada que a do PCV. No PML, pequenas alterações no vetor solução podem levar a grandes alterações no resultado final da solução e a natureza não local da função objetivo faz com que uma simples inserção afete todas as latências subsequentes. Na literatura, o PML também é conhecido Problema do Caixeiro Viajante Cumulativo (BIANCO; MINGOZZI; RICCIARDELLI, 1993), Problema do Entregador (MLADENOVIĆ; UROŠEVIĆ; HANAFI, 2013) e Problema do Reparador Viajante. (TSITSIKLIS, 1992).

Em trabalhos recentes, um procedimento de busca local baseado em *Graphics Processing Unit* (*GPU*) e computação *multi-core* foi proposto para o PML (RIOS et al., 2016). A ideia foi chamada *Distributed Variable Neighborhood Descent* (*DVND*), tentando explorar diferentes estratégias de vizinhança simultaneamente para uma solução de entrada.

Em otimização, uma vizinhança é definida como um conjunto de operações chamados "movimentos" que são capazes de realizar pequenas alterações na solução de entrada. Estas alterações podem ser, por exemplo, trocar dois elementos na permutação inicial, gerando dessa forma $\mathcal{O}(N^2)$ diferentes soluções (para o caso de uma permutação de tamanho N). Existe na literatura muitas dessas vizinhanças (como *2-Opt*, *OrOpt-1*, *OrOpt-2*, *Swap*, ..., etc), conquanto por limitações computacionais estes são sempre explorados de forma sequencial, chamados de *Variable Neighborhood Descent* (*VND*). Com o objetivo de encontrar um ótimo local para o PML, a ideia principal do DVND é usar GPU para obter operações de grão fino (que em geral são rápidas) e explorar toda a vizinhança $\mathcal{O}(N^2)$ mais rápido que em CPU (como explicado em (RIOS et al., 2016)) e combinar as respostas das buscas, escolhendo a nova melhor solução.

Acompanhando agora o exemplo da Figura 3 podemos ver que o valor da latência $L(s)$ será dado pelos somatórios das latências de todas as cidades, sendo $d_s^{i,j}$ a distância da cidade i para a cidade j na solução s, então temos:

$$L(s) = \sum_{i=0}^{n} l_s(i) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=1}^{i} d_s(k-1,k) \tag{1.5}$$

$$L(s) = nd_s(0,1) + (n-1)d_s(1,2) + \cdots + 2d_s(n-2,n-1) + d_s(n-1,n) \tag{1.6}$$

$$L(s) = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)d_s(i,i+1) \tag{1.7}$$

Da Equação 1.5 com um somatório de somatório podemos resumir para a Equação 1.7 com apenas um somatório, seguindo o exemplo teríamos os valores a seguir:

$$L(s) = l_s(0) + l_s(1) + l_s(2) + l_s(3) + l_s(4) + l_s(5) + l_s(6) + l_s(7) + l_s(8) + l_s(9)$$
$$L(s) = 10d_s^{0,4} + 9d_s^{4,6} + 8d_s^{6,1} + 7d_s^{1,9} + 6d_s^{9,7} + 5d_s^{7,3} + 4d_s^{3,2} + 3d_s^{2,8} + 2d_s^{8,5} + d_s^{5,0}$$

1.4 **Busca local**

Um algoritmo de busca local percorre iterativamente o espaço de soluções de um determinado problema melhorando a solução atual. Para tanto procura na vizinhança

(definida na Seção 1.4.1) atual por uma solução melhor que a atual e repete o processo até não ser encontrada uma melhora.

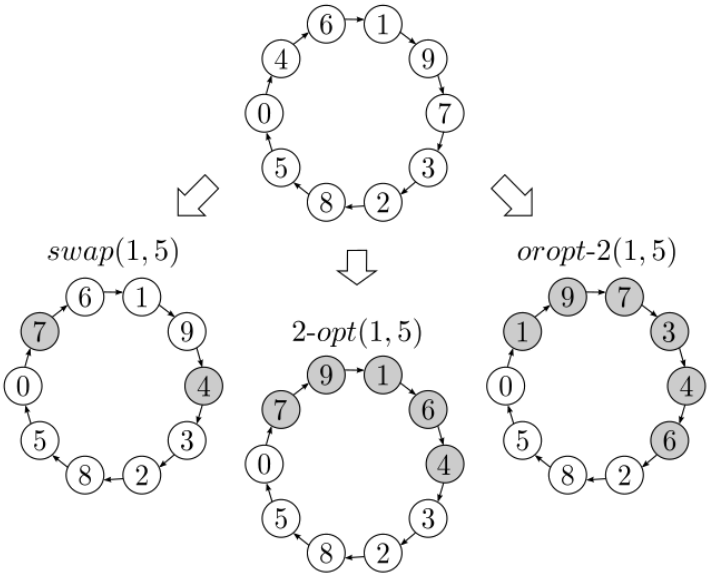
1.4.1 Vizinhança

Seja S o espaço de soluções de um problema de otimização Π, e $s \in S$ uma solução qualquer, considere a função objetivo $f : S \to \mathbb{R}$ que atribui um valor para cada solução. Denotamos então por $N^k(s)$ o conjunto de soluções vizinhas de s para a vizinhança k com $N^k(s) \subseteq S$, em que as soluções dessa vizinhança podem ser obtidas de s a partir da aplicação de determinadas operações. Uma solução s' é vizinha de s (isto é $s' \in N^k(s)$) segundo uma vizinhança k se s' é alcançável a partir de s fazendo uso de uma pequena alteração nesta última, denominada *movimento*.

Considere uma solução para o PCV ou PML, com representação através de um vetor de inteiros indicando a ordem em que os clientes serão atendidos. Desta forma, alguns exemplos de operadores, que caracterizam buscas locais, são:

Vizinhança *Swap* será dada pela aplicação do operador $swap(i, j)$ para os valores $i \in [1, n]$ e $i \in [1, n]$, com $i < j$. Neste operador os clientes das posições i e j são permutados.

Figura 4 – Exemplos dos operadores de movimento swap, 2opt e oropt-k (k = 2) aplicados a uma solução, conforme apresentado em (RIOS, 2016)



Conforme pode ser visto na Figura 4, considerando a solução $s = (0, 4, 6, 1, 9, 7, 3, 2, 8, 5, 0)$, a aplicação do operador $swap(1, 5)$ se dará conforme a seguir:

```
            s:  0  4  6  1  9  7  3  2  8  5
swap(1,5) de s:  0  7  6  1  9  4  3  2  8  5
```

Para o caso do operador $2opt(i, j)$, a alteração na solução é dada pela inversão dos elementos no intervalo de índices de i a j, da maneira exemplificada conforme segue.

```
              s:  0  4  6  1  9  7  3  2  8  5
2-opt(1,5) de s:  0  7  9  1  6  4  3  2  8  5
```

O operador $oropt - k(i, j)$ é caracterizado pela realocação de k clientes adjacentes a partir da posição i para a posição j. Podemos ver em seguida um exemplo de $oropt-2(1,5)$ para a mesma solução s.

```
                s:  0  4  6  1  9  7  3  2  8  5
oropt-2(1,5) de s:  0  1  9  7  3  4  6  2  8  5
```

O operador $2 - opt$ pode ser estendido para o $k - opt$, de forma genérica, pode-se remover k conexões (ou arestas) no percussor criando, desta forma, k sub-percursos. Estes sub-percursos podem então ser religados de forma a gerar novas soluções.

Neste trabalho foram utilizadas cinco estruturas de vizinhança, caracterizadas pelos operadores *swap*, *2opt* e *oropt-k* com variações, para $k \in \{1, 2, 3\}$. A implementação das estruturas de vizinhança tratadas foi realizada na tese (RIOS, 2016), onde se pode encontrar maiores detalhes sobre a construção das mesmas.

1.4.2 Movimento

Considere $m^k : S \to S$ a função que representa um movimento, que leva uma solução s a uma solução s', ou de forma equivalente $s' = m^k(s)$. Designamos então o movimento $m^k \in M^k$ no conjunto de movimentos da vizinhança k.

O conceito de custo do movimento $m^k(s)$ em relação a solução s foi proposto em (FINK; VOB, 2003), este é enunciado pela diferença entre o valor da solução atual s e a solução gerada pelo movimento s'. Para fins deste trabalho vamos considerar o custo do movimento $m^k(s)$ como sendo a diferença entre o valor da solução s', gerada ao aplicar este movimento à solução s, e o valor da solução s, conforme pode ser visto na Equação 1.8, com resultado equivalente, bastando apenas inverter o sinal para que o valor seja o mesmo.

Formalmente, a notação circunflexo representa a função $\widehat{m} : S \to \mathbb{R}$.

$$\widehat{m_f^k}(s) = f(s') - f(s) = f(m^k(s)) - f(s) \tag{1.8}$$

Quando estiverem claros no contexto a função f e a vizinhança k estes poderão ser omitidos, desta forma podemos simplificar a notação conforme a Equação 1.9.

$$\widehat{m_f^k}(s) = \widehat{m}(s) = f(s') - f(s) = f(m(s)) - f(s) \tag{1.9}$$

Para exemplificar as definições que se seguem consideremos a Tabela 1, onde é dado um conjunto de cidades com suas localizações conforme a Tabela 1a. Para facilitar o acompanhamento considere a matriz de distâncias expressa na Tabela 1b.

Tomemos como exemplo a solução s_1 expressa na Figura 5, esta apresenta uma solução para o problema apresentado na Tabela 1, com valor de função objetivo 2631 para o PCV e 13074 para o PML.

Ao aplicarmos à solução anterior s_1 o movimento m_1 2-opt(1,7), exibido na Figura 6, este reverte bloco de 1 a 7 (remove implicitamente duas arestas e reconecta a rota), logo o custo do movimento $\widehat{m_1}(s_1)$ é de 509 para o PCV e 3113 para o PML.

Outra opção seria escolher o movimento m_2 2-opt(5,6) para ser aplicado à solução, este reverte bloco de 5 a 6 (remove implicitamente duas arestas e reconecta rota), neste caso o custo do movimento $\widehat{m_2}(s_1)$ é 299 e 1265 para o PCV e PML respectivamente, em detalhes na Figura 7.

Adicionalmente, pode-se ver que a Figura 8 mostra o movimento m_3 2-opt(1,3) sendo aplicado à solução s_1, este reverte bloco de 1 a 3 (remove implicitamente duas arestas e reconecta rota) e apresenta um custo $\widehat{m_3}(s_1)$ de 804 e 6148 para o PCV e PML.

Tabela 1 – Informações de distâncias e localização das cidades para os exemplos apresentados.

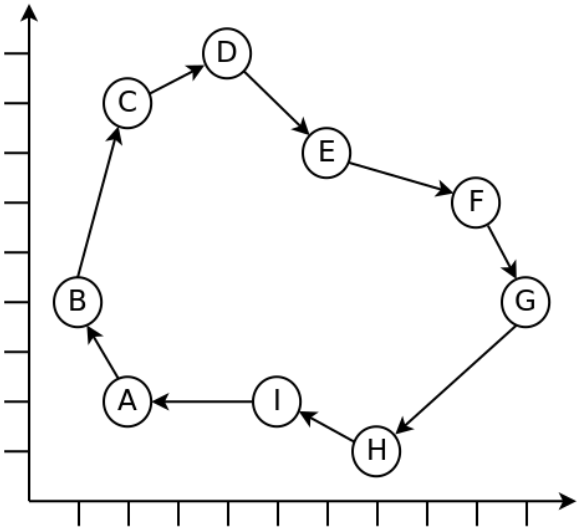
Cidade	x	y
A	200	200
B	100	400
C	200	800
D	400	900
E	600	700
F	900	600
G	1000	400
H	700	100
I	500	200

(a) Coordenadas das cidades.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**
A		224	600	728	640	806	825	510	300
B	224		412	583	583	825	900	671	447
C	600	412		224	412	728	894	860	671
D	728	583	224		283	583	781	854	707
E	640	583	412	283		316	500	608	510
F	806	825	728	583	316		224	539	566
G	825	900	894	781	500	224		424	539
H	510	671	860	854	608	539	424		224
I	300	447	671	707	510	566	539	224	

(b) Matriz de distâncias euclidianas com valores inteiros arredondados.

Figura 5 – Solução s_1.




```
index:   0  1  2  3  4  5  6  7  8
cidade:  A  B  C  D  E  F  G  H  I
```

$f(s_1) : 2631/13074\ (PCV/PML)$

1.4.2.1 Movimentos livres de estrutura – *structure-free moves*

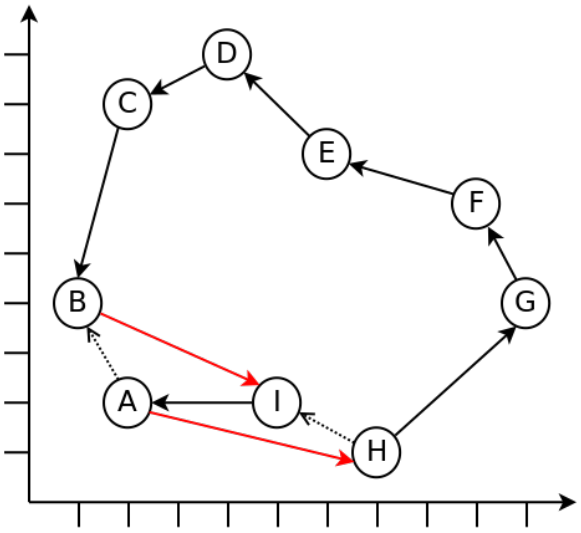
Quando a estrutura de armazenamento interna utilizada para representar uma solução permite a aplicação de um movimento para qualquer solução temos um movimento livre de estrutura. Em outras palavras, um movimento m é livre de estrutura se ele sempre pode ser aplicado a uma solução s sem gerar uma solução inválida.

$$m \text{ é livre de estrutura} \iff m(s) \in S, \forall s \in S \tag{1.10}$$

Quando uma classe de movimentos é livre de estrutura para um determinado problema então se pode dizer que a função a representar este movimento é fechada para o conjunto de soluções S.

A caracterização de um movimento como livre de estrutura depende de sua representação e de restrições do problema tratado. Desta forma, para o PCV em que o grafo com as distâncias entre as cidades é completo, o movimento *Swap* será livre de estrutura

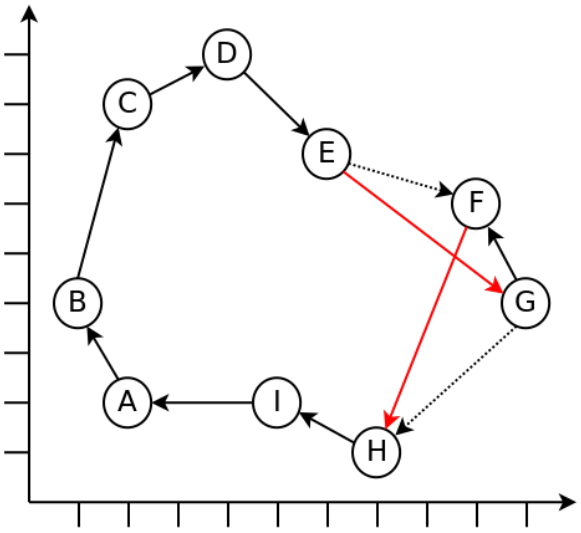
Figura 6 – Solução $m_1(s_1)$, com m_1 sendo 2-opt(1,7).



index:	0	1	2	3	4	5	6	7	8
cidade:	A	H	G	F	E	D	C	B	I

$f(m_1(s_1)) = 3140/16187\ (PCV/PML)$
$\widehat{m_1}(s_1) + f(s_1) =$
$509 + 2631 = 3140\ (PCV)$
$3113 + 13074 = 16187\ (PML)$

Figura 7 – Solução $m_2(s_1)$, com m_2 sendo 2-opt(5,6).



index:	0	1	2	3	4	5	6	7	8
cidade:	A	B	C	D	E	G	F	H	I

$f(m_2(s_1)) : 2930/14339\ (PCV/PML)$
$\widehat{m_2}(s_1) + f(s_1) =$
$299 + 2631 = 2930\ (PCV)$
$1265 + 13074 = 14339\ (PML)$

contudo num grafo incompleto uma aplicação do *Swap* pode gerar uma solução inviável, pois pode não existir um determinado percurso após a alteração na solução.

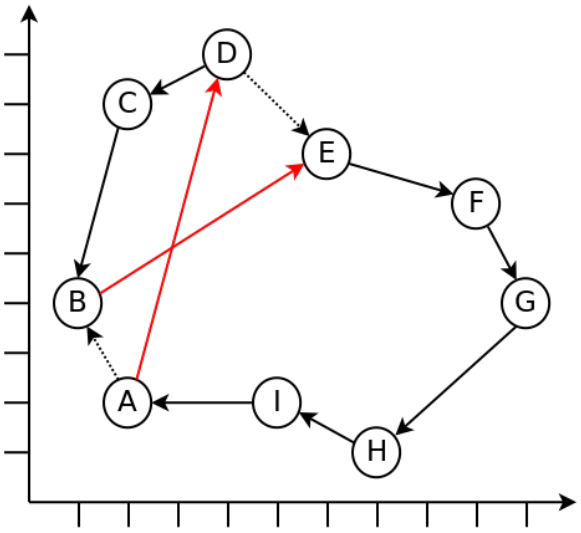
1.4.2.2 Independência de movimentos

O conceito de independência de movimentos foi apresentando em (CONGRAM, 2000) como:

> The definition of independence must be restrictive enough to ensure that the moves do not interfere with one another, in the sense that the reduction in the objective function produced by the combined move is equal to the sum of the reductions produced by the individual moves.

Desta forma, dois movimentos são independentes quando um não interfere no outro e o valor da solução obtida é igual a soma dos valores obtidos pelos dois movimentos ao valor da solução original.

Figura 8 – Solução $m_3(s_1)$, com m_3 sendo 2-opt(1,3).



index:	0	1	2	3	4	5	6	7	8
cidade:	A	D	C	B	E	F	G	H	I

$f(m_3(s_1)) : 3435/19222\ (PCV/PML)$
$\widehat{m_3}(s_1) + f(s_1) =$
$804 + 2631 = 3435\ (PCV)$
$6148 + 13074 = 19222\ (PML)$

Nesse trabalho esta definição é destrinchada em movimentos sequenciais, independência parcial e independência, conforme descrito nas seções a seguir:

1.4.2.3 Movimentos sequenciais – *sequential moves*

Dois movimentos $\{m_1,m_2\} \subseteq \mathcal{I}^s$ são sequenciais quando a aplicação de um deles não altera o custo do outro movimento para apenas um dos movimentos. Ou seja, quando executados numa determinada ordem, a aplicação de um não altera o custo obtido pela aplicação do outro. Formalmente temos que dois movimentos m_1 e m_2 são sequenciais, ou seja $m_1 \parallel_s m_2$, se e somente se:

$$m_1 \parallel_s m_2 \iff \widehat{m_1}(s) = \widehat{m_1}(m_2(s)) \tag{1.11}$$

Corolário 1. *Se o movimento m_1 é sequencial ao movimento m_2 então o valor da solução resultante $m_1 \circ m_2(s)$ será a soma do valor da solução inicial com o custo dos movimentos.*
Formalmente temos:

$$m_1 \parallel_s m_2 \implies f(m_1 \circ m_2(s)) = \widehat{m_1}(s) + \widehat{m_2}(s) + f(s) \tag{1.12}$$

Demonstração. Pela definição de custo do movimento (Equação 1.8) temos:

$$f(m_1 \circ m_2(s)) = \widehat{m_1}(m_2(s)) + f(m_2(s)) \text{ Aplicando a Equação 1.8}$$
$$f(m_1 \circ m_2(s)) = \widehat{m_1}(m_2(s)) + \widehat{m_2}(s) + f(s)$$

Aplicando-se a definição de movimentos sequenciais temos que:

$$\widehat{m_1}(m_2(s)) = \widehat{m_1}(s) \text{ Logo}$$
$$f(m_1 \circ m_2(s)) = \widehat{m_1}(s) + \widehat{m_2}(s) + f(s)$$

□

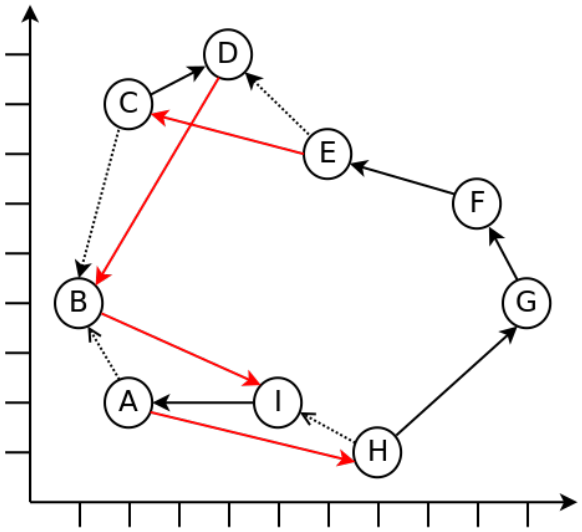
Note que a definição não permite comutatividade, logo nada pode ser afirmado para o caso da solução $m_2 \circ m_1(s)$.

Acompanhando o exemplo, se movimentos m_1 e m_2 forem sequenciais temos:

$f(m_1 \circ m_2(s_1)) = 3439/17452\ (PCV/PML)$

$f(m_1 \circ m_2(s_1)) = \widehat{m_1}(s_1) + \widehat{m_2}(s_1) + f(s_1) =$
$509 + 299 + 2631 = 3439\ (PCV)$
$3113 + 1265 + 13074 = 17452\ (PML)$

Figura 9 – Solução $m_1 \circ m_2(s_1)$, com m_1 sendo 2-opt(1,7) e m_2 sendo 2-opt(5,6).

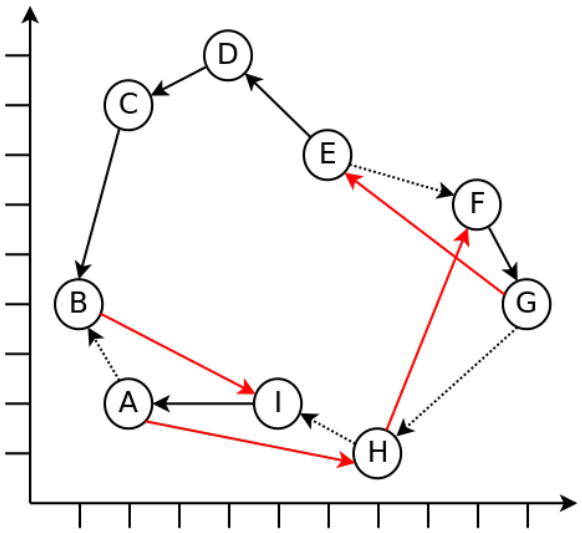


index:	0	1	2	3	4	5	6	7	8
cidade:	A	H	F	G	E	D	C	B	I

$f(m_1 \circ m_2(s_1)) = 3439/18211\ (PCV/PML)$
$f(m_1 \circ m_2(s_1)) =$
$\widehat{m_1}(m_2(s_1)) + \widehat{m_2}(s_1) + f(s_1) =$
$509 + 299 + 2631 = 3439\ (PCV)$
$3113 + 1265 + 13074 = 17452\ (PML)$

Conforme supracitado e ilustrado nas Figuras 9 e 10 podemos ver que a solução $m_2 \circ m_1(s_1)$ não verifica as mesmas propriedades pois apenas m_1 não é alterado por m_2 mas m_2 é alterado por m_1, desta forma estes movimentos são sequenciais.

Figura 10 – Solução $m_2 \circ m_1(s_1)$, com m_2 sendo 2-opt(5,6) e m_1 sendo 2-opt(1,7).



index:	0	1	2	3	4	5	6	7	8
cidade:	A	H	G	F	E	C	D	B	I

$f(m_2 \circ m_1(s_1)) = 3440/17345\ (PCV/PML)$
$f(m_2 \circ m_1(s_1)) =$
$\widehat{m_2}(m_1(s_1)) + \widehat{m_1}(s_1) + f(s_1) =$
$300 + 509 + 2631 = 3440\ (PCV)$
$1158 + 3113 + 13074 = 17345\ (PML)$

De fato podemos verificar pela Figura 10 que $\widehat{m_2}(s_1) = 299/1265$ para o PCV e PML é diferente de $\widehat{m_2}(m_1(s_1)) = 300/1158$.

1.4.2.4 Movimentos parcialmente independentes

Movimentos $\{m_1,m_2\} \subseteq \mathcal{I}^p$ parcialmente independentes são aqueles em que a aplicação de um não altera o valor do outro, o valor do movimento m_2 aplicado à solução $m_1(s)$ é igual ao valor deste aplicado à solução s, a independência de movimentos pode ser definida para movimentos de vizinhanças diferentes. Em outras palavras movimentos parcialmente independentes são sequenciais para ambos os lados. Formalmente temos que dois movimentos m_1 e m_2 são parcialmente independentes $m_1 \parallel_p m_2$ se e somente se:

$$m_1 \parallel_p m_2 \iff \widehat{m_1}(m_2(s)) = \widehat{m_1}(s) \quad \wedge \quad \widehat{m_2}(m_1(s)) = \widehat{m_2}(s) \tag{1.13}$$

Teorema 2. *Dois movimentos m_1 e m_2 são parcialmente independentes então o valor da solução final não se altera ao alternar a ordem de aplicação dos movimentos, ou seja:*

$$m_1 \parallel_p m_2 \implies f(m_1 \circ m_2(s)) = f(m_2 \circ m_1(s)), \forall s \in S \tag{1.14}$$

Demonstração. Suponhamos que m_1 e m_2 sejam parcialmente independentes $\widehat{m_1}(m_2(s)) = \widehat{m_1}(s)$ e $\widehat{m_2}(m_1(s)) = \widehat{m_2}(s)$ mas $f(m_1 \circ m_2(s)) \neq f(m_1 \circ m_1(s))$.

$$\begin{aligned}
f(m_1 \circ m_2(s)) \neq & f(m_2 \circ m_1(s)) && \text{De (1.8)} \\
\widehat{m_1}(m_2(s)) + f(m_2(s)) \neq & \widehat{m_2}(m_1(s)) + f(m_1(s)) && \text{De (1.8)} \\
\widehat{m_1}(m_2(s)) + \widehat{m_2} + f(s) \neq & \widehat{m_2}(m_1(s)) + \widehat{m_1} + f(s) && \text{Como } m_1 \parallel_p m_2 \\
\widehat{m_1}(s) + \widehat{m_2} + f(s) \neq & \widehat{m_2}(s) + \widehat{m_1} + f(s) && \text{Logo uma contradição } \perp
\end{aligned}$$

Assim, por *reductio ad absurdum*, temos que se m_1 e m_2 são parcialmente independentes então $f(m_1 \circ m_2(s)) = f(m_2 \circ m_1(s))$. □

Outra propriedade interessante pode ser vista no teorema apresentado a seguir:

Teorema 3 (Teorema da independência dos movimentos dois a dois)**.** *Se $m_1 \parallel_p m_2$ então o valor da solução gerada pela aplicação destes movimentos será igual ao valor anterior da solução somado ao custo dos movimentos.*

$$m_1 \parallel_p m_2 \implies f(m_1 \circ m_2(s)) = \widehat{m_1}(s) + \widehat{m_2}(s) + f(s) \tag{1.15}$$

Demonstração. Suponhamos que m_1 e m_2 sejam parcialmente independentes mas $f(m_1 \circ m_2(s)) \neq \widehat{m_1}(s) + \widehat{m_2}(s) + f(s)$.

$$\begin{aligned}
f(m_1 \circ m_2(s)) \neq & \widehat{m_1}(s) + \widehat{m_2}(s) + f(s) && \text{De (1.8)} \\
\widehat{m_1}(m_2(s)) + f(m_2(s)) \neq & \widehat{m_1}(s) + \widehat{m_2}(s) + f(s) && \text{De (1.8)} \\
\widehat{m_1}(m_2(s)) + \widehat{m_2}(s) + f(s) \neq & \widehat{m_1}(s) + \widehat{m_2}(s) + f(s) && \text{Como } m_1 \parallel_p m_2 \\
\widehat{m_1}(s) + \widehat{m_2}(s) + f(s) \neq & \widehat{m_1}(s) + \widehat{m_2}(s) + f(s) && \text{Logo uma contradição } \perp
\end{aligned}$$

Assim, por *reductio ad absurdum*, temos que se m_1 e m_2 são independentes então $f(m_1 \circ m_2(s)) = \widehat{m_1}(s) + \widehat{m_2}(s) + f(s)$. □

1.4.2.5 Movimentos independentes – *independent moves*

Dois movimentos $\{m_1,m_2\} \subseteq \mathcal{I}$ são independentes quando são parcialmente independentes e podem ser aplicados simultaneamente a uma solução sem que a alteração feita por um gere conflito na causada pelo outro, a independência de movimentos pode ser definida para movimentos de vizinhanças diferentes. Formalmente temos que dois movimentos m_1 e m_2 são independentes $m_1 \parallel m_2$ se e somente se:

$$m_1 \parallel m_2 \iff m_1(m_2(s)) = m_2(m_1(s)) = m_1 \circ m_2(s) = m_2 \circ m_1(s) \tag{1.16}$$

Com efeito, podemos ver que a definição de movimentos independentes coincide com a definição proposta por (CONGRAM, 2000). Pela Equação 1.16 pode-se perceber que movimentos independentes são operações comutativas, pela própria definição.

Assim podemos estender a definição da vizinhança k para:

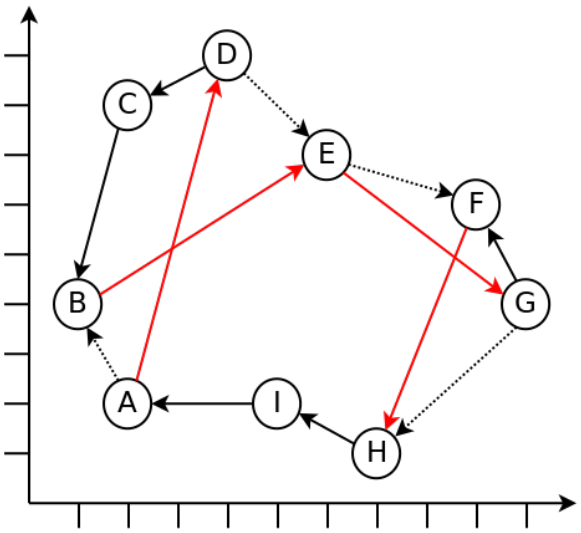
$$N^k(s) = \{m_i^k(s) \mid \forall m_i^k \in M^k\} \tag{1.17}$$

Cabe aqui destacar que a independência de movimentos é uma relação dada dois a dois entre os movimentos, logo não existe transitividade na relação de independência, ou seja, se temos dois movimentos independentes $m_1 \parallel m_2$ e outro movimento m_3 tal que $m_2 \parallel m_3$, então **não** implica que $m_1 \parallel m_3$. Pode existir um conflito, logo os movimentos $m_1 \nparallel m_3$ seriam conflitantes. Assim em termos de conflitos entre movimentos podemos escrever:

$$m_1 \parallel m_2 \ \wedge \ m_2 \parallel m_3 \not\Longrightarrow m_1 \parallel m_3 \tag{1.18}$$

Demonstração. Consideremos o seguinte contraexemplo a seguir, para a vizinhança de Swap, sejam os movimentos $swap(2,3), swap(3,6), swap(4,5)$, neste caso podemos ver que $swap(2,3) \parallel swap(4,5)$ e que $swap(4,5) \parallel swap(3,6)$ contudo $swap(2,3) \nparallel swap(3,6)$. □

Figura 11 – Solução $m_2 \circ m_3(s_1) = m_3 \circ m_2(s_1)$, com m_2 sendo 2-opt(5,6) e m_3 sendo 2-opt(1,3).



index:	0	1	2	3	4	5	6	7	8
cidade:	A	D	C	B	E	G	F	H	I

$f(m_2 \circ m_3(s_1)) : 3734/20487 \ (PCV/PML)$
$f(m_3 \circ m_2(s_1)) : 3734/20487 \ (PCV/PML)$
$f(m_2 \circ m_3(s_1)) = f(m_3 \circ m_2(s_1))$

$\widehat{m_2}(s_1) + \widehat{m_3}(s_1) + f(s_1) =$
$299 + 804 + 2631 = 3734 \ (PCV)$
$1265 + 6148 + 13074 = 20487 \ (PML)$

Note, pela Figura 11, que $m_2 \circ m_3$ opera como um movimento 4-opt (quatro arcos são removidos e inseridos), assim a operação de composição do multi-improvement é capaz de lidar com movimentos de dimensões maiores, em uma única iteração.

Tabela 2 – Matriz de distâncias para uma instância onde os movimentos $m_1 = swap_{1,2}$ e $m_2 = swap_{2,3}$ são parcialmente independentes mas não são independentes.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**
A		14	14	14	1	16	62	21	45
B	34		14	14	14	43	59	16	43
C	67	14		14	14	29	44	56	77
D	79	14	14		14	71	46	52	53
E	79	51	40	43		40	61	19	33
F	56	74	38	10	25		13	65	65
G	65	20	30	3	72	15		74	10
H	23	72	34	79	74	35	8		57
I	62	52	24	45	38	16	48	63	

É importante sobrelevar que dois movimentos serem parcialmente independentes não necessariamente implica que estes são independentes.

$$m_1 \parallel_p m_2 \not\Longrightarrow m_1 \parallel m_2 \tag{1.19}$$

Pode ser visto na Tabela 2 a matriz de distâncias para uma instância do PCV ou PML, considerando agora os movimentos $m_1 = swap(1,2)$ e $m_2 = swap(2,3)$, então temos que estes são parcialmente independentes, pois $\widehat{m_1}(s_1) = \widehat{m_1}(m_2(s_1))$ e $\widehat{m_2}(s_1) = \widehat{m_2}(m_1(s_1))$, contudo não são independentes pois $m_1 \circ m_2(s_1) \neq m_2 \circ m_1(s_1)$.

```
0  1  2  3  4  5  6  7  8 :        index
A  B  C  D  E  F  G  H  I :           s1 = (302, 1070)  (PCV/PML)
A  C  B  D  E  F  G  H  I :       m1(s1) = (302, 1070)  (PCV/PML)
A  B  D  C  E  F  G  H  I :       m2(s1) = (302, 1070)  (PCV/PML)
A  D  B  C  E  F  G  H  I : m1 o m2(s1) = (302, 1070)  (PCV/PML)
A  C  D  B  E  F  G  H  I : m2 o m1(s1) = (302, 1070)  (PCV/PML)
```

Importante notar que o resultado da aplicação de dois movimentos originar uma solução igual não implica que os movimentos são independentes.

$$m_1 \circ m_2(s_1) = m_2 \circ m_1(s_1) \not\Longrightarrow m_1 \parallel m_2 \tag{1.20}$$

Fazendo $m_1 = m_2 = m_3 = swap(7,8)$, temos que $m_1 \circ m_2(s_1) = m_2 \circ m_1(s_1)$ contudo $\widehat{m_1}(s_1) \neq \widehat{m_1}(m_2(s_1))$ e $\widehat{m_2}(s_1) \neq \widehat{m_2}(m_1(s_1))$, pois $\widehat{m_1}(s_1) = \widehat{m_2}(s_1) = -97$ e $\widehat{m_1}(m_2(s_1)) = \widehat{m_2}(m_1(s_1)) = 0$.

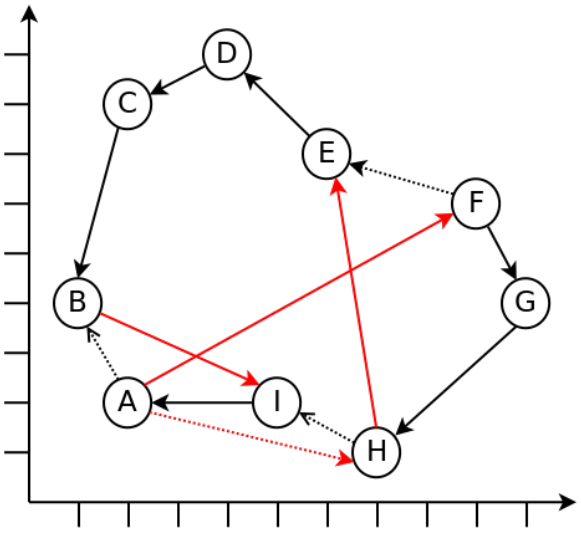
```
0  1  2  3  4  5  6  7  8 :        index
A  B  C  D  E  F  G  I  H :       m3(s1) = (205, 851)  (PCV/PML)
```

1.4.2.6 Movimentos conflitantes

Há movimentos com conflito de escrita na representação (estrutura de dados) da solução, portanto não é possível aplicá-los simultaneamente. Nesse caso, diz-se que eles são conflitantes.

Por exemplo, como m_1=2-opt(1,7) e m_3=2-opt(1,3) são conflitantes, $m_1 \circ m_3(s_1)$ e $m_3 \circ m_1(s_1)$ são soluções estruturalmente distintas, conforme pode ser visto na Figura 12.

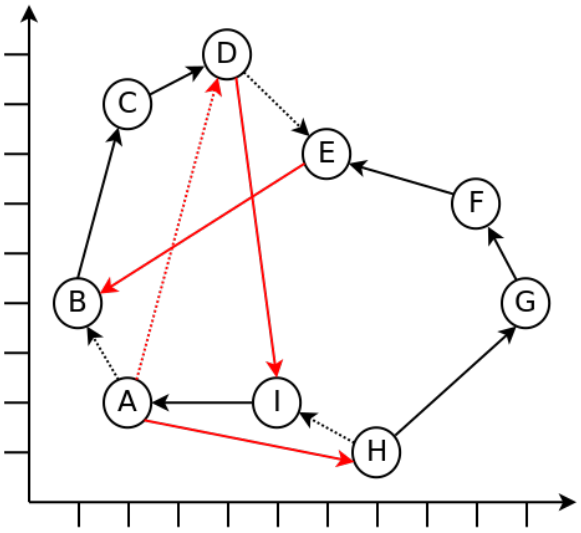
Figura 12 – Solução $m_1 \circ m_3(s_1)$, com m_1 sendo 2-opt(1,7) e m_3 sendo 2-opt(1,3).



index:	0	1	2	3	4	5	6	7	8
cidade:	A	H	G	F	E	B	C	D	I

$f(m_1 \circ m_3(s_1)) : 3700/18395 \ (PCV/PML)$
$\widehat{m_1}(m_3(s_1)) + \widehat{m_3}(s_1) + f(s_1) =$
$265 + 804 + 2631 = 3700 \ (PCV)$
$827 + 6148 + 13074 = 18395 \ (PML)$

Figura 13 – Solução $m_3 \circ m_1(s_1)$, com m_3 sendo 2-opt(1,3) e m_1 sendo 2-opt(1,7).



index:	0	1	2	3	4	5	6	7	8
cidade:	A	F	G	H	E	D	C	B	I

$f(m_3 \circ m_1(s_1)) = 3728/20403 \ (PCV/PML)$
$\widehat{m_3}(m_1(s_1)) + \widehat{m_1}(s_1) + f(s_1) =$
$588 + 509 + 2631 = 3728 \ (PCV)$
$4216 + 3113 + 13074 = 20403 \ (PML)$

Naturalmente, como m_1 e m_3 são conflitantes (vide Figura 13), $\widehat{m_3}(m_1(s_1)) \neq \widehat{m_3}(s_1)$ e $\widehat{m_1}(m_3(s_1)) \neq \widehat{m_1}(s_1)$. Também é interessante notar que a composição executa um movimento 3-opt, então mesmo que não seja permitido na composição do 2-opt pode ser alcançado ao utilizar alguma outra vizinhança num processo simultâneo (generalized multi-improvement).

1.4.3 Estratégia

A busca local enumera um determinando conjunto de soluções chamado vizinhança, conforme Seção 1.4.1, nesse momento é necessário escolher qual caminho deve ser seguido, desta forma é necessário eleger para qual solução o processo irá se repetir. Podem ser usadas inúmeras estratégias de escolha dessa nova solução, algumas delas são apresentadas a seguir:

1.4.3.1 Primeira melhora – *first improvement*

A estratégia *First Improvement* (Primeira melhora) recebe como parâmetro a solução da iteração corrente para gerar seus vizinhos, e escolher uma solução a ser retornada, conforme um critério específico, a saber, a primeira solução a melhorar a atual.

Algoritmo 1 First Improvement para um problema de minimização

```
1: função FirstImprovement(Solução: s, Operador de vizinhança: k)
2:     para m_i ∈ M faça                          ▷ Para cada movimento m_i ∈ M
3:         se m̂_i(s) < 0 então                    ▷ Se a solução for melhor que a atual
4:             retorna m_i(s)
5:     retorna s          ▷ Caso não consiga melhorar retorna a própria solução
```

Podemos ver o pseudocódigo do *First Improvement*, Algoritmo 1, que consiste de enumerar os vizinhos até encontrar o primeiro que seja melhor que a solução atual, conforme teste realizado na linha 3, este então é retornado como resposta do método.

1.4.3.2 Melhor melhora – *best improvement*

A estratégia *Best Improvement* (Melhor melhora) recebe como parâmetro a solução da iteração corrente para gerar seus vizinhos, e então escolhe uma solução a ser retornada, conforme um critério específico, a saber, a melhor solução encontrada na vizinhança.

O método de *Best Improvement* (Algoritmo 2) consiste em enumerar toda a vizinhança guardando a informação do melhor encontrado até o momento, e então retornar o melhor resultado encontrado.

Algoritmo 2 Best Improvement para um problema de minimização

```
1: função BestImprovement(Solução: s, Operador de vizinhança: k)
2:     s^best ← s                                  ▷ Melhor solução encontrada
3:     para m_i ∈ M faça                          ▷ Para cada movimento m_i ∈ M
4:         se m̂_i(s) < f(s^best) − f(s) então     ▷ Se melhorar a atual altera a melhor
5:             s^best ← m_i(s)
6:     retorna s^best                             ▷ Retorna a melhor solução encontrada
```

O *First Improvement* pode ser uma opção ao método de *Best Improvement* quando a enumeração de toda a vizinhança é uma atividade muito custosa. Embora não haja um paralelo para a definição matemática formal da solução s' retornada pelo *First Improvement* esta pode ser definida para o *Best Improvement* de maneira simples por $s' \in N^k(s) \mid f(s') < f(s), \forall s \in N^k(s)$, o que, como veremos a seguir na seção 1.5, corresponde ao ótimo local para a solução s segundo a vizinhança k. Em termos de movimento temos $s' = m'(s)$ com $\widehat{m'}(s) < \widehat{m_i}(s) \mid \forall m_i \in M$.

1.4.3.3 Escolha aleatória – *random selection*

Nesta estratégia *Random Selection* (Escolha Aleatória) é selecionada uma solução aleatoriamente entre aquelas que melhoram a solução atual.

A estratégia *Random Selection* (mostrada no Algoritmo 3) navega pelas soluções e mantém as que melhoram a solução atual, conforme linha 5, para, ao final, retornar uma qualquer deste grupo.

Algoritmo 3 Random Selection para um problema de minimização

```
1: função RandomSelection(Solução: s, Operador de vizinhança: k)
2:     S_imp ← ∅                                  ▷ Conjunto com soluções de melhora
3:     para m_i ∈ M faça                          ▷ Para cada movimento m_i ∈ M
4:         se m̂_i(s) < 0 então                    ▷ Se a solução for melhor que a atual
5:             S_imp ← S_imp ∪ {m_i(s)}            ▷ Adiciona ao conjunto de soluções de melhora
6:     retorna Any(S_imp)                         ▷ Retorna uma das soluções de melhora
```

1.4.3.4 *Dynasearch*

Uma nova classe de estratégias de exploração de vizinhança é criada por (CONGRAM, 2000; CONGRAM; POTTS; VELDE, 2002) ao apresentar o *dynasearch*.

Antes de discorrer a respeito deste, é necessário apresentar um novo conceito, o uso de grandes vizinhanças, em geral, torna o método capaz de encontrar soluções de melhor qualidade, contudo enfrenta o custo de demandar um maior tempo na busca (CONGRAM, 2000). Um grupo *sui generis* de vizinhanças muito grandes (de tamanho exponencial) é aquele em que as vizinhanças podem ser exploradas em tempo polinomial, sendo chamado de *Polynomially Searchable Exponential Neighbourhoods* (PSEN). Muitos dos PSEN estudados possuem uma característica singular, um único movimento é equivalente a uma série de movimentos em uma outra vizinhança amplamente utilizada (CONGRAM, 2000).

Dynasearch é um PSEN que usa programação dinâmica para combinar um conjunto de movimentos independentes de uma das vizinhanças tradicionais (CONGRAM, 2000). Conforme posto previamente, um conjunto de movimentos formará um único movimento da vizinhança *dynasearch*.

Algoritmo 4 Dynasearch simplificado para um problema de minimização

```
1: função Dynasearch(Solução: s, Operador de vizinhança: k)
2:     M^k ← Movimentos da vizinhança k           ▷ Conjunto com movimentos
3:     m^dynasearch ← DynamicSearch(s, M^k)       ▷ Retorna melhor movimento na
   combinação
4:     retorna m^dynasearch(s)                    ▷ Solução com o movimento aplicado
```

Pode-se acompanhar pelo Algoritmo 4, que existe, na linha 3, uma chamada para o processo de programação dinâmica, característico do *dynasearch*, que irá retornar o melhor movimento composto.

1.4.3.5 Múltiplas melhoras – *multi improvement*

Ao generalizar o conceito do *Dynasearch* chegamos no *Multi Improvement* (RIOS et al., 2015), que consiste em combinar um conjunto de movimentos segundo um critério ostensivo, para então escolher uma das soluções geradas. A diferença básica reside em o *multi improvement* permitir, mas não obrigar, a geração de toda a vizinhança exponencial resultante da composição de movimentos sem prescrever o método para efetuar este processamento. Ademais, para movimentos livres de estrutura é possível projetar o algoritmo para combinação de movimentos de forma a não tentar movimentos que, previamente, já se saibam não ser independentes. Podemos ver um exemplo simplificado de pseudo-código para o multi improvement no Algoritmo 5.

Em linhas gerais, a ideia é combinar um conjunto de movimentos independentes e executá-los simultaneamente sobre a solução de entrada. Note que, embora consista na aplicação de diversos movimentos, somente uma única solução vizinha é gerada. O *Multi Improvement* pode ser utilizado em qualquer contexto que o *Best Improvement* ou *First Improvement* se encaixe (etapa de Exploração de Vizinhança ou *Neighborhood Exploration*), porém caso só exista um único movimento independente na vizinhança, ele terá comportamento equivalente ao Best Improvement. Assim, a solução s' retornada por uma iteração do *Multi Improvement*, após ser aplicado a uma solução s, é dada por $s' = m_1 \circ m_2 \circ \ldots m_i(s)$, com os movimentos independentes $\{m_1, m_2, \ldots, m_i\} \subset M$.

O *Multi Improvement* se encaixa particularmente bem com o conceito de *SIMD* (*Single Instruction Multiple Data*), presente nas GPUs, sendo sua complexidade similar ao *Best Improvement* (todos movimentos da vizinhança são enumerados), seguido de uma etapa de junção (ou *merge*) dos movimentos independentes. Podem existir cenários em que o *Best Improvement* seja mais eficiente (com poucos movimentos independentes), embora já tenha sido demonstrado na literatura que mesmo casos com apenas dois movimentos independentes acabam mais promissores no *Multi Improvement* do que no *Best Improvement* (RIOS, 2016).

Algoritmo 5 Multi improvement para um problema de minimização

```
1:  função MultiImprovement(Solução: s, Operador de vizinhança: k)
2:      M^k ← Movimentos da vizinhança k                ▷ Conjunto com movimentos
3:      M_sel ← ∅
4:      enquanto |M^k| > 0 faça
5:          I ← MovimentosIndependentes(M^k)
6:          M_sel ← M_sel ∪ I                           ▷ Combinar apenas os independentes
7:          M^k ← M^k − I
8:      s_multi ← s
9:      para m ∈ M_sel faça
10:         s_multi ← m(s_multi)
11:     retorna s_multi                                 ▷ Solução com os movimentos aplicados
```

Podemos ver no Algoritmo 5, em sua linha 6 é feita a operação de juntar os movimentos escolhidos com os movimentos independentes selecionados na iteração atual. A cada etapa os movimentos independentes selecionados são removidos do conjunto de movimentos M^k até que este esteja vazio. A forma como escolher os movimentos, apresentada na linha 5, não é prescrita pelo método, podendo ser realizada da forma que mais beneficie o resultado do problema a ser resolvido.

1.4.3.6 Passo iterativo

Em geral, um algoritmo de busca local é um processo iterativo pesado, que tem como objetivo encontrar uma solução melhor que a atual dentro de um espaço de busca. A solução recebida como entrada pode ser aleatória ou advinda de alguma heurística construtiva, a intenção do processo é aprimorar o resultado encontrado.

Cada iteração da busca local tenta encontrar a melhor solução mediante alguma alteração na solução atual, então o processo se repete na solução gerada até que nenhuma melhora seja possível.

Algoritmo 6 Busca local definida de forma genérica

```
1: função LocalSearch(Solução: s)
2:     enquanto f(δ(s)) < f(s) faça ▷ Cada iteração corresponde a um passo iterativo
3:         s ← δ(s)
4:     retorna s                    ▷ Retorna a melhor solução encontrada
```

Supondo que $\delta(s)$ (apresentado do Algoritmo 6) retorna uma solução segundo algum critério, convencionemos então chamar de **passo iterativo** cada iteração da busca local em que o processo obtém uma solução melhor que a atual, e salva o melhor resultado encontrado até o momento. Assim para uma solução s o passo iterativo é dado pela Equação 1.21.

$$\rho(s) = min(s, \delta(s)) \implies f(\rho(s)) \leq f(s) \tag{1.21}$$

Para o caso em que não se encontra uma solução melhor que a atual, $\delta(s) = \varnothing$, então o passo iterativo retorna solução atual e o processo é finalizado.

De forma geral as estratégias de exploração podem ser resumidas conforme a Tabela 3, o *first improvement* enumera as soluções vizinhas sequencialmente e retorna a primeira que melhorar a solução atual. Para o *best improvement* são enumeradas todas as soluções vizinhas e é retornada a que representa a maior melhora na solução atual. A estratégia *random select* enumera todas as soluções vizinhas e então retorna uma qualquer entre aquelas que melhoram a solução atual. Por outro lado o *dynasearch* faz uso dos movimentos que geram a vizinhança para criar uma nova vizinhança *PSEN*, via programação dinâmica, e então retornar a melhor solução. No caso do *multi improvement* são utilizados os movimentos para obter uma composição destes que melhore mais a solução que o uso destes independentemente.

Tabela 3 – Comparação das estratégias de exploração de vizinhança.

Estratégia	**Passo iterativo**
First improvement	$\delta(s) = PrimeiraMelhora(s)$
Best improvement	$\delta(s) = s'$, com $s' \in N^k(s)$ e $s' \leq s'' \; \forall s'' \in N^k(s)$
Random selection	$\delta(s) = s'$ com $s' \in N^k(s)$ e $s' < s$
Dynaserach	$\delta(s) = Dynaserach(s, N^k(s))$
Multi improvement	$\delta(s) = Combinar(s, N^k(s))$

Do ponto de vista do paralelismo atrelado às estratégias podemos perceber que uma paralelização do *first improvement*, apesar de possível, geraria um método parecido com o *random select* pois perderia-se o conceito de primeiro a melhorar a solução. O *best improvement* consegue tirar proveito da paralelização na geração da vizinhança, e através de uma operação de *reduce* para encontrar o melhor resultado, no caso do *random select* seria equivalente, exceto para a última etapa que bastaria selecionar uma qualquer entre as operações de melhora. A paralelização do *dynasearch* está atrelada a possibilidade de paralelização da programação dinâmica utilizada para a geração da vizinhança PSEN.

Por final, para o caso do *multi improvement* justamente por não prescrever os algoritmos utilizados para seleção e combinação dos movimentos independentes, estes podem ser projetados de forma a trabalharem bem em um ambiente paralelo ou mesmo distribuído.

1.5 Ótimo global vs ótimo local

O ótimo global e ótimo local são exemplificados na Figura 1. Uma solução $s^* \in S$ é dita **ótimo global** para um problema Π quando não existe outra solução viável s' com melhor valor de função objetivo, formalmente temos que s^* é ótimo global quando:

- $\forall s' \in S \mid f(s') \leq f(s^*), s' \neq s^*$ para um problema de maximização;
- $\forall s' \in S \mid f(s') \geq f(s^*), s' \neq s^*$ para um problema de minimização.

Considere uma busca local de *Best Improvement* H para o problema Π sobre a estrutura de vizinhança N^k, após aplicar H a uma solução inicial $s^0 \in S$ é obtido um conjunto de soluções $N^k(s^0)$ vizinhas, assim o **ótimo local** (*mínimo local*) segundo a vizinhança N^k para a solução s^0 é dado por:

- $s'' \in N^k(s^0) \mid f(s'') \leq f(s'), \forall s' \in N^k(s^0), s'' \neq s'$, para um problema de minimização;
- $s'' \in N^k(s^0) \mid f(s'') \geq f(s'), \forall s' \in N^k(s^0), s'' \neq s'$, para um problema de maximização.

Em linhas gerais, um **ótimo local** é a solução com melhor valor de função objetivo para um contexto local, seja uma vizinhança ou o conjunto imagem de uma heurística.

1.6 Meta-heurísticas

Uma meta-heurística diferencia-se de uma heurística por não ser acoplada a um problema específico ou classe de problemas, e possuir a capacidade de escapar de mínimos locais. Meta-heurísticas fazem uso de artifícios capazes de encontrar soluções e aprimorar as já encontradas enquanto procuram escapar de mínimos locais. Na literatura são utilizadas em trabalhos que tratam de problemas da classe NP-Difícil devido a simplicidade de implementação e a intratabilidade da solução exata de tais problemas. Assim, esses algoritmos são ferramentas robustas para serem aplicadas na resolução prática de problemas de otimização combinatória, sendo uma alternativa quando o respectivo algoritmo exato não é conhecido ou exige um alto tempo de execução (GLOVER; KOCHENBERGER, 2006).

As meta-heurísticas evoluem iterativamente conforme a parametrização fornecida até atingirem um **Critério de Parada**, que pode também estar sujeito aos parâmetros do método. O critério de parada, em geral, está associado ao número de iterações, tempo de execução, um parâmetro de qualidade ou número de iterações sem melhora.

1.7 Dataflow

Atualmente os processadores no mercado de computadores seguem, em geral, o modelo de *Von Neumann*. No referido modelo, a execução das instruções é guiada por um fluxo de controle, ou seja, segundo a ordem que aparecem no programa, desta forma se faz

necessário um *Program Counter* (Contador de Programa) para indicar qual a próxima instrução a ser executada. O contador também pode ser alterado por instruções de desvio, e laços de repetição ou qualquer tipo de comando de execução condicional.

Note que este modelo é intrinsecamente sequencial. No entanto, tenta-se resgatar paralelismo em nível de instruções com técnicas como pipelining (PATTERSON; HENNESSY, 2003), predição de desvio (PATTERSON; HENNESSY, 2003) e renomeamento de registradores (HENNESSY; PATTERSON, 2011).

O modelo dataflow (GURD; KIRKHAM; WATSON, 1985; SWANSON et al., 2003; DENNIS; MISUNAS, 1974; DAVIS, 1978; SAKAI et al., 1989; SHIMADA et al., 1986; KISHI; YASUHARA; KAWAMURA, 1983; GRAFE et al., 1989; PAPADOPOULOS; CULLER, 1990; SWANSON et al., 2007) expõe paralelismo de forma natural. Neste modelo, as instruções são executadas de acordo com o fluxo de dados, ou seja, assim que todos os seus operandos de entrada estiverem disponíveis.

No modelo dataflow os programas são escritos como um grafo de fluxo de dados, onde os nós representam as instruções e as arestas direcionadas indicam as dependências de dados. Assim $A \rightarrow B$ indica que A produz um dado que é enviado como entrada para B após ter sido processado. Cabe lembrar que este modelo é adotado nas máquinas de Von Neumann para extrair paralelismo ao implementar o mecanismo de execução fora-de-ordem com escalonamento dinâmico baseado em fluxo de dados (TOMASULO, 1967), contudo limitando o paralelismo pela emissão das instruções que permanece seguindo o fluxo de controle. Numa arquitetura que segue totalmente o fluxo de dados as instruções não são emitidas segundo se apresentam no programa, instruções distintas podem executar concorrentemente

Conceitualmente, um grafo dataflow é composto de nós que representam as tarefas, que podem ser de grão fino (como instruções) ou grão grosso (como funções ou procedimentos). As arestas que conectam os nós representam dependências de dados, significando que um nó de origem irá produzir um resultado que será utilizado por um nó de destino. Quando um certo nó recebe todas as entradas necessárias (são satisfeitas todas as suas dependências) este pode ser enfileirado para executar o seu processamento.

Na Figura 14 pode ser visto um programa simples, à esquerda é mostrado o código e à direita sua tradução no grafo de fluxo de dados associado, note que as instruções de soma e multiplicação podem ser executadas em paralelo ou qualquer ordem sem alterar o resultado final.

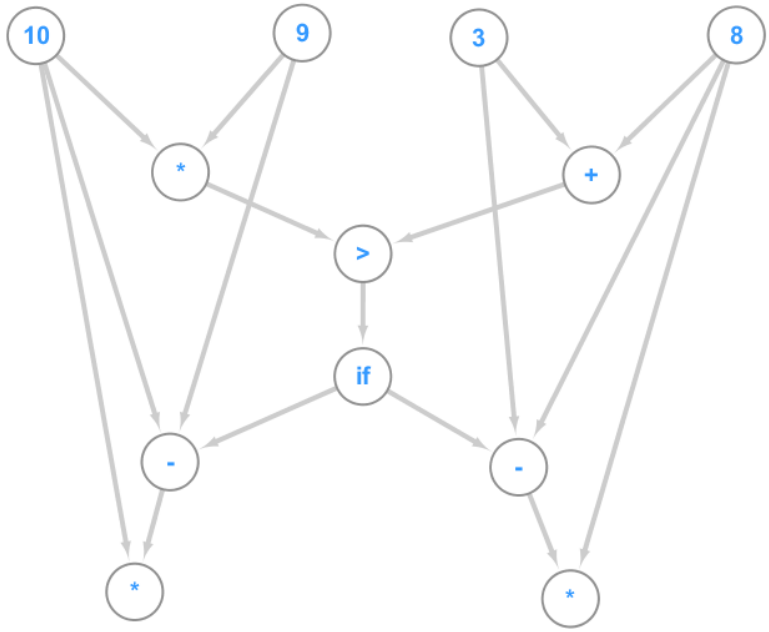
Ao analisar o potencial de performance de aceleração via dataflow são analisadas duas métricas principais, o *grau médio de concorrência* (*average concurrency degree*) e o *grau máximo de concorrência* (*maximum degree of concurrency*), estas métricas são definidas por (ALVES et al., 2018) como sendo:

- *maximum degree of concurrency*: o tamanho do maior conjunto de instruções que podem ser executadas em paralelo;
- *average concurrency degree*: o somatório de todo o trabalho executado dividido pelo tamanho do caminho crítico.

O estudo dessas métricas permite identificar quando a alocação de mais recursos poderá melhorar a performance da execução (ALVES et al., 2018), podendo também ser usada para indicar se haverá ganho no uso da abordagem dataflow para o problema tratado.

Figura 14 – Exemplo de conversão código para grafo de dependências.

```
a = 10
b = 9
c = 3
d = 8
e = a * b
f = c + d
if e > f:
  g = (a - b) * a
else:
  g = (c - d) * d
```



Nota: À esquerda pode ser visto um trecho de código em *python*, ao passo que à direita é exibido o grafo dataflow correspondente.

1.7.1 Sucuri

Sucuri (ALVES et al., 2014) é uma biblioteca minimalística Dataflow para a linguagem Python, que permite aos programadores explorarem o paralelismo mais naturalmente pela execução dataflow em máquinas que seguem a arquitetura Von Neumann. Sucuri permite uma execução transparente em um *cluster* de máquinas ao fazer uso do mecanismo de serialização de objetos em Python (*Pickle*).

A Figura 15 mostra a estrutura do Sucuri, onde é possível observar três componentes principais: `Graph` (Grafo), `Scheduler` (Escalonador) e o `Worker` (Operário).

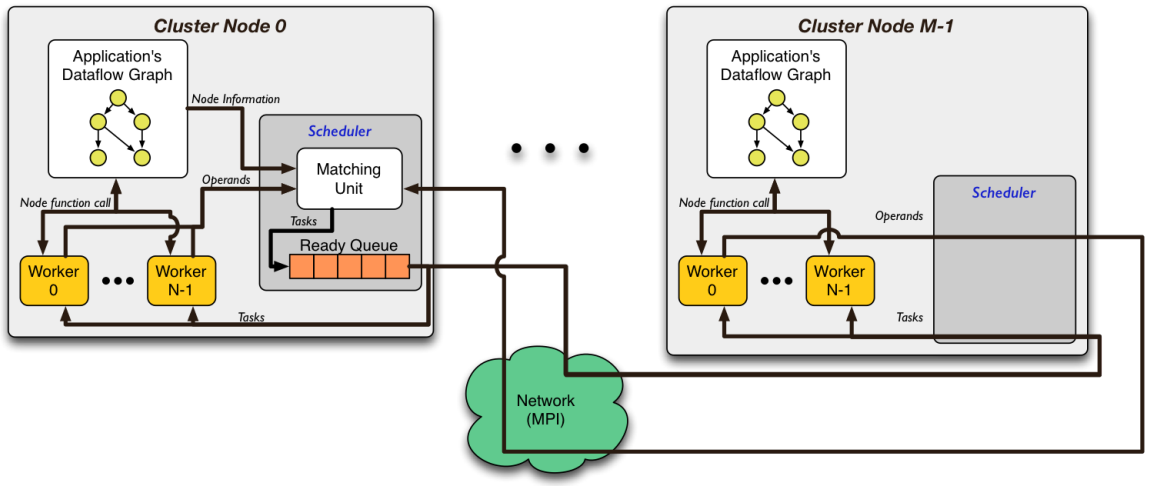
O `Graph` é apenas o grafo de dependências da aplicação dataflow, podendo ser visto como um contêiner de nós, onde cada um contêm:

- A lista de entradas de dados até o momento. Quando todos os operandos são recebidos ocorre um *matching* e a execução do nó será disparada;
- A função (computação) que deve ser executada, quando for o momento, para este nó;
- Uma lista de nós de destino que devem receber o resultado produzido na sua computação;
- Atributos específicos, como um identificador único que pode ser usado para atribuição de trabalho para um conjunto específico de nós (como numa abordagem *fork-join*).

Quando é usado em um *cluster* de computadores, cada componente supracitado é replicado em cada máquina do *cluster*, com exceção do `Scheduler`, o que implica que a Sucuri adota um *pool* de tarefas centralizado. Em (SILVA et al., 2016) os autores da

Sucuri implementaram e avaliaram uma versão da biblioteca utilizando um escalonador distribuído, contudo esta versão ainda não foi utilizada nesse trabalho.

Figura 15 – A arquitetura da Sucuri (de (ALVES et al., 2014)).



Nota: A mesma estrutura é replicada em cada nó, entretanto apenas no `Scheduler` do nó 0 do cluster contem o `Matching Unit` e o `Ready Queue`. Este é responsável por receber operandos dos `workers` locais e de outros `Schedulers`, além disso este gera as tarefas para serem enfileiradas no `Ready Queue`.

O `Scheduler` (escalonador) principal, situado no nó 0 do *cluster*, é composto por uma `Matching Unit`, uma `Ready Queue` (fila de prontos) e uma `Waiting Queue` (fila de espera). Este é responsável por entregar todos os operandos aos seus respectivos nós de destino no grafo. Se ocorre um *match*, isto é, todas as dependências de dados são satisfeitas para um nó, então uma tarefa é criada e inserida na `Ready Queue`. Quando os `workers` estiverem ociosos estes vão requisitar uma tarefa para o `Scheduler` que será buscada da `Ready Queue`. O `Scheduler` situado em outros nós do cluster é mais simples, e apenas encaminha tarefas do `Scheduler` principal para seus `workers` locais, e operandos de seus `workers` para o `Scheduler` principal. O grafo é replicado em todos os nós do *cluster* mas apenas o grafo do nó 0 pode receber operandos do `Scheduler` principal.

Toda a comunicação intra-nó entre os componentes principais citados acima é realizada via memória compartilhada e entre `Schedulers` de nós diferentes é feita via interface de troca de mensagens.

Cada nó do grafo da Sucuri é associado a uma função que pode ser implementada pelos programadores e passada para estes no momento da criação do grafo dataflow. Após instanciar os nós, o programador pode criar as ligações entre estes usando o método `add_edge()` do nó que cria uma dependência no grafo dataflow. Quando o escalonador dispara a execução de uma tarefa num certo worker, este vai chamar a execução do método `run()` do respectivo nó para aquela tarefa. Na maioria dos casos, este método `run()` vai atuar como um invólucro que chama a execução da função associada ao nó no momento da construção do grafo, passando os operandos como parâmetro e, ao final, irá enviar os valores retornados pela função para o escalonador.

De mais a mais a Sucuri também provê um conjunto especial de nós que podem auxiliar o programador a elaborar aplicações que sigam alguns padrões de paralelismo. Por exemplo, uma aplicação que envolva *pipeline* para Sucuri é apresentada na Figura 16. O painel *A* mostra o grafo representando este padrão e o painel *B* o código Sucuri para essa operação. Note como novos nós são criados (linhas 11-13), adicionados ao grafo

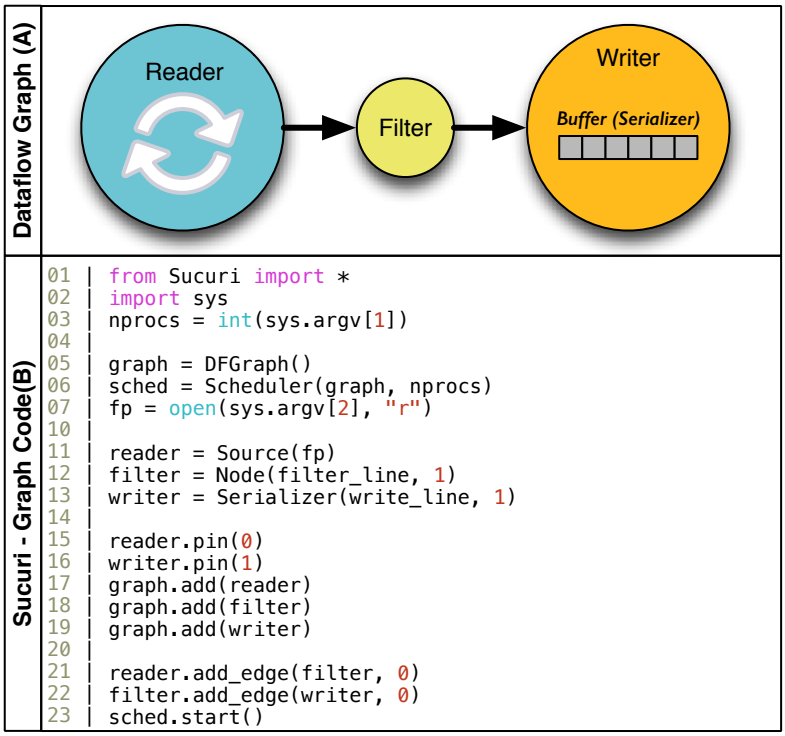
(linhas 17-19) e como as arestas conectando os nós são definidas (linhas 21 e 22). Perceba também a instanciação no escalonador (linha 6) e como este é inicializado após o grafo dataflow ter sido definido (linha 23).

A Figura 16 também aponta como o nó especial `Source` recebe um objeto *iterador* Python (por exemplo uma lista ou um descritor de arquivo) na sua instanciação. Durante a execução do programa, o método `run()` do nó *Source* será disparado apenas uma vez visto que este é a raiz, i.e., não possui operandos de entrada no grafo e é usado para iniciar a computação. Todavia, a execução deste método vai durar até que todo o conteúdo do objeto iterador tenha sido consumido. Por padrão o nó `Source` vai executar um laço sobre o objeto iterador e produzirá múltiplas saídas (mensagens) que irão disparar a execução do pipeline múltiplas vezes.

Veja também que o último nó do pipeline é o nó especial `Serializer`, que é responsável por escrever os dados no arquivo. É possível que os dados produzidos pelo nó `Source` sejam processados fora de ordem pelo segundo nó uma vez que múltiplas tarefas podem ser escalonadas em workers diferentes. Por conseguinte, é necessário reordenar os dados antes de os escrever no arquivo, no nó `Serializer`. Para tanto, os dados produzidos pelo nó `Source` precisam estar encapsulados num objeto `TaggedValue` que contem um atributo `tag`, indicando sua posição na ordem do conjunto de dados. O nó no meio também vai enviar os dados filtrados dentro do objeto `TaggedValue`, com a mesma tag do pedaço de dados que recebeu. O nó `Serializer` então, ao receber os dados do nó de filtro, vai armazená-los num *buffer* ordenando de acordo com a tag. Se a tag do último fragmento de dados recebido corresponde ao próximo a ser escrito no arquivo então o nó `Serializer` obtém os dados do *buffer* ordenado e escreve no arquivo até que haja uma lacuna na ordenação, i.e. a porção de dados que é a próxima a ser escrita ainda não chegou ao *buffer*. Se os dados recebidos pelo `Serializer` estão fora de ordem, o nó apenas os armazena no *buffer* ordenado e aguarda por mais dados. O método `pin` é usado para fixar um nó a um determinado worker, o que fará com que este seja executado apenas por este worker específico. No caso do exemplo, foram fixados os nós que fazem operações de ES no disco aos workers que tem acesso direto ao disco.

Um recurso de modelagem interessante que foi usado nesse trabalho consiste em explorar a programação em grão grosso usando a Sucuri junto com a computação em grão fino em GPU, resultando assim numa computação heterogênea Dataflow/Von Neumann, com nós dataflow executando operações de alta performance em GPU. Esta estratégia permite uma grande flexibilidade para o design de insólitos algoritmos, com maior simplicidade do que adotando um único paradigma de computação (dataflow ou Von Neumann).

Figura 16 – *Pipelining* com Sucuri (de (ALVES et al., 2014)).



Nota: Painel A mostra um grafo de uma aplicação dataflow, o painel B descreve o grafo usando a Sucuri.

1.8 **RVND**

O método *Randomized Variable Neighborhood Descent* (RVND) clássico (SOUZA et al., 2010) é apresentado no Algoritmo 7, como um procedimento sequencial, este depende do passo anterior para continuar o seu processamento, de acordo com o resultado anterior o método pode decidir se move para a próxima vizinhança ou volta para a primeira. Podemos ver no condicional da linha 5 que após obter a melhor solução para a vizinhança atual, o RVND verifica se esta é melhor que a solução atual, caso seja então o método volta pra a primeira vizinhança, caso contrário segue para a seguinte.

Algoritmo 7 RVND clássico

1: **função** RVND(Solução: s)
2: $N \leftarrow \{N^1, \ldots, N^{kmax}\}$ ▷ Vizinhanças em ordem aleatória
3: **para** $k \leftarrow 1$ to $kmax$ **faça**
4: $s' \leftarrow s''$ com $f(s'') \leq f(s''') \mid \forall s''' \in N^k(s)$ ▷ Melhor solução de $N^k(s)$
5: **se** $f(s') < f(s)$ **então**
6: $s \leftarrow s'$
7: $k \leftarrow 1$
8: **senão**
9: $k \leftarrow k + 1$
10: **retorna** s'

A cada iteração o RVND retorna uma solução $s' = m_y^k(s)$ com $\widehat{m_y^k}(s) < \widehat{m_i^k}(s) \mid \forall m_i^k \in M^k$, que corresponde à melhor solução para a vizinhança atual.

Considerando $\mathcal{M} = M^{RVND} = M^1 \cup M^2 \cup \cdots \cup M^k$ o conjunto com os movimentos de todas as vizinhanças usadas pelo RVND, então em termos de movimento temos que a solução s'' retornada ao final do RVND pode ser escrita como $s'' = m_z(s)$ com $m_z \in \mathcal{M}$ e $\widehat{m_z}(s) \leq \widehat{m_i}(s) \mid \forall m_i \in \mathcal{M}$.

Perceba que o algoritmo RVND é, por construção, não determinístico visto que a primeira etapa de sua execução é arranjar as vizinhanças numa ordem aleatória, de forma que o caminho percorrido pelo método seja diferente para cada execução do mesmo.

1.9 **DVND**

O *Distributed Variable Neighborhood Descent* DVND, concebido por (RIOS et al., 2018), utiliza múltiplas vizinhanças conforme faz o VND proposto por (MLADENOVIć; HANSEN, 1997)), contudo propõe o processamento das vizinhanças de forma distribuída. Este processamento distribuído se dá pelo escalonamento das tarefas de enumeração das vizinhanças, o que naturalmente proporciona a aleatoriedade proposta no RVND, conferindo ao DVND um fator não determinístico na sua execução.

A ideia do DVND é que quando uma solução atinge um ótimo local, para uma estrutura de vizinhança, ainda pode existir um vizinho com melhor valor de função objetivo em uma estrutura de vizinhança diferente, destarte não, necessariamente, sendo um ótimo local para todas as vizinhanças. Se uma melhoria é encontrada o processo de busca é reiniciado para todas as vizinhanças.

Algoritmo 8 DVND clássico

```
1:  função DVND(Solução: s, Vizinhanças: N)
2:      W ← ∅
3:      H ← ∅
4:      para todo N_k ∈ N faça
5:          s_k ← s                                  ▷ Solução atual para vizinhança k
6:          H_{k,s} ← true                           ▷ Solução já foi enumerada pela vizinhança
7:          W_k ← false                              ▷ Vizinhança aguardando solução
8:          Chame de forma assíncrona N^k(s_k)
9:      enquanto ∃w ∈ W | w = false faça
10:         k ← join N^k(s_k)                        ▷ Aguarda a resposta da vizinhança N^k
11:         s_k ← Melhor solução de N^k(s_k)
12:         se f(s_k) < f(s) então
13:             s ← s_k
14:         W_k ← true
15:         para todo N_k ∈ N faça
16:             se W_k ∧ ¬H_{k,s} então
17:                 s_k ← s
18:                 H_{k,s} ← true
19:                 W_k ← false
20:                 Chame de forma assíncrona N^k(s_k)
21:     retorna s
```

Considerando $\mathcal{M} = M^{DVND} = M^1 \cup M^2 \cup \cdots \cup M^k$ o conjunto com os movimentos de todas as vizinhanças usadas pelo DVND, então em termos de movimento temos que a solução s'' retornada a cada iteração do DVND pode ser escrita como $s'' = m_z(s)$ com

$m_z \in \mathcal{M}$ e $\widehat{m_z}(s) \leq \widehat{m_i}(s) \mid \forall m_i \in \mathcal{M}$. Vale ressaltar que $\mathcal{M} = M^{DVND} = M^{RVND}$, a diferença dos métodos é que a cada iteração o RVND move para a melhor solução da vizinhança atual e no caso do DVND este move para a melhor solução entre todas as vizinhanças.

Numa análise em mais alto nível do RVND (Algoritmo 7) e DVND (Algoritmo 8), pensando-se à luz das estratégias de *First improvement* e *Best improvement*, o RVND enumera as soluções vizinhas da solução atual vizinhança por vizinhança até encontrar uma solução que a melhore, e então retorna para a primeira vizinhança ao passo que o DVND enumera todas as vizinhanças para então optar pela solução de melhor valor. Desta forma o RVND é uma estratégia de *first improvement* no contexto de vizinhanças de solução e o DVND uma estratégia de *best improvement*.

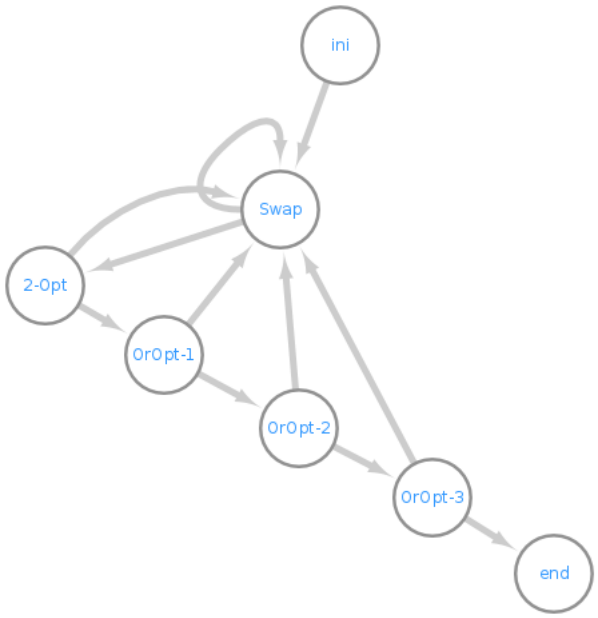
2 METODOLOGIA PROPOSTA

Existem diversas oportunidades para desenvolvimento de novos algoritmos de otimização e busca local utilizando recursos de programação paralela. Neste trabalho é proposta uma implementação em dataflow do DVND e apresentado o GDVND conforme se verá a seguir.

2.1 RVND em dataflow

O RVND, conforme descrito na Seção 1.8, pode ser implementado num grafo dataflow conforme a Figura 17, onde o nó inicial (*ini*) envia a solução inicial para o primeiro operador de vizinhança (*Swap*), cada nó operador de vizinhança explora todos os movimentos e escolhe o melhor, se este melhora a solução atual então a solução melhorada é enviada para o primeiro nó operador inicial (*Swap*), caso contrário a solução é enviada para o próximo nó de enumeração de vizinhança.

Figura 17 – Arquitetura simplificada do dataflow para o RVND com as vizinhanças utilizadas.



O grafo dataflow para o RVND é montado de forma que, a ordem dos nós de exploração de vizinhança é determinada aleatoriamente, a estrutura permanece, contudo a ordem em que as vizinhanças são visitadas é alterada a cada execução. A implementação do nó operador (*Swap, 2-Opt, OrOpt-1, OrOpt-2, OrOpt-3*) é tão simples quanto o Algoritmo 9 e a cada estratégia de vizinhança é atrelada a um nó operador, a decisão de para qual nó

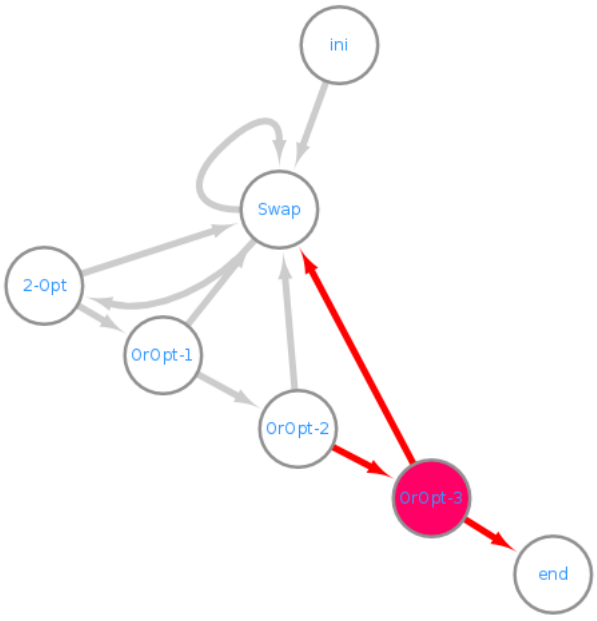
enviar o resultado é tomada pela configuração do dataflow. Quando a solução atinge o nó final (*end*) esta é salva e o processo termina.

Algoritmo 9 Nó de vizinhança do RVND

1: **função** RVND_OPER(Solução: s)
2: $s' \leftarrow$ melhor solução de $N^k(s)$
3: $improvFlag \leftarrow f(s') < f(s)$
4: **retorna** $(s', improvFlag)$

Pode ser visto destacado na Figura 18 uma vizinhança com suas ligações ao grafo dataflow, uma de entrada de dados e duas outras de saída que são para o caso de haver ou não uma melhoria no valor da solução. Para acoplar uma nova vizinhança ao algoritmo basta que seja inserido um novo nó de enumeração com sua entrada de dados vindo do nó anterior e duas saídas de dados, uma retornando para a primeira vizinhança e outra para a vizinhança seguinte, conforme destacado na mesma figura.

Figura 18 – Uma vizinhança e suas ligações ao grafo dataflow no RVND.



Cabe salientar que, a Figura 17 evidencia o encadeamento linear das operações no grafo do RVND, isto atrelado ao critério de decisão utilizado para direcionar os dados proporciona um grau máximo de concorrência de valor 1, sugerindo assim a ausência de ganho de performance pelo uso do modelo dataflow para tratar o algoritmo RVND em sua concepção original.

2.1.1 Passo iterativo

Utilizando o termo convencionado na seção 1.4.3.6, cada passo iterativo do RVND retorna a melhor solução encontrada para a vizinhança atual. Assim sendo N^k a vizinhança atual temos o passo iterativo para o RVND expresso na Equação 2.1.

$$\delta^{RVND}(s) = s' \in N^k \quad \text{sendo} \quad f(s') \leq f(s''), \forall s'' \in N^k(s) \wedge s'' \neq s \tag{2.1}$$

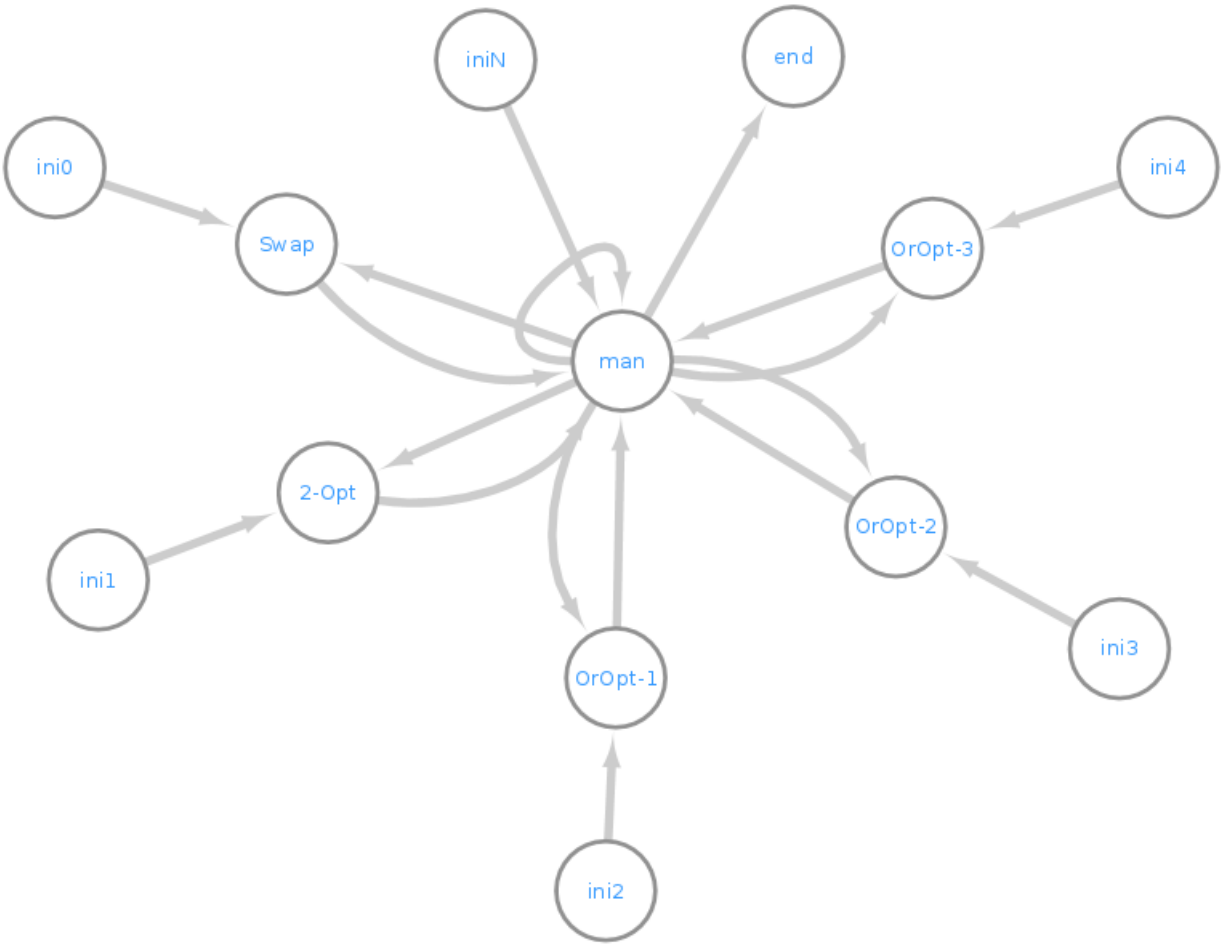
Fazendo uso da notação de movimentos temos podemos escrever 2.1 como a Equação 2.2.

$$\delta^{RVND}(s) = m(s) \quad \text{com} \quad m \in M^k \wedge \widehat{m} \leq \widehat{m_i} \mid \forall m_i \in M^k \tag{2.2}$$

2.2 **DVND em dataflow**

A implementação em dataflow do RVND não pode alcançar uma grande melhoria em termos de tempo ou qualidade da solução pois o grafo se assemelha a uma cascata (veja a Figura 17), o que não permite alcançar paralelismo, então se torna natural o uso do método DVND. Um modelo dataflow para o DVND pode ser visto na Figura 19, o método usa $P+1$ nós iniciais (*ini0*, *ini1*, ... *iniP*) que alimentam os nós operadores (*Swap, 2-Opt, OrOpt-1, OrOpt-2, OrOpt-3*) e o nó gerente (*man*) com a solução inicial para a busca local.

Figura 19 – Arquitetura simplificada do dataflow para o DVND com as vizinhanças utilizadas.



Cada nó operador utiliza uma estratégia de vizinhança diferente, quando termina de enumerar as soluções este retorna a melhor para o nó gerente, que mantém a melhor solução encontrada até o momento. Então o nó gerente identifica a melhor solução conhecida

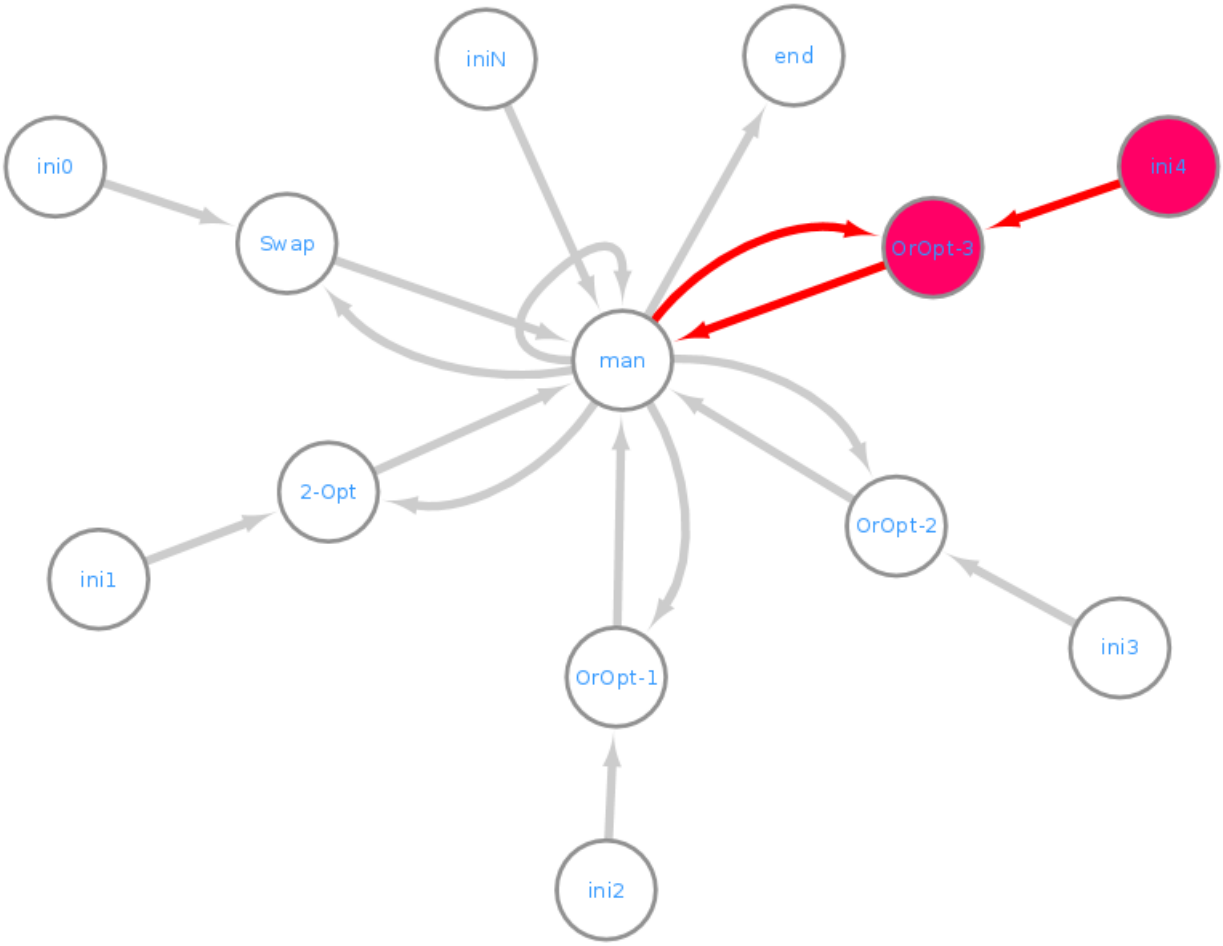
e a envia de volta para o dataflow (como no Algoritmo 10) que encaminha a solução para todos os nós operadores parados, o processo se repete até que nenhum nó operador encontre uma solução melhor. Então, a melhor solução encontrada é enviada para o nó final (*end*) que salva o resultado da busca local.

Algoritmo 10 Nó *man* do DVND

1: **função** DVND_MAN(Solução: s, Histórico: H)
2: $H \leftarrow H \cup \{s\}$
3: **retorna** $bestSolution(H)$

O critério de parada é alcançado quando nenhum nó operador consegue melhorar a solução atual, significando que esta corresponde a ótimo local para todas as vizinhanças usadas no processo. Este é, de certa forma, o mesmo critério utilizado por ambos RVND e DVND, contudo o caminho percorrido pelos diferentes processos pode levar a ótimos locais diferentes. Tanto para o RVND quanto DVND as estratégias de vizinhança são atribuídas aos nós que não definem seu comportamento interno, facilitando assim sua alteração ou mesmo a adição de uma nova vizinhança.

Figura 20 – Uma vizinhança e suas ligações ao grafo dataflow no DVND.



Como dito anteriormente, qualquer vizinhança pode ser facilmente acoplada ao procedimento apenas adicionando um novo nó ao grafo dataflow, conforme destacado na

Figura 20, o que é uma grande característica do método, e como os nós são independentes é possível fazê-lo sem impactar nos demais. Inicialmente pode parecer que muitos nós operadores podem sobrecarregar o nó gerente, mas é importante notar que o tempo computacional gasto pelos nós operadores é, geralmente, muito maior (exploração das vizinhanças é o processo mais caro de uma meta-heurística), desta forma não será um grande problema mesmo quando os nós operadores responderem em tempos curtos.

Na implementação preliminar, os nós do modelo dataflow usado possuíam apenas uma porta de saída, então a mensagem seria enviada para todos os nós a ele vinculados, numa melhoria foi implementado, e sugerido um aperfeiçoamento à biblioteca Sucuri, para comportar múltiplas portas de saída, de forma que, possam ser escolhidas as portas de saída e consequentemente o destino de uma mensagem. No modelo proposto (veja Figura 19), o nó gerente é ligado a todos os nós operadores, o que causaria uma inundação (*flooding*) na rede, desta forma possuir mais de uma porta de saída permite evitar que um nó processe indevidamente uma solução ou que receba uma mensagem com uma indicação de que não deve ser processada, o que causaria uma troca de mensagens desnecessária, problema esse que se intensifica ao executar o processamento em rede. Um problema que permanece é o escalonador centralizado, o que significa que num processamento em rede cada mensagem precisa ser enviada de volta para o computador rodando o nó gerente para só então ser enviada para o seu nó de destino, incluindo nisso as mensagens de *feedback* explicadas no Sub-seção 2.2.2. Contudo a disponibilização de um escalonador distribuído demandaria um novo projeto para a o dataflow do DVND (Figura 19) de forma a fazer melhor uso deste recurso. Apesar das limitações atuais deste projeto em desenvolvimento, o Sucuri já provê um ambiente que pode ser facilmente escalado de uma máquina para um experimento em rede completamente distribuído.

Conceitualmente a implementação em dataflow do DVND (Figura 19) não apresenta diferença ao ser comparada com a implementação clássica (Algoritmo 8), contudo, é muito mais simples e natural modelar através de um dataflow. O projeto é menos complexo e adicionar escalabilidade não demanda alterações na implementação.

2.2.1 Passo iterativo

Utilizando o termo convencionado na seção 1.4.3.6, cada passo iterativo do DVND retorna a melhor solução encontrada para todas as vizinhanças. Dessa forma, sendo N a união de todas as vizinhanças, o passo iterativo do DVND pode ser dado pela Equação 2.3.

$$\delta^{DVND}(s) = s' \in N \quad \text{com} \quad f(s') \leq f(s''), \forall s'' \in N(s) \wedge s'' \neq s \tag{2.3}$$

Fazendo uso da notação de movimentos podemos escrever 2.3 como a Equação 2.4.

$$\delta^{DVND}(s) = m(s) \quad \text{com} \quad m \in \mathcal{M} \wedge \widehat{m} \leq \widehat{m_i} \mid \forall m_i \in \mathcal{M} \tag{2.4}$$

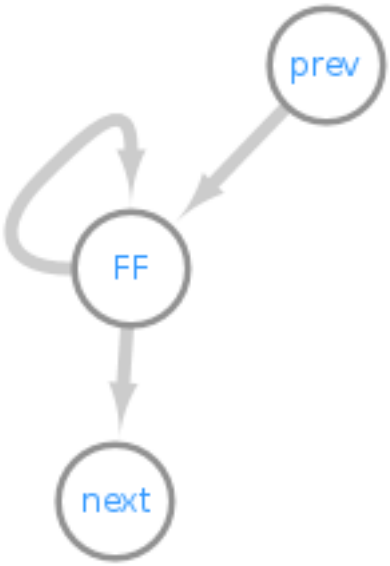
Pelo passo iterativo do RVND ρ^{RVND} (2.2) e do DVND ρ^{DVND} (2.4) podemos concluir que $\rho^{DVND}(s) \leq \rho^{RVND}(s)$, contudo isso não é suficiente para afirmar que o DVND encontre necessariamente melhores resultados.

2.2.2 Nó de flip flop

Em geral, em um modelo dataflow, é esperado um comportamento sem estado, contudo no modelo do DVND em dataflow proposto (veja Figura 19), o nó gerente precisa manter

o histórico da melhor solução já encontrada até o momento, e decidir se o método alcançou ou não um ótimo local. Esta necessidade demandaria uma memória global, externa ao contexto de execução dos nós. Para alcançar este comportamento, é utilizado um nó de *flip flop* (nó *FF* na Figura 21) presente na biblioteca Sucuri (ALVES et al., 2014), este nó possui duas portas de entrada, uma que de fato recebe a informação do nó anterior e outra que o retro-alimenta com sua própria saída, para manter o histórico do resultado. A intenção desse padrão é conceder ao nó a capacidade de realizar uma decisão baseada na última iteração, sem necessariamente tornar o nó *statefull* ou utilizar uma memória global.

Figura 21 – FF identifica o nó de flip flop.



É importante ressaltar que o nó *Swap* (operador inicial) no RVND (Figura 17) também possui uma retroalimentação contudo não é um nó de *flip flop* pois não retroalimenta sua própria saída no intuito de manter um histórico, este nó não precisa da informação de sua última execução para realizar o seu processamento, desta forma possui apenas uma porta de entrada.

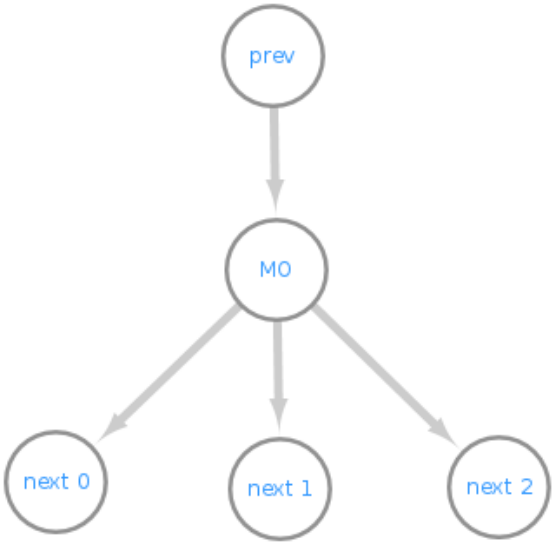
2.2.3 Múltiplas portas de saída

Em um modelo dataflow, um nó será processado quando todas as suas dependências forem satisfeitas, contudo, ao final de seu processamento o resultado pode ser enviado como entrada para um ou mais nós. Pode ser visto na Figura 22 que o nó *MO* está conectado a um nó com informação de entrada (nó *prev*) e ligado a três nós de saída (*next 0*, *next 1* e *next 2*).

No modelo atual de implementação da biblioteca *Sucuri* é possível que um nó receba informações de vários outros nós, contudo existe apenas uma porta de saída a qual podem estar conectados vários nós.

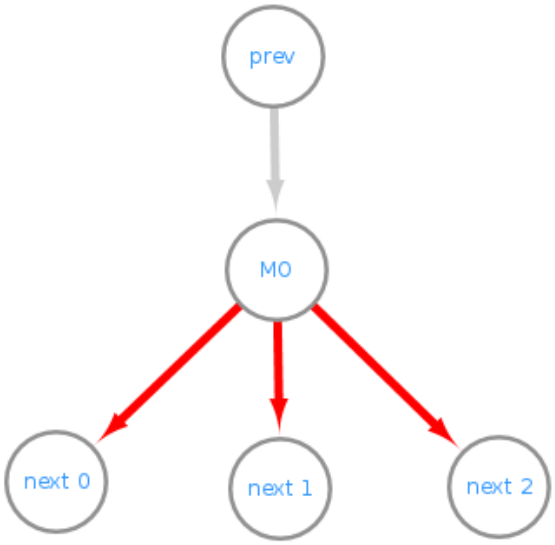
Pegando-se o exemplo da Figura 23, quando o nó *MO* termina de processar, o seu resultado é enviado para a única porta de saída existente, a qual estão ligados os nós *next 0*, *next 1* e *next 2*, dessa forma todos os nós seguintes vão receber a informação e estarão aptos para processamento mesmo que a informação não seja destinada a eles. Cada um

Figura 22 – Pedaço de um grafo dataflow em que o nó *MO* do dataflow possui múltiplas saídas.



desses nós terá então que verificar se a mensagem é destinada a ele antes de processar ou não a informação.

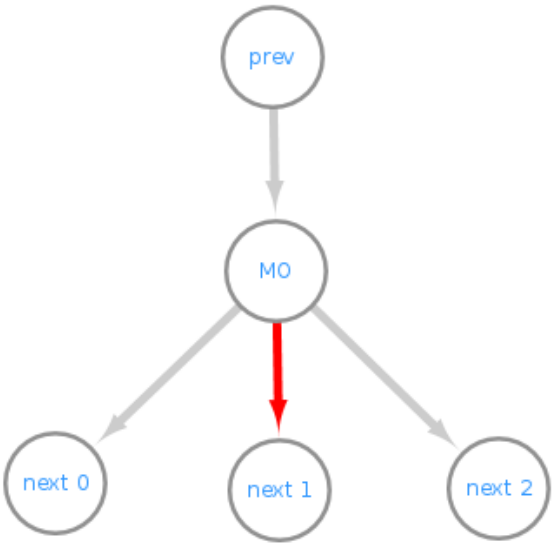
Figura 23 – Quando o nó *MO* termina de processar seu resultado é enviado para todos os nós subsequentes (*next 0*, *next 1* e *next 2*).



Como parte desse trabalho, foi implementada a alteração exemplificada na Figura 24, nesse caso existe uma porta de saída para cada nó ligado ao nó *MO*, este identifica os destinatários da mensagem e aciona apenas aqueles necessários.

Anteriormente no DVND cada mensagem possuía uma *flag* indicando o seu destinatário, desta forma, ao receber uma mensagem o nó sabia se este era o destino para a mesma, parecido com o protocolo de comunicação por barramento compartilhado. Contudo, esta implementação gera inúmeras mensagens que chegarão ao destino apenas para que o nó identifique que não a deve processar. Isso aumenta o trabalho realizado pela

Figura 24 – Quando o nó *MO* termina de processar é possível escolher qual porta de saída será utilizada e assim decidir o destino da informação.



matching unit e alarga a *ready queue*, além de causar a transmissão de muitas mensagens desnecessárias. No DVND, ao escolher o destinatário da mensagem, conforme falado, é possível evitar uma grande quantidade de transmissões desnecessárias, evitando assim que os nós de vizinhança sejam acionados apenas para identificar que não precisam processar a mensagem. Vejamos, por exemplo, o nó *man* da Figura 19 sem o artifício de múltiplas portas de saída todas as mensagens serão enviadas para todas as 5 vizinhanças e para o nó finalizador (*end*), sendo que a mensagem só é enviada para os nós ociosos naquele momento.

A implementação de múltiplas portas de saída trás vantagens ainda mais significativas quando o tamanho da mensagem a ser transmitido é grande e quando a execução do processamento está sendo feita em um ambiente de mais de uma máquina, envolvendo assim a troca de mensagens pela rede.

2.3 GDVND proposto

Trazendo o conceito de *movimentos independentes* (discutido na Seção 1.4.2.4) para o DVND, surge a ideia do *Generalized Distributed Variable Neighborhood Descent* (*GDVND*). A ideia do GDVND é um DVND que trabalha no escopo de movimentos de melhora e não em melhores soluções. No DVND, a cada iteração o método recebe uma nova solução de uma das vizinhanças e verifica qual a melhor, para então enviar esta para ser processada pelas vizinhanças ociosas que ainda não a processaram, sempre mantendo a melhor solução já encontrada. A diferença para o GDVND é que este recebe não somente uma solução, mas também o conjunto de movimentos de melhora encontrado pela vizinhança, então o método tenta combinar os movimentos da melhor solução atual com aqueles da solução recebida. Para tanto, é necessário que seja a mesma solução base, então é preciso identificar o conjunto de movimentos independentes que proporcione o maior ganho em termos de valor da solução. Além de melhorar a solução, a utilização da composição de movimentos proporciona uma melhor utilização dos recursos usados no processamento, ao aproveitar computações realizadas em nós diferentes, o que seria perdido no DVND,

ao escolher a melhor solução e descartar as demais.

Numa modelagem em dataflow, o grafo do GDVND surge naturalmente a partir do grafo do DVND, bastando apenas alterar o conteúdo das mensagens trocadas e a implementação do nó gerenciador (*man*). A implementação do nó gerenciador (*man*) agora não mais apenas decide qual a melhor solução conhecida, conforme o Algoritmo 11, cabe também combinar os movimentos de vizinhanças diferentes. Na linha 2 é chamado o processo combinar movimentos, que pode ser visto em mais detalhes no Algoritmo 12. Os movimentos são combinados formando uma solução resultante, tomando proveito do Teorema da independência de movimentos dois a dois (Teorema 3) o valor da solução resultante pode ser calculado para dois movimentos, sem a necessidade de recalcular toda a solução, o que é particularmente útil para grandes instâncias e problemas cujo cálculo da função objetivo é muito caro computacionalmente. Pode-se utilizar o mesmo teorema para estimar o valor das soluções na composição de mais de dois movimentos.

Algoritmo 11 Nó *man* do GDVND

1: **função** GDVND_MAN(Solução: s, Histórico: H, Vizinhança: k)
2: $s_{merged} \leftarrow GDVND\_merge(s, bestSolution(H))$ ▷ Combina atual com a melhor
3: $H(k) \leftarrow min(s, s_{merged}, bestSolution(H))$ ▷ Atualiza o histórico da vizinhança k
4: **retorna** SoluçãoBase($H(k)$), Movimentos($H(k)$)

Seja um grafo $G = (V, E)$ cujos vértices V são movimentos e as arestas E indicam se um movimento é independente de outro. Dessa forma, encontrar o melhor sub-conjunto de movimentos independentes entre si dois a dois corresponderia a encontrar o sub-grafo completo correspondente ao clique maximal em que o somatório do valor dos vértices seja máximo.

Neste trabalho é usada uma heurística para encontrar o melhor sub-conjunto de movimentos independentes, o Algoritmo 12 ilustra a heurística utilizada para fazer o *merge* dos movimentos da solução. O método apenas pode ser executado quando as soluções base são iguais para as duas soluções de entrada. Os movimentos são reunidos num conjunto M' e então ordenados conforme a melhoria que podem aplicar à solução. Em seguida cada movimento é testado, em busca de conflitos contra as demais movimentos, caso haja conflito este movimento é descartado. Os movimentos foram dispostos de forma que os movimentos com pior resultado sobre a solução sejam testados primeiro, assim aqueles com melhores valores são deixados por último para que possam ser preservados caso possuam conflitos com algum outro.

O retorno da iteração de cada vizinhança do GDVND passa a corresponder não a uma solução s' mas a uma tupla com a solução e os movimentos aplicados, assim temos a resposta como $(s', \{m_1^x, m_2^x, \ldots, m_k^x\})$.

É importante ressaltar a diferença do *Multi Improvement* para o GDVND, o primeiro é uma estratégia de exploração de vizinhanças em que a busca local avança de uma solução para outra fazendo uso de uma composição de movimentos independentes $\{m_1^x, m_2^x, \ldots, m_k^x\} \subset M^x$ pertencentes a uma vizinhança, no caso do GDVND os movimentos independentes são oriundos de todas as vizinhanças utilizadas pelo algoritmo. Ainda na analogia com o *Multi Improvement*, o GDVND poderia ser visto como um *multi improvement* em que a sua vizinhança é a união de todas as vizinhanças utilizadas no GDVND.

Algoritmo 12 Combinando movimentos de soluções diferentes

1: **função** GDVND_MERGE(Solução: s_1, Solução: s_2)
2: **se** SoluçãoBase(s_1) = SoluçãoBase(s_2) **então** ▷ Somente soluções com a mesma solução base podem ser combinadas
3: $M' \leftarrow$ sorted(Movimentos(s_1) $\cup$ Movimentos(s_2)) ▷ Movimentos ordenados pelo valor da melhoria na solução
4: **para** $i \leftarrow 0$ to $len(M')$ **faça**
5: **para** $j \leftarrow (i+1)$ to $len(M')$ **faça**
6: **se** $m_i \nparallel m_j$ **então**
7: $M' \leftarrow M' - m_i$
8: break
9: **retorna** SoluçãoBase(s_1), M'
10: **retorna** $min(s_1, s_2)$

2.3.1 Detecção movimentos independentes

Para detectar quais movimentos são independentes, uma estrutura de dados C para gerenciamento de conflitos foi proposta. No caso do problema em questão, a estrutura se trata de vetor com N bits, onde cada bit i indica se houve alguma alteração relativa ao cliente i.

Exemplo C : |0|0|0|1|1|1|1|0|0|0|0|0|0|

Assim, a estrutura C começa com todos bits zero, considerando uma solução de referência s. Cada movimento altera a estrutura C além de alterar a solução corrente, indicando quais posições estão comprometidas. Da mesma maneira, uma função d de detecção de conflitos indica se um movimento é "aplicável" dada certa configuração da estrutura de conflitos.

Dessa forma, ao aplicar um movimento, se for necessário alterar um bit para 1 que já tenha valor 1 então o movimento atual é conflitante com o anterior ou algum dos anteriores.

Como podemos ver a seguir, a detecção de conflitos para uma solução de tamanho $n = 13$, os movimentos $swap(1,3) \parallel swap(5,9)$, $swap(5,9) \parallel swap(3,7)$ mas $swap(1,3) \nparallel swap(3,7)$.
C : |0|**0**|0|**0**|0|0|0|0|0|0|0|0|0| - $swap(1,3)$
C : |0|1|0|1|0|**0**|0|0|0|**0**|0|0|0| - $swap(5,9)$
C : |0|1|0|**1**|0|1|0|**0**|0|1|0|0|0| - $swap(3,7)$
C : |0|1|0|0|0|1|0|1|0|1|0|0|0| - Conflito
A estrutura começa com todos os bits com valor zero, os bits em negrito indicam aqueles que serão alterados pelo movimento atual, na última linha o bit em vermelho indica a existência de um conflito ($swap(1,3) \nparallel swap(3,7)$).

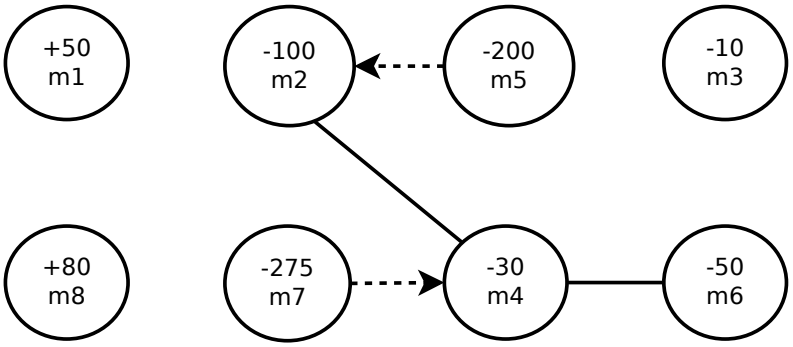
2.3.2 Exemplo de execução

No GDVND, várias buscas começam de uma mesma solução de referência e o melhor movimento (ou primeiro de melhora) é retornado como candidato à inclusão em um pool de movimentos, chamado Histórico. Este pool pode ser visto como um grafo não direcionado, no qual os vértices são movimentos e arestas indicam conflitos entre movimentos. Porém, setas especiais são utilizadas para marcar dependência entre movimentos. Se m_B depende de m_A, então m_B só pode ser aplicado se m_A for aplicado antes na solução. Es-

colhendo o maior (ou menor) conjunto independente neste grafo, respeitando os conflitos e dependências, resultará na melhor combinação de movimentos em um dado momento, considerando múltiplas estruturas de vizinhança simultaneamente.

A Figura 25 apresenta um exemplo do grafo de Histórico para uma execução do GDVND com três processos de busca. Os movimentos m_1 e m_8 são independentes contudo aumentam o valor da solução atual, logo não serão selecionados para um problema de minimização. O movimento m_4 possui conflito com os movimentos m_6 e m_2, além de possuir uma dependência do movimento m_7, o movimento m_2 por sua vez possui uma dependência do movimento m_5.

Figura 25 – Exemplo de um grafo de Histórico. A combinação ótima de custos consiste nos movimentos m_2, m_3, m_5 e m_6.



Para entender melhor a ideia do algoritmo, a Tabela 4 simula a execução do algoritmo para três processos.

Tabela 4 – Execução do GDVND

#	f	Solução	Direção	Processo	Conflito
1	1000	s_1	$\rightarrow$	P1	
2	1000	s_1	$\rightarrow$	P2	
3	1000	s_1	$\rightarrow$	P3	
4	970	$m_4(s_1)$	$\leftarrow$	P3	
5	970	$m_4(s_1)$	$\rightarrow$	P3	
6	900	$m_2(s_1)$	$\leftarrow$	P1	
7*	900	$m_2(s_1)$	$\rightarrow$	P1	$m_2 \nparallel m_4$
8	1050	$m_1(s_1)$	$\leftarrow$	P2	
9*	900	$m_2(s_1)$	$\rightarrow$	P2	
10	890	$m_3 \circ m_2(s_1)$	$\leftarrow$	P1	
11	890	$m_3 \circ m_2(s_1)$	$\rightarrow$	P1	$m_2 \parallel m_3$
12	700	$m_5 \circ m_2(s_1)$	$\leftarrow$	P2	
13	690	$m_5 \circ m_3 \circ m_2(s_1)$	$\rightarrow$	P2	$m_3 \parallel m_5$ e $m_2 \parallel m_5$
14	695	$m_7 \circ m_4(s_1)$	$\leftarrow$	P3	
15	685	$m_7 \circ m_4 \circ m_3(s_1)$	$\rightarrow$	P3	$m_2 \nparallel m_7$ e $m_5 \nparallel m_4$
16	840	$m_6 \circ m_3 \circ m_2(s_1)$	$\leftarrow$	P1	
17	640	$m_6 \circ m_3 \circ m_5 \circ m_2(s_1)$	$\rightarrow$	P1	$m_6 \parallel m_2, m_3, m_5$
18	765	$m_8 \circ m_7 \circ m_4 \circ m_3(s_1)$	$\leftarrow$	P3	
19	640	$m_6 \circ m_3 \circ m_5 \circ m_2(s_1)$	$\rightarrow$	P3	$m_8 \nparallel m_6$

O Histórico começa distribuindo a solução s_1 para cada busca, e eventualmente coleta um novo movimento e distribui uma nova solução. Todos os cálculos são feitos sobre uma mesma solução de referência s_1, que só é modificada no passo 20 do algoritmo. Nas iterações 7 e 9, note que existem conflitos a serem resolvidos (vide grafo na Figura 25). Após a iteração 19, o Histórico percebe que os três processos tem movimentos em comum: m_3, m_5 e m_2. Então uma nova solução s_2 é armazenada no Histórico como solução de referência, sendo ela $s_2 = m_3 \circ m_5 \circ m_2(s_1)$ (de custo 690). Assim, os processos P1 e P3 continuam naturalmente processando a solução $m_6(s_2)$ (antiga $m_6 \circ m_3 \circ m_5 \circ m_2(s_1)$), e P2 continua com s_2 (antiga $m_5 \circ m_3 \circ m_2(s_1)$). Note também que, ao adotar estes três movimentos, todos movimentos com conflitos (ou dependência de algum movimento em conflito) tem de ser eliminados. Então, m_4 e m_7 são descartados. Vale observar que m_1 e m_8 nunca foram armazenados, pois eram de piora. O grafo final então consiste somente dos movimentos m_6, m_3, m_5 e m_2.

Tabela 5 – Consolidação de uma nova solução no GDVND

#	f	Solução	Local
20	690	$s_2 = m_3 \circ m_5 \circ m_2(s_1)$	Histórico
	640	$m_6(s_2)$	P1
	690	s_2	P2
	640	$m_6(s_2)$	P3

2.3.3 Controle de execução entre CPU e GPU

Para entender como o método tira proveito da arquitetura híbrida CPU-GPU segue o presente exemplo: A CPU é utilizada para decidir qual solução cada processo de busca local irá utilizar, minimizando as transferências de memória CPU-GPU.

EXEMPLO:
Processo A → CPU
Processo B → Kernel GPU Swap
Processo C → Kernel GPU 2-Opt
Processo D → Kernel GPU Or-1
Processo E → Kernel GPU Or-2
Processo F → Kernel GPU Or-3

Solução s_1 = [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10], ($f(s_1) = 1000$), esta entra na GPU para todas as buscas B-F, cada uma em um fluxo (*thread*) distinto. Supomos que o processo B (Swap) termina antes com ganho -100 (melhora, $\widehat{m_1} = -100$) na troca m_1 = swap(2,5). A CPU então cria $s_2 = m_1(s_1)$, como s_2 é a melhor solução atual, ela é copiada para a GPU, e o processo B roda em cima de s_2 = [1,5,3,4,2,6,7,8,9,10], com $f(s_2) = 900$.

Neste momento, o processo D termina com m_2 = or-1(7,9), movendo cliente 7 para depois do 9, com ganho -50, $\widehat{m_2} = -50$. A CPU então analisa m_1 e m_2, como não há conflitos uma solução $s_3 = m_2 \circ m_1(s_1)$ é criada para o processo D executar, temos s_3 = [1,5,3,4,2,6,8,9,7,10], com $f(s_3) = 850$

O processo C termina com o movimento m_3 = 2-opt(1,3) (inverte de 1 a 3) com ganho -120 ($\widehat{m_3} = -120$). A CPU percebe que $m_3 \nparallel m_1$, mas $m_3 \parallel m_2$. Então a solução $s_4 = m_4 \circ m_2(s_1)$ é gerada e passada à GPU para o processo C, com $f(s_4) = 830$

O processo E termina sem ganho com o movimento m_4 = or-2(1,4) (move clientes 1,2 para depois do 4). A CPU percebe que $m_4 \nparallel m_1$ e $m_4 \nparallel m_3$ mas $m_4 \parallel m_2$, contudo a

melhor configuração atual é s_4 ($f(s_4) = 830$), então a busca parte dela (que já está na memória da GPU).

Finalmente, o processo B (Swap) termina novamente com melhora -60 e troca $m_5 =$ swap(3,8). Esta troca roda em cima de s_2, então não existem outros movimentos para haver conflito. A solução $s_5 = m_5(s_2)$ com $f(s_5) = 840$ é criada, porém, a solução s_4 ($f(s_4) = 830$) é melhor, então a CPU relança o processo B com a solução s_4.

2.3.4 Passo iterativo

Utilizando o termo convencionado na seção 1.4.3.6, cada passo iterativo do GDVND retorna a melhor solução encontrada para todas as vizinhanças combinado com a melhor solução já encontrada. Dessa forma, sendo N a união de todas as vizinhanças, contudo a resposta do GDVND pode conter mais de um movimento combinados simultaneamente, assim convencionaremos chamar de $\mathcal{N} = \{m_1 \circ m_2 \circ \cdots \circ m_z(s) \mid \forall m_i \in \mathcal{M} \wedge \forall i, j \quad m_i \parallel m_j\}$, podemos ver, pela definição de $\mathcal{N}$, que $N \subseteq \mathcal{N}$ pois qualquer elemento de N pode ser escrito da forma $m_1(s)$ que também pertence a $\mathcal{N}$. Assim o passo iterativo do GDVND pode ser dado pela Equação 2.5.

$$\delta^{GDVND}(s) = s' \in \mathcal{N} \text{ sendo } f(s') \leq f(s''), \forall s'' \in \mathcal{N}(s) \text{ com } s'' \neq s \tag{2.5}$$

Fazendo uso da notação de movimentos podemos escrever 2.3 como a Equação 2.4.

$$\delta^{GDVND}(s) = m_1 \circ m_2 \circ \cdots \circ m_z(s) \text{ sendo } m \in \mathcal{M} \wedge \forall i,j \quad m_i \parallel m_j \text{ com } i \neq j \tag{2.6}$$

Pelo passo iterativo do RVND ρ^{RVND} (2.2), do DVND ρ^{DVND} (2.4) e do GDVND ρ^{GDVND} (2.6) podemos concluir que $\rho^{GDVND}(s) \leq \rho^{DVND}(s) \leq \rho^{RVND}(s)$ este produza soluções distintas, contudo, novamente, isso não é suficiente para afirmar que o GDVND encontre, necessariamente, melhores resultados, pois pode acabar convergindo muito cedo para um mínimo local.

À primeira vista pode parecer que, pela vizinhança do passo iterativo do GDVND conter as vizinhanças do RVND e DVND, o GDVND consiga melhorar mais a solução atual, contudo podemos ver que toda solução encontrada pelo GDVND pode ser gerada por um conjunto de operações do DVND ou RVND.

Para que uma solução produzida pelo GDVND não possa ser produzida pelo RVND ou DVND deve haver um movimento nessa solução que não seja possível encontrar com RVND ou DVND, suponhamos então que o GDVND produziu uma solução $m_1 \circ m_2 \circ \cdots \circ m_z(s) \in \mathcal{N}$ com $m_i \in \{m_1, m_2, \ldots, m_z\}$ tal que $m_i \notin \mathcal{M}$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\rho^{GDVND}(s) &= m_1 \circ m_2 \circ \cdots \circ m_i \circ \cdots \circ m_z(s) && \text{Por comutatividade} \\
\rho^{GDVND}(s) &= m_i \circ m_1 \circ m_2 \circ \cdots \circ m_z(s) && \text{Fazendo } s' = m_1 \circ m_2 \circ \cdots \circ m_z(s) \\
\rho^{GDVND}(s) &= m_i(s') && \text{Logo uma contradição } \perp
\end{aligned}$$

□

Quando se escreve $\rho^{GDVND}(s) = m_i(s')$ chega-se a uma contradição pois, pela definição do passo iterativo do GDVND, temos que o movimento m_i deveria pertencer ao conjunto $\mathcal{M}$, contudo supôs-se por hipótese que $m_i \notin \mathcal{M}$, logo uma contradição.

2.4 **Vizinhanças**

RVND, DVND e GDVND usam um conjunto de vizinhanças para processar as soluções, foram escolhidas 5 estruturas diferentes, a saber, Swap, 2-Opt, OrOpt-1, OrOpt-2 e OrOpt-3, as mesmas utilizadas em (RIOS et al., 2016). No caso do DVND, a cada nova solução encontrada esta pode ser submetida para todas as vizinhanças simultaneamente (tentando explorar melhorias de vizinhanças diferentes simultaneamente). A intenção principal é prover uma implementação dataflow de um procedimento de busca local de muitas vizinhanças, o que é uma contribuição original para ambas comunidades, de otimização e computação paralela.

Para a busca local foi usado uma abordagem *Multi Improvement* (*MI*) (RIOS et al., 2016) em todas as vizinhanças, na qual é calculado o custo de todos os movimentos e os resultados armazenados num vetor. Usando a estratégia *Best Improvement* (*BI*) apenas a melhor solução é selecionada, na estratégia *Multi Improvement* vários *movimentos independentes* são simultaneamente aplicados para a solução dada, provendo assim uma convergência mais rápida para o ótimo local.

A enumeração de todas as estratégias de vizinhança roda numa implementação em GPU, assim temos um algoritmo dataflow onde a implementação de cada nó roda em GPU para ambos os casos, a configuração do lançamento do *kernel* para cada estratégia de vizinhança é descrita na Tabela 6, estas configurações foram obtidas fazendo-se uso das bibliotecas fornecidas pela NVIDIA para otimização do uso dos recursos conforme o *kernel* que se deseja executar, segundo descrito em (NVIDIA, 2014). Mais detalhes sobre a implementação GPU da enumeração das vizinhanças podem ser encontrados em (RIOS et al., 2016).

Tabela 6 – Configuração de lançamento para os kernels das vizinhanças. Onde *Grid* refere-se a quantidade de grides usada, *Block* o tamanho de cada bloco de threads e *Shared* indica a quantidade (em *bytes*) de memória compartilhada utilizada pelas threads em cada bloco.

Instância	**n**	**Vizinhança**	**Grid**	**Block**	**Shared**
#0 berlin52	52	Swap	26	53	1060
		2-Opt	27	53	1060
		OrOpt-1	50	53	1060
		OrOpt-2	49	53	1060
		OrOpt-3	48	53	1060
#1 kroD100	100	Swap	50	101	2020
		2-Opt	51	101	2020
		OrOpt-1	98	101	2020
		OrOpt-2	97	101	2020
		OrOpt-3	96	101	2020
#2 pr226	226	Swap	113	224	4540
		2-Opt	114	224	4540
		OrOpt-1	224	224	4540
		OrOpt-2	223	224	4540
		OrOpt-3	222	224	4540
#3 lin318	318	Swap	159	256	6380
		2-Opt	160	256	6380
		OrOpt-1	316	256	6380
		OrOpt-2	315	256	6380
		OrOpt-3	314	256	6380
#4 TRP-S500-R1	501	Swap	250	502	10040
		2-Opt	251	502	10040
		OrOpt-1	499	502	10040
		OrOpt-2	498	502	10040
		OrOpt-3	497	502	10040
#5 d657	657	Swap	328	512	13160
		2-Opt	329	512	13160
		OrOpt-1	655	512	13160
		OrOpt-2	654	512	13160
		OrOpt-3	653	512	13160
#6 rat784	783	Swap	391	672	15680
		2-Opt	392	672	15680
		OrOpt-1	781	672	15680
		OrOpt-2	780	672	15680
		OrOpt-3	779	672	15680
#7 TRP-S1000-R1	1001	Swap	500	1002	20040
		2-Opt	501	1002	20040
		OrOpt-1	999	1002	20040
		OrOpt-2	998	1002	20040
		OrOpt-3	997	1002	20040

2.4.1 Tabela de conflitos

Para classificação de movimentos independentes é necessário identificar quando um movimento aplicado a uma solução não conflita com outro movimento aplicado a mesma solução, conforme a definição estabelecida na Seção 1.4.2.4.

A identificação de conflitos pode ser feita em $\mathcal{O}(n)$ conforme descrito na Seção 2.3.1, contudo nos termos deste trabalho que trata do Problema da Mínima Latência (conforme descrito na Seção 1.3), para as vizinhanças *swap*, *2-opt* e *oropt-k* utilizadas, dois movimentos são independentes quando são satisfeitas as condições expressas na Tabela 7, desta forma é possível identificar a independência de movimentos em $\mathcal{O}(1)$, independente da solução base considerada.

Tabela 7 – Tabela de movimentos independentes (não conflitantes)

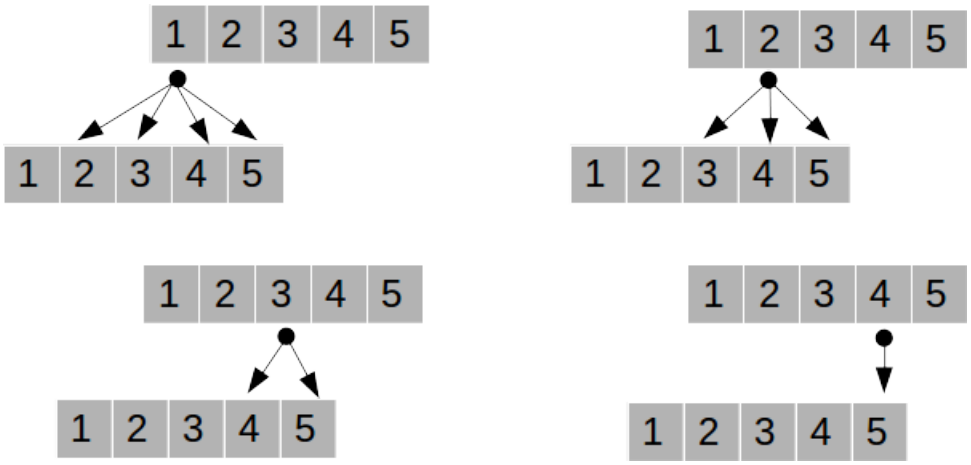
	$\mathbf{swap(i_2,j_2)}$	$\mathbf{2-opt(i_2,j_2)}$	$\mathbf{oropt-k_2(i_2,j_2)}$
swap $\mathbf{(i_1,j_1)}$	$(\lvert i_1 - i_2\rvert > 1) \wedge$ $(\lvert i_1 - j_2\rvert > 1) \wedge$ $(\lvert j_1 - i_2\rvert > 1) \wedge$ $(\lvert j_1 - j_2\rvert > 1)$	$[(i_1 < i_2 - 1) \vee$ $(i_1 > j_2 - 1)] \wedge$ $[(j_1 < i_2 - 1) \vee$ $(j_1 > j_2 + 1)]$	$(j_1 < \min(i_2,j_2) - 1) \ \vee$ $(i_1 > \max(i_2,j_2) + k_2) \vee$ $[(i_1 < \min(i_2,j_2) - 1) \ \wedge$ $(j_1 > \max(i_2,j_2) + k_2)]$
2 − opt $\mathbf{(i_1,j_1)}$	$[(i_2 < i_1 - 1) \vee$ $(i_2 > j_1 + 1)] \wedge$ $[(j_2 < i_1 - 1)] \vee$ $(j_2 > j_1 + 1)]$	$(j_1 < i_2 - 1) \vee$ $(i_1 > j_2 + 1) \vee$ $(j_2 > i_1 - 1) \vee$ $(i_2 > j_1 + 1)$	$(i_1 > \max(i_2,j_2) + k_2) \vee$ $(j_1 < \min(i_2,j_2) - 1)$
$\mathbf{oropt - k_1}$ $\mathbf{(i_1,j_1)}$	$(j_2 < \min(i_1,i_2) - 1) \ \vee$ $(i_2 > \max(i_1,i_2) + k_1) \vee$ $[(i_2 < \min(i_1,i_2) - 1) \ \wedge$ $(j_2 > \max(i_1,i_2) + k_1)]$	$(j_2 < \min(i_1,j_1) - 1) \vee$ $(i_2 > \max(i_1,j_1) + k_1)$	$[\max(i_1,j_1) + k_1 < \min(i_2,j_2)] \vee$ $[\min(i_1,j_1) > \max(i_2,j_2) + k_2]$

2.5 **Decomposição de vizinhanças** – ***disaggregated neighborhoods***

Pela Figura 19 podemos perceber que o paralelismo horizontal, isto é, aquele obtido pela utilização de mais máquinas, neste método está limitado à quantidade de vizinhanças utilizadas no método DVND. Esta limitação representa um problema pois para obter melhor utilização do paralelismo horizontal seria necessário também adicionar novas estruturas de vizinhanças, o que aumentaria o esforço computacional e não necessariamente traria ganho de performance ou na qualidade do valor da solução.

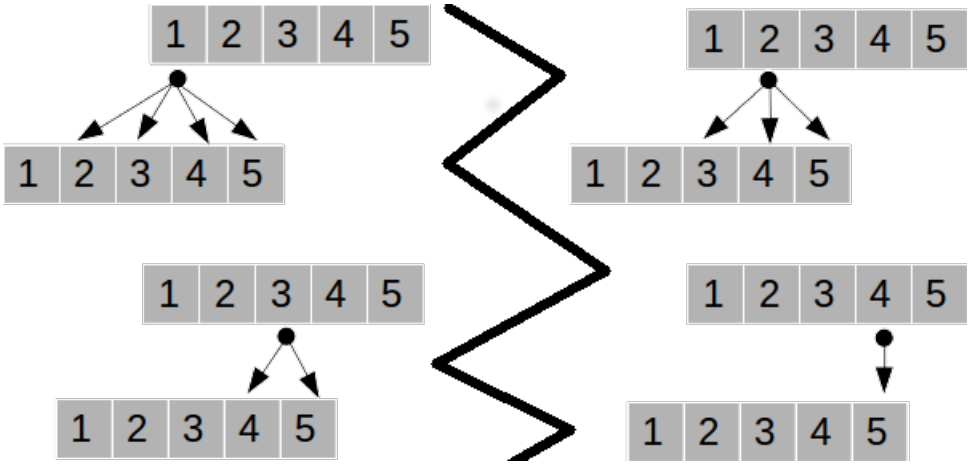
Contudo este problema pode ser solucionado pela decomposição das vizinhanças, isto é, no lugar de um nó representar toda uma estrutura de vizinhança, este passa a processar uma sub-parte desta.

Figura 26 – Vizinhança com suas trocas para $n = 5$.



Isto posto, podemos separar a vizinhança em sub-grupos, um exemplo poderia ser a Figura 27 que mostra a mesma vizinhança da Figura 26 dividida em dois sub-grupos. Desta forma cada sub-grupo representaria um nó do diagrama dataflow DVND, aumentando assim a escalabilidade horizontal do método.

Figura 27 – Vizinhança com suas trocas dividida para $n = 5$.



A vizinhança na Figura 27 exemplifica a sub-divisão em dois grupos de vizinhança, esta divisão limita-se apenas ao tamanho da solução proporcionando um grande potencial para o desenvolvimento do paralelismo horizontal de qualquer vizinhança sem aumentar demasiadamente o custo computacional do método.

3 EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

Este capítulo exibe os resultados computacionais dos algoritmos propostos no Capítulo 2 para o caso do PML, para cada instância foi gerado um conjunto com 100 soluções iniciais aleatórias que foram submetidas aos métodos para comparação dos resultados.

Quando há referência à melhoria na solução (Imp), esta melhoria pode ser calculada pelo quociente do valor da solução inicial pela solução final, ou seja:

$$Imp = \frac{f(\text{solução inicial})}{f(\text{solução final})} \tag{3.1}$$

Desta forma quanto maior for o valor da melhoria (Imp) mais o método melhorou o valor da solução inicial.

3.1 Instâncias

Todas as instâncias usadas nos testes computacionais, e cujas configurações de lançamento foram descritas na Tabela 6, são as mesmas usadas em (RIOS et al., 2016). Para o RVND foi feita uma implementação do algoritmo clássico (Algoritmo 7) e também a implementação dataflow mencionada na Figura 17 fazendo uso de uma máquina. Para o caso do DVND foi utilizada a implementação clássica (Algoritmo 8) e a implementação dataflow proposta (Figura 19), no caso do GDVND foi feita a implementação em dataflow proposta, os resultados foram obtidos com diferentes números de máquinas e os mesmos são indicados conforme o caso.

3.2 Implementação e ambiente computacional

A implementação para cada algoritmo proposto no Capítulo 2 utiliza a linguagem de programação *C++11* em conjunto com a API CUDA™, para a implementação dos grafos e do ambiente dataflow foi utilizada a biblioteca Sucuri (ALVES et al., 2014)[1] implementada em Python, para a integração entre o dataflow e o código CUDA foi utilizada a biblioteca SimplePyCuda (COELHO; ARAUJO, 2017)[2]. O ambiente computacional utilizado em todos os testes neste trabalho consiste de 4 máquinas, cada uma com a seguinte configuração:

- Processador Intel®Core™i7-4820K 3.7 GHz (4 núcleos);
- 16 GB de memória RAM;
- Sistema Operacional Ubuntu 14.10 (x64);
- NVIDIA GeForce GTX 780 com 2304 CUDA cores.

[1]Disponível em <https://github.com/tiagoaoa/Sucuri>
[2]Disponível em <https://github.com/igormcoelho/simple-pycuda>

3.3 **Múltiplas portas de saída**

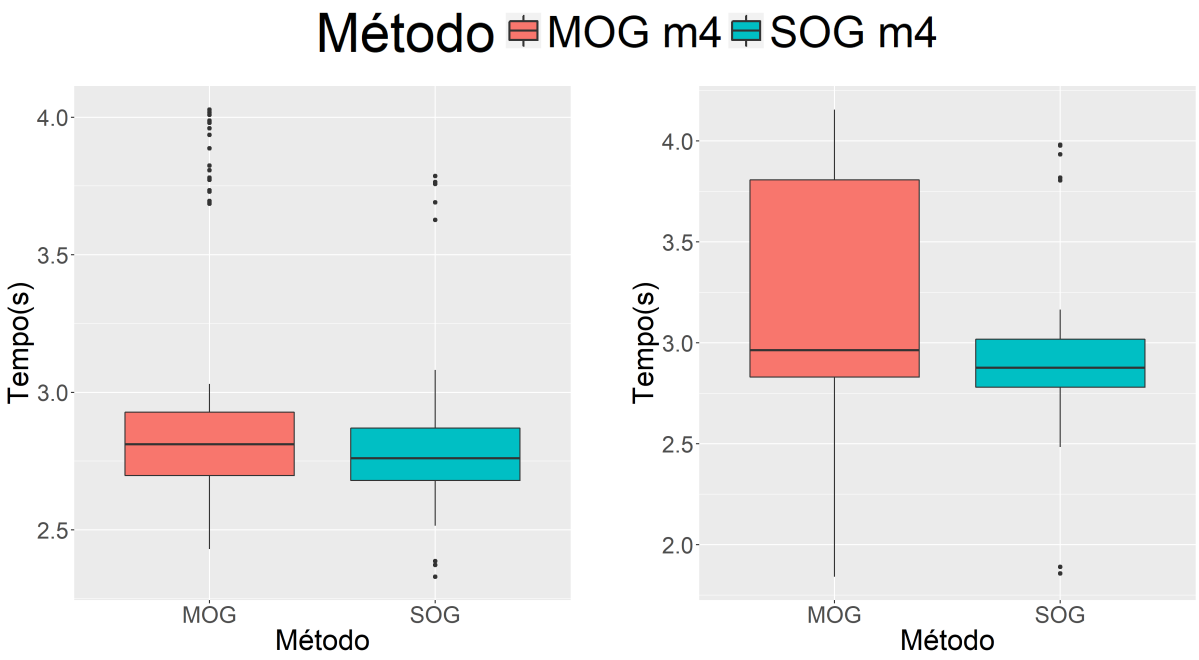
Para validar a utilização de múltiplas portas de saída em cada nó do grafo dataflow, conforme discutido na Seção 2.2.3, foi realizado um experimento utilizando o dataflow DVND com apenas uma porta de saída (SOG) e comparado com outro experimento com o mesmo algoritmo DVND mas agora implementado utilizando múltiplas portas de saída para os nós (MOG).

O resultado para os tempos no experimento pode ser visto na Tabela 8, ao aplicar o teste de Wilcox pode se perceber que, exceto para a instância 2 (de tamanho 226), em todas as outras situações houve significância estatística para verificar a diferença entre as amostras.

Tabela 8 – Tempos comparativos do SOG vs MOG onde SOG indica a execução com uma porta de saída e MOG com múltiplas portas de saída. Instância (#), tipo de implementação (Tipo), número de máquinas (m), tamanho da instância (n), valor mínimo (min), máximo (max), primeiro quartil (1Q), mediana (2Q), terceiro quartil (3Q), média ($\overline{x}$), desvio padrão (σ) e p-valor para o teste de Wilcox entre as versões (valores em negrito quando $p - valor > 0.05$).

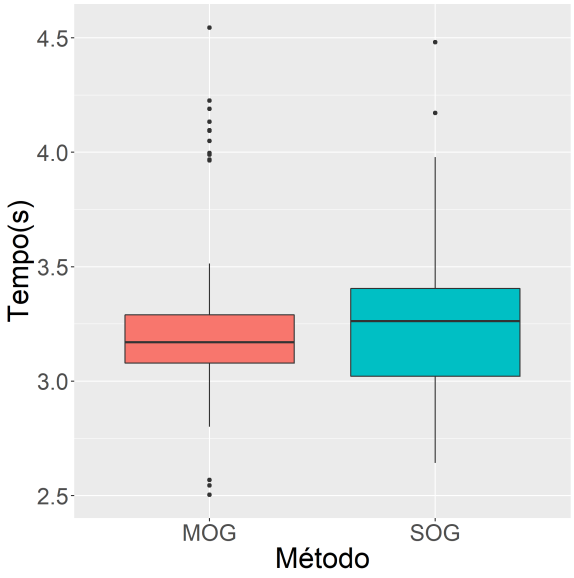
#	**Tipo**	**m**	**n**	**min**	**max**	**1Q**	**2Q**	**3Q**	$\overline{\mathbf{x}}$	σ	**p − valor**
0	MOG	4	52	2,43	4,028	2,698	2,811	2,928	2,953	0,429	0,0271
	SOG	4		2,329	3,786	2,68	2,761	2,87	2,802	0,257	
1	MOG	4	100	1,841	4,156	2,831	2,963	3,808	3,207	0,527	0,003571
	SOG	4		1,858	3,982	2,781	2,876	3,018	2,911	0,305	
2	MOG	4	226	2,504	4,545	3,079	3,171	3,29	3,243	0,355	**0,1708**
	SOG	4		2,643	4,481	3,021	3,263	3,405	3,242	0,299	
3	MOG	4	318	2,674	4,592	3,515	3,622	3,756	3,648	0,324	5,161e-06
	SOG	4		3,175	4,414	3,646	3,83	4,015	3,817	0,269	
4	MOG	4	501	3,423	5,801	4,345	4,514	4,691	4,496	0,38	4,901e-08
	SOG	4		3,781	6,382	4,553	4,783	4,974	4,783	0,38	
5	MOG	4	657	4,17	6,604	5,246	5,464	5,682	5,49	0,441	6,173e-07
	SOG	4		4,566	7,11	5,559	5,775	6,007	5,778	0,421	
6	MOG	4	783	5,434	8,442	6,305	6,508	6,691	6,514	0,507	1,429e-16
	SOG	4		5,95	8,881	6,782	7,04	7,356	7,087	0,471	
7	MOG	4	1001	7,871	10,88	8,836	9,09	9,493	9,164	0,566	7,009e-10
	SOG	4		8,253	10,96	9,352	9,626	10,05	9,693	0,565	

Figura 28 – Tempo do DVND, *SOG* refere-se a uma porta de saída e *MOG* a múltiplas portas de saída, n indica o tamanho, m indica o número de máquinas utilizadas. Instâncias 0 a 3.

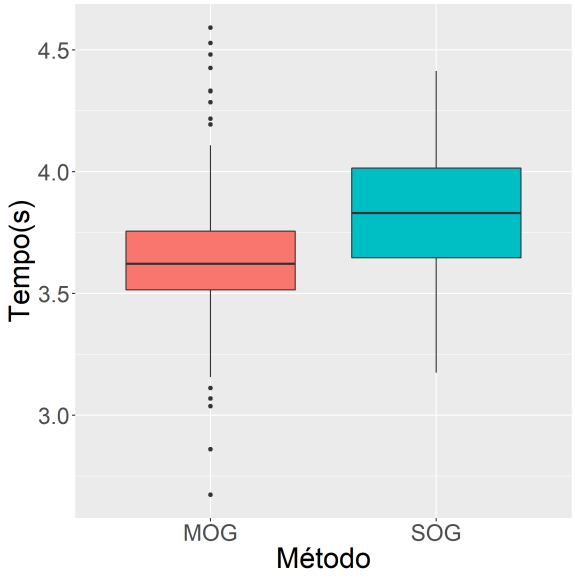


(a) Instância 0, $n = 52$

(b) Instância 1, $n = 100$

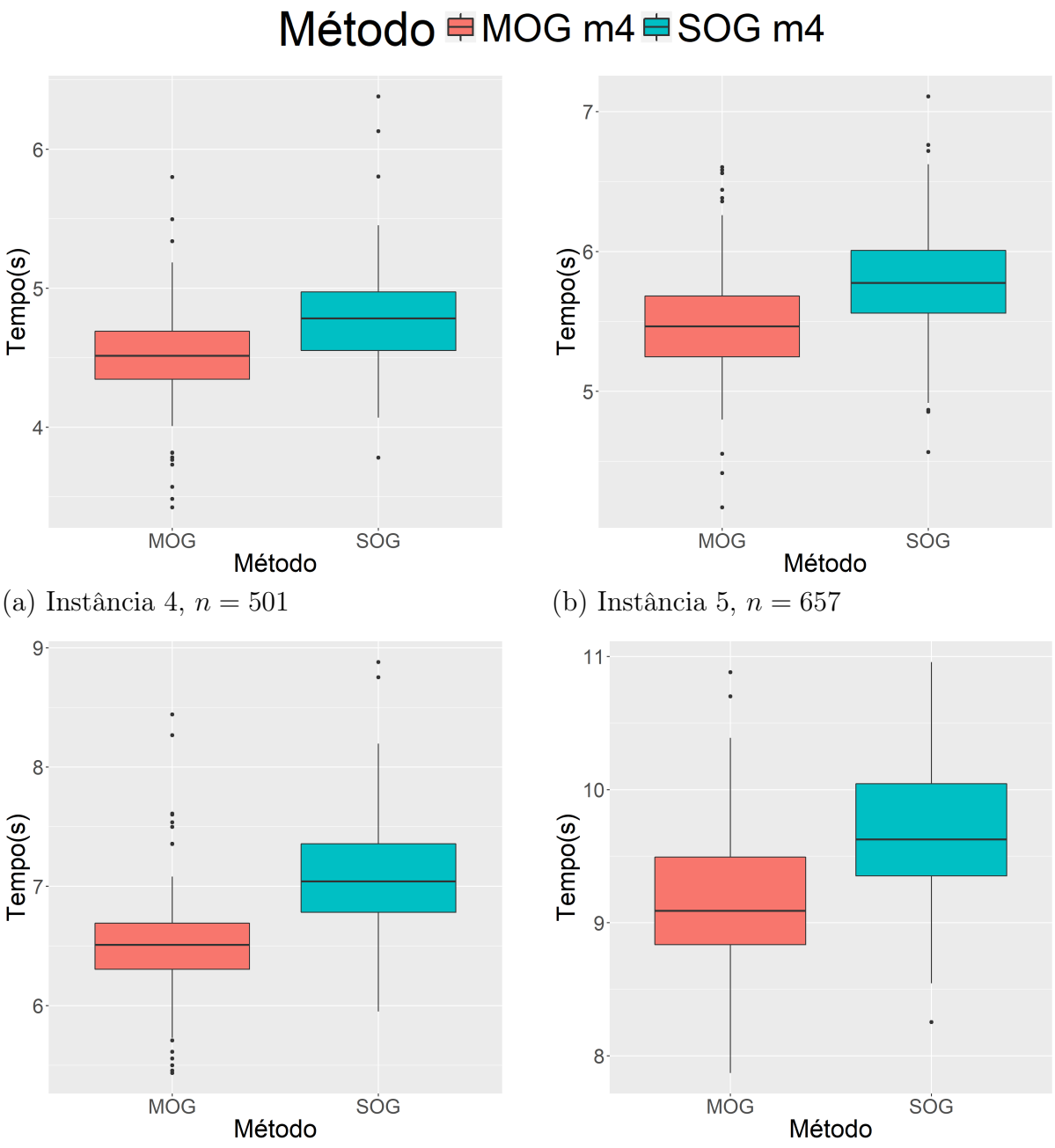


(c) Instância 2, $n = 226$



(d) Instância 3, $n = 318$

Figura 29 – Tempo do DVND, *SOG* refere-se a uma porta de saída e *MOG* a múltiplas portas de saída, n indica o tamanho, m indica o número de máquinas utilizadas. Instâncias 4 a 7.



(a) Instância 4, $n = 501$

(b) Instância 5, $n = 657$

(c) Instância 6, $n = 783$

(d) Instância 7, $n = 1001$

Nas Figuras 28a e 28b podemos ver uma sutil diferença favorecendo a versão sem múltiplas portas de saída (SOG), contudo a situação se inverte na instância 3.

A Figura 28d referente à instância 3 (de tamanho 318) mostra o início da melhoria no tempo pelo uso de múltiplas saídas nos nós do grafo dataflow.

O uso de múltiplas portas de saída, uma específica para cada nó de destino, se mostra eficiente nas demais instâncias, podendo ser visto nas Figuras 29a-29d. A melhoria no tempo inicia-se na instância 3 de tamanho 318 e permanece por todas as instâncias seguintes.

3.4 **RVND em dataflow**

Como veremos nas seções seguintes, apesar da implementação do RVND em dataflow não conseguir melhorar os tempos da implementação clássica do RVND o DVND clássico e DVND dataflow conseguem melhorar os tempos relativo ao tempo do RVND para as maiores instâncias.

3.4.1 Tempo

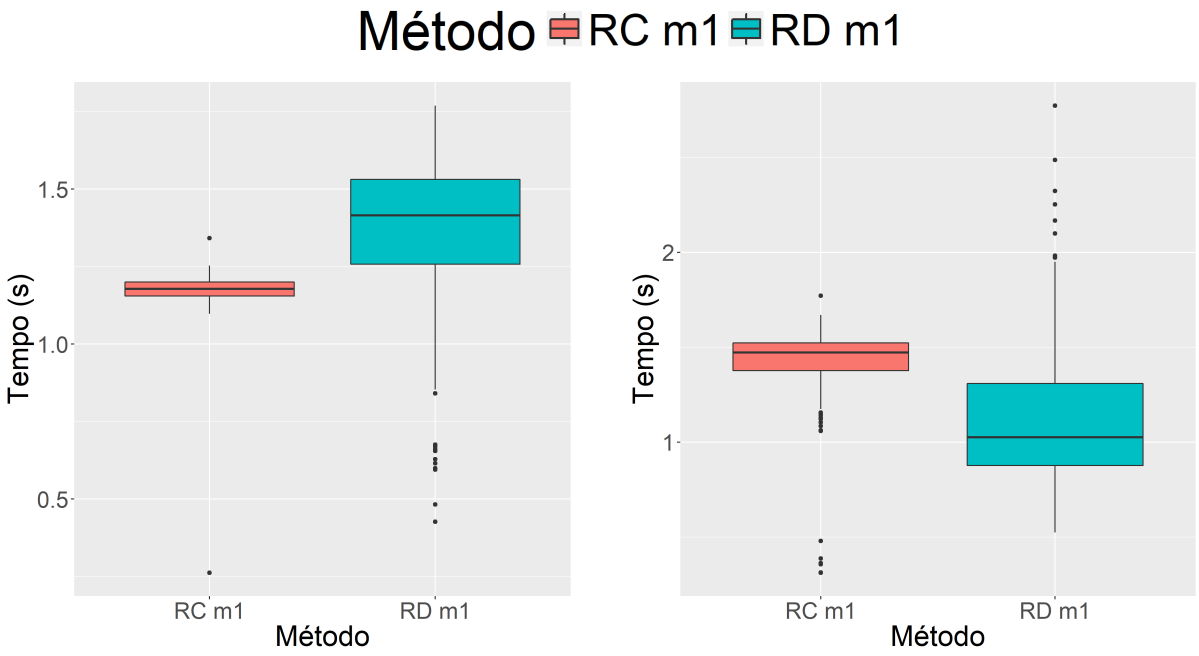
A Tabela 9 e as Figuras 30a-31d apresentam resultados para execuções utilizando apenas uma máquina ($m = 1$), pois, pela construção naturalmente sequencial do RVND, este não utiliza paralelismo, logo, o emprego de mais de uma máquina não traria ganhos em termos de desempenho, tampouco no valor da solução.

Tabela 9 – Tempos comparativos do RVND na implementação clássica (DC) e a proposta de implementação usando dataflow (DD). Instância (#), tipo de implementação (Tipo), número de máquinas (m), tamanho da instância (n), valor mínimo (min), máximo (max), primeiro quartil (1Q), mediana (2Q), terceiro quartil (3Q), média ($\overline{x}$), desvio padrão (σ) e p-valor para o teste de Wilcox entre as versões (valores em negrito quando $p - valor > 0.05$).

#	**Tipo**	**m**	**n**	**min**	**max**	**1Q**	**2Q**	**3Q**	$\overline{\mathbf{x}}$	σ	**p − valor**
0	DD	1	52	0,4269	1,77	1,258	1,416	1,531	1,321	0,323	9,279e-13
	DC	1		0,262	1,342	1,155	1,178	1,2	1,169	0,1	
1	DD	1	100	0,5236	2,773	0,8762	1,025	1,309	1,177	0,457	2,48e-07
	DC	1		0,3116	1,771	1,377	1,473	1,523	1,378	0,297	
2	DD	1	226	1,483	9,029	2,194	2,556	3,308	3,103	1,49	0,02545
	DC	1		1,413	6,555	2,565	2,989	3,616	3,106	0,926	
3	DD	1	318	1,983	7,007	3,133	3,541	4,125	3,824	1,07	2,559e-17
	DC	1		1,931	3,949	2,445	2,67	3,038	2,75	0,439	
4	DD	1	501	3,614	13,5	5,374	6,104	7,05	6,597	1,98	4,07e-13
	DC	1		3,63	7,018	4,697	4,987	5,52	5,095	0,59	
5	DD	1	657	6,878	22,9	9,351	10,12	11,74	11,43	3,82	1,202e-18
	DC	1		6,325	11,35	7,855	8,356	8,821	8,345	0,752	
6	DD	1	783	9,997	35,13	13,26	14,9	17,5	16,91	5,93	2,107e-15
	DC	1		10,38	15,38	11,7	12,49	13,04	12,5	1,05	
7	DD	1	1001	15,51	66,77	21,48	24,74	29,11	27,5	9,6	**0,1547**
	DC	1		19,8	30,42	22,71	24,31	25,73	24,27	2,13	

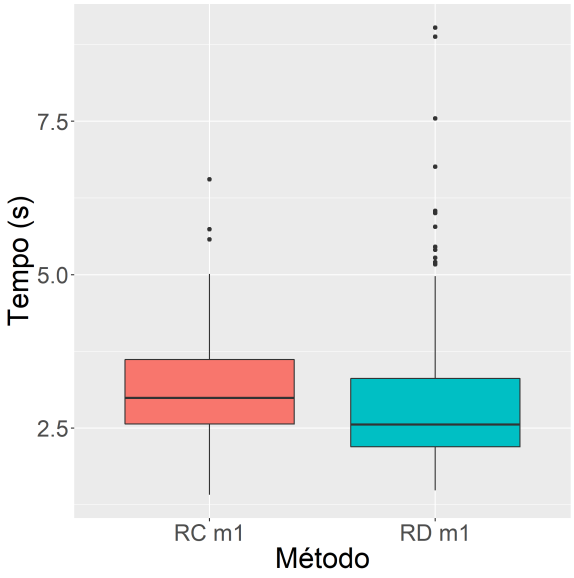
Pode-se observar que o RVND em sua implementação clássica (RC) apresentou melhores tempos que o RVND na versão dataflow (RD).

Figura 30 – Tempos do RVND, n representa o tamanho da instância, m indica o número de máquinas, RC refere-se ao RVND clássico e RD ao RVND implementado em dataflow. Instâncias 0 a 3.

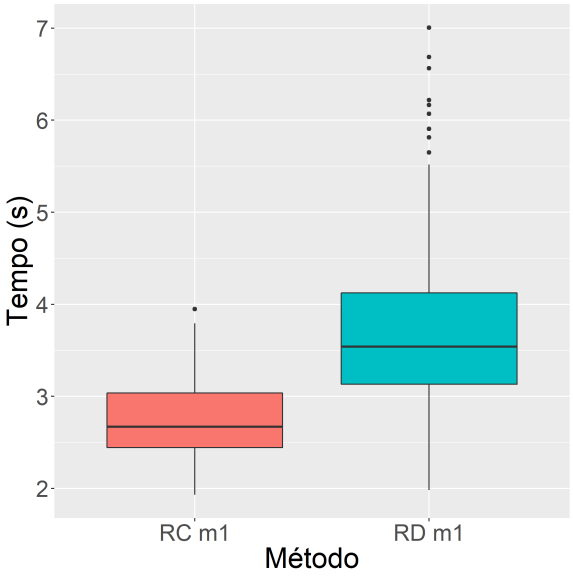


(a) Instância 0, $n = 52$

(b) Instância 1, $n = 100$

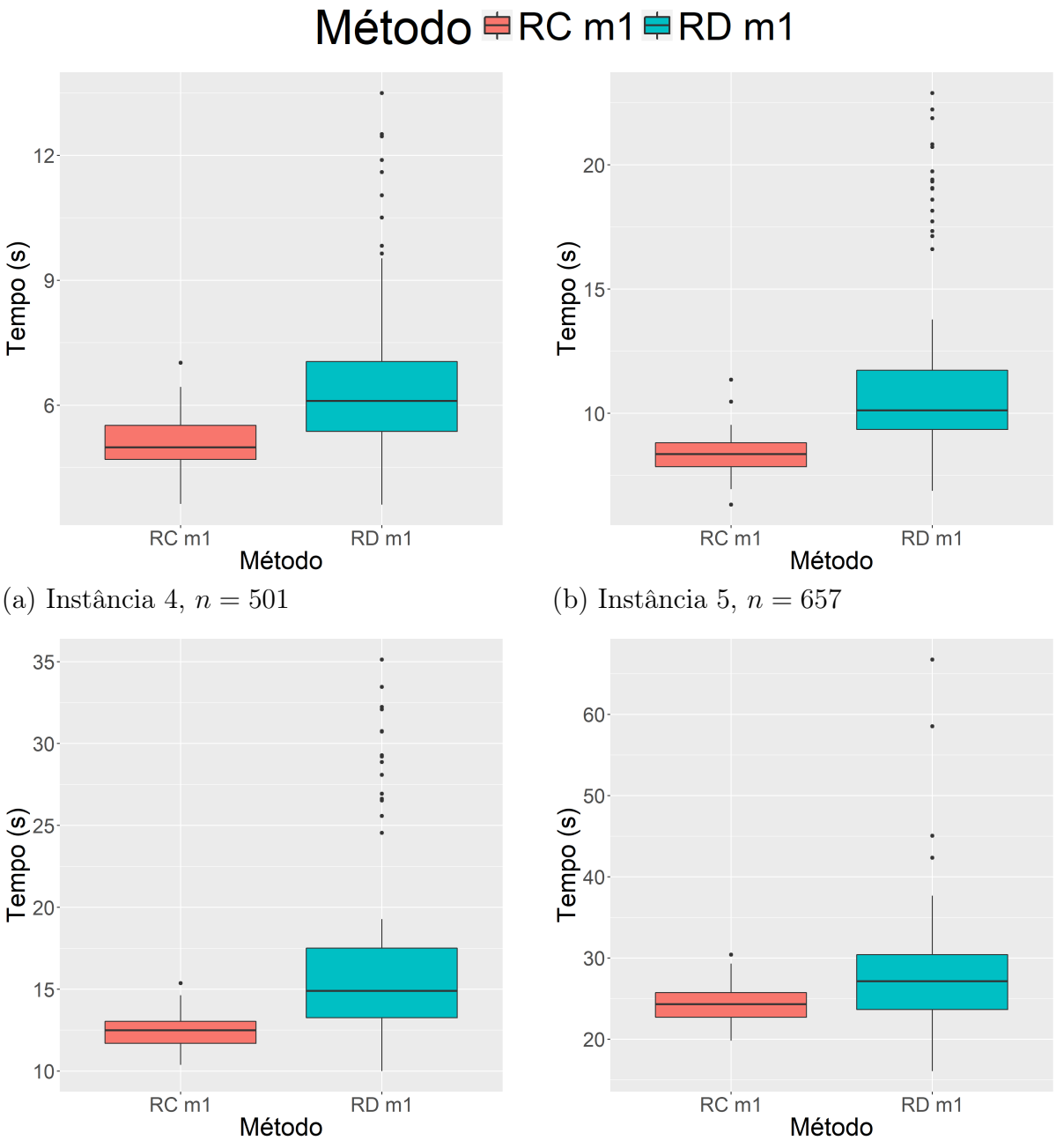


(c) Instância 2, $n = 226$



(d) Instância 3, $n = 318$

Figura 31 – Tempos do RVND, n representa o tamanho da instância, m indica o número de máquinas, RC refere-se ao RVND clássico e RD ao RVND implementado em dataflow. Instâncias 4 a 7.



(a) Instância 4, $n = 501$

(b) Instância 5, $n = 657$

(c) Instância 6, $n = 783$

(d) Instância 7, $n = 1001$

Apenas no caso da instância 7, de tamanho 1001, representada pela Figura 31d, não houve diferença significativa, segundo o teste de Wilcox, para afirmar a existência de diferença nos dados. Esta diferença no tempo se deve ao fato de a implementação dataflow adicionar um overhead inerente ao gerenciamento feito pela biblioteca Sucuri, e não haver ganhos em termos de paralelismo.

3.4.2 Melhoria no valor da solução

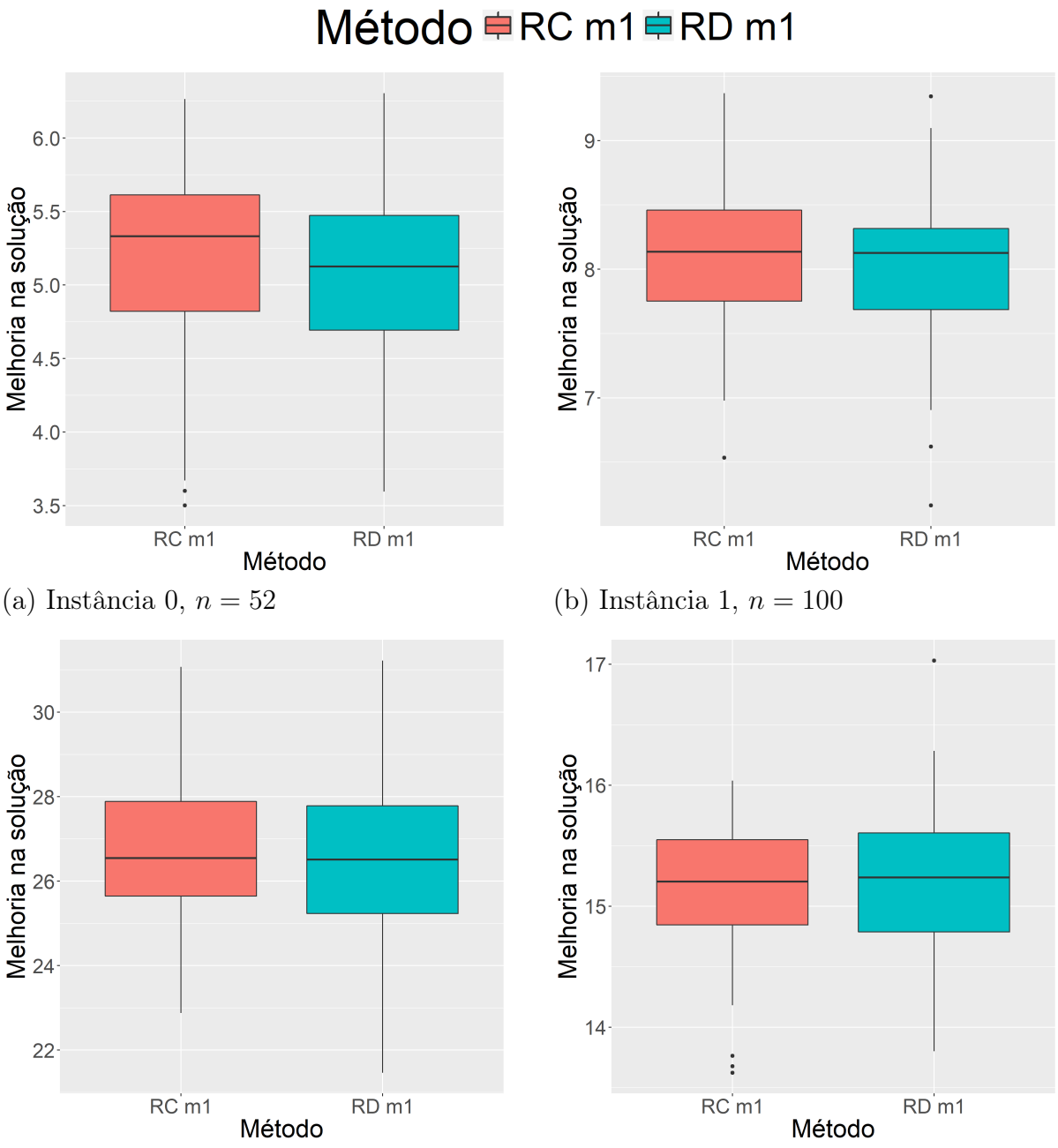
Em termos de melhoria no valor da solução (dada pela Equação 3.1), podemos ver Tabela 10 que não há grandes diferenças em termos de média ($\overline{x}$) nem de mediana ($2Q$) o que se comprova nos resultados do teste de Wilcox que não apresenta diferença significativa senão nos resultados da instância 4 de tamanho 501.

Tabela 10 – Comparativos de melhoria na solução para o RVND na implementação clássica (DC) e a proposta de implementação usando dataflow (DD). Instância (#), tipo de implementação (Tipo), número de máquinas (m), tamanho da instância (n), valor mínimo (min), máximo (max), primeiro quartil (1Q), mediana (2Q), terceiro quartil (3Q), média ($\overline{x}$), desvio padrão (σ) e p-valor para o teste de Wilcox entre as versões (valores em negrito quando $p - valor > 0.05$).

#	**Tipo**	**m**	**n**	**min**	**max**	**1Q**	**2Q**	**3Q**	$\overline{\mathbf{x}}$	σ	**p − valor**
0	DD	1	52	3,595	6,305	4,693	5,126	5,473	5,048	0,547	**0,05327**
	DC	1		3,501	6,265	4,82	5,332	5,614	5,173	0,624	
1	DD	1	100	6,163	9,343	7,686	8,125	8,317	8,049	0,58	**0,5867**
	DC	1		6,535	9,369	7,751	8,136	8,46	8,093	0,53	
2	DD	1	226	21,46	31,22	25,24	26,51	27,78	26,46	1,93	**0,3557**
	DC	1		22,88	31,07	25,64	26,55	27,88	26,77	1,73	
3	DD	1	318	13,8	17,03	14,79	15,24	15,61	15,21	0,587	**0,8594**
	DC	1		13,62	16,04	14,85	15,2	15,55	15,16	0,515	
4	DD	1	501	15,58	17,42	16,2	16,49	16,74	16,47	0,411	0,02205
	DC	1		15,11	17,17	16,07	16,37	16,61	16,33	0,412	
5	DD	1	657	18,1	20,84	19,07	19,4	19,79	19,42	0,52	**0,4027**
	DC	1		18,24	20,86	19,08	19,38	19,63	19,36	0,489	
6	DD	1	783	19,53	21,7	20,25	20,52	20,92	20,56	0,457	**0,2132**
	DC	1		19,37	21,83	20,16	20,42	20,75	20,48	0,485	
7	DD	1	1001	22,23	24,88	23,08	23,37	23,7	23,38	0,503	**0,07059**
	DC	1		22,42	24,52	23,02	23,22	23,46	23,27	0,401	

Pelas Figuras 32a-33d se reforça a imagem de que o RVND clássico e o RVND implementado em dataflow apresentam resultados muito parecidos em termos de valor da solução encontrada. Este comportamento é esperado visto que, salvo pela aleatoriedade inerente à implementação sugerida por (SOUZA et al., 2010), ambas implementações cumprem a mesma tarefa.

Figura 32 – Melhoria no valor da solução para o RVND, n representa o tamanho da instância, m indica o número de máquinas, DC refere-se ao RVND clássico e DD ao RVND implementado em dataflow. Instâncias 0 a 3.



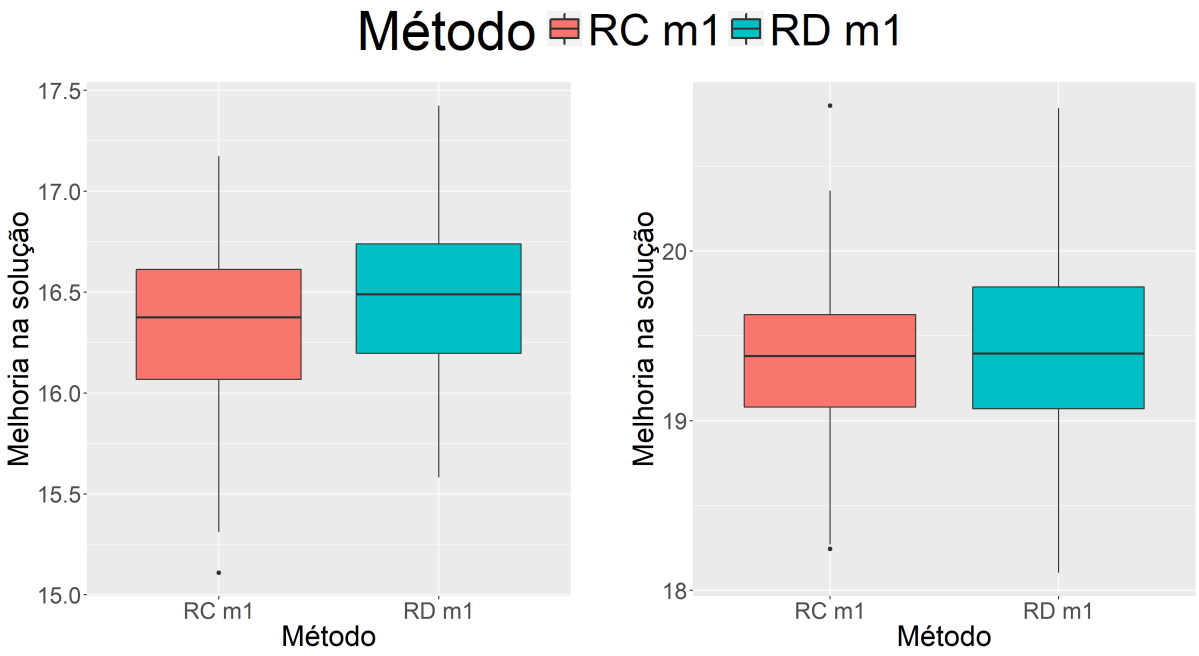
(a) Instância 0, $n = 52$

(b) Instância 1, $n = 100$

(c) Instância 2, $n = 226$

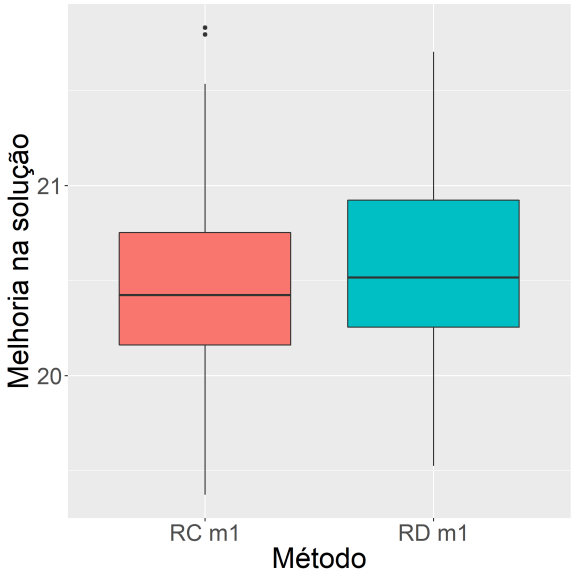
(d) Instância 3, $n = 318$

Figura 33 – Melhoria no valor da solução para o RVND, n representa o tamanho da instância, m indica o número de máquinas, DC refere-se ao RVND clássico e DD ao RVND implementado em dataflow. Instâncias 4 a 7.

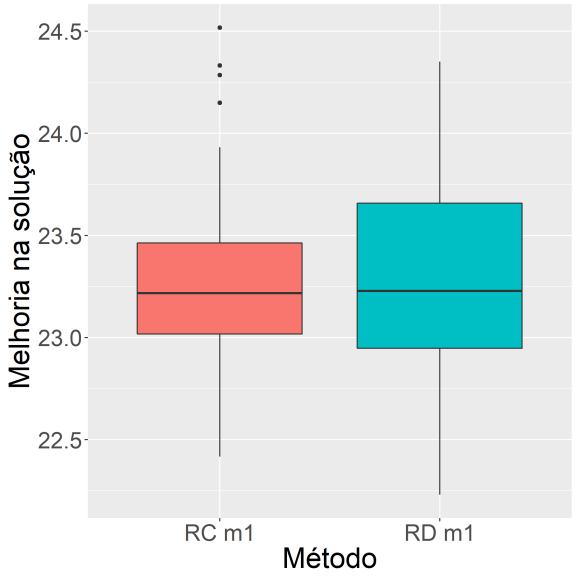


(a) Instância 4, $n = 501$

(b) Instância 5, $n = 657$



(c) Instância 6, $n = 783$



(d) Instância 7, $n = 1001$

3.5 **DVND em dataflow**

Para avaliar os resultados do DVND foi comparada a sua implementação clássica (DC) apresentada na literatura, conforme Algoritmo 8, com a implementação em dataflow (DD) apresentada na Figura 19. Os tempos de execução e melhoria na solução inicial são apresentados respectivamente na Tabela 11 e Tabela 12, as colunas destas designam o número da instância (#), tipo de implementação (Imp DC/DD), número de máquinas usado (m), tamanho da instância (n), valor mínimo (min), máximo (max), primeiro

quartil (1Q), mediana (2Q), terceiro quartil (3Q), média ($\overline{x}$), desvio padrão (σ) e o p-valor para o teste de Wilcox entre o a versão dataflow e a clássica.

3.5.1 Tempo

Pode-se ver pela Tabela 11 que o DVND clássico apresenta melhores tempos para as menores instâncias. Até a instância 4, de tamanho 501, os tempos do DVND clássico são sensivelmente melhores que os tempos do DVND em dataflow, contudo a partir da instância 5, de tamanho 657, a implementação em dataflow alcança os tempos da implementação clássica quando usa mais de uma máquina.

Na maior instância, de tamanho 1001, pode ser visto que o resultado da implementação dataflow para uma máquina é sutilmente melhor que da implementação clássica, melhoria esta que se torna mais evidente ao utilizar mais de uma máquina. Conforme se vê na Tabela 11 pela coluna $p - valor$ há significância estatística para se verificar a diferença entre as amostragens.

Para as menores instâncias podemos ver, na Figura 34a, que o DVND clássico possui tempos bem menores que o DVND em dataflow e o uso de mais máquinas não consegue melhorar os tempos do procedimento.

A Figura 34b é bem parecida com a anterior, inclusive com tempos bastante próximos, indicando que o aumento de 52 para 100 no tamanho da solução não é suficiente para causar um grande aumento no tempos de solução pelo método.

Para a Figura 34c percebe-se que os tempos aumentam um pouco mas o comportamento é bastante semelhante, o DVND clássico é mais rápido para resolver o problema e aumentar o número de máquinas não melhora razoavelmente o desempenho.

Para a Figura 35a, que representa a instância 4 de tamanho 501, percebe-se pela primeira vez uma melhoria razoável no tempo do DVND em dataflow pelo uso de mais de uma máquina, contudo ainda não sendo suficiente para melhorar os resultado do DVND clássico.

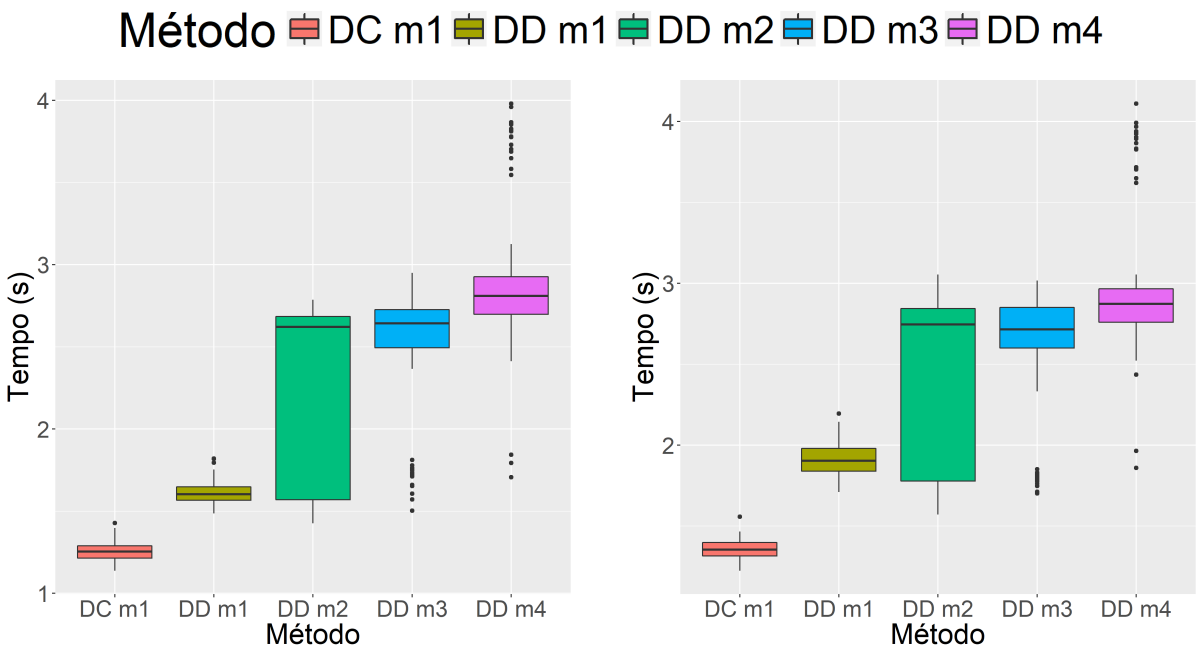
Na instância 5, de tamanho 657, ilustrada na Figura 35b, o tempo do DVND em dataflow, quando usa mais de uma máquina, melhora, chegando a alcançar o DVND clássico.

Na instância 6, de tamanho 783, ilustrada na Figura 35c, os resultados são bastante parecidos com a instância anterior.

Na instância 7, de tamanho 1001, ilustrada na Figura 35d, os tempos alcançados pelo DVND dataflow são menores que o DVND clássico, para mais de uma máquina, alcançando assim melhores tempos para a maior instância.

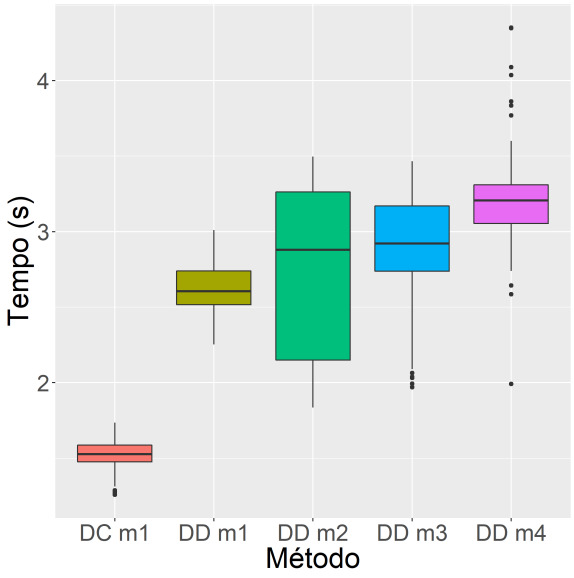
De forma geral, o tempo gasto pela implementação em dataflow melhora à medida que as instâncias aumentam de tamanho, indicando que o overhead é vencido ao surgir a necessidade de resolver problemas maiores.

Figura 34 – Tempo do DVND, n representa o tamanho da instância, m indica o número de máquinas, *DC* refere-se ao DVND clássico e *DD* ao DVND implementado em dataflow. Instâncias 0 a 3.

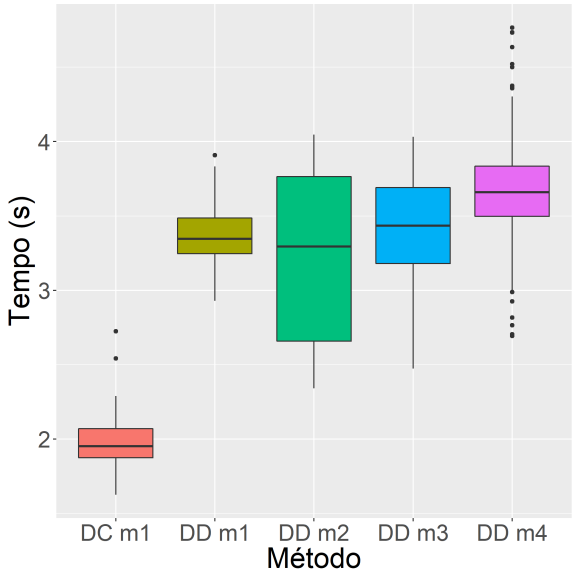


(a) Instância 0, $n = 52$

(b) Instância 1, $n = 100$

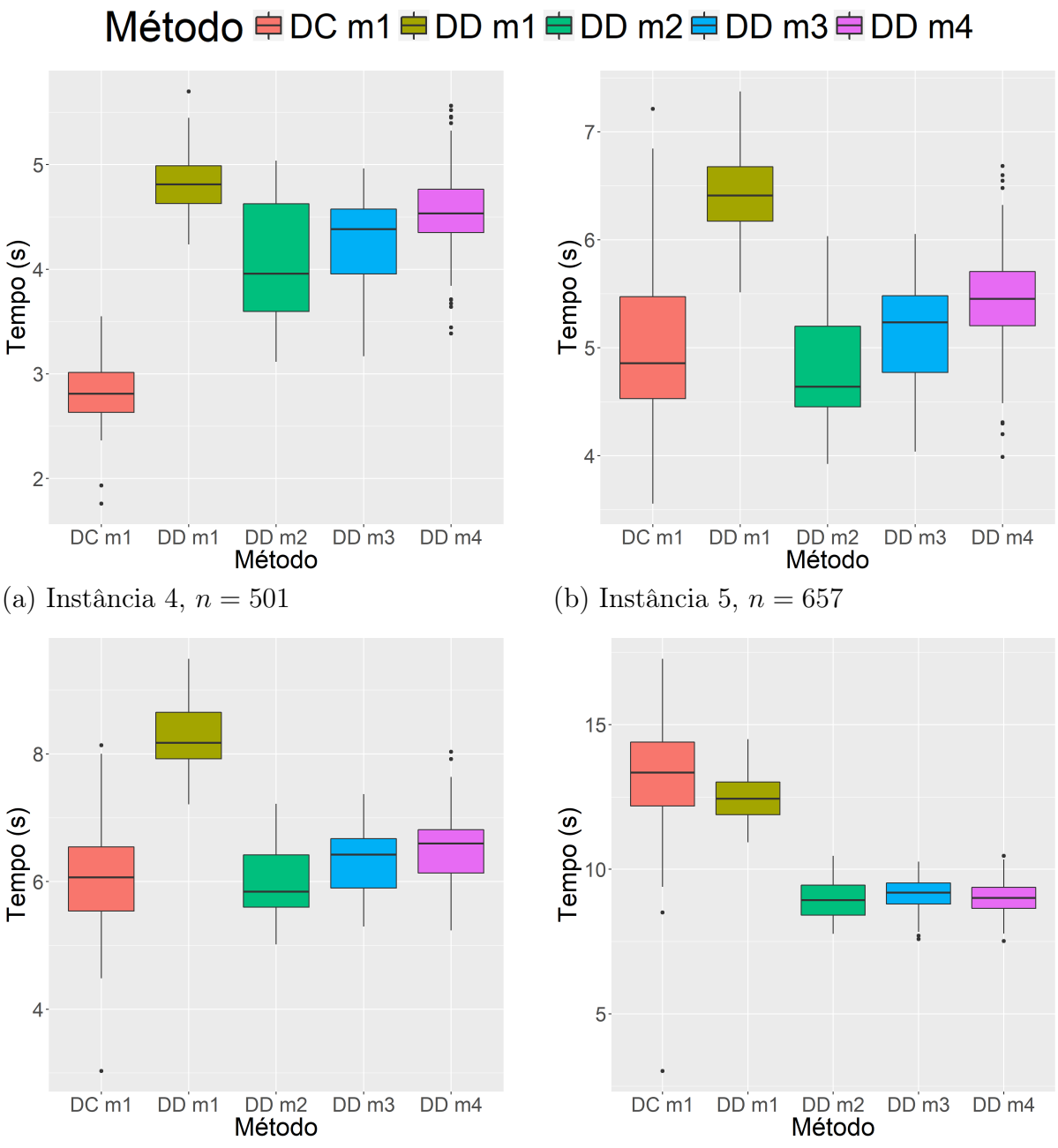


(c) Instância 2, $n = 226$



(d) Instância 3, $n = 318$

Figura 35 – Tempo do DVND, n representa o tamanho da instância, m indica o número de máquinas, *DC* refere-se ao DVND clássico e *DD* ao DVND implementado em dataflow. Instâncias 4 a 7.



(a) Instância 4, $n = 501$

(b) Instância 5, $n = 657$

(c) Instância 6, $n = 783$

(d) Instância 7, $n = 1001$

3.5.2 Melhoria no valor da solução

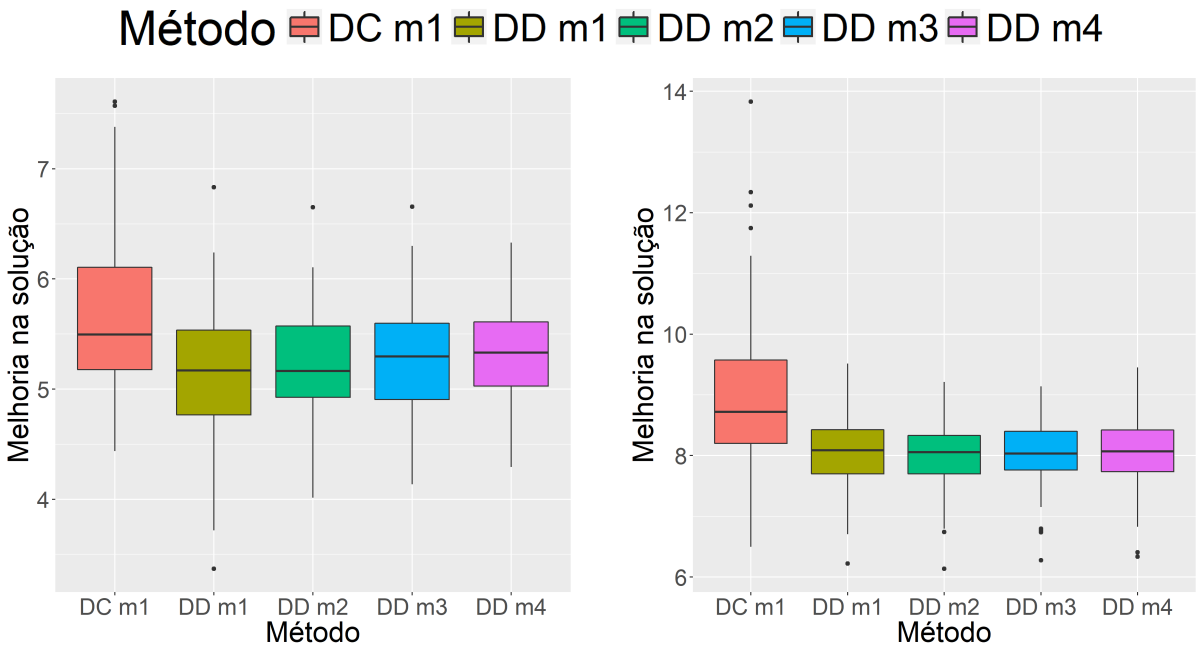
A Tabela 12 e as Figuras 36a-37d apresentam resultados em termos da melhoria no valor da solução inicial.

Como pode ser visto na Tabela 12, ficando mais evidente nas Figuras 36a-37d, em geral o DVND clássico (DC) consegue melhorar mais o valor da solução inicial quando comparado ao DVND dataflow (DD).

Ao aumentar o tamanho das instâncias, o DVND clássico continua encontrando me-

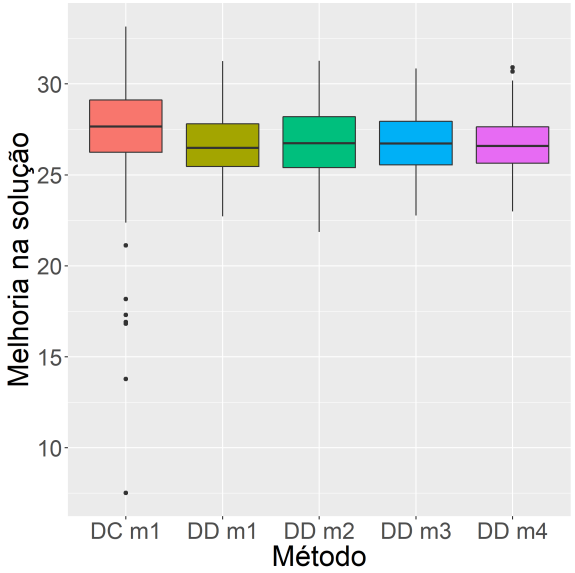
lhores resultados em termos de valor da solução, mas também aumentando a variabilidade destes resultados, o que pode ser visto na Figura 36d, referente à instância 3 de tamanho 318, onde a amplitude interquartil do DVND clássico é de 2,88, número mais de 3 vezes o tamanho da maior amplitude interquartil para o DVND em dataflow para a mesma instância, a saber, no valor de 0,86 com duas máquinas.

Figura 36 – Melhoria no valor da solução do DVND, n representa o tamanho da instância, m indica o número de máquinas, DC refere-se ao DVND clássico e DD ao DVND implementado em dataflow. Instâncias 0 a 3.

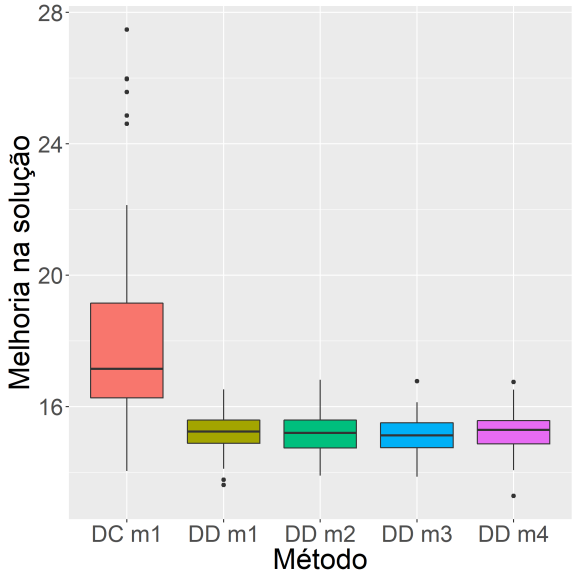


(a) Instância 0, $n = 52$

(b) Instância 1, $n = 100$

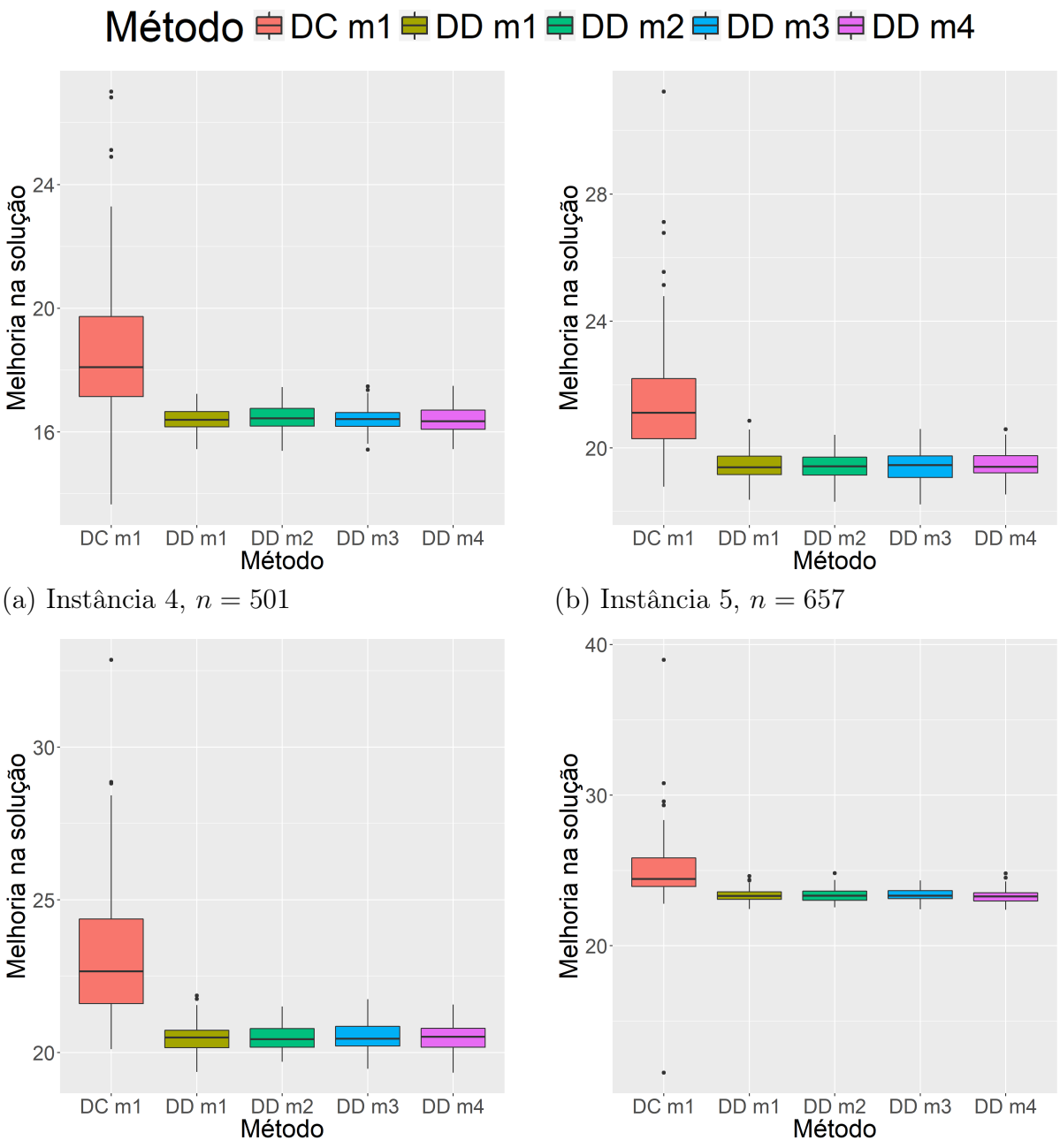


(c) Instância 2, $n = 226$



(d) Instância 3, $n = 318$

Figura 37 – Melhoria no valor da solução do DVND, n representa o tamanho da instância, m indica o número de máquinas, DC refere-se ao DVND clássico e DD ao DVND implementado em dataflow. Instâncias 4 a 7.



(a) Instância 4, $n = 501$

(b) Instância 5, $n = 657$

(c) Instância 6, $n = 783$

(d) Instância 7, $n = 1001$

Tabela 11 – Tempos comparativos do DVND na implementação clássica (DC) e a proposta de implementação usando dataflow (DD). Instância (#), tipo de implementação (Tipo), número de máquinas (m), tamanho da instância (n), valor mínimo (min), máximo (max), primeiro quartil (1Q), mediana (2Q), terceiro quartil (3Q), média ($\overline{x}$), desvio padrão (σ) e p-valor para o teste de Wilcox entre as versões (valores em negrito quando $p - valor > 0.05$).

#	**Tipo**	**m**	**n**	**min**	**max**	**1Q**	**2Q**	**3Q**	$\overline{\mathbf{x}}$	σ	**p − valor**
0	DD	1	52	1,49	1,82	1,57	1,60	1,648	1,61	0,067	1,238e-14
		2		1,43	2,79	1,57	2,621	2,684	2,218	0,551	1,238e-14
		3		1,50	2,95	2,50	2,643	2,727	2,497	0,386	1,238e-14
		4		1,71	3,98	2,70	2,81	2,926	2,91	0,44	1,238e-14
	DC	1		1,14	1,43	1,22	1,254	1,29	1,253	0,0554	
1	DD	1	100	1,711	2,195	1,839	1,903	1,981	1,918	0,104	1,238e-14
		2		1,57	3,06	1,78	2,745	2,844	2,422	0,532	1,238e-14
		3		1,70	3,02	2,60	2,716	2,85	2,606	0,369	1,238e-14
		4		1,86	4,11	2,76	2,873	2,966	2,968	0,417	1,238e-14
	DC	1		1,22	1,56	1,31	1,354	1,398	1,358	0,0583	
2	DD	1	226	2,253	3,011	2,517	2,605	2,74	2,621	0,155	1,238e-14
		2		1,84	3,50	2,15	2,879	3,262	2,74	0,543	1,238e-14
		3		1,97	3,47	2,74	2,921	3,17	2,881	0,389	1,238e-14
		4		1,99	4,35	3,05	3,206	3,31	3,212	0,315	1,238e-14
	DC	1		1,26	1,74	1,48	1,526	1,587	1,526	0,0937	
3	DD	1	318	2,929	3,909	3,247	3,345	3,487	3,352	0,2	1,238e-14
		2		2,34	4,05	2,66	3,295	3,764	3,233	0,542	1,238e-14
		3		2,47	4,03	3,18	3,434	3,691	3,39	0,37	1,238e-14
		4		2,69	4,77	3,50	3,66	3,834	3,662	0,425	1,238e-14
	DC	1		1,63	2,73	1,87	1,952	2,07	1,975	0,175	
4	DD	1	501	4,237	5,701	4,628	4,812	4,99	4,818	0,291	1,91e-14
		2		3,12	5,04	3,60	3,958	4,626	4,066	0,553	1,91e-14
		3		3,17	4,96	3,96	4,383	4,575	4,264	0,44	1,91e-14
		4		3,39	5,56	4,35	4,534	4,766	4,539	0,433	1,91e-14
	DC	1		1,76	3,55	2,63	2,811	3,014	2,842	0,315	
5	DD	1	657	5,512	7,375	6,173	6,41	6,677	6,425	0,369	0,03197
		2		3,92	6,03	4,45	4,639	5,2	4,822	0,525	0,03197
		3		4,04	6,05	4,77	5,235	5,482	5,12	0,482	0,03197
		4		3,99	6,68	5,20	5,453	5,706	5,421	0,498	0,03197
	DC	1		3,56	7,21	4,53	4,856	5,474	5,018	0,745	
6	DD	1	783	7,211	9,492	7,923	8,174	8,651	8,281	0,507	0,0001566
		2		5,02	7,22	5,60	5,841	6,42	5,99	0,523	0,0001566
		3		5,30	7,37	5,90	6,421	6,672	6,308	0,479	0,0001566
		4		5,24	8,03	6,13	6,598	6,815	6,496	0,588	0,0001566
	DC	1		3,03	8,14	5,54	6,066	6,543	6,105	0,848	
7	DD	1	1001	10,93	14,49	11,89	12,44	13,02	12,48	0,764	3,915e-11
		2		7,77	10,46	8,42	8,933	9,448	8,964	0,688	3,915e-11
		3		7,58	10,26	8,80	9,191	9,526	9,146	0,585	3,915e-11
		4		7,52	10,46	8,65	9,008	9,373	8,99	0,578	3,915e-11
	DC	1		3,02	17,28	12,19	13,34	14,39	13,28	1,92	

Tabela 12 – Comparativos de melhoria na solução para o DVND na implementação clássica (DC) e a proposta de implementação usando dataflow (DD). Instância (#), tipo de implementação (Tipo), número de máquinas (m), tamanho da instância (n), valor mínimo (min), máximo (max), primeiro quartil (1Q), mediana (2Q), terceiro quartil (3Q), média ($\overline{x}$), desvio padrão (σ) e p-valor para o teste de Wilcox entre as versões (valores em negrito quando $p - valor > 0.05$).

#	**Tipo**	**m**	**n**	**min**	**max**	**1Q**	**2Q**	**3Q**	**$\overline{x}$**	σ	**p − valor**
0	DD	1	52	3,368	6,832	4,765	5,17	5,535	5,104	0,622	0,007459
		2		4,013	6,65	4,926	5,163	5,572	5,201	0,513	0,007459
		3		4,135	6,655	4,906	5,296	5,597	5,283	0,505	0,007459
		4		4,293	6,329	5,026	5,332	5,611	5,316	0,455	0,007459
	DC	1		4,436	7,611	5,176	5,497	6,106	5,657	0,694	
1	DD	1	100	6,22	9,514	7,7	8,089	8,428	8,05	0,583	3,84e-06
		2		6,135	9,211	7,698	8,057	8,331	8,012	0,539	3,84e-06
		3		6,277	9,14	7,763	8,034	8,398	8,038	0,507	3,84e-06
		4		6,334	9,451	7,735	8,068	8,423	8,072	0,564	3,84e-06
	DC	1		6,496	13,83	8,201	8,72	9,575	9,005	1,18	
2	DD	1	226	22,73	31,25	25,46	26,48	27,81	26,72	1,77	0,0144
		2		21,87	31,28	25,4	26,74	28,2	26,78	2,03	0,0144
		3		22,76	30,84	25,55	26,72	27,94	26,75	1,71	0,0144
		4		22,99	30,9	25,64	26,6	27,65	26,65	1,66	0,0144
	DC	1		7,518	33,16	26,24	27,66	29,12	27,11	3,81	
3	DD	1	318	13,61	16,52	14,88	15,24	15,59	15,21	0,555	1,525e-13
		2		13,9	16,81	14,73	15,19	15,59	15,16	0,569	1,525e-13
		3		13,86	16,77	14,75	15,12	15,51	15,15	0,559	1,525e-13
		4		13,28	16,75	14,87	15,29	15,57	15,24	0,573	1,525e-13
	DC	1		14,04	27,48	16,27	17,15	19,15	17,91	2,65	
4	DD	1	501	15,44	17,23	16,16	16,39	16,66	16,4	0,374	7,427e-10
		2		15,39	17,45	16,19	16,44	16,76	16,44	0,404	7,427e-10
		3		15,43	17,47	16,18	16,41	16,63	16,43	0,429	7,427e-10
		4		15,44	17,49	16,09	16,35	16,71	16,39	0,419	7,427e-10
	DC	1		13,66	27,01	17,14	18,09	19,74	18,64	2,27	
5	DD	1	657	18,37	20,86	19,16	19,39	19,74	19,45	0,461	1,784e-10
		2		18,31	20,42	19,14	19,42	19,71	19,44	0,443	1,784e-10
		3		18,22	20,59	19,07	19,46	19,75	19,41	0,486	1,784e-10
		4		18,54	20,59	19,22	19,41	19,76	19,46	0,419	1,784e-10
	DC	1		18,78	31,23	20,29	21,11	22,19	21,49	1,9	
6	DD	1	783	19,37	21,86	20,16	20,49	20,74	20,48	0,486	9,465e-13
		2		19,7	21,51	20,18	20,44	20,79	20,5	0,439	9,465e-13
		3		19,47	21,75	20,22	20,46	20,86	20,51	0,473	9,465e-13
		4		19,34	21,58	20,18	20,52	20,8	20,5	0,453	9,465e-13
	DC	1		20,12	32,86	21,6	22,66	24,37	23,27	2,26	
7	DD	1	1001	22,44	24,62	23,08	23,3	23,57	23,34	0,41	5,073e-12
		2		22,54	24,81	23,01	23,32	23,62	23,33	0,441	5,073e-12
		3		22,42	24,34	23,14	23,32	23,65	23,37	0,38	5,073e-12
		4		22,39	24,8	22,97	23,27	23,52	23,27	0,44	5,073e-12
	DC	1		11,57	38,99	23,94	24,44	25,83	25,05	2,54	

3.6 **GDVND proposto**

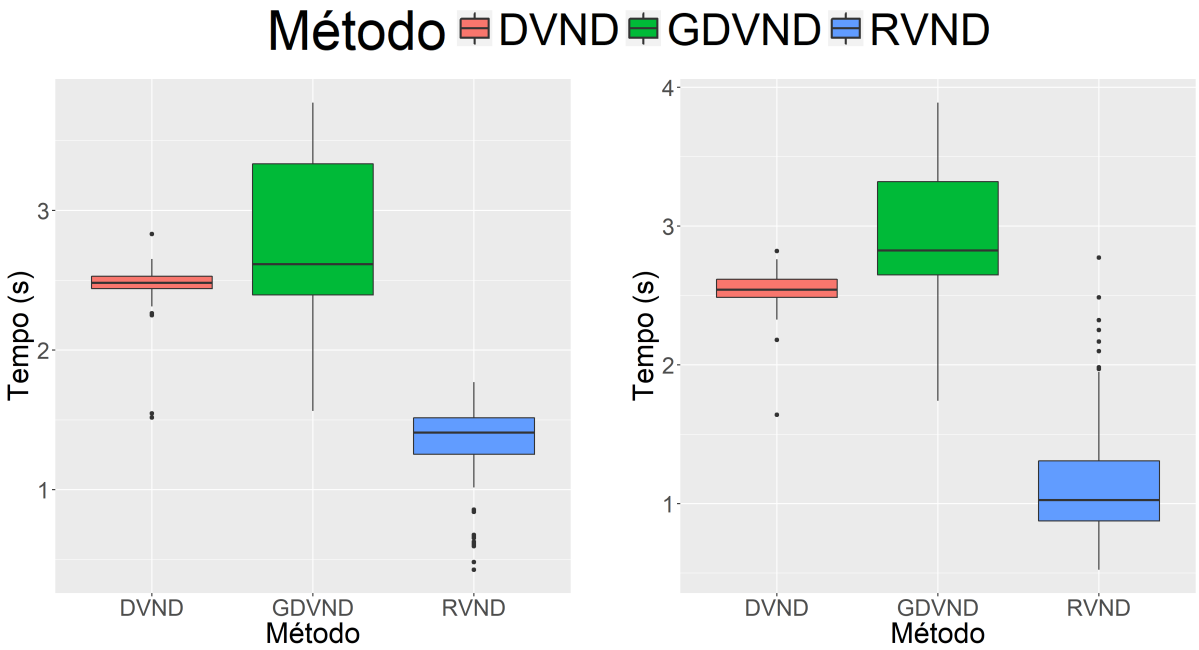
3.6.1 Tempo

Pode ser visto na Tabela 13 e nas Figuras 38a-39d que o DVND e GDVND apresentam comportamentos semelhantes em relação ao RVND, os tempos do RVND são melhores para as instâncias até o tamanho 318 e da instância 4 (tamanho 501) em diante o RVND começa a levar mais tempo para encontrar a resposta.

Tabela 13 – Tempos comparativos do GDVND com DVND e RVND. Instância (#), tipo de implementação (Tipo), número de máquinas (m), tamanho da instância (n), valor mínimo (min), máximo (max), primeiro quartil (1Q), mediana (2Q), terceiro quartil (3Q), média ($\overline{x}$), desvio padrão (σ) e p-valor para o teste de Wilcox entre as versões (valores em negrito quando $p - valor > 0.05$).

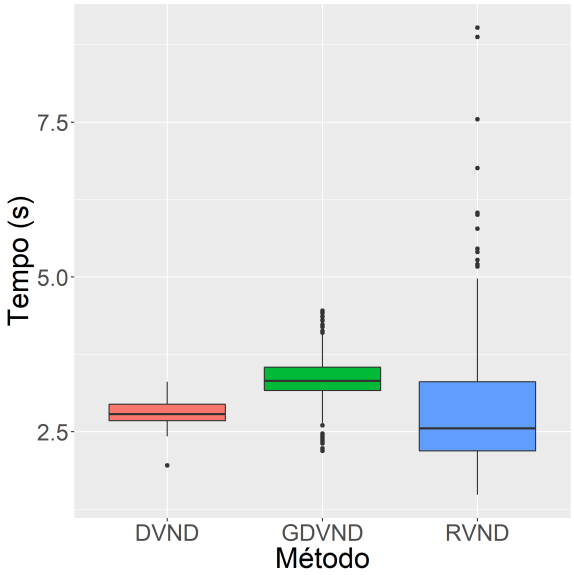
#	**Tipo**	**m**	**n**	**min**	**max**	**1Q**	**2Q**	**3Q**	$\overline{\mathbf{x}}$	σ	**p − valor**
	DVND	4		2,43	4,028	2,698	2,811	2,928	2,953	0,429	7,588e-05
0	RVND	1	52	0,427	1,77	1,258	1,416	1,531	1,321	0,323	3,564e-34
	GDVND	4		1,6	4,955	2,856	3,069	3,57	3,182	0,572	
	DVND	4		1,841	4,156	2,831	2,963	3,808	3,207	0,527	2,201e-06
1	RVND	1	100	0,523	2,773	0,8762	1,025	1,309	1,177	0,457	3,673e-34
	GDVND	4		2,346	5,178	3,078	3,367	4,061	3,495	0,597	
	DVND	4		2,504	4,545	3,079	3,171	3,29	3,243	0,355	7,31e-21
2	RVND	1	226	1,483	9,029	2,194	2,556	3,308	3,103	1,49	2,196e-13
	GDVND	4		2,347	5,639	3,579	3,858	4,532	4,011	0,657	
	DVND	4		2,674	4,592	3,515	3,622	3,756	3,648	0,324	1,74e-18
3	RVND	1	318	1,983	7,007	3,133	3,541	4,125	3,824	1,07	8,397e-09
	GDVND	4		2,265	6,533	4,091	4,401	4,942	4,46	0,763	
	DVND	4		3,423	5,801	4,345	4,514	4,691	4,496	0,38	2,401e-26
4	RVND	1	501	3,614	13,5	5,374	6,104	7,05	6,597	1,98	**0,8022**
	GDVND	4		2,487	8,283	5,697	6,173	6,7	6,092	0,933	
	DVND	4		4,17	6,604	5,246	5,464	5,682	5,49	0,441	6,681e-34
5	RVND	1	657	6,878	22,9	9,351	10,12	11,74	11,43	3,82	1,967e-20
	GDVND	4		5,796	10,71	7,5	8,074	8,605	8,097	0,876	
	DVND	4		5,434	8,442	6,305	6,508	6,691	6,514	0,507	4,018e-34
6	RVND	1	783	9,997	35,13	13,26	14,9	17,5	16,91	5,93	1,396e-29
	GDVND	4		7,187	13,09	9,821	10,61	11,15	10,49	1,1	
	DVND	4		7,871	10,88	8,836	9,09	9,493	9,164	0,566	8,482e-34
7	RVND	1	1001	15,51	66,77	21,48	24,74	29,11	27,5	9,6	1,705e-30
	GDVND	4		9,195	19,53	15,71	16,47	17,22	16,35	1,54	

Figura 38 – Tempo dos algoritmos GDVND, DVND e RVND, n representa o tamanho da instância. Instâncias 0 a 3.

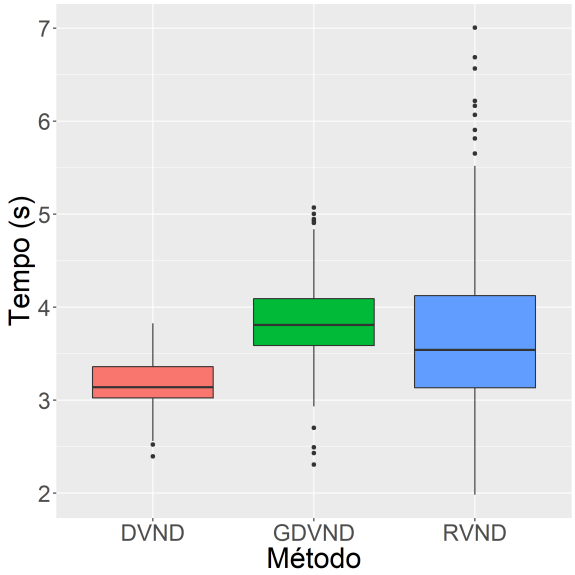


(a) Instância 0, $n = 52$

(b) Instância 1, $n = 100$

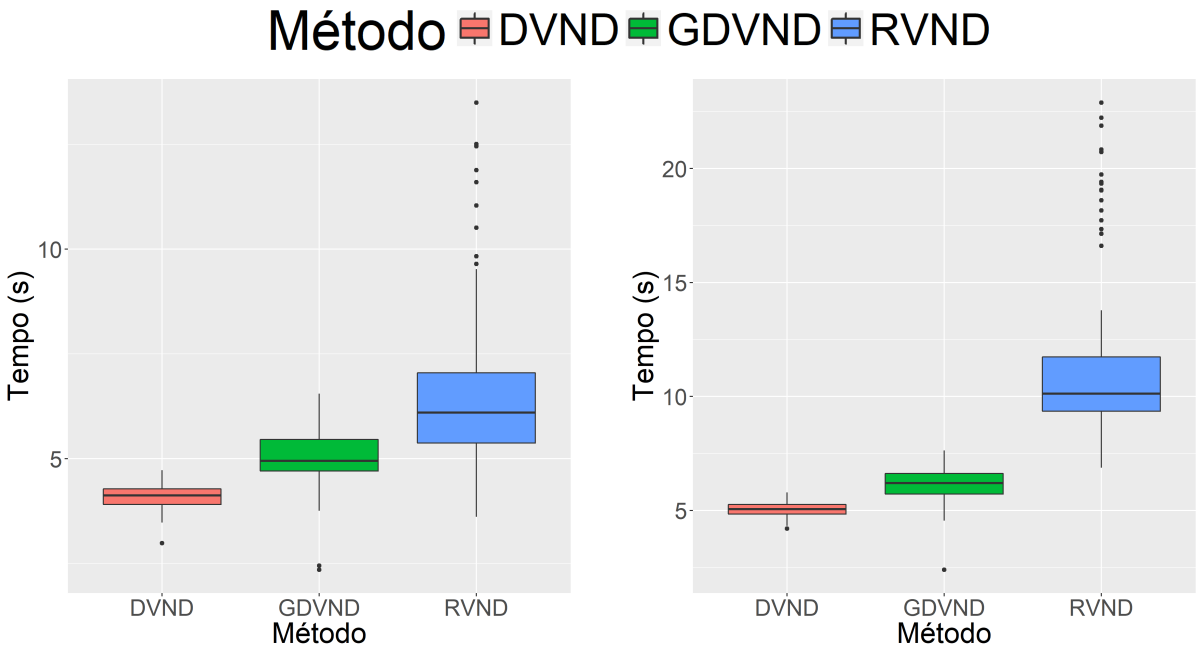


(c) Instância 2, $n = 226$



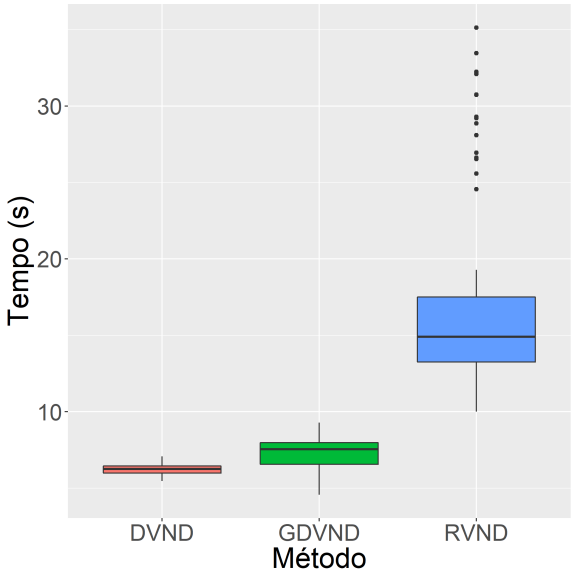
(d) Instância 3, $n = 318$

Figura 39 – Tempo dos algoritmos GDVND, DVND e RVND, n representa o tamanho da instância. Instâncias 4 a 7.

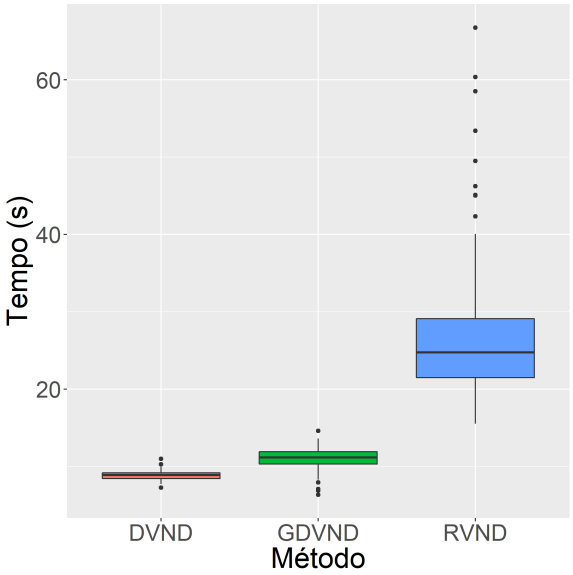


(a) Instância 4, $n = 501$

(b) Instância 5, $n = 657$



(c) Instância 6, $n = 783$



(d) Instância 7, $n = 1001$

3.6.2 Melhoria no valor da solução

A Tabela 14 mostra e as Figuras 40a-41d evidenciam que, de forma geral, não há grande diferença na qualidade da solução encontrada pelos métodos.

De fato, ao analisarmos o $p - valor$ encontrado pelo teste de Wilcox realizado da amostra do GDVND com as demais, do DVND e RVND podemos ver que para muitos casos não há significância estatística para afirmar há diferença entre as amostras, valores destacados em negrito na coluna $p - valor$ da Tabela 14.

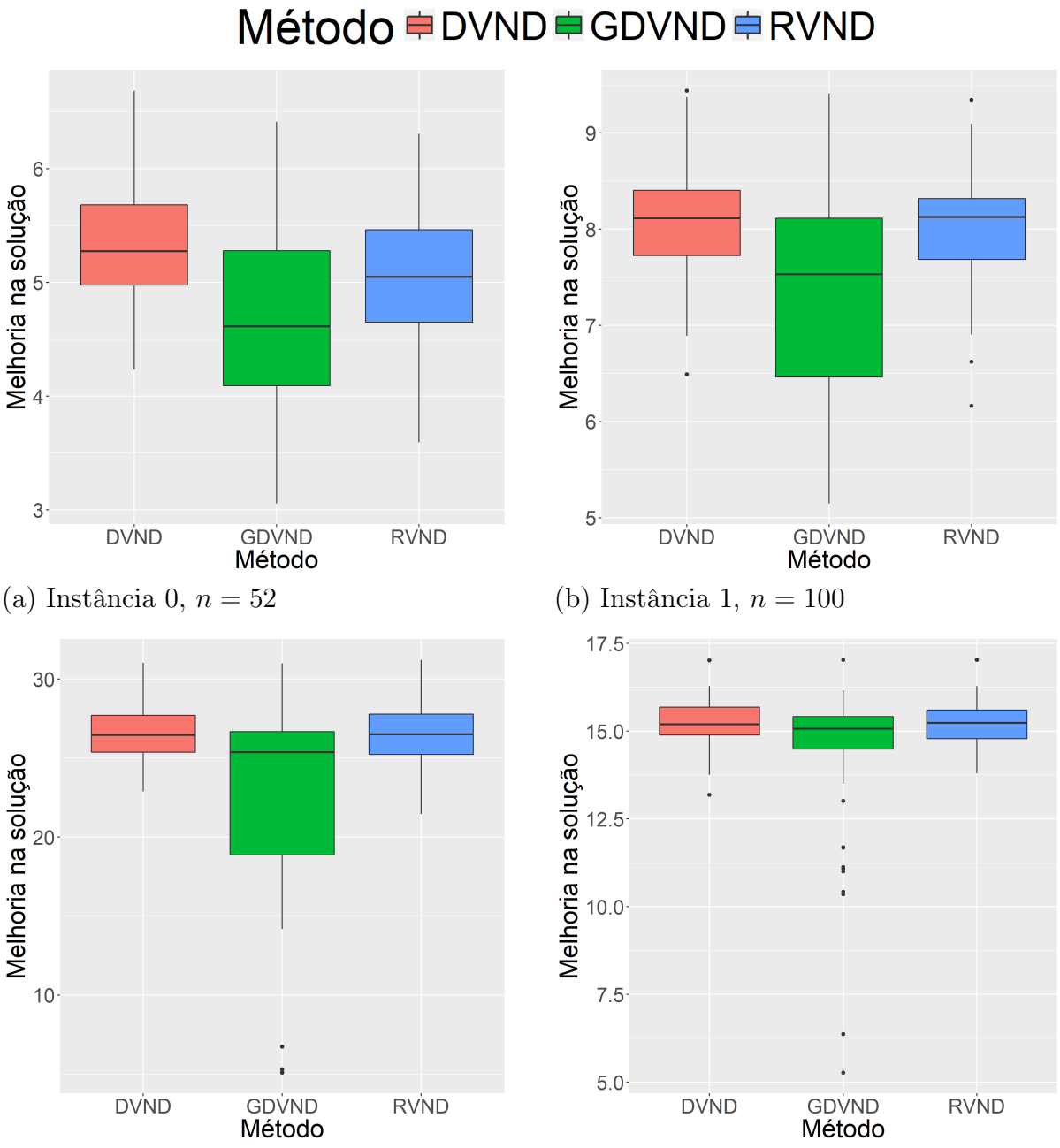
A Figuras 40a e 40b particularmente indicam melhorias semelhantes para o RVND

Tabela 14 – Comparativos de melhoria na solução para o GDVND com DVND e RVND. Instância (#), tipo de implementação (Tipo), número de máquinas (m), tamanho da instância (n), valor mínimo (min), máximo (max), primeiro quartil (1Q), mediana (2Q), terceiro quartil (3Q), média ($\overline{x}$), desvio padrão (σ) e p-valor para o teste de Wilcox entre as versões (valores em negrito quando $p - valor > 0.05$).

#	**Tipo**	**m**	**n**	**min**	**max**	**1Q**	**2Q**	**3Q**	$\overline{\mathbf{x}}$	σ	**p − valor**
	DVND	4		4,27	6,401	4,954	5,287	5,564	5,264	0,475	2,447e-08
0	RVND	1	52	3,595	6,305	4,693	5,126	5,473	5,048	0,547	0,0002838
	GDVND	4		2,706	6,457	4,024	4,836	5,273	4,609	0,871	
	DVND	4		6,884	9,227	7,743	8,025	8,411	8,05	0,526	0,00738
1	RVND	1	100	6,163	9,343	7,686	8,125	8,317	8,049	0,58	0,008289
	GDVND	4		4,012	9,348	7,256	7,838	8,311	7,627	1,04	
	DVND	4		22,47	31,19	25,48	26,69	27,78	26,7	1,77	**0,06525**
2	RVND	1	226	21,46	31,22	25,24	26,51	27,78	26,46	1,93	**0,1826**
	GDVND	4		5,265	30,89	24,97	26,17	27,62	25,29	4,31	
	DVND	4		13,39	16,69	14,86	15,16	15,63	15,19	0,585	**0,1916**
3	RVND	1	318	13,8	17,03	14,79	15,24	15,61	15,21	0,587	**0,1484**
	GDVND	4		5,163	16,94	14,67	15,07	15,5	14,38	2,68	
	DVND	4		15,23	17,47	16,14	16,4	16,62	16,37	0,399	**0,185**
4	RVND	1	501	15,58	17,42	16,2	16,49	16,74	16,47	0,411	0,005406
	GDVND	4		6,112	17,56	16,02	16,32	16,59	15,9	2,03	
	DVND	4		18,22	20,49	19,08	19,42	19,71	19,38	0,476	**0,3123**
5	RVND	1	657	18,1	20,84	19,07	19,4	19,79	19,42	0,52	**0,1671**
	GDVND	4		17,63	20,49	18,96	19,26	19,71	19,3	0,515	
	DVND	4		19,44	21,83	20,16	20,48	20,85	20,52	0,469	**0,1648**
6	RVND	1	783	19,53	21,7	20,25	20,52	20,92	20,56	0,457	**0,05223**
	GDVND	4		18,73	21,45	20,11	20,37	20,74	20,4	0,513	
	DVND	4		22,29	24,33	23,04	23,35	23,62	23,35	0,441	0,02061
7	RVND	1	1001	22,23	24,88	23,08	23,37	23,7	23,38	0,503	0,009164
	GDVND	4		20,66	24,09	22,91	23,17	23,5	23,17	0,493	

e DVND, ao passo que o GDVND apresenta uma amplitude inter-quartil maior e ligeiramente deslocada para baixo, indicando maior variabilidade na qualidade da solução e soluções de qualidade um pouco inferiores.

Figura 40 – Melhoria no valor da solução para os algoritmos GDVND, DVND e RVND, n representa o tamanho da instância. Instâncias 0 a 3.



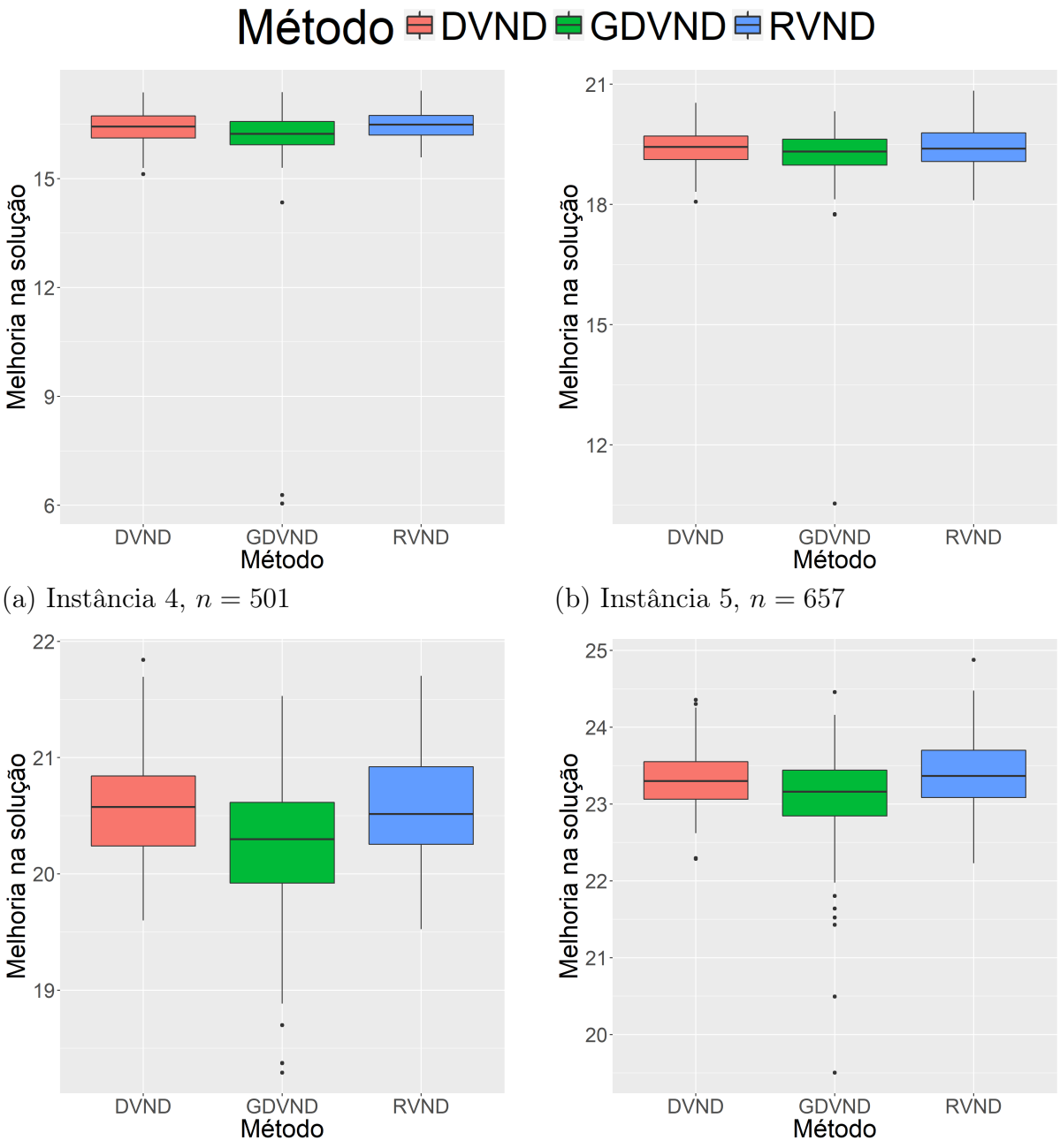
(a) Instância 0, $n = 52$

(b) Instância 1, $n = 100$

(c) Instância 2, $n = 226$

(d) Instância 3, $n = 318$

Figura 41 – Melhoria no valor da solução para os algoritmos GDVND, DVND e RVND, n representa o tamanho da instância. Instâncias 4 a 7.



(a) Instância 4, $n = 501$

(b) Instância 5, $n = 657$

(c) Instância 6, $n = 783$

(d) Instância 7, $n = 1001$

3.6.3 Analisando o tempo para combinar movimentos

Os tempos de execução do *GDVND* comparados com o DVND são exibidos nas Figuras 42a-43d, onde podemos ver: o tempo gasto pelo *GDVND*; o tempo gasto pelo *DVND*; e o tempo gasto pelo *GDVND* subtraído do tempo para combinar os movimentos retornados pela busca local (*GDVND-MAN*), logo, este último representa o tempo efetivamente gasto na busca local.

De forma geral podemos ver que, exceto para as duas primeiras instâncias (Figura 42a e 42b), o GDVND apresenta tempos de execução maiores que o DVND para a maioria

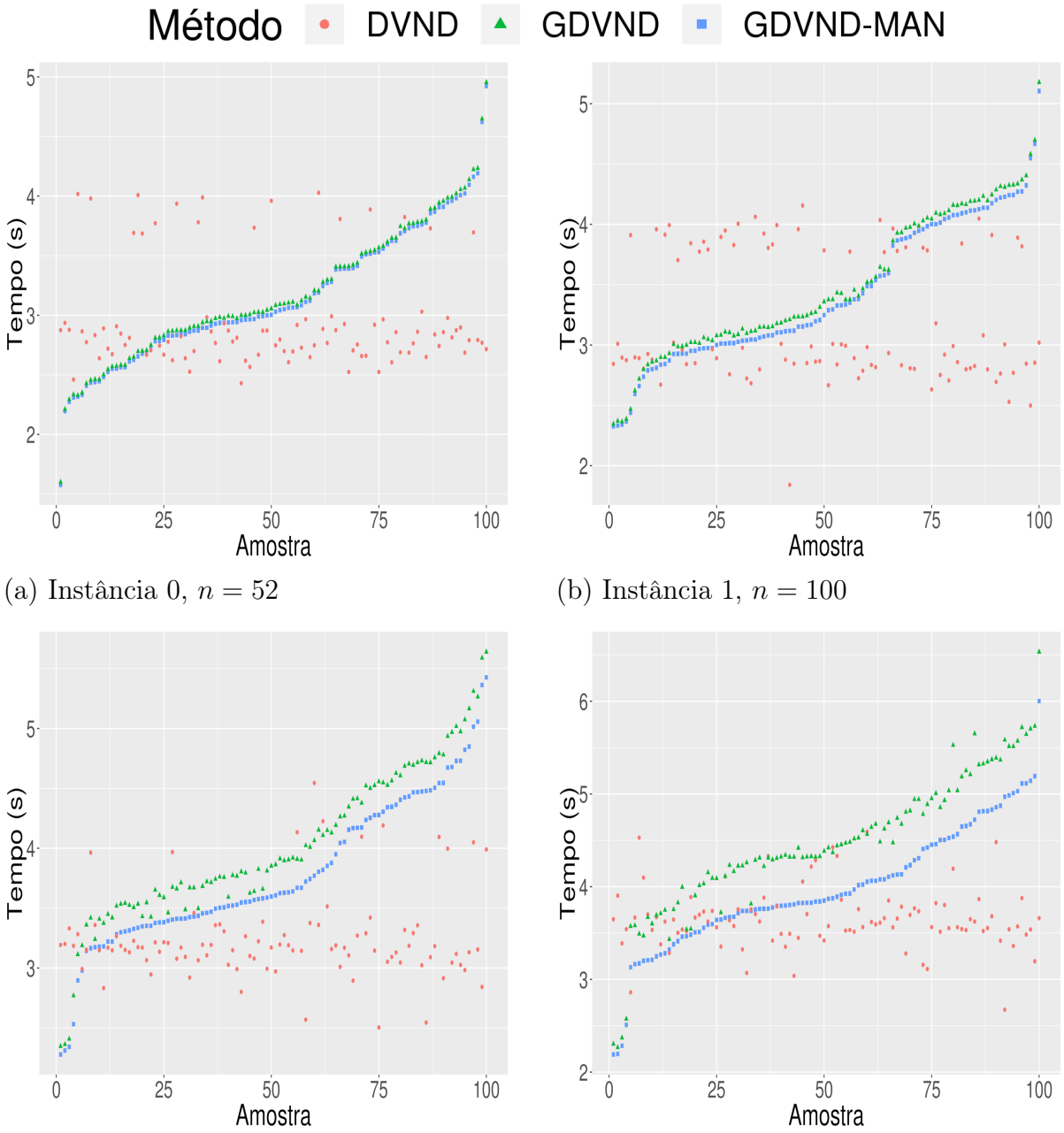
das amostras.

Para as instâncias até o tamanho de 318 o tempo necessário para combinar os movimentos não representa grande diferença no tempo total de execução, de forma que apenas a partir da instância 4, de tamanho 501 (Figura 43a), que o tempo sem as operações sobre os movimentos (*GDVND-MAN*) consegue ser melhor em uma quantidade maior de amostras.

No caso da instância 5 (Figura 43b) a diferença representada pelo tempo de execução gasto ao combinar os movimentos é grande, contudo o DVND ainda consegue alcançar melhores tempos em algumas das instâncias.

Finalmente, nas instâncias 6 e 7 (Figuras 43c e 43d), a diferença se mostra bastante significativa e o tempo do *GDVND-MAN* é menor na maioria das amostras.

Figura 42 – Tempo do DVND vs GDND, *DVND* refere-se ao tempo gasto pelo algoritmo de mesmo nome, para *GDVND* é análogo ao anterior, no caso do *GDVND-MAN* este se refere ao tempo do *GDVND* subtraído do tempo para gerenciar os movimentos, n representa o tamanho da instância, m indica o número de máquinas. Instâncias 0 a 3.



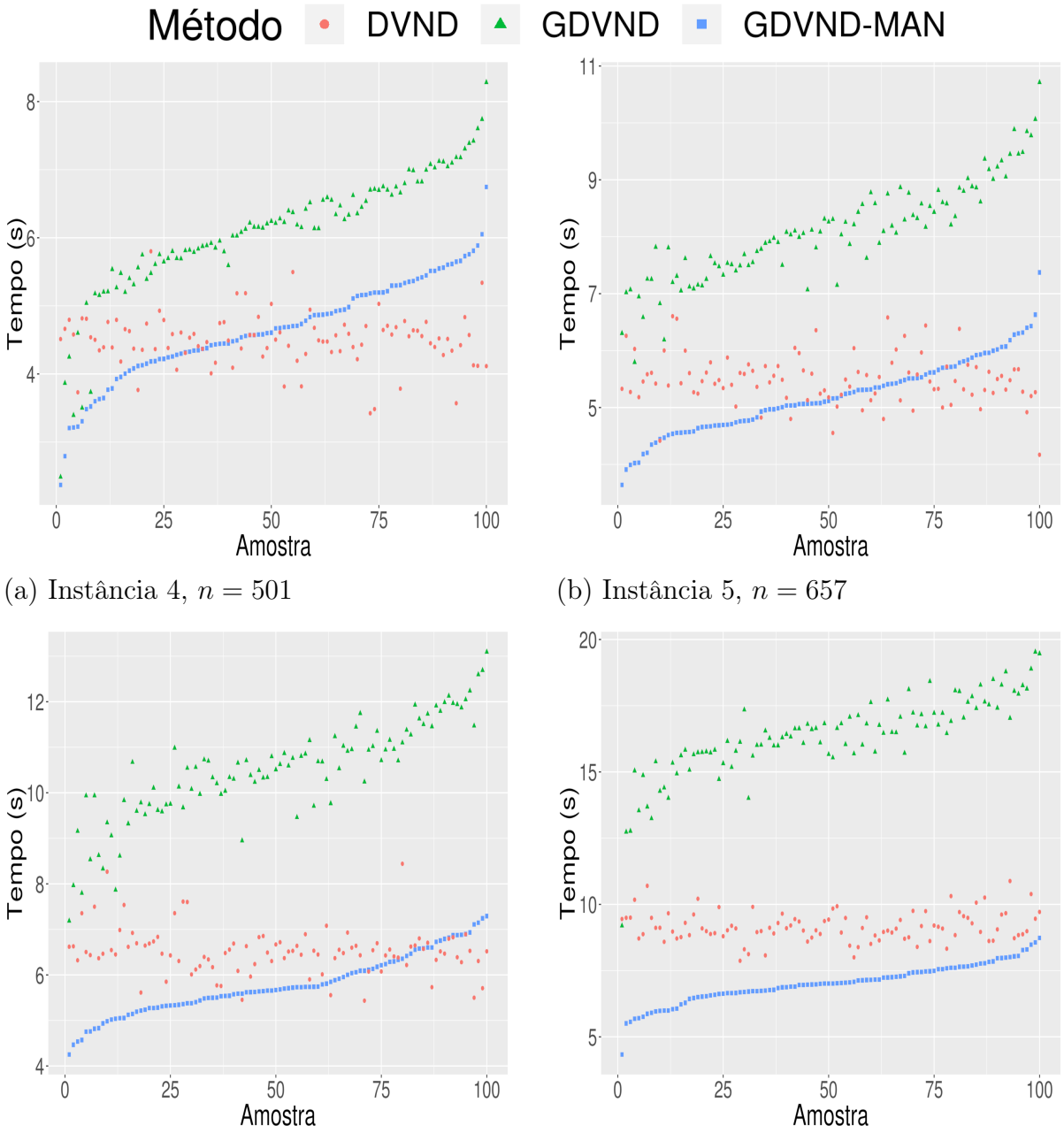
(a) Instância 0, $n = 52$

(b) Instância 1, $n = 100$

(c) Instância 2, $n = 226$

(d) Instância 3, $n = 318$

Figura 43 – Tempo do DVND vs GDND, *DVND* refere-se ao tempo gasto pelo algoritmo de mesmo nome, para *GDVND* é análogo ao anterior, no caso do *GDVND-MAN* este se refere ao tempo do *GDVND* subtraído do tempo para gerenciar os movimentos, n representa o tamanho da instância, m indica o número de máquinas. Instâncias 4 a 7.



(a) Instância 4, $n = 501$

(b) Instância 5, $n = 657$

(c) Instância 6, $n = 783$

(d) Instância 7, $n = 1001$

Da instância 2 ($n = 226$) em diante, o tempo gasto na operação de buscar a melhor combinação de movimentos começa a se acentuar, destacando-se para os casos seguintes. Este mesmo tempo torna-se maior do que o tempo gasto na própria enumeração das vizinhanças para muitas das amostragens realizadas, indicando assim que o algoritmo consegue encontrar o mínimo local em poucos passos através da combinação dos movimentos.

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Com relação aos resultados qualitativos, podemos ver que foi possível simular uma memória global em um dataflow pelo uso do nó de *flip-flop*, apresentado na Seção 2.2.2, de forma a prover uma memória para o nó *man* do grafo dataflow do DVND, expresso na Figura 19.

No que diz respeito aos resultados quantitativos estes são discutidos a seguir. Conforme discutido na Seção 2.2.3, foi proposta a melhoria da biblioteca *Sucuri* para que os nós de seus grafos comportem múltiplas portas de saída, sendo visto na Seção 3.3 que os resultados indicam sua eficiência para instâncias com tamanho maior ou igual a 318.

Foi discutido na Seção 3.4, que em termos de melhoria na qualidade da solução não foi encontrada grande diferença nos métodos RVND entre sua implementação clássica e da em dataflow.

Em termos de tempo de execução houve uma pequena diferença em algumas instâncias pesando para a implementação dataflow e em outras para a implementação clássica, contudo a implementação clássica apresentando melhores resultados em relação ao tempo na maioria dos casos.

No que diz respeito a comparação entre o DVND implementado em dataflow e a implementação original, podemos ver que a versão clássica apresentou melhores tempos para as menores instâncias, sendo alcançado apenas na instância 5, de tamanho 657 em diante. Somente na instância 7 (tamanho 1001) o DVND em dataflow conseguiu melhorar o tempo do DVND clássico, contudo a melhoria dos resultados com o aumento do tamanho da solução indica que o mesmo possui tempo de execução mais controlado para grandes instâncias.

Em termos de valor da solução encontrada pode-se ver, na discussão da Seção 3.5, que o DVND clássico conseguiu melhorar mais a solução inicial quando comparado à implementação em dataflow.

É importante ressaltar que tanto a implementação clássica quanto a implementação em dataflow do DVND melhoraram o tempo de execução quando comparadas ao RVND dataflow ou mesmo o clássico.

Desta forma foi possível mostrar que o GDVND consegue diminuir a necessidade de explorar vizinhanças pois, conforme discutido na Seção 3.6.3, o tempo gasto por esse na exploração de vizinhanças é menor para as maiores instâncias, contudo carece de uma melhor estratégia para combinar os movimentos, pois este está tomando uma parte significativa do tempo de execução do procedimento como um todo.

Propostas futuras

No desenvolvimento da experimentação e da análise dos resultados algumas novas hipóteses foram levantadas e são aqui apresentadas para estudo posterior.

Testar com instâncias maiores

No intuito de verificar melhor o desempenho do método dataflow DVND e GDVND, bem como sua escalabilidade, uma prova de conceito imaginada para ser utilizada é a realização de testes computacionais para instâncias maiores, tendo em vista a comparação de resultados com instâncias do clássico PCV.

Decomposição de vizinhanças

Conforme descrito na seção 2.5, as vizinhanças exploradas nos problemas não são indivisíveis, desta forma uma maneira de proporcionar maior paralelismo pode ser feita através da decomposição das destas em sub vizinhanças de forma a serem exploradas paralelamente.

Acredita-se que a decomposição de vizinhanças aliada a composição de movimentos podem proporcionar um grande ganho em termos de qualidade da solução, além de uma convergência muito mas rápida ao serem aplicados mais movimentos simultaneamente, melhorando assim o tempo da busca local, que, em geral, é a etapa mais custosa em termos computacionais para o processo de solução de um problema de otimização.

REFERÊNCIAS

ALVES, Tiago et al. A minimalistic dataflow programming library for python. In: IEEE. *Computer Architecture and High Performance Computing Workshop (SBAC-PADW), 2014 International Symposium on*. [S.l.], 2014.

ALVES, Tiago A.O. et al. Trebuchet: exploring TLP with dataflow virtualisation. *International Journal of High Performance Systems Architecture*, Inderscience Publishers, Inderscience Publishers, Geneva, SWITZERLAND, v. 3, n. 2/3, p. 137, 2011. ISSN 1751-6528.

ALVES, Tiago A.O.; MARZULO, Leandro A. J.; FRANCA, Felipe M. G. Unleashing parallelism in longest common subsequence using dataflow. In: *4th Workshop on Applications for Multi-Core Architectures*. [S.l.: s.n.], 2013.

ALVES, Tiago A. O. et al. Concurrency analysis in dynamic dataflow graphs. *IEEE Transactions on Emerging Topics in Computing*, IEEE, p. 1–1, January 2018. ISSN 2168-6750. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/8269827>.

ARAUJO, Rodolfo Pereira et al. A novel list-constrained randomized vnd approach in gpu for the traveling thief problem. *Eletronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 66, p. 183–190, 2018.

BALAKRISHNAN, Saisanthosh; SOHI, G.S. Program Demultiplexing: Data-flow based Speculative Parallelization of Methods in Sequential Programs. In: *33rd International Symposium on Computer Architecture (ISCA'06)*. Washington, DC, USA: IEEE, 2006. p. 302–313. ISBN 0-7695-2608-X.

BIANCO, Lucio; MINGOZZI, Aristide; RICCIARDELLI, Salvatore. The traveling salesman problem with cumulative costs. *Networks*, Wiley Online Library, v. 23, n. 2, p. 81–91, 1993.

BOSILCA, George et al. Dague: A generic distributed dag engine for high performance computing. *Parallel Computing*, v. 38, n. 1-2, p. 37–51, 2012.

COELHO, Igor Machado; ARAUJO, Rodolfo Pereira. *SimplePyCuda*. 2017. <https://github.com/igormcoelho/simple-pycuda>. Accessed: 2018-02-16.

CONGRAM, Richard K. *Polynomially Searchable Exponential Neighbourhoods for Sequencing Problems in Combinatorial Optimisation.* Tese (Doutorado) — University of Southampton, United Kingdom, 4 2000.

CONGRAM, Richard K.; POTTS, Chris N.; VELDE, Steef L. van de. An iterated dynasearch algorithm for the single-machine total weighted tardiness scheduling problem. *INFORMS Journal on Computing*, v. 14, n. 1, p. 52–67, 2002.

DAVIS, A. L. The architecture and system method of ddm1: A recursively structured data driven machine. In: *Proceedings of the 5th Annual Symposium on Computer Architecture*. New York, NY, USA: ACM, 1978. (ISCA '78), p. 210–215. Disponível em: <http://doi.acm.org/10.1145/800094.803050>.

DENNIS, Jack B.; MISUNAS, David P. A preliminary architecture for a basic data-flow processor. *SIGARCH Comput. Archit. News*, ACM Press, New York, NY, USA, v. 3, n. 4, p. 126–132, 1974. ISSN 0163-5964.

DURAN, Alejandro et al. Ompss: A proposal for programming heterogeneous multi-core architectures. *Parallel Processing Letters*, v. 21, p. 173–193, 2011-03-01 2011.

FINK, Andreas; VOB, Stefan. *Hotframe: A Heuristic Optimization Framework*. Boston, MA, USA: Springer, 2003. ISBN 978-1-4020-7002-0.

FLYNN, Michael J. Some computer organizations and their effectiveness. *IEEE Transactions on Computers*, IEEE, C-21, n. 9, p. 948–960, set. 1972.

GAREY, Michael R.; JOHNSON, David S. *Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness*. New York, NY, USA: W. H. Freeman & Co., 1990. ISBN 0716710455.

GENDREAU, Michel; POTVIN, Jean-Yves (Ed.). *Handbook of Metaheuristics*. Springer, 2010. Disponível em: <https://EconPapers.repec.org/RePEc:spr:isorms:978-1-4419-1665-5>.

GIORGI, Roberto et al. TERAFLUX: Harnessing dataflow in next generation teradevices. *Microprocessors and Microsystems*, Elsevier, p. –, 2014. Available online 18 April 2014.

GLOVER, Fred W; KOCHENBERGER, Gary A. *Handbook of metaheuristics*. New York: Springer, 2006. v. 57.

GRAFE, V. G. et al. The epsilon dataflow processor. In: *Proceedings of the 16th Annual International Symposium on Computer Architecture*. New York, NY, USA: ACM, 1989. (ISCA '89), p. 36–45. ISBN 0-89791-319-1. Disponível em: <http://doi.acm.org/10.1145/74925.74930>.

GUPTA, Gagan; SOHI, Gurindar S. Dataflow execution of sequential imperative programs on multicore architectures. In: *Proceedings of the 44th Annual IEEE/ACM International Symposium on Microarchitecture*. New York, NY, USA: ACM, 2011. (MICRO-44), p. 59–70. ISBN 978-1-4503-1053-6. Disponível em: <http://doi.acm.org/10.1145/2155620.2155628>.

GURD, J R; KIRKHAM, C C; WATSON, I. The Manchester prototype dataflow computer. *Communications of the ACM*, ACM, New York, NY, USA, v. 28, n. 1, p. 34–52, jan. 1985. ISSN 00010782.

HENNESSY, John L; PATTERSON, David A. *Computer architecture: a quantitative approach*. 5th. ed. San Francisco, CA, USA: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 2011. 856 p. ISBN 9780123838728.

KISHI, Masasuke; YASUHARA, Hiroshi; KAWAMURA, Yasusuke. Dddp-a distributed data driven processor. *SIGARCH Comput. Archit. News*, ACM, New York, NY, USA, v. 11, n. 3, p. 236–242, jun. 1983. ISSN 0163-5964. Disponível em: <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1067651.801661>.

MARZULO, Leandro Augusto Justen. *Explorando linhas de execução paralelas com programação orientada por fluxo de dados*. Tese (Doutorado) — Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 10 2011. Universidade Federal do Rio de Janeiro.

MLADENOVIć, Nenad; HANSEN, Pierre. Variable neighborhood search. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 24, n. 11, p. 1097–1100, nov. 1997.

MLADENOVIĆ, Nenad; UROŠEVIĆ, Dragan; HANAFI, Saïd. Variable neighborhood search for the travelling deliveryman problem. *4OR*, Springer, v. 11, n. 1, p. 57–73, 2013.

NVIDIA. *CUDA Pro Tip: Occupancy API Simplifies Launch Configuration*. 2014. Disponível em: <https://devblogs.nvidia.com/cuda-pro-tip-occupancy-api-simplifies-launch-configuration/>.

PAPADOPOULOS, G. M.; CULLER, D. E. Monsoon: an explicit token-store architecture. In: *[1990] Proceedings. The 17th Annual International Symposium on Computer Architecture*. [S.l.: s.n.], 1990. p. 82–91.

PATTERSON, David; HENNESSY, John. *Computer organization and design (3rd ed.): the hardware/software interface*. Morgan Kaufmann Publishers Inc., 2003. (The Morgan Kaufmann Series in Computer Architecture and Design). ISBN 1558604286. Disponível em: <https://www.elsevier.com/books/computer-organization-and-design/patterson/978-0-08-050257-1>.

RIOS, Eyder et al. A benchmark on multi improvement neighborhood search strategies in cpu/gpu systems. In: *WAMCA 2016 (SBAC 2016)*. [S.l.: s.n.], 2016.

_____. A performance study on gpu-based neighborhood search algorithms for vehicle routing. In: *6th Workshop on Applications for Multi-core Architectures (WAMCA), held in conjuction with SBAC-PAD'2015*. Florianópolis, SC, Brazil: [s.n.], 2015.

_____. Exploring parallel multi-gpu local search strategies in a metaheuristic framework. *JOURNAL OF PARALLEL AND DISTRIBUTED COMPUTING*, v. 111, p. 39–55, 2017.

_____. A performance study on multi improvement neighborhood search strategy. *ELECTRONIC NOTES IN DISCRETE MATHEMATICS*, v. 58, p. 199–206, 2017.

_____. Exploring parallel multi-gpu local search strategies in a metaheuristic framework. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, Elsevier, v. 111, n. 1, p. 39 – 55, jan 2018. ISSN 0743-7315. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0743731517302009>.

RIOS, Eyder Franco Sousa. *Exploração de Estratégias de Busca Local em Ambientes CPU/GPU*. Tese (Doutorado) — Instituto de Computação, Universidade Federal Fluminense, Niterói, RJ, Brasil, 2016.

SAKAI, S. et al. An architecture of a dataflow single chip processor. In: *The 16th Annual International Symposium on Computer Architecture*. [S.l.: s.n.], 1989. p. 46–53. ISSN 1063-6897.

SHIMADA, T. et al. Evaluation of a prototype data flow processor of the sigma-1 for scientific computations. *SIGARCH Comput. Archit. News*, ACM, New York, NY, USA, v. 14, n. 2, p. 226–234, maio 1986. ISSN 0163-5964. Disponível em: <http://doi.acm.org/10.1145/17356.17383>.

SILVA, Marcos Melo et al. A simple and effective metaheuristic for the minimum latency problem. *EJOR*, Elsevier B.V., v. 221, n. 3, p. 513–520, Sep 2012. ISSN 03772217. Disponível em: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S037722171200269X>.

SILVA, Rafael J.N. et al. Task Scheduling in Sucuri Dataflow Library. In: *2016 International Symposium on Computer Architecture and High Performance Computing Workshops (SBAC-PADW)*. IEEE, 2016. v. 1, p. 37–42. ISBN 978-1-5090-4844-1. Disponível em: <http://ieeexplore.ieee.org/document/7803693/>.

SOUZA, M.J.F. et al. A hybrid heuristic algorithm for the open-pit-mining operational planning problem. *European Journal of Operational Research*, v. 207, n. 2, p. 1041 – 1051, 2010. ISSN 0377-2217. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221710003875>.

SUBRAMANIAN, Anand; UCHOA, Eduardo; OCHI, Luiz Satoru. A hybrid algorithm for a class of vehicle routing problems. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 40, n. 10, p. 2519–2531, out. 2013.

SWANSON, S et al. WaveScalar. In: *Microarchitecture, 2003. MICRO-36. Proceedings. 36th Annual IEEE/ACM International Symposium on*. [S.l.]: IEEE Comput. Soc, 2003. p. 291–302. ISBN 0-7695-2043-X.

SWANSON, Steven et al. The wavescalar architecture. *ACM Trans. Comput. Syst.*, ACM, New York, NY, USA, v. 25, n. 2, p. 4:1–4:54, maio 2007. ISSN 0734-2071. Disponível em: <http://doi.acm.org/10.1145/1233307.1233308>.

TBB FlowGraph. accessed on August 8, 2014. Disponível em: <http://www.threadingbuildingblocks.org/docs/help/reference/flow_graph.htm>.

TOMASULO, R M. An efficient algorithm for exploring multiple arithmetic units. *IBM Journal of Research and Development*, v. 11, p. 25–33, jan. 1967.

TSITSIKLIS, John N. Special cases of traveling salesman and repairman problems with time windows. *Networks*, v. 22, n. 3, p. 263–282, maio 1992.