



Universidade do Estado do Rio de Janeiro  
Centro de Tecnologia e Ciências  
Instituto de Matemática e Estatística

Lívia Salgado Medeiros

**Um problema extremal em contagem de intervalo**

Rio de Janeiro  
2018

Lívia Salgado Medeiros

**Um problema extremal em contagem de intervalo**



Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Computacionais, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientadores: Prof. Dr. Fabiano de Souza Oliveira  
Prof. Ph.D. Jayme Luiz Szwarcfiter

Rio de Janeiro  
2018

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIRUS / BIBLIOTECA CTC-A

M488 Medeiros, Livia Salgado.  
Um problema extremal em contagem de intervalo / Livia Salgado  
Medeiros. – 2018.  
65f.

Orientadores: Fabiano de Souza Oliveira, Jayme Luiz Szwarcfiter.  
Dissertação (Mestrado Ciências Computacionais) - Universidade do  
Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Teoria dos grafos - Teses. 2. Algoritmos - Teses. I.Oliveira, Fabiano  
de Souza II. Szwarcfiter, Jayme Luiz. III. Universidade do Estado do Rio  
de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV.Título.

CDU 519.17

Rosalina Barros *CRB-7 / 4204* - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica.

Autorizo para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial  
desta dissertação, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Lívia Salgado Medeiros

## Um problema extremal em contagem de intervalo

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Computacionais, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 14 de setembro de 2018

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Fabiano de Souza Oliveira (Orientador)  
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

---

Prof. Ph.D. Jayme Luiz Szwarcfiter (Orientador)  
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

---

Prof<sup>a</sup>. Dra. Márcia Rosana Cerioli  
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ

---

Prof. Dr. Luerbio Faria  
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Rio de Janeiro  
2018

## DEDICATÓRIA

Ao meu esposo Anderson, por todo incentivo, companheirismo e amor.

## AGRADECIMENTOS

Não poderia deixar de agradecer a todos que participaram, direta ou indiretamente, da realização de mais um sonho.

Primeiramente a Deus, pelo dom da vida, por sempre atender ao meu clamor e por colocar em meu caminho pessoas que me ajudam a amar e entender o significado da vida.

Aos meus avós Gildo e Zuleika. Gildo, por ser o primeiro a me apresentar a matemática, me ensinar a importância dos estudos, do crescimento pessoal e profissional, pelo exemplo de vida e pela ternura em pessoa. Zuleika, pela sua capacidade de ver a vida de forma tão alegre. Considero-me uma pessoa otimista e devo isto a você. Além disso, nos momentos mais divertidos da minha infância que sempre esteve presente.

Aos meus pais, Alexandre e Sandra. Vocês são o meu alicerce, meu porto seguro. Sempre me ensinaram a buscar o que me torna feliz. Estudar sempre foi prioridade em casa, muitas vezes abdicaram dos sonhos pessoais para deixar para mim e para meus irmãos a maior fortuna: os estudos. Mesmo morando em uma cidade pequena, não mediram esforços para que pudéssemos alcançar os nossos objetivos. Devo a vocês a realização desse grande sonho.

Aos meus irmãos e sobrinhos, por entenderem os momentos que não pudemos estar juntos e se orgulharem de cada etapa das minhas conquistas que dividi com vocês. De vocês, recebi todo o amor.

A todos os professores que passaram em minha vida estudantil. De modo muito especial, aos meus orientadores Fabiano e Jayme. Conheci o Fabiano como meu professor na disciplina de algoritmos, obrigatória no mestrado. Em princípio, como graduada em matemática, pensei que seria apenas uma disciplina para cursar antes de escolher outra área, mas adorei a matéria e as aulas, que eram desafiadoras e estimulantes. Um profissional que possui o dom de extrair dos alunos o melhor deles. Sinto-me privilegiada por ter você como professor e orientador. Jayme, obrigada por aceitar me orientar sem ao menos me conhecer. O progresso desse trabalho não seria tão gratificante sem o seu olhar, e acredito quanto ao meu progresso pessoal também. Impecável a orientação de vocês, sempre dispostos a tirar dúvidas, a me ensinar a pesquisar, a escrever, a direcionar. Levo para mim o aprendizado profissional e pessoal, vocês são pessoas que somam para um mundo mais justo e melhor.

À minha amiga Juliana, amizade fruto desse mestrado. Caminhou ao meu lado desde o processo seletivo, onde nos conhecemos, e formamos uma dupla inseparável. Não apenas quanto aos estudos, mas também quanto aos momentos diários. Conhecer você foi um presente de Deus e sou grata a Ele pela sua vida. Creio que não seria capaz de passar por cada etapa deste mestrado sozinha e o melhor de tudo é que você veio para ficar. Finalizamos o mestrado, mas a amizade será eterna.

A todos os meus amigos, uns a distância e outros no convívio diário, obrigada pelas palavras, pelo incentivo, por estarem ao meu lado e me apoiarem nesse momento.

Ao meu grande amor, Anderson, meu esposo, melhor amigo e companheiro. Obrigada por fazer do meu sonho uma prioridade, tornando o nosso sonho. Obrigada por estar sempre ao meu lado, me acolhendo nos momentos difíceis, pelas melhores palavras, conselhos e incentivo. É pleno de carinho o sentimento de lembrar o seu companheirismo em todos os momentos desse mestrado.

## RESUMO

MEDEIROS, Livia. *Um problema extremal em contagem de intervalo*. 2018. 65f. Dissertação (Mestrado em Ciências Computacionais) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

Esta dissertação apresenta um estudo sobre o problema da contagem de intervalo para grafos e ordens de intervalo. A contagem de intervalo de um dado grafo (resp. ordem) é o menor número de tamanhos de intervalo necessário em um modelo deste grafo (resp. ordem). No primeiro instante, a pesquisa foi direcionada a uma revisão da literatura sobre o problema da contagem de intervalo e seus principais resultados. Em seguida, tratamos do problema extremal que consiste em determinar o menor grafo ou ordem que possui a contagem de intervalo igual a dado natural  $k$ . Em particular, estudamos uma conjectura acerca deste problema extremal, verificando sua validade quando restrita às classes das ordens trivialmente perfeitas e de divisão. São apresentados resultados também acerca das classes de ordens e grafos que podem ser representados por dois tamanhos específicos, no que se refere à hierarquia de inclusão entre tais classes.

Palavras-chave: Contagem de Intervalo. Grafos de Intervalo. Grafo de Divisão. Grafo Trivialmente Perfeito. Ordens de Intervalo. Problema Extremal.

## ABSTRACT

MEDEIROS, Livia. *An extremal problem on the interval count*. 2018. 65p. Dissertação (Mestrado em Ciências Computacionais) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

This dissertation presents a study on the problem of interval count for interval graphs and interval orders. Firstly, the research was directed to a review of the existing literature on the problem of interval count and its main results. Then, we deal with an extremal problem which consists in determining the smallest order or graph that has interval count equal to  $k$ . In particular, we study a conjecture about this extremal problem, verifying its validity when it is restricted to the classes of trivially perfect and split classes. It is also presented results about the classes of orders or graphs that can be represented by two specific sizes, with respect to the inclusion hierarchy among those classes.

Keywords: Extremal Problem. Interval Count. Interval Graphs. Interval Orders. Split Graph. Trivially Perfect Graph.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – (i) Um grafo $G$ , (ii) um modelo $R$ de $G$ , (iii) um modelo obtido a partir de $R$ , com diferentes espaçamentos e (iv) um modelo obtido a partir de $R$ com os intervalos $a, b$ e $e$ deslocados à direita. . . . .	12
Figura 2 – (i) Um grafo $G$ , (ii) um modelo $G$ com três tamanhos distintos e (iii) um modelo de $G$ com dois tamanhos distintos. . . . .	13
Figura 3 – (i) Uma ordem de intervalo $P$ , definida por um de seus modelos, com $IC(P) = 3$ e com 13 intervalos, (ii) uma ordem de intervalo $P$ , definida por um de seus modelos, com $IC(P) = 3$ e com 7 intervalos e (iii) um modelo de $G$ obtido a partir do modelo (ii) com $IC(G) = 2$ e com 7 intervalos. . . . .	14
Figura 4 – Diagrama de Hasse representando uma ordem dos divisores de 30. . . . .	18
Figura 5 – (i) Uma ordem $P$ , (ii) um modelo $R$ de $P$ e (iii) o grafo $G$ de interseção de $R$ . Logo, $P$ concorda com $G$ . . . . .	19
Figura 6 – Em (i) $x \subset_A y$ e (ii) $x \subset_A y \subset_A z$ . . . . .	19
Figura 7 – Relação $x_1 \subset_A x_2 \subset_A \dots \subset_A x_k$ , os intervalos $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$ são intervalos aninhados. . . . .	20
Figura 8 – (i) Uma ordem $P$ , (ii) o grafo de comparabilidade de $P$ . . . . .	20
Figura 9 – (i) Uma ordem $P$ , (ii) o grafo de comparabilidade de $P$ orientado transitivamente. . . . .	21
Figura 10 – (i) Um $P_4$ , (ii) uma orientação transitiva de $P_4$ e (iii) um modelo de $P_4$ . . . . .	21
Figura 11 – Grafo garra e um de seus modelos de intervalo. . . . .	23
Figura 12 – Os vértices de $S = \{a, b, c\}$ são os vértices simpliciais do grafo de intervalo $G$ e $G \setminus S$ é um grafo de intervalo unitário, mas $G$ não pode ser representado apenas por intervalos de tamanho zero ou um. . . . .	24
Figura 13 – Subgrafos induzidos proibidos para grafos que admitem modelo de tamanhos zero ou um onde os vértices circulados devem ser não-simpliciais em $G$ . . . . .	25
Figura 14 – Exemplo de ordem $P$ com $\theta(P) = (1, 2)$ . . . . .	25
Figura 15 – Exemplo de ordem cujo conjunto admissível não é contínuo. . . . .	26
Figura 16 – Conjunto de ordens proibidas para ordens de intervalos com modelo- $\{0, 1\}$ . . . . .	27
Figura 17 – Ordem com pesos proibidos. O círculo sólido representa pontos com peso 2. O círculo oco representa pontos com peso 1 e o círculo com uma cruz representa pontos em que os pesos podem ser 1 ou 2. . . . .	28
Figura 18 – Da esquerda para a direita as figuras exemplificam elementos de $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ e $\mathcal{F}_4$ (em particular aqueles com $t = 4$ ). O círculo sólido representa pontos com peso 2. O círculo oco representa pontos com peso 1 e o círculo com uma cruz representa pontos que os pesos podem ser 1 ou 2. . . . .	29
Figura 19 – Diagrama de inclusão entre tais classes. . . . .	31
Figura 20 – Modelo canônico de um grafo de divisão. . . . .	32
Figura 21 – (i) Grafo unitário $G$ . (ii) Representação parcial dos vértices $a$ e $b$ . (iii) Representação do grafo $G$ . . . . .	35

Figura 22 – A construção sugerida por Fishburn [1]. . . . .	36
Figura 23 – Alguns valores de $v(k,q)$ . . . . .	38
Figura 24 – Diagrama da estratégia de estudo da Conjectura 18 para as classes das ordens. Os modelos nos diagramas das classes estudadas são exemplos de modelos mínimos para $k = 3$ . . . . .	39
Figura 25 – Um modelo de $G_3$ . . . . .	40
Figura 26 – Modelo de intervalo da ordem $P_3$ . . . . .	41
Figura 27 – Modelo de grafo de divisão $G$ com $IC(G) = 3$ e $n = 8$ . . . . .	42
Figura 28 – Definição de $G_k$ , para $k > 3$ . . . . .	43
Figura 29 – Orientação transitiva de $\overline{G_3}$ . . . . .	44
Figura 30 – Modelos de um grafo de divisão, com $c(k) = 4$ . . . . .	46
Figura 31 – Modelo $R$ de um grafo de divisão. . . . .	48
Figura 32 – Modelo $R'$ obtido a partir de $R$ . . . . .	48
Figura 33 – Modelo $R$ de um grafo de divisão. . . . .	51
Figura 34 – Modelo $R'$ de um grafo de divisão obtido a partir de $R$ . . . . .	51
Figura 35 – Modelo $R$ de um grafo de divisão. . . . .	52
Figura 36 – Modelo $R'$ de um grafo de divisão obtido a partir de $R$ . . . . .	52
Figura 37 – Modelo $R$ de uma ordem de divisão $P = (X, \prec)$ com $ X  = 3k - 2$ $IC(P) = k$ . . . . .	53
Figura 38 – Modelo $R$ de um grafo de divisão após aplicação do Lema 32. . . . .	54
Figura 39 – Modelo $R'$ obtido a partir de $R$ com os intervalos do conjunto independente e o intervalo $z$ com o mesmo tamanho. . . . .	55
Figura 40 – Modelo- $\{0, k\}$ de um grafo que não admite modelo- $\{a, b\}$ . . . . .	57
Figura 41 – Modelo- $\{a, b\}$ de um grafo que não admite modelo- $\{0, k\}$ . . . . .	57
Figura 42 – Modelo- $\{1, 2\}$ . . . . .	58
Figura 43 – Modelo- $\{2, 5\}$ . . . . .	59
Figura 44 – Esquema do modelo para $\frac{b'}{a'} < \frac{b}{a}$ . . . . .	59
Figura 45 – Esquema do modelo para $\frac{b'}{a'} > \frac{b}{a}$ . . . . .	60

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Características adicionais da família $\mathcal{F}$ . . . . .	28
Tabela 2 – Resultados obtidos de $\sigma_{\mathcal{C}}(k)$ e $\tilde{\sigma}_{\mathcal{C}}(k)$ , com $\mathcal{C} \in \{\text{TP}, \text{DIVISÃO}\}$ . . . . .	55

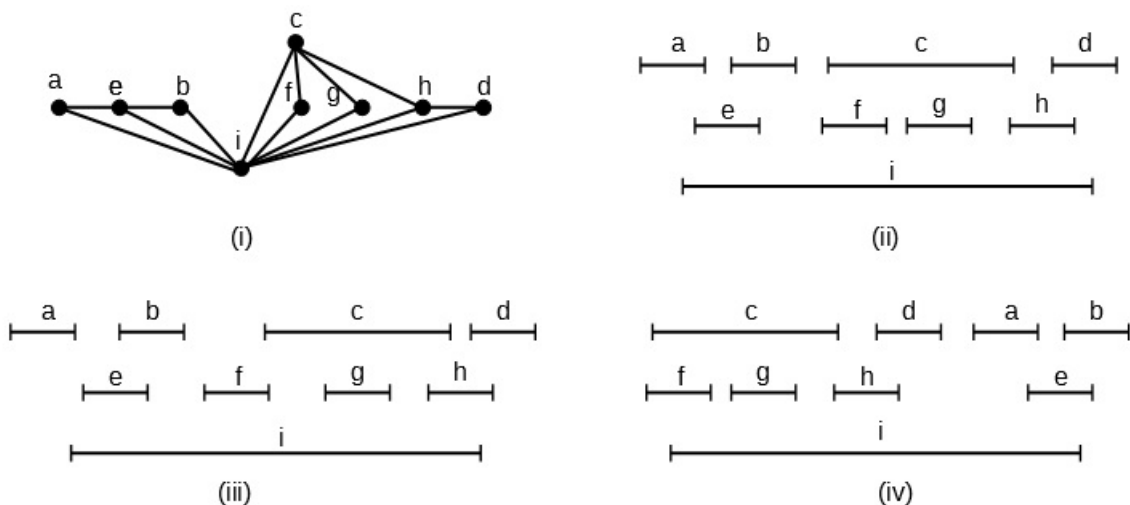
## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	12
1	<b>DEFINIÇÕES</b> . . . . .	16
1.1	Teoria dos grafos e algoritmos . . . . .	16
1.2	Grafos de intervalo . . . . .	17
1.3	Ordens de intervalo . . . . .	18
2	<b>O PROBLEMA DA CONTAGEM DE INTERVALO</b> . . . . .	22
2.1	Contagem de intervalo . . . . .	22
2.2	Contagem de intervalo igual a um . . . . .	23
2.3	Contagem de intervalo igual a dois . . . . .	24
2.4	Contagem de intervalo com valor arbitrário . . . . .	29
2.5	Contagem de intervalo restrita a classes . . . . .	30
2.6	Relação com o número de cliques . . . . .	33
2.7	Problemas relacionados . . . . .	33
3	<b>UM PROBLEMA EXTREMAL SOBRE A CONTAGEM DE INTERVALO</b> . . . . .	36
3.1	Introdução . . . . .	36
3.2	Problema extremal para grafos e ordens da classe trivialmente perfeita . . . . .	39
3.3	Problema extremal para grafos e ordens de divisão . . . . .	42
3.4	Conclusão . . . . .	55
4	<b>SOBRE AS CLASSES DE CONTAGEM DE INTERVALO IGUAL A DOIS</b> . . . . .	56
4.1	Resultados existentes . . . . .	56
4.2	Relação de inclusão entre classes $LEN(0,k)$ e $LEN(a,b)$ . . . . .	57
4.3	Relação de inclusão entre classes $LEN(a',b')$ e $LEN(a,b)$ . . . . .	58
	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS</b> . . . . .	62
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	64

## INTRODUÇÃO

A teoria dos grafos é uma área da matemática que estuda as relações entre os elementos de um determinado conjunto. Em teoria dos grafos, uma classe de grafos bem conhecida é aquela dos grafos de intervalo, que guarda relação estreita com ordens de intervalo (um tópico também bem conhecido em teoria de ordens). Grafos de intervalos surgiram inicialmente nas áreas de combinatória e genética [2]. Um grafo é um *grafo de intervalo* se é possível representá-lo por uma família de intervalos da reta real, chamada de *modelo*, na qual dois intervalos são adjacentes se existe interseção não-vazia entre eles. Tal representação, quando existente, não é naturalmente única: os modelos da Figura 1 (ii-iv) são modelos do grafo de intervalo da Figura 1 (i). Uma *ordem de intervalo* é uma ordem parcial sobre uma coleção de intervalos da reta real cuja relação corresponde àquela relação de precedência entre os intervalos, definida da seguinte maneira: se  $a$  precede  $b$  então o extremo direito do intervalo  $a$  é menor que o extremo esquerdo do intervalo  $b$ . Os modelos apresentados na Figura 1 ((ii) e (iii)) estão associados a uma mesma ordem, já que se mantém a mesma relação de precedência entre os intervalos, o mesmo não ocorre em relação ao modelo da Figura 1 (iv). Neste caso, este modelo está associado a uma outra ordem. A pesquisa atual é de natureza teórica, examinando propriedades estruturais e propriedades algorítmicas de grafos e ordens de intervalo [1, 3–5]. Porém, sabe-se que grafos e ordens de intervalo são aplicados a problemas envolvendo planejamento, agendamento, arqueologia, raciocínio temporal, diagnóstico médico, design do circuito, eventos nos campos da genética, mapeamento físico de DNA e psicologia comportamental [1, 3, 6, 7].

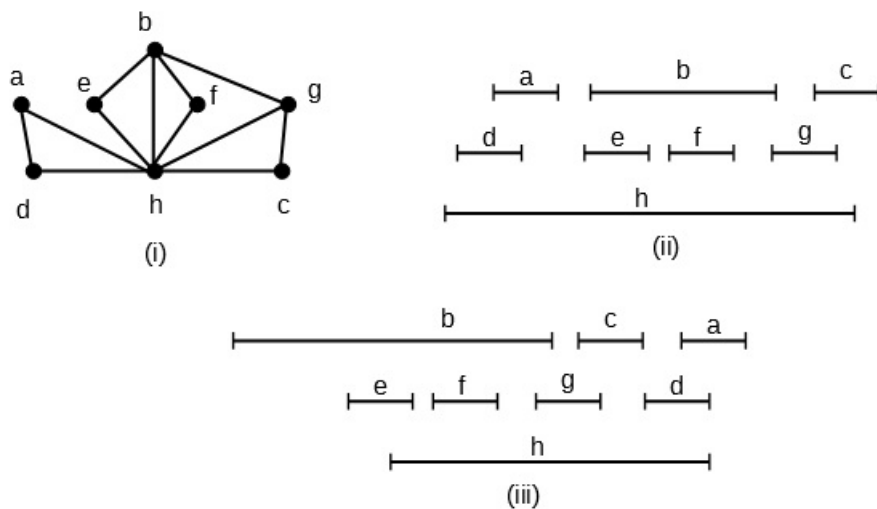
Figura 1 – (i) Um grafo  $G$ , (ii) um modelo  $R$  de  $G$ , (iii) um modelo obtido a partir de  $R$ , com diferentes espaçamentos e (iv) um modelo obtido a partir de  $R$  com os intervalos  $a, b$  e  $e$  deslocados à direita.



Ronald Graham [8] sugeriu a questão sobre quantos tamanhos diferentes de intervalos são necessários para representar um grafo de intervalo. O número mínimo de tamanhos distintos necessário é chamado de *contagem de intervalo* (do inglês, *interval count*). Em outras palavras, dado um grafo  $G$  (resp. ordem  $P$ ), consideramos portanto o problema de computar o menor número  $IC(G)$  (resp.  $IC(P)$ ) de tamanhos de intervalo para representar um modelo de intervalo de  $G$  (resp.  $P$ ), problema este é chamado de *contagem de intervalo*.

A Figura 2 (i) apresenta um exemplo de um grafo  $G$  e dois modelos com diferentes números de tamanhos distintos. O modelo de  $G$  da Figura 2 (ii) apresenta três tamanhos distintos e aquele da Figura 2 (iii), também modelo de  $G$ , apresenta dois tamanhos distintos. Veremos adiante que não existe um modelo de  $G$  com apenas um tamanho distinto e assim o modelo da Figura 2 (iii) realiza a contagem de intervalo de  $G$ , que é igual a 2. Se considerarmos o problema da contagem de intervalo da ordem  $P$  associada ao modelo da Figura 2 (ii), veremos que este modelo realiza a contagem de intervalo de  $P$ , que é igual a 3.

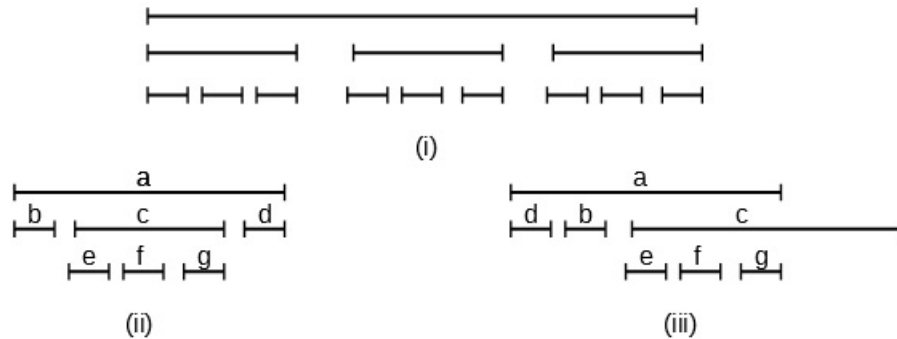
Figura 2 – (i) Um grafo  $G$ , (ii) um modelo  $G$  com três tamanhos distintos e (iii) um modelo de  $G$  com dois tamanhos distintos.



O objetivo deste trabalho é o estudo relacionado à contagem de intervalo de grafos e ordens de intervalo de algumas subclasses de grafos e ordens. A motivação surgiu com o problema da contagem de intervalo para as classes dos grafos de divisão do inglês, *split*, iniciado por Cerioli, Oliveira e Szwarcfiter [9]. Além disso, é objetivo estudar este problema sob a ótica do problema extremal apresentado por Fishburn [1], definido a seguir. Dado um natural  $k$ , a questão é determinar a menor ordem  $P$  (resp. grafo  $G$ ) em número de elementos (resp. vértices) tal que  $IC(P) = k$  (resp.  $IC(G) = k$ ).

A Figura 3 (i) apresenta um exemplo de uma ordem de intervalo  $P$ , definida por um de seus modelos, com  $IC(P) = 3$  e com 13 intervalos. A essência do problema extremal consiste em determinar se existe uma ordem de intervalo com a mesma contagem de intervalo, mas com uma quantidade menor de intervalos. A Figura 3 (ii) apresenta um modelo de uma ordem de intervalo com uma quantidade menor de intervalos e com a mesma contagem de intervalo da ordem apresentada na Figura 3 (i), provando que 13 não é o número mínimo de intervalos para se obter uma ordem com contagem de intervalo igual a 3.

Figura 3 – (i) Uma ordem de intervalo  $P$ , definida por um de seus modelos, com  $IC(P) = 3$  e com 13 intervalos, (ii) uma ordem de intervalo  $P$ , definida por um de seus modelos, com  $IC(P) = 3$  e com 7 intervalos e (iii) um modelo de  $G$  obtido a partir do modelo (ii) com  $IC(G) = 2$  e com 7 intervalos.



Se o problema extremal for com respeito a grafos de intervalo, o modelo apresentado na Figura 3 (ii) contudo, já deixa de ter contagem de intervalo igual a 3, pois é possível obter o modelo da Figura 3 (iii) do mesmo grafo que admite apenas 2 tamanhos. Trataremos deste problema extremal no Capítulo 3.

Será adotado no contexto deste trabalho que grafos e ordens referem-se a grafos e ordens de intervalo, já que o problema da contagem de intervalo se aplica somente a grafos e ordens de intervalo.

Neste trabalho, fizemos uma revisão sobre os resultados existentes na literatura do problema da contagem de intervalo até o presente momento. Estudamos o problema extremal com o foco em uma conjectura elaborada por Fishburn [1] (a ser detalhada adiante) para as classes gerais das ordens e restringimos o estudo de tal conjectura às classes das ordens trivialmente perfeitas e de divisão. Mostramos que os valores encontrados para ordens trivialmente perfeitas e de divisão conferem com a conjectura. Estudamos também o problema extremal associado a grafos para as classes trivialmente perfeitas e de divisão.

O restante do trabalho é organizado da seguinte forma:

- Capítulo 1: são apresentadas as definições formais sobre grafos e ordens.
- Capítulo 2: é realizada uma revisão bibliográfica sobre a contagem de intervalo, onde apresentamos resultados sobre grafos e ordens de intervalos que possuem contagem de intervalo igual a um, igual a dois, classes de grafos de intervalo dos quais é conhecida a contagem de intervalo, grafos e ordens de intervalos que possuem contagem de intervalo de valor arbitrário, relação com a clique máxima, problemas relacionados à contagem de intervalo e aspectos algorítmicos.

- Capítulo 3: estudamos um problema extremal enunciado por Fishburn [1], que conjectura este problema para ordens gerais. Aplicamos o problema restrito às classes dos grafos e ordens trivialmente perfeitas e de divisão.
- Capítulo 4: estudamos a relação de inclusão entre classes de ordens e grafos que admitem modelos que podem ser representados por dois tamanhos específicos.
- Finalmente, apresentamos as conclusões para a dissertação e propostas de trabalhos futuros.



## 1 DEFINIÇÕES

As definições deste capítulo se referem àquelas que serão necessárias em diferentes partes deste trabalho. Algumas definições específicas de um capítulo serão apresentadas ao longo do mesmo. Definições omitidas aqui podem ser encontradas, como sugestão, em [10, 11] para teoria dos grafos, [1] para ordens e grafos de intervalo e [12] para complexidade de algoritmos.

### 1.1 Teoria dos grafos e algoritmos

Um *grafo* é um par  $G(V, E)$ , onde  $V$  é um conjunto de elementos (cada elemento é chamado *vértice*) e  $E$  é uma família de pares não-ordenados de vértices (cada par é chamado *aresta*). Uma aresta formada por  $a \in V(G)$  e  $b \in V(G)$  é representada por  $(a, b)$  ou  $(b, a)$  ou, simplesmente, por  $ab \in E(G)$  ou  $ba \in E(G)$  quando nenhuma ambiguidade existir. Um grafo  $G(V, E)$  é *simples* se não existirem laços ( $aa \in E(G)$ ), nem multiarestas ( $ab, ab \in E(G)$ ). Exceto se for dito o contrário, será assumido neste trabalho que todo grafo é simples. Se  $ab$  é uma aresta de um grafo, então dizemos que  $a$  e  $b$  são adjacentes e que  $ab$  é incidente a  $a$  e  $b$  ou ainda que  $ab$  liga os vértices  $a$  e  $b$ . Um vértice  $u \in V(G)$  é *universal* a um conjunto de vértices  $W \subseteq V(G)$  se  $u$  é adjacente a cada vértice  $w \in W \setminus \{u\}$ . Assume-se neste trabalho que  $n = |V(G)|$  e  $m = |E(G)|$  quando há um único grafo  $G$  no contexto e nada diferente for dito.

O grafo  $\overline{G}$  *complemento* de  $G$  é o grafo tal que  $V(\overline{G}) = V(G)$  e  $E(\overline{G}) = \{ab \mid a, b \in V(G), a \neq b \text{ e } ab \notin E(G)\}$ .

A *vizinhança aberta* de  $a \in V(G)$  é o conjunto  $N(a) = \{w \in V(G) \mid aw \in E(G)\}$ . A *vizinhança fechada* de  $a \in V(G)$  é definida pelo conjunto  $N[a] = N(a) \cup \{a\}$ . Para todo  $a, b \in V(G)$ ,  $a, b$  são chamados de *gêmeos* se  $N[a] = N[b]$  e *falsos gêmeos* se  $N(a) = N(b)$ .

Os grafos  $G$  e  $H$  são *isomorfos* ( $G \cong H$ ) se existir uma bijeção  $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$  tal que  $uv \in E(G) \Leftrightarrow \theta(u)\theta(v) \in E(H)$ .

Uma *orientação*  $D$  de um grafo  $G$  é um conjunto de pares ordenados de vértices tal que se  $ab \in E(G)$ , então ou  $ab \in D$ , ou  $ba \in D$  e  $D$  possui uma *orientação transitiva* se  $ab, bc \in D$  implicar que  $ac \in D$ .

O *subgrafo*  $H$  é um subgrafo de  $G$  se  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $E(H) \subseteq E(G)$ . O *subgrafo induzido* de  $G$  por  $V \subseteq V(G)$ , denotado por  $G[V]$ , é o subgrafo  $H$  de  $G$  tal que  $V(H) = V$  e para todo  $a, b \in V$ ,  $ab \in E(H) \Leftrightarrow ab \in E(G)$ . Um grafo  $G$  é dito ser *livre* de um grafo  $G'$  se  $G'$  não é um subgrafo induzido de  $G$ .

Um grafo  $G$  é *completo* se  $ab \in E(G)$  para todo  $a, b \in V(G)$  distintos e representa-se um grafo completo com  $n$  vértices por  $K_n$ . Uma *clique* de um grafo é um subconjunto maximal de seus vértices que induz neste grafo um grafo completo. Denotamos por  $q(G)$  o número de cliques de um grafo  $G$ . Um vértice  $a \in V(G)$  é dito ser um *vértice simplicial* se  $N[a]$  é uma clique de  $G$ .

Um *conjunto independente* de um grafo  $G$  é um conjunto  $S \subseteq G$  tal que não existem dois vértices adjacentes contidos em  $S$ . Em outras palavras, se  $a, b \in S$ ,  $ab \notin E(G)$ .

Um grafo  $G$  é *bipartido* se  $V(G)$  admite uma partição  $X \cup Y$ , na qual  $X$  e  $Y$  são conjuntos independentes. Um grafo *bipartido completo* é um grafo  $G$  cujo conjunto de vértices pode ser particionado em  $X \cup Y$  de modo que  $ab \in E(G)$  para todo  $a \in X$ ,  $b \in Y$ . Denotamos tal grafo por  $K_{m,n}$ , onde  $m = |X|$  e  $n = |Y|$ .

Um grafo é *estrela* se for isomorfo a  $K_{1,r}$ , para algum natural  $r \geq 1$ .

Um *caminho* induzido com  $n$  vértices é representado por  $P_n$ . Um grafo  $G$  é *conexo* se para todo  $a, b \in V(G)$  existe um caminho possuindo  $a, b$  como extremos deste caminho. Caso contrário, o grafo é dito ser *desconexo*. Uma *componente conexa* de  $G$  é um subgrafo induzido maximal em relação à propriedade de ser conexo.

Um algoritmo é dito ser *eficiente* (ou *de tempo polinomial*) quando o número de passos necessários no pior caso para sua execução é assintoticamente limitado por um polinômio no tamanho da entrada. Um problema computacional  $P$  consiste em um *problema de decisão* se admite como respostas possíveis apenas *SIM* ou *NÃO*. A *classe*  $P$  consiste dos problemas de decisão que são solúveis por um algoritmo eficiente. A *classe*  $NP$  consiste dos problemas de decisão para os quais um certificado de solução para a resposta *SIM* pode ser verificado por um algoritmo eficiente. Chamamos de *redução Karp* (ou, simplesmente, de *redução*) uma transformação por um algoritmo eficiente de uma instância de entrada do problema  $P$  a uma instância de entrada do problema  $Q$  tal que a instância de  $Q$  possui resposta *SIM* se e somente se aquela de  $P$  possui resposta *SIM*, denotando por  $P \leq Q$ . Um problema  $D \in NP$ -Difícil se para todo problema  $Q \in NP$ , existir redução  $Q \leq D$ . Um problema  $D \in NP$ -Completo se  $D \in NP \cap NP$ -Difícil.

## 1.2 Grafos de intervalo

O *grafo de interseção* de uma coleção de conjuntos  $F = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  é o grafo em que o conjunto de vértices é  $F$  e há uma aresta  $(A_i, A_j)$  se esses conjuntos têm interseção não-vazia, isto é, se  $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ . Note que, dada uma família  $F$  de conjuntos, o grafo de interseção associado é bem definido, porém o contrário não é verdade: um mesmo grafo pode ser o grafo de interseção de diferentes famílias. Se  $G$  é o grafo de interseção de uma família  $F$ , dizemos que  $F$  é um *modelo* de  $G$ .

Um grafo  $G$  é um *grafo de intervalo* se for o grafo de interseção de uma família  $R = \{I_v \mid v \in V(G)\}$  de intervalos fechados da reta real. Chamamos  $R$  um *modelo de intervalo* de  $G$ . Quando não houver ambiguidade, diremos *intervalo*  $v$  querendo se referir ao intervalo associado ao vértice  $v$  em certo modelo. Assumimos que as extremidades de cada intervalo são distintas e denotamos as *extremidades esquerda e direita* de um intervalo  $I_v$  respectivamente por  $\ell(I_v)$  e  $r(I_v)$ . Quando  $\ell(I_v) = r(I_v)$ , diremos que  $I_v$  é *trivial*. O *tamanho* de  $I_v$  é representado por  $|I_v|$ . Dizemos que um grafo é de *intervalo unitário* se existir um modelo de intervalo deste grafo tal que todos os intervalos possuam o tamanho unitário, isto é,  $|I_v| = 1$  para todo  $v \in V(G)$ .

Uma *reflexão* de um modelo  $R$  é o modelo  $R'$  no qual o ponto  $p$  de  $R$  é mapeado no ponto  $-p$  de  $R'$  (tal reflexão tem como eixo de simetria a reta  $x = 0$ ). Um *submodelo*  $S$  de  $R$  é o modelo de intervalo obtido pela remoção de alguns intervalos de  $R$ . Um submodelo de  $R$  *induzido* por um conjunto de vértices  $W$  é o submodelo resultante da remoção em  $R$  dos intervalos que não correspondem a nenhum dos vértices de  $W$ .

### 1.3 Ordens de intervalo

Uma *ordem*  $P = (X, \prec)$  (também conhecida como *conjunto parcialmente ordenado* ou *poset*), no contexto deste trabalho, é uma relação binária  $\prec$  sobre o conjunto  $X$  que é irreflexiva ( $(a, a) \notin \prec$ ) e transitiva (se  $(a, b) \in \prec$ ,  $(b, c) \in \prec$ , então  $(a, c) \in \prec$ ). A notação  $a \prec b$  será usada para denotar que  $(a, b) \in \prec$  e neste caso, dizemos que  $a$  e  $b$  são *comparáveis*. Caso contrário, se  $a$  não precede  $b$  e  $b$  não precede  $a$ ,  $a$  e  $b$  são ditos *incomparáveis* e representados por  $a \parallel b$ .

Seja a ordem  $P = (X, \prec)$  e  $X' \subseteq X$ . A *subordem induzida* de  $P$  por  $X'$  é a ordem  $P[X'] = (X', \prec')$  tal que para todo  $a, b \in X'$ ,  $a \prec' b \Leftrightarrow a \prec b$ .

As ordens  $P = (X, \prec)$  e  $P' = (X', \prec')$  são *isomorfas* ( $P \cong P'$ ) se existir uma bijeção  $\theta : X \rightarrow X'$  tal que  $a \prec b \Leftrightarrow \theta(a) \prec' \theta(b)$ .

Uma ordem é usualmente representada pelo seu *diagrama de Hasse*, no qual cada elemento da ordem corresponde a um ponto e são ligados por um segmento de reta pares de pontos  $a$  e  $b$ , o primeiro estando numa posição horizontal abaixo do segundo, se e somente se  $a \prec b$  e não existir  $z$  tal que  $a \prec z \prec b$ . Como exemplo, para o conjunto  $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$  de todos os divisores de 30, a ordem  $(A, \prec)$  tal que  $a \prec b$  se e somente se  $b$  é divisível por  $a$ , tem seu diagrama de Hasse representado na Figura 4. Note que 6 é divisível por 2 e, como não existe elemento que ao mesmo tempo divide 6 e é divisível por 2, há um segmento de reta que liga 2 a 6. Além disso, 2 está numa posição horizontal abaixo de 6, evidenciando a precedência. Como 2 e 3 são primos entre si, não há segmento de reta que os liguem.

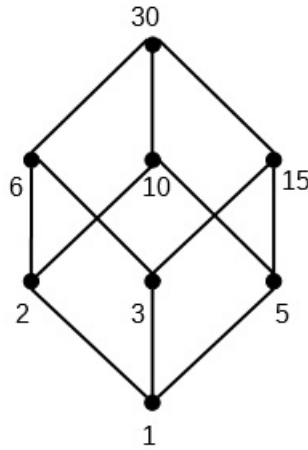


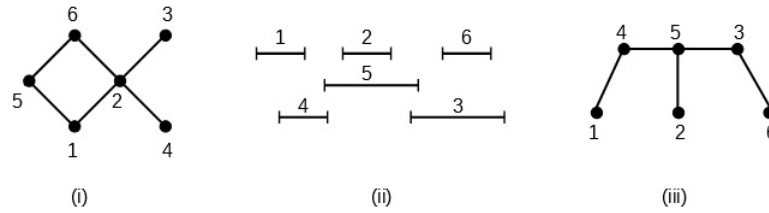
Figura 4 – Diagrama de Hasse representando uma ordem dos divisores de 30.

Uma ordem é *linear* se quaisquer dois de seus elementos são comparáveis. Uma ordem  $P = (X, \prec)$  é uma *ordem de intervalo* (ou *ordem intervalar*) se existir um modelo de intervalo  $R = \{I_x \mid x \in X\}$  tal que  $x \prec y$  se e somente se  $r(I_x) < \ell(I_y)$ . Se  $P$  é uma ordem de intervalo com modelo de intervalo  $R$  e  $G$  é o grafo de intervalo correspondente a  $R$ , dizemos que  $P$  *concorda* com  $G$ .

Uma *ordem 3 + 1* é a ordem  $(\{a, b, c, x\}, \prec)$  tal que  $a \prec b \prec c$  e  $\{a, b, c\} \parallel x$ .

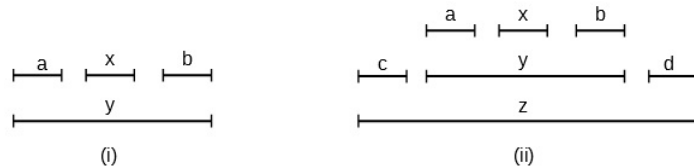
A Figura 5 apresenta uma ordem de intervalo  $P$ , um modelo de intervalo  $R$  de  $P$  e o grafo de intervalo  $G$  correspondente a  $R$ . Portanto,  $P$  concorda com  $G$ . Note que uma ordem de intervalo concorda com um único grafo, mas não vale o contrário: um grafo de intervalo pode possuir distintas ordens de intervalo concordando com ele (por exemplo, a reflexão de um modelo que possui ao menos dois intervalos disjuntos produz uma nova ordem associada, e ambas concordam com o mesmo grafo).

Figura 5 – (i) Uma ordem  $P$ , (ii) um modelo  $R$  de  $P$  e (iii) o grafo  $G$  de interseção de  $R$ . Logo,  $P$  concorda com  $G$ .



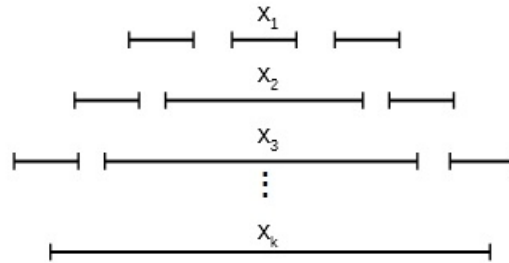
Seja  $P = (X, \prec)$ , define-se a *relação de aninhamento*  $\subset_A(P) = (X, \subset_A)$  por  $x \subset_A y$  se existe  $a, b \in X$  tal que  $a \prec x \prec b$  e  $y \parallel \{a, x, b\}$  (observe a Figura 6 (i)). Para que  $y$  esteja aninhado a outro intervalo, deve existir  $c, d, z \in X$  tal que  $c \prec y \prec d$  e  $z \parallel \{c, y, d\}$ . Note que  $x \subset_A y$  e  $y \subset_A z$ , assim  $x \subset_A z$  (observe a Figura 6 (ii)).

Figura 6 – Em (i)  $x \subset_A y$  e (ii)  $x \subset_A y \subset_A z$ .



Na Figura 7 observa-se que  $x_1 \subset_A x_2 \subset_A \dots \subset_A x_k$ . Neste caso, dizemos que os intervalos  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$  são *aninhados* e que  $k$  é a *profundidade do aninhamento* (ou seja, a quantidade de intervalos aninhados). A *profundidade de aninhamento de uma ordem  $P$*  é o maior  $k$  para o qual observa-se que  $x_1 \subset_A(P) \dots \subset_A(P) x_k$ , o que será denotado por  $|\subset_A(P)|$ . A *profundidade mínima do aninhamento* de um grafo  $G$  é a menor profundidade de aninhamento dentre todas as ordens que concordam com este grafo, o que será denotado por  $|\subset_A(G)|$ .

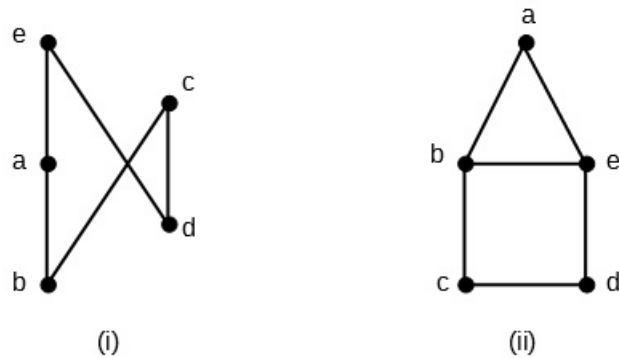
Figura 7 – Relação  $x_1 \subset_A x_2 \subset_A \dots \subset_A x_k$ , os intervalos  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$  são intervalos aninhados.



A altura  $H(P)$  da ordem  $P$  é o número de elementos da maior subordem induzida linear de  $P$ .

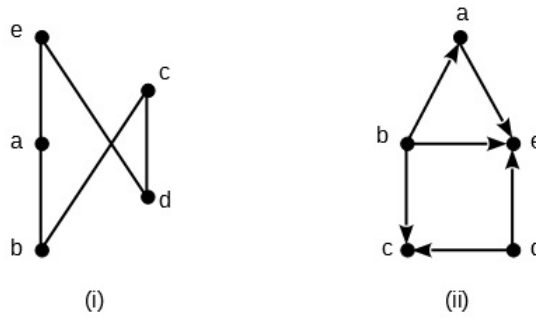
Dados  $G$  e uma orientação transitiva  $F$  de  $G$ , então  $P = (V(G), F)$  é uma ordem e dizemos que  $F$  induz  $P$ . Se  $P = (X, \prec)$  é uma ordem, o grafo de *comparabilidade* de  $P$  é o grafo  $G = (X, E)$  tal que  $ab \in E$  se e somente se  $a$  e  $b$  são comparáveis em  $P$ . O grafo de *incomparabilidade* de  $P$  é o complemento do grafo de comparabilidade de  $P$ . A Figura 8 (i) apresenta uma ordem  $P$  e a Figura 8 (ii) apresenta o grafo de comparabilidade da ordem  $P$  da Figura 8 (i).

Figura 8 – (i) Uma ordem  $P$ , (ii) o grafo de comparabilidade de  $P$ .



É possível mostrar que  $P$  concorda com  $G$  se e somente se  $G$  é o grafo de comparabilidade de  $P$ . Um *grafo é de comparabilidade* quando é possível orientar suas arestas transitivamente. Mostramos uma orientação transitiva do grafo da Figura 8 (ii) na Figura 9.

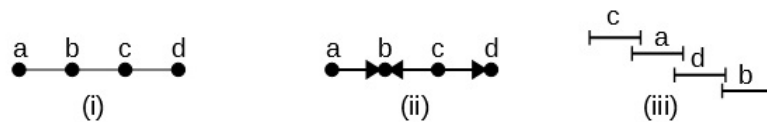
Figura 9 – (i) Uma ordem  $P$ , (ii) o grafo de comparabilidade de  $P$  orientado transitivamente.



Dizemos que  $P = (X, <)$  é obtido de  $P' = (X, <')$  por uma *troca de comparabilidade* de  $a, b$  se  $a <' b$  e  $< = <' - \{(a, b)\} \cup \{(b, a)\}$  (informalmente,  $P$  é a mesma ordem que  $P'$  exceto pela troca na relação de comparabilidade entre  $a$  e  $b$ ).

Note que se  $G$  é um grafo de comparabilidade, então ele é o grafo de comparabilidade de alguma ordem (nomeadamente, daquelas induzidas por orientações transitivas deste grafo). A Figura 10 apresenta um  $P_4$ , com uma orientação transitiva e o seu modelo. Note que a orientação transitiva e o modelo são únicos a menos de reflexão.

Figura 10 – (i) Um  $P_4$ , (ii) uma orientação transitiva de  $P_4$  e (iii) um modelo de  $P_4$ .



Um grafo é de *cocomparabilidade* quando seu complemento for de comparabilidade ou, equivalentemente, quando for o grafo de incomparabilidade de alguma ordem. Todo grafo de intervalo é de cocomparabilidade [13].

## 2 O PROBLEMA DA CONTAGEM DE INTERVALO

Neste capítulo, será apresentado uma revisão bibliográfica sobre o problema da contagem de intervalo para grafos e ordens. Apresentamos resultados sobre grafos e ordens de intervalos que possuem contagem de intervalo igual a um, igual a dois, classes de grafos de intervalo dos quais é conhecida a contagem de intervalo, grafos e ordens de intervalos que possuem contagem de intervalo de valor arbitrário, relação com a clique máxima, problemas relacionados à contagem de intervalo e aspectos algorítmicos.

### 2.1 Contagem de intervalo

Seja  $R$  um modelo. Denotamos por  $IC(R)$  a *contagem de intervalos de  $R$* , que é o número de tamanhos distintos de intervalos em  $R$ . Dada uma ordem  $P$  (resp. grafo  $G$ ), a *contagem de intervalo de  $P$*  (resp.  $G$ ), denotada por  $IC(P)$  (resp.  $IC(G)$ ), é o menor número necessário de tamanhos distintos de intervalos para qualquer modelo de  $P$  (resp.  $G$ ). Nas Seções 2.2 e 2.3, trataremos do seguinte problema:

- PROBLEMA:**  $\kappa$ -IC (para todo natural  $\kappa \geq 1$ )  
**INSTÂNCIA:** Um grafo  $G = (V, E)$  (resp. uma ordem  $P = (X, \prec)$ ).  
**QUESTÃO:**  $IC(G) \leq \kappa$  (resp.  $IC(P) \leq \kappa$ )?

Na Seção 2.4 trataremos do seguinte problema:

- PROBLEMA:** IC  
**INSTÂNCIA:** Um grafo  $G = (V, E)$  (resp. uma ordem  $P = (X, \prec)$ ) e um natural  $k$ .  
**QUESTÃO:**  $IC(G) \leq k$  (resp.  $IC(P) \leq k$ )?

## 2.2 Contagem de intervalo igual a um

A classe dos grafos (resp. ordens) de intervalo que admitem um modelo com todos os intervalos de um mesmo tamanho é idêntica aquela dos grafos (resp. ordens) de intervalo unitários. Um grafo de intervalo *unitário* é um grafo que admite um modelo no qual todos os intervalos são de tamanho unitário. Isto é evidenciado pelo Lema 1.

**Lema 1.** *Seja  $R$  um modelo associado a ordem  $P$ , cujos tamanhos de intervalo presentes são  $l_1, l_2, \dots, l_k$ . Existe um modelo de  $P$  com tamanhos  $\alpha l_1, \alpha l_2, \dots, \alpha l_k$ , para todo  $\alpha > 0$ .*

*Demonstração.* Seja  $R'$  o modelo obtido de  $R$  por multiplicação de cada extremidade pelo valor  $\alpha$ . Portanto, se o intervalo  $[\ell, r]$  possui tamanho  $l_i$ , então o intervalo  $[\alpha\ell, \alpha r]$  correspondente em  $R'$  terá tamanho  $\alpha(r - \ell) = \alpha l_i$ .  $\square$

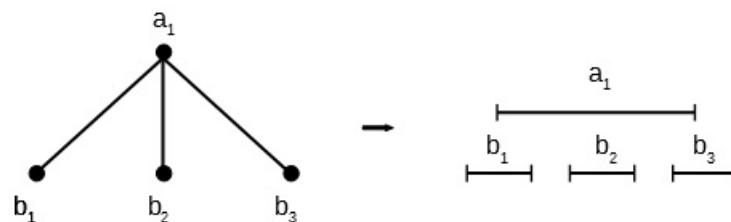
Note que o lema anterior estabelece, em termos informais agora, que os tamanhos podem ser expandidos proporcionalmente sem que o modelo deixe de representar a mesma ordem.

Um grafo de intervalo *próprio* é um grafo de intervalo que admite um modelo de intervalo no qual não existem intervalos  $I_x$  e  $I_y$  tais que  $\ell(I_x) < \ell(I_y) < r(I_y) < r(I_x)$ . A Figura 10 ilustra um grafo de intervalo próprio.

O problema de decidir se um grafo é de intervalo unitário é conhecido desde a década de 60 e é uma questão resolvida. Grafos de intervalo unitário são caracterizados por uma estrutura simples proibida finita. Roberts [14] mostrou que um grafo de intervalo  $G$  é unitário se e somente se  $G$  é livre de  $K_{1,3}$ . Além disso, se  $G$  é um grafo de intervalo, então  $G$  é um grafo de intervalo unitário se e somente se  $G$  é um grafo de intervalo próprio. Roberts [14] caracterizou que uma ordem de intervalo é unitária se e somente se não possui  $3+1$  como subordem induzida. Há na literatura algoritmos polinomiais para resolver este problema, alguns deles em tempo linear [15, 16].

Nota-se que o grafo  $K_{1,3}$ , também conhecido como grafo *garra*, possui a contagem de intervalo igual a 2. Observe que na Figura 11 o intervalo  $a_1$  contém propriamente algum dos intervalos  $b_1, b_2$  ou  $b_3$  (digamos,  $b_2$ , como ilustrado na figura) e este não pode ser expandido na tentativa de fazer  $a_1$  e  $b_2$  de mesmo tamanho, pois é limitado à direita e à esquerda pelos intervalos  $b_1$  e  $b_3$ . Além disso, na tentativa de comprimir o intervalo  $a_1$  para seu tamanho seja igual àquele intervalo  $b_2$ , nota-se que  $a_1$  intersepta com os intervalos  $b_1$  e  $b_3$  e portanto tal compressão deve mantê-las, necessitando de um tamanho maior que  $b_2$ . Portanto este modelo não pode ser transformado em unitário.

Figura 11 – Grafo garra e um de seus modelos de intervalo.





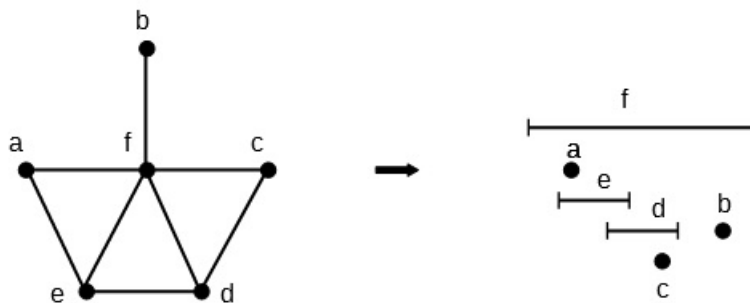
### 2.3 Contagem de intervalo igual a dois

Dado um grafo  $G$ , a complexidade de resolver 2-IC, ao contrário daquela envolvida em resolver 1-IC, não é conhecida tanto para ordens quanto para grafos. Em outras palavras, não se sabe se 2-IC pode ser resolvido eficientemente. Apresentamos alguns resultados existentes na literatura, entre eles classes restritas de grafos para os quais a contagem de intervalo é no máximo 2.

Definimos um *modelo*- $\{a, b\}$  *de intervalos* como um modelo no qual os intervalos possuem tamanhos  $a$  ou  $b$ .

Inicialmente, Skrien [17] caracterizou grafos que admitem no máximo dois tamanhos, um deles sendo zero. Pelo Lema 1, Skrien caracterizou portanto os grafos que admitem modelo- $\{0, 1\}$ . Note que, se  $G$  é um grafo que pode ser representado por tamanho zero ou um e  $S$  é o conjunto de vértices simpliciais de um grafo  $G$ , o subgrafo  $G \setminus S$  é unitário e os intervalos correspondentes aos vértices de  $S$  podem ser representados por tamanho zero ou um em um modelo de grafo de intervalo. No entanto, a condição de  $G$  ser um grafo de intervalo,  $S$  o conjunto de vértices simpliciais e  $G \setminus S$  é um grafo de intervalo unitário não é suficiente para afirmarmos que existe um modelo de  $G$  que possui apenas tamanhos zero ou um, como pode ser observado pela Figura 12. Note que  $P = a, e, d, c$  é isomorfo a  $P_4$  e, portanto, em qualquer ordem que concorda com  $G$ , ou  $a \prec d$  e  $e \prec c$ , ou a reflexão destas comparabilidades estão presentes. Sem perda de generalidade, consideramos que a primeira seja o caso. O intervalo  $b$  possui interseção apenas com  $f$ , então, considerando todos os possíveis modelos, este deve vir antes ou depois de todos intervalos associados a  $P$ . Observe que  $e$  e  $d$  não são simpliciais, portanto não admitem tamanho zero. É possível observar que, dentre todos os possíveis modelos,  $a \prec d \prec b$  ou  $b \prec e \prec c$  e assim  $f$  aninha  $d$  ou  $e$ , portanto, o tamanho de  $f$  não poderia ser unitário. Portanto,  $G$  não admite modelo com tamanhos zero ou um.

Figura 12 – Os vértices de  $S = \{a, b, c\}$  são os vértices simpliciais do grafo de intervalo  $G$  e  $G \setminus S$  é um grafo de intervalo unitário, mas  $G$  não pode ser representado apenas por intervalos de tamanho zero ou um.



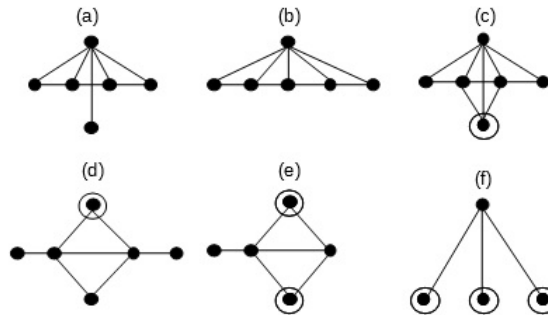
Skrien [17] foi o primeiro a caracterizar os grafos que admitem um modelo- $\{0, 1\}$ .

**Teorema 2** (Skrien [17]). *Seja  $G$  um grafo de intervalo e  $S$  o conjunto de vértices simpliciais de  $G$ . Tal grafo  $G$  possui um modelo que utiliza somente tamanhos zero ou um se e somente se existirem orientações  $O$  de  $G \setminus S$  e  $F$  de  $\overline{G}$  tais que*

1.  $O \cup F$  é uma orientação transitiva;
2.  $OF \cup FO \cup FF \subset F$   
(onde  $AB$  denota o conjunto de pares  $ab$  tais que  $ax \in A$  e  $xb \in B$ ).

Rautenbach e Szwarcfiter [18] descreveram um algoritmo de tempo linear para reconhecimento de grafos que possuem intervalos de tamanhos zero ou um. Além disso, caracterizaram tal classe como os grafos livres dos subgrafos da Figura 13.

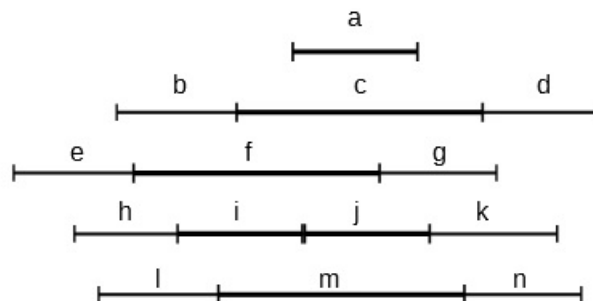
Figura 13 – Subgrafos induzidos proibidos para grafos que admitem modelo de tamanhos zero ou um onde os vértices circulados devem ser não-simpliciais em  $G$ .



Dado uma ordem de intervalo  $P = (X, <)$ , Fishburn [1] investigou as ordens com contagem de intervalo igual a dois sob o aspecto de determinar o conjunto  $\theta(P)$  definido como a seguir:

$$\theta(P) = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha > 1 \text{ e existe um modelo-}\{1, \alpha\} \text{ de } P\}.$$

Figura 14 – Exemplo de ordem  $P$  com  $\theta(P) = (1, 2)$ .



Como exemplo, se  $P$  é uma ordem que concorda com o grafo  $K_{1,t+2}$ ,  $t \geq 1$ , então  $\theta(P) = (t, \infty)$  (isto é, um intervalo contínuo aberto em  $t$  e no infinito). À primeira vista,  $\theta(P)$  parece ser sempre um intervalo contínuo aberto no infinito. Fishburn [1] provou que, para algumas ordens, o maior tamanho tem um limite, conforme o Teorema 3.

**Teorema 3** (Fishburn [1]). *Se  $P$  é a ordem correspondente ao modelo de intervalo apresentado na Figura 14, então  $\theta(P) = (1, 2)$ .*

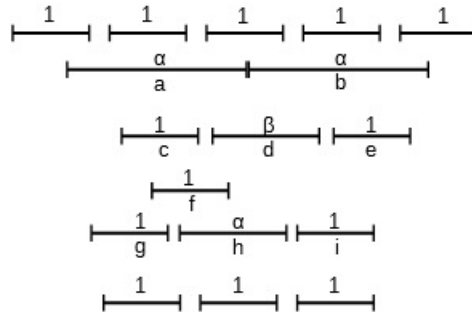
Fishburn [1] também considerou situações para os quais  $\theta(P)$  não são intervalos contínuos e estabeleceu os Teoremas 4 e 5, mostrando assim um contraexemplo para a conjectura de Trotter [19] de que  $\theta(P)$  consistia de um intervalo aberto.

**Teorema 4** (Fishburn [1]). *Para todo inteiro  $k \geq 2$ , existe uma ordem  $P = (X, \prec)$  que admite dois tamanhos, tal que  $\theta(P) = (2 - \frac{1}{k}, 2) \cup (k, \infty)$ .*

**Teorema 5** (Fishburn [1]). *Para todo inteiro  $k \geq 2$ , existe uma ordem  $P = (X, \prec)$  que admite dois tamanhos, tal que  $\theta(P) = (k, 2k - 1) \cup (2k - 1, \infty)$ .*

Como ilustração destes resultados, a Figura 15 apresenta um exemplo de ordem  $P = (X, \prec)$  apresentada por Fishburn [1] no contexto do Teorema 4 para  $k = 2$ . Os intervalos de menor tamanho são representados por 1, os intervalos de tamanho  $\alpha$  são os intervalos de maior tamanho e os intervalos de tamanho  $\beta$  são os intervalos que podem ser representados por tamanho 1 ou  $\alpha$ . Suponha que  $\beta$  assumo o maior tamanho  $\alpha$ , então como  $a$  inclui  $c$  e  $b$  inclui  $e$ , temos que  $|a| + |b| > |c| + |d| + |e|$ . Isto resulta em  $2\alpha > 1 + \alpha + 1$ , ou seja,  $\alpha > 2$ . Por outro lado, suponha que  $\beta$  assumo o menor tamanho 1. Como  $g$  intersepta  $f$ ,  $d$  intersepta  $i$  e  $g \prec h \prec i$ , note que  $|h| < |f| + |d|$ , o que resulta em  $\alpha < 2$ .

Figura 15 – Exemplo de ordem cujo conjunto admissível não é contínuo.



Observe que se  $\beta$  assume o tamanho 1, então  $\alpha > 1.5$ . De fato, pode-se argumentar que, a ordem correspondente ao modelo da Figura 15 possui como conjunto admissível o intervalo  $(1.5, 2) \cup (2, \infty)$ .

Joos et al. [20] elaboraram um algoritmo eficiente para decidir, dados um grafo conexo  $G$  e uma partição dos seus vértices em dois conjuntos  $A$  e  $B$ , se existe um modelo  $\{I_v \mid v \in V(G)\}$  de  $G$  tal que  $|I_u| = a$  para todo  $u \in A$  e  $|I_u| = b$  para todo  $u \in B$ , para algum par de constantes  $a < b$ .

Boyadzhyska, Isaak e Trenk [21] apresentaram uma caracterização para ordens de intervalo que admitem um modelo- $\{0, 1\}$ . Definiram, inicialmente, que um vértice  $v$  é co-simplicial se  $v$  é simplicial no grafo de incomparabilidade de  $P$ .

**Definição 6** (Boyadziyska, Isaak e Trenk [21]). *Sejam  $P = (X, \prec)$  uma ordem e  $f : X \rightarrow \mathbb{N}$  uma função. Defina-se  $G(P, f)$  um digrafo ponderado tal que  $V(G) = X$  e os seguintes arcos:*

- $(a, b)$  com peso  $w_{ab} = -f(b) - \epsilon$  para todo  $a, b \in X$  com  $b \prec a$ .
- $(a, b)$  com peso  $w_{ab} = f(a)$  e  $(b, a)$  com peso  $w_{ba} = f(b)$  para todo  $a, b \in X$  distintos com  $a \parallel b$ .

Boyadziyska, Isaak e Trenk [21] definiram que todo arco  $(a, b)$  em  $G(P, f)$  ou  $G'(P, f)$  tem peso negativo se  $b \prec a$ , mesmo quando  $f(b) = 0$  e tem peso positivo se  $a \parallel b$ , mesmo quando  $f(a) = 0$ .

O valor do peso atribuído a  $\epsilon$  em  $G(P, f)$  é de tal forma que  $0 < \epsilon < \frac{1}{|X|^2}$ . Também definiram o digrafo  $G'(P, f)$  obtido a partir de  $G(P, f)$  onde a constante  $\epsilon$  não ocorre, da seguinte forma:  $G'(P, f)$  é idêntico ao  $G(P, f)$  exceto para  $b \prec a$ , o arco  $(a, b)$  tem peso  $w'_{ab} = -f(b)$ .

**Teorema 7** (Boyadziyska, Isaak e Trenk [21]). *Seja  $P$  uma ordem e  $f$  uma função tal que  $f(x) = 0$ , quando  $x$  é co-simplicial em  $P$  e  $f(x) = 1$ , caso contrário. As afirmativas abaixo são equivalentes:*

1.  $P$  possui um modelo- $\{0, 1\}$ .
2. Para cada subordem  $3 + 1$  induzida em  $P$ , o elemento do meio da cadeia é co-simplicial.
3. O digrafo  $G(P, f)$  não possui ciclos negativos.
4. Todo ciclo no digrafo  $G'(P, f)$  com pelo menos um arco negativo, tem peso positivo.
5.  $P$  não possui como subordem induzida nenhuma daquelas da Figura 16.

Figura 16 – Conjunto de ordens proibidas para ordens de intervalos com modelo- $\{0, 1\}$ .



Boyadziyska, Isaak e Trenk [21] descreveram como construir algoritmicamente um modelo- $\{0, 1\}$  ou produzir uma da subordens induzidas proibidas. Com a descrição afirmaram, então, que existe um algoritmo eficiente. Apesar de ser eficiente não é a de menor complexidade conhecida (o algoritmo elaborado por Rauternbach e Szwarcfiter [18] é o de melhor complexidade).

Boyadziyska, Isaak e Trenk [21] apresentaram uma caracterização para ordem de intervalo que possuem um modelo- $\{1, 2\}$ . Consideraram ordens do digrafo ponderado  $G = (P, f)$  com  $P = (X, \prec)$  e  $f : X \rightarrow \{1, 2\}$ .

**Teorema 8** (Boyadzhyska, Isaak e Trenk [21]). *Seja  $P$  uma ordem de intervalo com  $P = (X, \prec)$  e seja a função  $f : X \rightarrow \{1, 2\}$ . As afirmativas abaixo são equivalentes.*

1.  $P$  possui um modelo em que  $|I_x| = f(x)$  para todo  $x \in X$ .
2.  $G(P, f)$  não possui ciclos de peso negativo.
3. Nenhuma das ordens ponderadas do conjunto  $\mathcal{F}$  mostrada na Definição 9 são induzidas em  $(P, f)$ .

**Definição 9** (Boyadzhyska, Isaak e Trenk [21]). *O conjunto  $\mathcal{F}$  consiste das ordens  $3+1$  com pesos, como mostra a Figura 17, e mais quatro famílias infinitas  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$  e  $\mathcal{F}_4$ . As ordens em cada família  $\mathcal{F}_j$  é definida sobre o conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_{t+1}, y_0, y_1, y_2, \dots, y_{t+1}, a, b\}$ , para todo  $1 \leq j \leq 4$  e ordens da família  $\mathcal{F}_3$  e  $\mathcal{F}_4$  são definidas sobre o conjunto anterior acrescido do ponto  $x_0$ . As seguintes comparabilidades, assim como aquelas que implicam em transitividade estão presentes em cada família para todo  $i \geq 0$ :  $b \prec y_0$ ,  $y_i \prec y_{i+1}$ ,  $x_i \prec x_{i+2}$ ,  $x_i \prec y_{i+1}$ ,  $y_1 \prec x_{i+2}$ . Para cada  $\mathcal{F}_j$ ,  $f(a)$  e  $f(b) \in \{1, 2\}$  e para todo  $z \in \mathcal{F}_j \setminus \{a, b\}$ ,  $z \in \{2\}$  como algumas exceções mostradas na Tabela 1, além de mostrar características adicionais de cada família.*

Figura 17 – Ordem com pesos proibidos. O círculo sólido representa pontos com peso 2. O círculo oco representa pontos com peso 1 e o círculo com uma cruz representa pontos em que os pesos podem ser 1 ou 2.

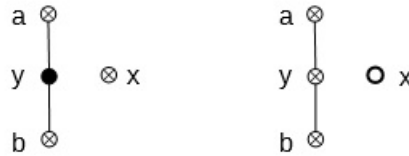


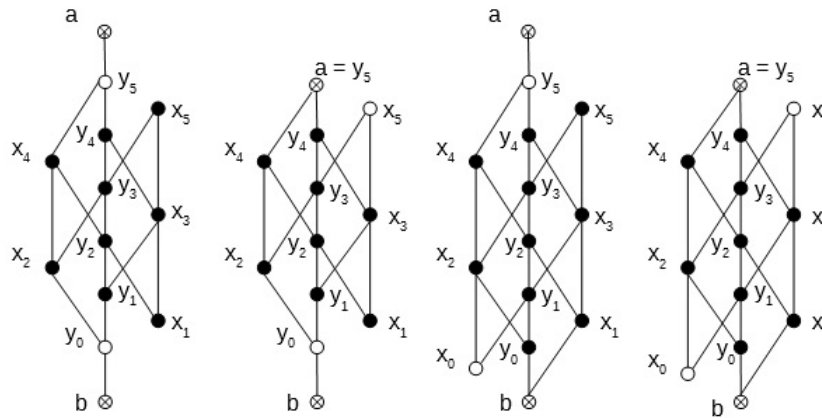
Tabela 1 – Características adicionais da família  $\mathcal{F}$ .

Família	$a = y_{t-1}$ ?	Comparabilidades adicionais	$v$ com $f(v) = 1$	Existe $x_0$ ?
$\mathcal{F}_1$	Não	$y_{t+1} \prec a$	$y_0, y_{t+1}$	Não
$\mathcal{F}_2$	Sim		$y_0, x_{t+1}$	Não
$\mathcal{F}_3$	Não	$y_{t+1} \prec a$ e $b \prec x_1$	$x_0, y_{t+1}$	Sim
$\mathcal{F}_4$	Sim	$b \prec x_1$	$x_0, x_{t+1}$	Sim

Exemplos de tais ordens são apresentadas na Figura 18 para  $t = 4$ .

Assim como descreveram como construir eficientemente um modelo- $\{0, 1\}$ , Boyadzhyska, Isaak e Trenk [21] também descreveram como construir algoritmicamente um modelo- $\{1, 2\}$  ou como produzir uma das subordens induzidas proibidas.

Figura 18 – Da esquerda para a direita as figuras exemplificam elementos de  $\mathcal{F}_1$ ,  $\mathcal{F}_2$ ,  $\mathcal{F}_3$  e  $\mathcal{F}_4$  (em particular aqueles com  $t = 4$ ). O círculo sólido representa pontos com peso 2. O círculo oco representa pontos com peso 1 e o círculo com uma cruz representa pontos que os pesos podem ser 1 ou 2.



## 2.4 Contagem de intervalo com valor arbitrário

Ainda não se sabe se o problema IC é NP-completo. Por subgrafos induzidos proibidos, o problema 1-IC possui uma caracterização simples. Diante disso, é natural que haja uma investigação de soluções de  $k$ -IC através de caracterizações por subgrafos induzidos proibidos para valores arbitrários de  $k$ . Fishburn [1] investigou este tipo de solução para ordens e mostrou que a lista de subordens proibidas para que uma ordem possua contagem de intervalo no máximo  $k \geq 2$  é infinita. Em outras palavras, demonstrou que se  $S$  é o conjunto de ordens tais que, dada uma ordem de intervalo  $P$  e  $k \geq 2$ ,  $IC(P) \leq k$  se e somente se  $P$  não possui uma subordem induzida isomorfa a alguma daquelas em  $S$ , então  $S$  tem cardinalidade infinita.

Graham conjecturou que, para todo grafo  $G$ ,  $IC(G)$  é no máximo  $k + 1$  se, para algum vértice  $u \in V(G)$ ,  $IC(G \setminus \{u\})$  é igual a  $k$ . Leibowitz e Peck [8] provaram que a conjectura é válida para  $k = 1$  e apresentaram um contraexemplo à conjectura para  $k \geq 2$ , mostrando como construir exemplos de grafos  $G$  para os quais a contagem de intervalo excede em pelo menos dois a contagem de intervalo do grafo  $G \setminus \{x\}$ , para certo  $x \in V(G)$ .

Trotter [19] também conjecturou que a remoção de um vértice pode diminuir a contagem de intervalo de um valor arbitrário (não-constante). Esta conjectura ainda está em aberto.

Fishburn [1] apresentou um problema extremal, definindo

$$\sigma(k) = \min\{|X| \mid \text{existe uma ordem } P = (X, <) \text{ tal que } IC(P) \geq k\},$$

e conjecturou que

$$\sigma(k) = 3k - 2.$$

Motivado pelo problema extremal de Fishburn [1], no Capítulo 3 apresentamos novos resultados relacionados ao problema.

Cerioli, Oliveira e Szwarcfiter [22] resolveram como determinar a contagem de intervalo para ordens e grafos livres de touro-estendido. Um grafo  $G$  é um *touro* se é isomorfo ao grafo obtido de um  $P_4 = x_1, y_1, y_2, x_2$  com o acréscimo de um vértice  $z$  tal que  $z$  é adjacente a ambos  $y_1$  e  $y_2$  e não é adjacente nem a  $x_1$  nem a  $x_2$ . Um grafo  $G$  é um *touro estendido* se é isomorfo ao grafo obtido de um caminho  $x_1, y_1, \dots, y_n, x_2$  com o acréscimo de um vértice  $z$  tal que  $z$  é adjacente aos vértices  $y_1, \dots, y_n$  e não é adjacente nem a  $x_1$  nem a  $x_2$ .

**Teorema 10** (Cerioli, Oliveira e Szwarcfiter [22]). *Se  $P$  é uma ordem livre de touro-estendido, então  $IC(P) = |\mathcal{C}_A(P)|$ .*

Como consequência, se  $G$  é livre de touro estendido, então  $IC(G) = |\mathcal{C}_A(G)|$ . Em [22], apresenta-se um algoritmo para se determinar  $IC(G)$  via a computação de  $|\mathcal{C}_A(G)|$ . De maneira independente, Klavík et al. [23] desenvolveu um algoritmo de tempo linear para computar a profundidade mínima de aninhamento de um grafo de intervalo. A Figura 7 apresenta um modelo com a profundidade de aninhamento igual a  $|\mathcal{C}_A(G)|$ .

## 2.5 Contagem de intervalo restrita a classes

Apresentamos nesta seção alguns resultados sobre a contagem de intervalo restrita a certas classes de grafos. Uma *árvore* é um grafo acíclico e conexo.

Um grafo  $G$  é *de divisão* (do inglês, *split*) com partição  $(K, I)$  se  $K \cup I = V(G)$  é uma partição,  $K$  é uma clique e  $I$  é um conjunto independente de  $G$ . Um grafo é *de limiar* (do inglês, *threshold*) se é de divisão e existe uma ordenação  $v_1, \dots, v_{|I|}$  dos vértices de  $I$  tal que  $N(v_i) \subseteq N(v_{i+1})$  para todo  $1 \leq i < |I|$  (ou, equivalentemente, existe uma ordenação  $u_1, \dots, u_{|K|}$  dos vértices de  $K$  tal que  $I \cap N(u_i) \subseteq I \cap N(u_{i+1})$  para todo  $1 \leq i < |K|$ ). Nota-se que a classe dos grafos de limiar estão incluídos nos grafos de divisão.

Um grafo  $G$  é *quase livre de  $K_{1,3}$*  se existir  $v \in V(G)$  tal que  $G \setminus \{v\}$  é livre de  $K_{1,3}$ .

Um grafo  $G$  é um grafo *estrelado de limiar* se pode ser obtido de um grafo de limiar substituindo-se cada vértice de seu conjunto independente por uma clique correspondente.

Um grafo de intervalo é *trivialmente perfeito (TP)* for livre de  $P_4$ . Sabe-se que é possível definir um grafo de intervalo trivialmente perfeito como um grafo vazio ou um grafo obtido pela união disjunta de  $k$  grafos trivialmente perfeitos, para algum  $k \geq 0$ , acrescido de um vértice universal [22].

Cerioli, Oliveira e Szwarcfiter [22] estabeleceram o Teorema 11 sobre a contagem de intervalo para grafos trivialmente perfeitos.

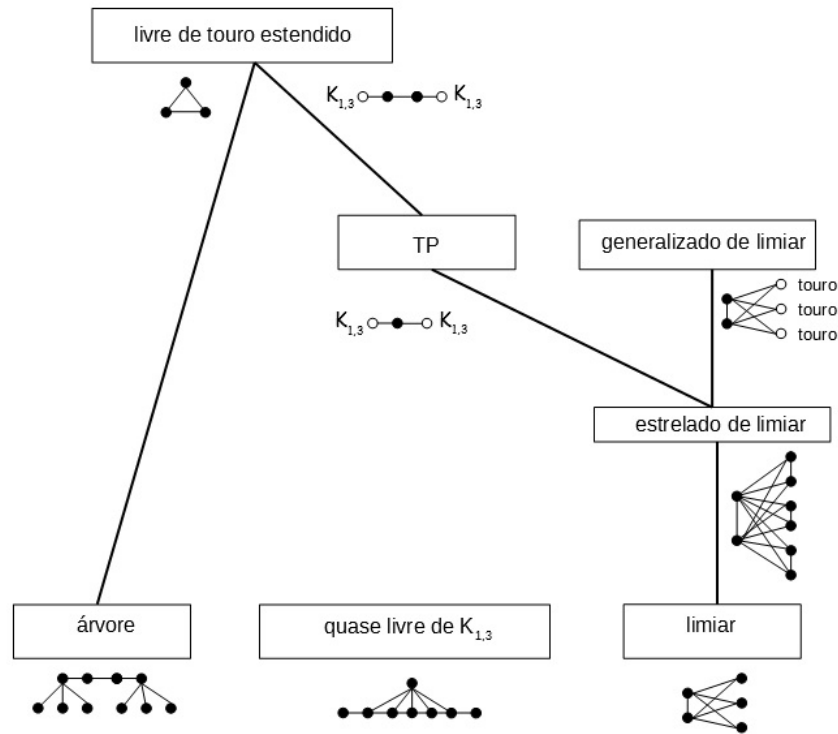
**Teorema 11** (Cerioli, Oliveira e Szwarcfiter [22]). *Seja  $k \geq 1$  um número inteiro. Existe um grafo  $G$  trivialmente perfeito tal que  $IC(G) = k$ .*

Um grafo é um *grafo de limiar generalizado* se pode ser obtido de um grafo de limiar substituindo-se cada vértice do conjunto independente por um grafo de intervalo unitário. Claramente, os grafos generalizados de limiar contém propriamente os grafos estrelados de limiar.

A contagem de intervalo para árvores, grafos de limiar, quase livre de  $K_{1,3}$ , um grafo estrelado de limiar e grafo limiar generalizado é no máximo igual a dois. Para grafos livres de touro estendido, em particular grafos trivialmente perfeitos foi demonstrado um algoritmo eficiente que computa a contagem de intervalo e demonstrado pelo Teorema 11 que esta classe contém exemplos com contagem de intervalo de valores arbitrários [22].

A Figura 19 é devida a Cerioli, Oliveira e Szwarcfiter [7] e representa um diagrama de inclusão entre tais classes. Observe que um grafo  $G$  representado na figura, possui um vértice branco  $v$  tendo uma aresta  $uv$  rotulado com  $G'$  representa o grafo obtido de  $G$  substituindo-se  $v$  por  $G'$ .

Figura 19 – Diagrama de inclusão entre tais classes.



Os resultados do Lema 12 e dos Teoremas 13, 14 e 15 são utilizados para estudos do Capítulo 3.

**Lema 12** (Cerioli, Oliveira e Szwarcfiter [9]). *Seja  $G$  um grafo de divisão sem gêmeos. Se  $(K, I)$  for uma partição de um grafo de divisão em que para qualquer  $x \in V(G)$ ,  $N[x] \neq K$ , então  $(K, I)$  é único.*

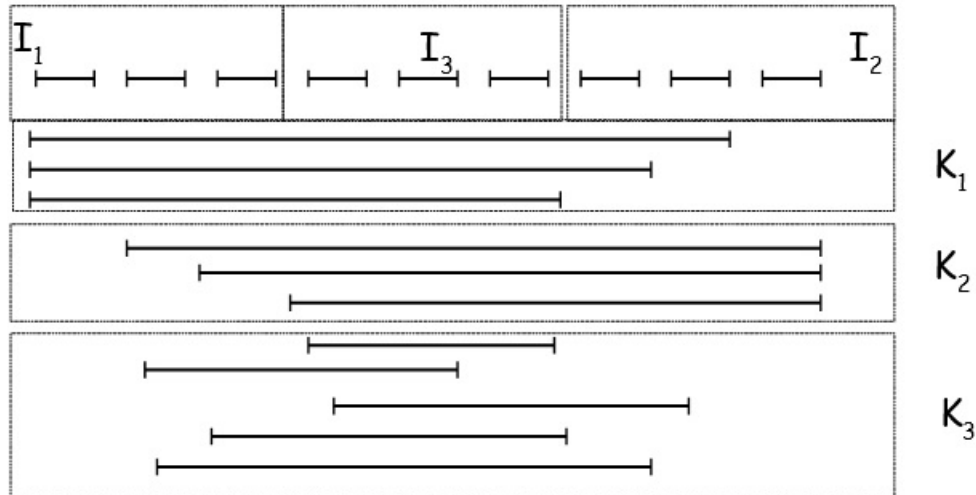
Para grafos  $G$  que satisfazem as condições do Lema 12, denotaremos os conjuntos  $K$  e  $I$  por, respectivamente,  $K(G)$  e  $I(G)$ .

Um *modelo canônico*  $R$  de um grafo de divisão  $G$  de partição  $(K(G), I(G))$  é definido da seguinte maneira. Assumiremos que os intervalos em  $I(G)$  são numerados como  $1, 2, \dots, |I|$  da esquerda para direita em  $R$  e, com isso, a representação *canônica* de um intervalo  $k \in K(G)$  será  $(i, j)$  se o intervalo de  $I(G)$  mais à direita que  $k$  sucede é o  $i$  e o intervalo mais à esquerda que  $k$  precede é o  $j$  ( $i$  ou  $j$  serão “-” caso não suceda ou preceda nenhum intervalo de  $I(G)$ ). Assim, diremos que um intervalo pertence a  $K_1(R)$ ,  $K_2(R)$  ou  $K_3(R)$  se a representação canônica deste intervalo for, respectivamente, da forma  $(-, j)$ ,  $(i, -)$  ou  $(i, j)$ . Os intervalos em  $I_1(R)$  são definidos como aqueles que não sucedem nenhum intervalo de  $K(G)$ , aqueles em  $I_2(R)$  não precedem nenhum intervalo de  $K(G)$ , e que aqueles em  $I_3(R)$  nem precedem e nem sucedem intervalos de  $K(G)$ . Note que  $K_1(R)$ ,  $K_2(R)$ ,  $K_3(R)$ ,  $I_1(R)$ ,  $I_2(R)$  e  $I_3(R)$  são invariantes para outros modelos que correspondem a mesma ordem de intervalo daquela associada a  $R$ . Assim, por



conveniência, podemos também denotar tais conjuntos por  $K_1(P)$ ,  $K_2(P)$ ,  $K_3(P)$ ,  $I_1(P)$ ,  $I_2(P)$  e  $I_3(P)$ , onde  $P$  é a ordem de intervalo correspondente a  $R$ . A Figura 20 apresenta um esquema do modelo canônico do grafo de divisão, devido a Cerioli, Oliveira e Szwarcfiter [9].

Figura 20 – Modelo canônico de um grafo de divisão.



A partir do modelo canônico apresentado na Figura 20, Cerioli, Oliveira e Szwarcfiter [9] definiram as classes de grafos  $Split^2$  e  $Split^3$  que são subclasses próprias de grafos de divisão, da seguinte maneira. Um grafo definindo  $G \in Split^3$  se para todo  $x \in K_3(R)$ , ou  $N(x) \cap I \subseteq I_1(R) \cup I_3(R)$ , ou  $N(x) \cap I \subseteq I_2(R) \cup I_3(R)$ . Além disso,  $G \in Split^2$  se  $K_3(R) = \emptyset$ . Portanto,  $Threshold \subset Split^2 \subset Split^3 \subset Split$ .

**Teorema 13** (Cerioli, Oliveira e Szwarcfiter [9]). *Se  $G \in Split^2$ , então  $IC(G) \leq 2$ .*

**Teorema 14** (Cerioli, Oliveira e Szwarcfiter [9]). *Se  $G \in Split^3$ , então  $IC(G) \leq 3$ .*

A ordenação de cliques de um modelo  $R$  de um grafo  $G$  consiste da ordem linear das cliques de  $G$  de modo que uma clique  $C_1$  precede outra clique  $C_2$  nesta ordem se algum intervalo de  $C_1$  precede algum de  $C_2$ .

Dada uma ordem linear  $P = (X, \prec)$ , uma reordenação de  $S \subseteq X$  é uma ordem linear  $P' = (X, \prec')$  tal que para todo  $x, y \in X$ , no máximo um deles em  $S$ , vale que  $x \prec y \implies x \prec' y$ .

**Teorema 15** (Cerioli, Oliveira e Szwarcfiter [9]). *Seja  $G = (K, I)$  um grafo de divisão tal que para qualquer  $x \in V(G)$ ,  $N[x] \neq K$ . Seja  $P$  uma ordem que concorde com  $G$ . A ordenação das cliques de um modelo de  $G$  é única ao menos de reflexão e reordenação de falsos gêmeos se e somente se  $|I| < 3$  ou  $(K_1(P) \neq \emptyset$  e  $K_2(P) \neq \emptyset)$ .*

## 2.6 Relação com o número de cliques

Um limite superior para a contagem de intervalo de um grafo  $G$  é, naturalmente,  $IC(G) \leq |V(G)|$ . Nota-se que os intervalos que pertencem exclusivamente à primeira e à última clique podem assumir o mesmo tamanho, assim  $IC(G) \leq |V(G)| - 1$ . Cerioli, Oliveira e Szwarcfiter [7] estabeleceram um limite superior no número de cliques.

Para qualquer  $q \geq 1$ , seja  $f(q)$  a função que faz corresponder  $q$  com a maior contagem de intervalo possível para um grafo de  $q$  cliques, isto é,  $f(q) = \max\{IC(G) \mid q(G) = q\}$ . Em [7], demonstra-se que  $f(q) = \lfloor \frac{q+1}{2} \rfloor$ , como consequência,  $IC(G) \leq f(q(G)) = \lfloor \frac{q(G)+1}{2} \rfloor \leq \lfloor \frac{|V(G)|+1}{2} \rfloor$ .

Fishburn [1] também definiu o problema extremal em relação ao número de cliques, definido

$$\nu(k, q) = \min\{|X| \mid \text{existe uma ordem } P = (X, \prec) \text{ tal que } q(P) = q, IC(P) \geq k\}$$

e mostrou que

$$\sigma(k) = \min\{\nu(k, q) \mid q \geq 2k - 1\}.$$

Além disso, provou que  $\nu(k, q) \leq k + q - 1$  é válido em geral e encontrou valores exatos da função  $\nu(k, q)$  para valores específicos de  $k$  e  $q$ .

Fishburn [1] estabelece a conjectura que  $\nu(k, q)$  é não-decrescente em  $q$ .

## 2.7 Problemas relacionados

Sabe-se que um grafo ou ordem de intervalo possui um modelo em que as extremidades de intervalo são distintas. Cerioli, Oliveira e Szwarcfiter [7] sugeriram o problema da contagem de intervalos com todas as extremidades de intervalo distintas e inteiras. Como resultado, mostraram que se  $P$  é uma ordem de intervalo, então existe um modelo de intervalo  $R$  de  $P$  tal que  $IC(R) = IC(P)$  no qual todas as extremidades de intervalo são distintas e inteiras. Fishburn [1] considerou o problema de decidir se existe um modelo de intervalo de um dado grafo de intervalo tal que cada tamanho de intervalo esteja entre  $p$  e  $q$  para um dado par de número reais  $1 \leq p \leq q$ . Fishburn [1] caracterizou os grafos que admitem modelos com intervalos de tamanho entre  $p$  e  $q$  em subgrafos proibidos, que conduz a um algoritmo de tempo exponencial. Isaak [24] resolveu tal problema com um algoritmo polinomial  $O(\min\{n^3, n^{2.5} \log(n(p+q))\})$  se o modelo for restrito a possuir extremidades inteiras.

Pe'er e Shamir [25] investigaram o seguinte problema. Seja  $G$  um grafo de intervalo e  $S$  um conjunto de restrições sobre distâncias entre pares de extremidades de intervalo de  $G$ . Cada restrição é da forma  $x - y \leq C_{xy}$ , onde  $x$  e  $y$  são extremidades de intervalo e  $C_{xy}$  é um número real. Pe'er e Shamir [25] estudaram o problema de determinar a existência de um modelo de  $G$  que satisfaz as restrições dadas pelo conjunto  $S$ , nas seguintes versões:

1. a diferença  $x - y$  é sobre extremidades arbitrárias.
2. a diferença  $x - y$  é sobre extremidades de um mesmo intervalo; em outras palavras, as restrições são  $L(v) \leq |I_v| \leq U(v)$  para  $v \in V(G)$ , com  $L(v)$  e  $U(v)$  reais não-negativos.
3. a diferença  $x - y$  é sobre extremidades de um mesmo intervalo como no caso anterior, mas são tais que  $L(v) = U(v)$ ; ou seja, são da forma  $|I_v| = U(v)$  para  $v \in V(G)$  e  $U(v)$  um número real não-negativo.

É possível notar que o segundo problema é um caso particular do primeiro e o terceiro problema é um caso particular do segundo. Pe'er e Shamir [25] mostraram que o último problema é NP-completo. Como o terceiro é um caso particular dos anteriores, portanto os dois primeiros também são problemas NP-completo. Eles também mostraram que caso os modelos sejam restritos àqueles cuja ordenação de cliques é única (a menos de reflexão), o primeiro problema (e, portanto, os outros dois) pode ser resolvido por um algoritmo polinomial de tempo  $O(\min\{n^3, n^{2.5} \log(nC)\})$ , onde  $C$  é uma constante produzida por um processo de redução existente na prova.

Apke e Schrader [26] introduziram o problema de determinar o menor número  $NUIC(G)$  de intervalos não-unitários entre todos os modelos de um dado grafo  $G$  como a *contagem não-unitária*. Definiram, neste contexto, que, dado um grafo estrela  $G$ , um vértice  $u \in G$  é um *centro de estrela* de  $G$  se  $u$  junto com alguns de seus vizinhos induz uma estrela em  $G$ . Para tal  $u \in V(G)$  os vértices em  $N(u)$  são chamados de *folhas*. O conjunto de centros de estrela em  $G$  é denotado por  $Z = Z(G)$ , o conjunto de folhas por  $U = U(G)$ . Os conjuntos  $Z$  e  $U$  não precisam ser disjuntos. Se uma ordem de intervalo  $P$  concorda com o grafo  $G$ , então  $Z(P) = Z(G)$ . Apke e Schrader [26] investigaram, também, o problema de determinar  $NUIC(G)_{\geq 1}$ , uma versão mais restrita do problema de determinar  $NUIC(G)$ , no qual os modelos possuem todos os intervalos de tamanho no mínimo unitário chamando de *contagem não-unitária normalizada*.

**Teorema 16** (Apke e Schrader [26]). *Se  $G$  é um grafo de intervalo, então para toda ordem  $P$  que concorda  $G$  a contagem não-unitária normalizada é igual a  $|Z|$ .*

Uma vez que os centros de estrela podem ser encontrados em tempo polinomial, calcular a contagem unitária normalizada pode ser resolvido eficientemente.

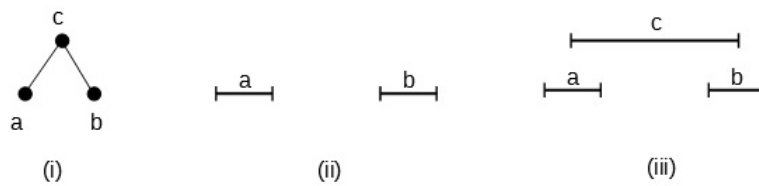
**Teorema 17** (Apke e Schrader [26]). *Se  $G$  é um grafo de intervalo, então  $NUIC(G) = 1$  se e somente se  $|Z| = 1$  ou  $G$  tem um vértice curto.*

O conceito de vértice curto é apresentado como se segue. Seja  $U$  o conjunto das folhas de  $G$ . Chamamos de  $x \in G$  um *vértice curto* se  $x$  é uma folha contida em cada garra e as duas condições seguintes se verificam:

- $U$  se particiona em três cliques desconectados  $U_\ell$ ,  $x$  e  $U_r$ .
- $y \in N(x) \setminus Z \Leftrightarrow y \in \bigcap_{z \in Z} N(z) \setminus U$ .

Recentemente Klavík et al. [27] estudou um problema de representação parcial de grafo de intervalo. O problema tem, como entrada, um modelo pré-desenhado e o problema consiste em reconhecer se esta representação parcial pode ser estendida para uma representação de todo o grafo. Estudou o problema de representação parcial para as classes de grafo de intervalo próprio e de grafo de intervalo unitário. Verificou que embora estas classes sejam iguais, dada uma representação parcial, o problema para grafos de intervalo unitário é mais complexo que o problema para grafos de intervalo próprio. Observe a Figura 21.

Figura 21 – (i) Grafo unitário  $G$ . (ii) Representação parcial dos vértices  $a$  e  $b$ . (iii) Representação do grafo  $G$ .



Note que, pelo exemplo ilustrado na Figura 21, a representação parcial pode ser estendida para a representação do grafo de intervalo próprio, mas não para o grafo de intervalo unitário.

Klavík et al. [27] demonstra que para que a representação parcial de grafos de intervalo unitário seja estendida para representação de todo o grafo, é necessário considerar que a distância entre os intervalos do modelo pré-desenhado satisfaça uma posição precisa das extremidades dos intervalos. Em particular, o problema da representação parcial de grafos de intervalo unitário é resolvido apenas quando o problema da representação parcial de grafos de intervalo próprio é resolvido. Encontrou um algoritmo que resolve o problema da representação parcial de grafo de intervalo próprio em tempo  $O(n + m)$  e para grafos de intervalo unitário em tempo  $O(n^2r + nD(r))$ ,  $r$  é o tamanho da entrada descrevendo posições de intervalos pré-desenhados e  $D(r) = O(r \log r 2^{\log^* r})$  é o tempo necessário para multiplicar ou dividir dois números cuja representação binária tem comprimento  $r$ .

### 3 UM PROBLEMA EXTREMAL SOBRE A CONTAGEM DE INTERVALO

Dado um natural  $k$ , o problema extremal de determinar a menor ordem  $P$  (resp. grafo  $G$ ) em número de elementos (resp. vértices) tal que  $IC(P) = k$  (resp.  $IC(G) = k$ ) foi proposto por Fishburn [1]. Para o problema extremal com relação a ordens, Fishburn [1] apresentou uma conjectura, enquanto para grafos nenhuma conjectura foi apresentada. Estudamos como tal conjectura se sustenta ao considerarmos conjuntos mais restritos de ordens e grafos. Em particular, investigamos tal problema extremal para ordens e grafos pertencentes às classes trivialmente perfeitas e de divisão. Para tais classes, apresentamos uma solução para o problema extremal. Ao final do capítulo, discutimos a conjectura de Fishburn [1] com respeito aos resultados apresentados.

#### 3.1 Introdução

Fishburn [1] apresentou o seguinte problema extremal de otimização combinatória. Dados natural  $k$  e uma classe de ordens  $\mathcal{C}$ , considere a função

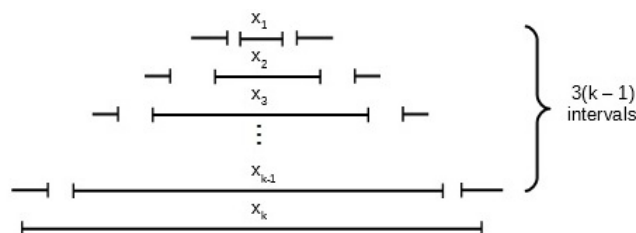
$$\sigma_{\mathcal{C}}(k) = \min\{|X| \mid \text{existe uma ordem } P = (X, \prec) \in \mathcal{C} \text{ tal que } IC(P) \geq k\}.$$

Em outras palavras,  $\sigma_{\mathcal{C}}(k)$  é o tamanho da menor ordem (em número de elementos) para a qual qualquer modelo requer  $k$  ou mais tamanhos distintos de intervalos. Fishburn estudou tal função considerando  $\mathcal{C}$  como a classe geral das ordens. A notação  $\mathcal{C}$  será omitida quando  $\mathcal{C}$  representar a classe de todas as ordens. Fishburn [1] apresentou a Conjectura 18.

**Conjectura 18** (Fishburn [1]). *Para todo  $k \geq 2$ ,  $\sigma(k) = 3k - 2$ .*

As ordens que Fishburn [1] acredita ter o mínimo número de elementos para dado valor  $k$  são aquelas da Figura 22. Note que, em tais ordens, o número de elementos é  $3k - 2$ , usado na Conjectura 18. Nesta figura, não foram definidas as posições exatas da extremidade esquerda do primeiro intervalo e nem a extremidade direita do último intervalo (analisando da esquerda para a direita, linha após linha). Observe que é possível obter diferentes modelos, variando estas extremidades.

Figura 22 – A construção sugerida por Fishburn [1].



Fishburn [1] mostrou limites tanto superior quanto inferior para  $\sigma(k)$ , conforme o Lema 19.

**Lema 19** (Fishburn [28]). *Para todo  $k \geq 2$ ,  $2k \leq \sigma(k) \leq 3k - 2$ .*

O Teorema 20 estabelece que a contagem de intervalo de ordens que possuem profundidade de aninhamento  $k$  e número de elementos  $3k - 2$  é exatamente  $k$ .

**Teorema 20** (Fishburn [1]). *Suponha  $k \geq 2$  e  $P = (X, \prec)$  uma ordem de profundidade  $k$ , com  $3k - 2$  elementos. Então  $IC(P) = k$ .*

Analogamente, Fishburn [1] define a função

$$\tilde{\sigma}(k) = \min\{|V(G)| \mid \text{existe um grafo } G \text{ tal que } IC(G) \geq k\}.$$

A relação entre o problema extremal para grafo e ordem encontra-se evidenciada no Lema 21 (em [1] encontra-se a prova dada por Fishburn; abaixo segue uma prova alternativa). Além desta relação, Fishburn [1] não apresenta outros resultados sobre  $\tilde{\sigma}(k)$ .

**Lema 21.** *Para todo  $k \geq 2$ ,  $\sigma(k) \leq \tilde{\sigma}(k)$ .*

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo com o menor número  $n$  de vértices tal que  $IC(G) = k$ . Portanto,  $\tilde{\sigma}(k) = n$ . Seja  $R$  um modelo de  $G$  tal que  $IC(R) = k$  e  $P$  a ordem associada a  $R$ . Logo,  $IC(P) = k$  e, portanto, existe uma ordem em  $n$  elementos tal que  $IC(P) \geq k$ . Consequentemente,  $\sigma(k) \leq n = \tilde{\sigma}(k)$ .  $\square$

Fishburn [28] introduz também o problema de maximizar a contagem de intervalo para dado tamanho de ordem. Para tanto, define a função  $\mu(n)$  como a maior contagem de intervalo possível de se obter de uma ordem de intervalo de  $n$  elementos. Mais formalmente,

$$\mu(n) = \max\{IC(P) \mid \text{existe uma ordem } P = (X, \prec) \text{ com } |X| = n\}.$$

e estabelece a relação entre  $\sigma(k)$  e  $\mu(n)$  pelo Lema 22.

**Lema 22** (Fishburn [28]). *Para todo  $k \geq 2$ ,  $\sigma(k) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \mu(n) \geq k\}$ .*

Segue do enunciado do Lema 22 que  $\sigma(k)$  pode ser obtida a partir de  $\mu(n)$ . O inverso é verdadeiro também. Com efeito, uma vez que a adição de um novo intervalo a uma ordem não pode forçar mais de um novo tamanho, se  $\sigma(k) = n_1$  e  $\sigma(k + 1) = n_2$  então  $\mu(i) = k$  para todo  $n_1 \leq i < n_2$ .

Uma maneira de investigar a função  $\sigma(k)$  foi sugerida por Fishburn [1] considerando agora o problema extremal em relação tanto ao valor de contagem de intervalo, quanto de número de cliques, definido como

$$\nu(k, q) = \min\{|X| \mid \text{existe uma ordem } P = (X, \prec) \text{ tal que } q(P) = q, IC(P) \geq k\}.$$

Para  $1 \leq k \leq \lfloor \frac{q+1}{2} \rfloor$  e relação entre as funções é estabelecida por

$$\sigma(k) = \min\{\nu(k, q) \mid q \geq 2k - 1\}.$$

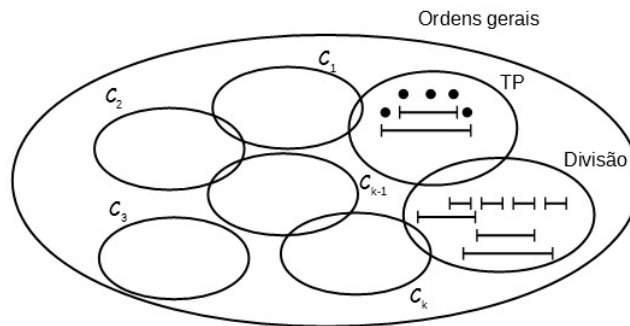
Alguns teoremas foram provados para  $\nu(k, q)$ , entre eles, o Teorema 23.



Fishburn [1] afirma que se a Conjectura 25 for verdadeira, então a Conjectura 18 também é verdadeira, mas a Conjectura 18 ainda pode ser verdadeira, mesmo provando que a Conjectura 25 seja falsa.

Estudamos  $\sigma_{\mathcal{C}}(k)$  e  $\tilde{\sigma}_{\mathcal{C}}(k)$  para  $\mathcal{C} \in \{\text{TP}, \text{DIVISÃO}\}$ . A justificativa para a escolha dessas classes se faz da seguinte maneira. Estudamos classes que tivessem interseção com a família de ordens definidas por Fishburn [1] através do esquema de modelo da Figura 22, mas que nem estivesse contida nem contivesse tal família. De maneira geral, a ideia é que se a conjectura for sustentada para classes  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_k$  tais que  $\mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_k$  seja a classe de todas as ordens, então a Conjectura 18 estaria provada.

Figura 24 – Diagrama da estratégia de estudo da Conjectura 18 para as classes das ordens. Os modelos nos diagramas das classes estudadas são exemplos de modelos mínimos para  $k = 3$ .



Na Seção 3.2 serão apresentados resultados de  $\tilde{\sigma}_{\text{TP}}(k)$  e  $\sigma_{\text{TP}}(k)$  para as classes dos grafos e ordens de intervalo trivialmente perfeitas. Na Seção 3.3 serão apresentados resultados de  $\tilde{\sigma}_{\text{DIVISÃO}}(k)$  e  $\sigma_{\text{DIVISÃO}}(k)$  para as classes dos grafos e ordens de intervalo de divisão.

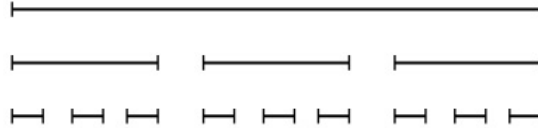
### 3.2 Problema extremal para grafos e ordens da classe trivialmente perfeita

Nesta seção, serão apresentados resultados sobre o problema extremal apresentado na Seção 3.1 para grafos e ordens da classe trivialmente perfeita. Recordamos que um grafo é trivialmente perfeito quando é possível defini-lo como um grafo vazio ou um grafo obtido pela união disjunta de  $k$  grafos trivialmente perfeitos, para algum  $k \geq 0$ , acrescido de um vértice universal [22].



Seja  $G_k$ , para  $k \geq 1$ , um grafo trivialmente perfeito obtido partir da seguinte construção: para  $k = 1$ ,  $G_1$  consiste de um único vértice  $u_1$ . Para  $k \geq 2$ ,  $G_k$  consiste de um vértice universal  $u_k$  acrescido de três cópias disjuntas de  $G_{k-1}$ . A Figura 25 ilustra um modelo de  $G_3$ .

Figura 25 – Um modelo de  $G_3$ .



O Teorema 26 responde ao problema extremal para as classes dos grafos trivialmente perfeitos.

**Teorema 26.** *Seja  $k \geq 1$ . Seja  $G$  um menor grafo trivialmente perfeito tal que  $IC(G) = k$ . Então, (i)  $G \cong G_k$  e (ii) existe um modelo  $R$  de  $G$  tal que  $IC(G) = k$  e o maior tamanho dentre os intervalos de  $R$  é exclusivamente aquele do universal de  $G$ .*

*Demonstração.* Será demonstrado por indução em  $k$ . Para  $k = 1$ , o menor grafo  $G$  tal que  $IC(G) = 1$  é o grafo com um único vértice e, portanto,  $G \cong G_1$  (e tal único vértice possui o maior tamanho de forma exclusiva). Seja  $k > 1$  e suponha válida a afirmativa para  $G_{k'}$  com  $k' < k$ . Seja  $R$  um modelo de  $G$  tal que  $IC(R) = k$ . Considere que  $G$  foi obtido pela união disjunta dos grafos trivialmente perfeitos  $H_1, \dots, H_\ell$ , com  $\ell \geq 0$ , com o acréscimo do universal  $u$ , onde os intervalos correspondendo aos grafos  $H_1, \dots, H_\ell$  se encontram, nesta ordem, da esquerda para direita em  $R$ . Seja  $P$  a ordem associada a  $R$  e  $P_i$  a ordem associada ao submodelo  $R_i$  de  $R$  induzido por  $H_i$ . Pelo Teorema 10, sabemos que  $IC(P) = |\subset_A(P)|$ . Note que, por construção de  $R$ , o intervalo universal de  $R$  aninha todos os intervalos de cada  $R_i$ ,  $1 < i < \ell$ , mas nem todos os intervalos de  $R_1$  e  $R_\ell$ , como por exemplo, seus respectivos universais  $u_1$  e  $u_\ell$ . Contudo,  $R$  aninha todos os intervalos que  $u_1$  e  $u_\ell$  aninham. Logo,

$$IC(G) = \max\{IC(H_1), IC(H_2) + 1, \dots, IC(H_{\ell-1}) + 1, IC(H_\ell)\},$$

pois a extremidade esquerda (resp. direita) de  $u_1$  (resp.  $u_\ell$ ) pode ser diminuída (resp. aumentada) até que  $u_1$  (resp.  $u_\ell$ ) tenham o mesmo tamanho de  $u$ . Como  $G$  é o menor grafo trivialmente perfeito com  $IC(G) = k$ , naturalmente  $IC(H_i) \leq k - 1$  para todo  $1 \leq i \leq \ell$ . Logo, existe um  $H_i$ , com  $1 < i < \ell$ , tal que  $IC(H_i) = k - 1$ . Pela minimalidade de  $G$ ,  $\ell = 3$ . Além disso, note que  $IC(H_1) = IC(H_3) = k - 1$  pois, se algum deles (digamos,  $H_1$ ), vale que  $IC(H_1) < k - 1$ , o modelo  $R'$  obtido de  $R$  através unicamente da troca nas posições de  $H_1$  e  $H_2$  seria tal que  $IC(R') = \max\{IC(H_2), IC(H_1) + 1, IC(H_3)\} = k - 1$ , contrariando  $IC(G) = k$ . Finalmente, como o número de vértices de  $G$  é mínimo, o mesmo deve valer para cada  $H_i$ . Aplicando-se a hipótese de indução para cada  $H_i$ , temos que por (i), cada  $H_i \cong G_{k-1}$ , com  $1 \leq i \leq 3$ , e conseqüentemente,  $G \cong G_k$ , satisfazendo a propriedade (i) para  $G$ . É fácil perceber que em  $R$  o maior tamanho é aquele de  $u$ , satisfazendo a propriedade (ii).  $\square$

**Teorema 27.** Para todo  $k \geq 1$ ,  $\tilde{\sigma}_{\text{TP}}(k) = \frac{3^k - 1}{2}$ .

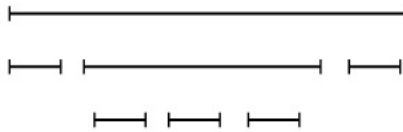
*Demonstração.* Pelo teorema anterior,  $G_k$  é o menor grafo trivialmente perfeito que possui  $IC(G) = k$ . Logo,  $\tilde{\sigma}_{\text{TP}}(k) = |V(G_k)|$ . Passemos a determinar  $|V(G_k)|$ . Pela construção, nota-se que tal determinação passa pelo problema de resolver uma equação de recorrência, definida como se segue:

$$\tilde{\sigma}_{\text{TP}}(k) = \begin{cases} 1, & \text{se } k = 1, \\ 3\tilde{\sigma}_{\text{TP}}(k-1) + 1, & \text{se } k > 1. \end{cases}$$

cuja solução resulta em  $\tilde{\sigma}_{\text{TP}}(k) = \frac{3^k - 1}{2}$ . □

Seja  $P_k$ , para  $k \geq 1$ , uma ordem trivialmente perfeita obtida através da seguinte construção: para  $k = 1$ ,  $P_1$  consiste de um único intervalo  $u_1$ . Para  $k \geq 2$ ,  $P_k$  consiste de, a partir de uma cópia de  $P_{k-1}$ , acrescentar um elemento que antecede todos aqueles de  $P_{k-1}$ , um segundo elemento que sucede todos aqueles de  $P_{k-1}$ , e de um terceiro elemento universal (isto é, incomparável a todos os outros). A Figura 26 ilustra a ordem  $P_3$ .

Figura 26 – Modelo de intervalo da ordem  $P_3$ .



**Teorema 28.** Seja  $k \geq 1$ . Seja  $P$  uma menor ordem (em número de elementos) trivialmente perfeita tal que  $IC(P) = k$ . Então, (i)  $P \cong P_k$  e (ii) existe um modelo  $R$  de  $P$  tal que  $IC(P) = k$  e o maior tamanho dentre os intervalos de  $R$  seja exclusivamente do universal de  $P$ .

*Demonstração.* Seja  $R$  um modelo de  $P$  tal que  $IC(R) = k$ . Seja  $G$  o grafo que concorda com  $P$ . Considere que  $G$  foi obtido pela união disjunta dos grafos trivialmente perfeitos  $H_1, \dots, H_\ell$ , com  $\ell \geq 0$ , com o acréscimo do universal  $u$ , onde os intervalos correspondentes aos grafos  $H_1, \dots, H_\ell$  se encontram, nesta ordem, da esquerda para direita em  $R$ . Note que pode-se seguir as argumentações do Teorema 26 para concluir que existe um  $H_i$ , com  $1 < i < \ell$ , tal que  $IC(H_i) = k - 1$ . Pela minimalidade de  $G$ ,  $\ell = 3$ ,  $IC(H_1) = IC(H_3) = 1$  e  $IC(H_2) = k - 1$  e, por hipótese de indução, a ordem associada aos intervalos de  $H_2$  em  $R$  é isomorfa a  $P_{k-1}$ . Consequentemente,  $P \cong P_k$ , satisfazendo a propriedade (i). É fácil perceber que em  $R$  o maior tamanho é aquele do universal de  $P$ , satisfazendo a propriedade (ii). □

**Teorema 29.** Para todo  $k \geq 1$ ,  $\sigma_{\text{TP}}(k) = 3k - 2$ .

*Demonstração.* Pelo teorema anterior,  $P_k = (X, \prec)$  é a menor ordem trivialmente perfeita que possui  $IC(P) = k$ . Logo,  $\sigma_{\text{TP}}(k) = |X|$ . Passemos a determinar  $|X|$ . Pela construção, nota-se que tal determinação passa pelo problema de resolver uma equação de recorrência, definida como se segue:

$$\sigma_{\text{TP}}(k) = \begin{cases} 1, & \text{se } k = 1, \\ \sigma_{\text{TP}}(k-1) + 3, & \text{se } k > 1. \end{cases}$$

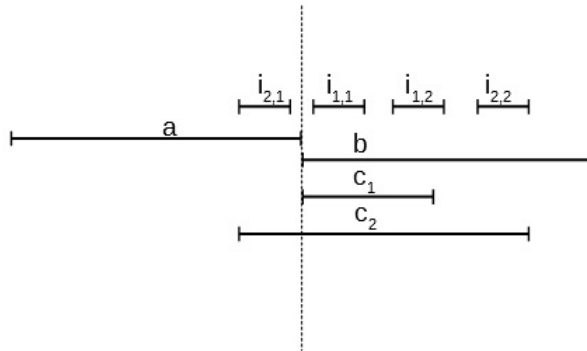
Conclui-se então que  $\sigma_{\text{TP}}(k) = 3k - 2$  provando a Conjectura 18 para a classe dos ordens trivialmente perfeitas.  $\square$

### 3.3 Problema extremal para grafos e ordens de divisão

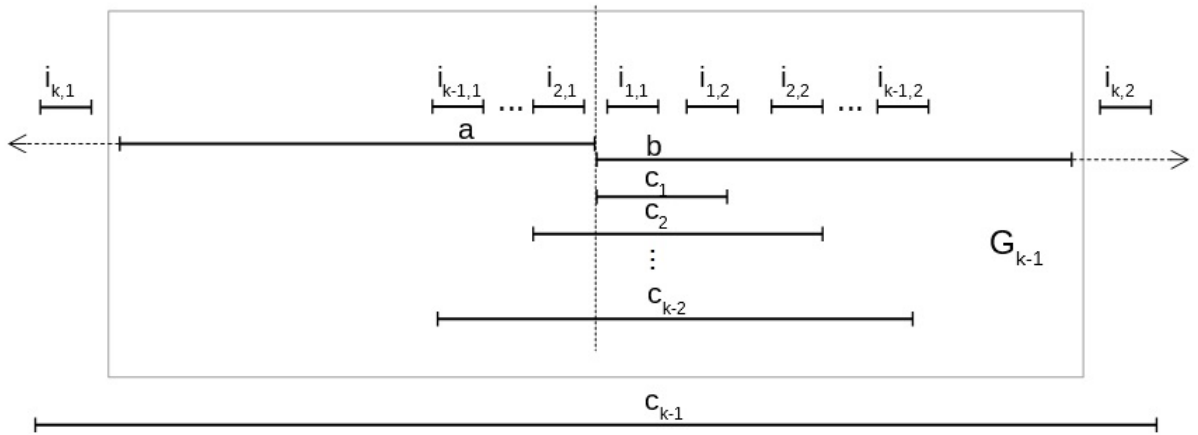
Nesta seção, estudamos o problema extremal para a classe dos grafos e ordens de divisão. Lembre que um grafo é de divisão se existir uma partição  $(K, I)$  com  $K \cup I = V(G)$ , onde  $K$  é uma clique e  $I$  é um conjunto independente.

Primeiramente, será apresentada uma família de grafos de divisão na qual, para todo natural  $k \geq 3$ , há um grafo  $G$  com  $n = 3k - 1$  e  $IC(G) = k$ . A Figura 27 apresenta um modelo de grafo de divisão que em particular pertence a tal família, para  $k = 3$  (e, portanto,  $n = 8$ ).

Figura 27 – Modelo de grafo de divisão  $G$  com  $IC(G) = 3$  e  $n = 8$ .



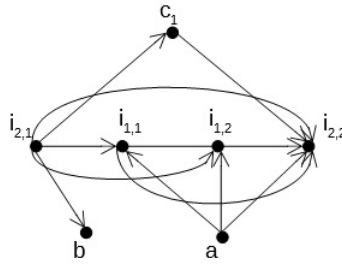
A definição da família se fará através da enumeração de cada grafo  $G_k$  membro da família, para todo  $k \geq 3$ , através da definição de um certo modelo  $R_k$  de  $G_k$ . Para  $k = 3$ ,  $R_k$  é aquele definido pela Figura 27. Para  $k > 3$ ,  $R_k$  é obtido a partir de um de  $R_{k-1}$ , com a seguinte transformação: acrescenta-se três novos intervalos  $i_{k,1}$ ,  $i_{k,2}$  e  $c_{k-1}$ , tal que  $i_{k,1}$  é colocado à esquerda (resp.  $i_{k,2}$  à direita) do primeiro (resp. último) intervalo de  $R_k$  dentre aqueles de  $I(G_{k-1})$  e  $c_{k-1} = [\ell(i_{k,1}), r(i_{k,2})]$ . Decrementa-se (resp. incrementa-se) a extremidade esquerda (resp. direita) de  $a$  (resp.  $b$ ) de modo que  $|a|$  (resp.  $|b|$ ) se torne igual a  $|c_{k-1}|$ . A Figura 28 ilustra a definição de  $G_k$  e o Teorema 30 estabelece algumas propriedades de  $G_k$ .

Figura 28 – Definição de  $G_k$ , para  $k > 3$ .

**Teorema 30.** *As seguintes afirmações são válidas em relação à  $G_k$  e  $R_k$ :*

- i.  $R_k$  é único a menos reflexão e troca de comparabilidade entre  $i_{1,1}$ ,  $i_{1,2}$ .*
- ii. Os intervalos  $c_{k-1}$ ,  $a$  e  $b$  possuem o maior tamanho.*
- iii.  $IC(G_k) = IC(R_k) = k$ .*
- iv. O intervalo  $a$  possui extremidade esquerda livre e o intervalo  $b$  possui extremidade direita livre, ou seja, pertencem, respectivamente, à primeira e à última clique na ordenação de cliques de  $R_k$ .*
- v.  $|V(G_k)| = 3k - 1$ .*

*Demonstração.* Mostraremos por indução em  $k$ . Para  $k = 3$ , é fácil verificar que  $R_3$  satisfaz as propriedades (i) – (v). Em particular, a propriedade (i) se justifica pelo fato de que ao se orientar arbitrariamente uma aresta de  $\overline{G_3}$ , verifica-se que todas as demais arestas são orientadas unicamente, a menos de  $(i_{1,1}, i_{1,2})$  (conforme ilustrado na Figura 29), seguindo o resultado. Quanto à propriedade (iii), ela se verifica pois é possível notar que  $i_{1,1} \subset_A c_1 \subset_A c_2$  (ou  $i_{1,2} \subset_A c_1 \subset_A c_2$ , se considerarmos a troca de comparabilidade) necessitando assim de tamanhos distintos. Portanto  $IC(G) = 3$ . Seja  $k \geq 4$  e suponha as propriedades (i) – (v) válidas para  $G_{k-1}$  e  $R_{k-1}$ . Será mostrado que  $G_k$  e  $R_k$  satisfazem as propriedades (i) – (v).

Figura 29 – Orientação transitiva de  $\overline{G}_3$ .

- i* Ao incluir  $i_{k,1}$  e  $i_{k,2}$  em  $I(G_{k-1})$ , note que  $i_{k,1}$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $i_{k,2}$  formam um  $P_4$ , cujo submodelo associado admite um único modelo a menos de reflexão. Como, pela hipótese de indução,  $R_{k-1}$  é um modelo único a menos de reflexão e troca de comparabilidade entre  $i_{1,1}$  e  $i_{1,2}$ , e  $R_k$  possui um  $P_4$  compartilhando os vértices centrais com  $R_{k-1}$ , então  $R_k$  admite um único modelo a menos de reflexão e troca de comparabilidade entre  $i_{1,1}$  e  $i_{1,2}$ , já que o intervalo que falta levar em conta  $c_{k-1}$  é incomparável a todos.
- ii* Como  $c_{k-2} \subset_A c_{k-1}$  e pela hipótese de indução  $c_{k-2}$  é o maior tamanho em  $R_{k-1}$ , então  $c_{k-1}$  precisa de um tamanho distinto dos tamanhos existentes em  $R_{k-1}$ . Como  $a$  possui extremidade esquerda livre e  $b$  possui extremidade direita livre é possível que eles assumam o maior tamanho do modelo. Assim,  $a$  e  $b$  passam a ter o tamanho de  $c_{k-1}$  e portanto  $a$ ,  $b$  e  $c_{k-1}$  possuem exatamente um mesmo tamanho maior que aqueles de  $R_{k-1}$ .
- iii* Pela hipótese de indução, tem-se que  $IC(R_{k-1}) = k - 1$  e pelos itens (*i*) e (*ii*) é possível concluir que os intervalos  $c_{k-1}$ ,  $a$  e  $b$  possuem o mesmo e maior tamanho em  $R_k$  maior do que aqueles de  $R_{k-1}$  e portanto  $IC(G_k) = IC(R_k) = k$ .
- iv* Pela hipótese de indução, tem-se que  $a$  possui extremidade esquerda livre e  $b$  possui extremidade direita livre. Como  $a$  e  $b$  interceptam respectivamente  $i_{k,1}$  e  $i_{k,2}$  pela construção e como as extremidades livres dos intervalos  $a$  e  $b$  serão movidas à esquerda e à direita, respectivamente, para que assumam o tamanho de  $c_{k-1}$ , então  $a$  possui extremidade esquerda livre e  $b$  possui extremidade direita livre em  $R_k$ .
- v*  $|V(G_k)| = |V(G_{k-1})| + 3 = 3(k - 1) - 1 + 3 = 3k - 1$ .

□

Pelo Lema 21 foi estabelecido que  $\sigma(k) \leq \tilde{\sigma}(k)$ . Como foi mostrado, existe uma família de grafos de divisão  $G$  tal que  $|V(G)| = 3k - 1$  e  $IC(G) = k$ . Provaremos agora que, para qualquer grafo de divisão  $G$  com  $|V(G)| = 3k - 2$ , é válido que  $IC(G) \leq k - 1$ , obtendo por consequência que  $\tilde{\sigma}_{\text{DIVISÃO}}(k) = 3k - 1$ .

**Lema 31.** *Sem perda de generalidade, em um modelo de uma ordem de divisão com o número mínimo de tamanhos, os intervalos do conjunto independente são intervalos de menor tamanho.*

*Demonstração.* Tome um modelo  $R$  de uma ordem de divisão  $P$  tal que  $IC(R) = IC(P)$ . Seja  $G$  o grafo com o qual  $P$  concorda. Seja  $m$  o menor tamanho dentre os intervalos de  $R$ . Tome  $z \in I(G)$  tal que  $|z| > m$ . Note que é possível, através do processo de incrementar  $\ell(z)$  ou decrementar  $r(z)$ , fazer com que o tamanho de  $z$  se torne  $m$  pois, caso contrário, existiria dois intervalos  $a, b$  que intersectam  $z$  com  $\ell(b) - r(a) > m$ . Neste caso, como  $a, b$  intersectam  $z$ , eles deveriam pertencer a  $K(G)$ , mas eles não se intersectam mutuamente. O resultado segue pela aplicação sucessiva a todo intervalo em  $I(G)$  com tamanho maior que  $m$ .  $\square$

Seja  $R$  um modelo de um grafo de divisão  $G$  e  $v = (i, j) \in K_3(R)$  a representação canônica de  $v$ . Chamaremos de *cobertura*  $c(v)$  de  $v$  o número de intervalos de  $I(G)$  que intersectam  $v$ , ou seja,  $c(v) = j - i - 1$ .

**Lema 32.** *Sejam  $P$  uma ordem de divisão e  $G$  o grafo que concorda com  $P$ . Seja  $r(R)$  o número de tamanhos distintos em  $K_3(R) \cup I(G)$ , onde  $R$  é um modelo de  $P$ . Existe um modelo  $R'$  de  $P$  tal que  $r(R') \leq \lfloor \frac{|I(G)|}{2} \rfloor$ .*

*Demonstração.* Seja  $R$  um modelo de  $P$ . Seja  $p$  um ponto pertencente a todos os intervalos de  $K(G)$ . Sem perda de generalidade,  $p$  não pertence a nenhum intervalo de  $I(G)$  (pois pode-se incrementar extremidades direitas e decrementar extremidades esquerdas de intervalos de  $K$  de modo que todas não pertençam a intervalos de  $I$ ).

Construa  $R'$ , um outro modelo de  $G$ , da seguinte maneira. Primeiramente, defina  $|I(G)|$  intervalos em  $R'$ , numerados de 1 a  $|I(G)|$ , correspondendo aos intervalos de  $I(G)$ , todos de tamanho unitário e igualmente espaçados de  $t$ . Suponha que o ponto  $p$  em  $R$  encontra-se entre, digamos, os intervalos  $z$  e  $z + 1$  de  $I(G)$ . Seja  $p'$  em  $R'$  o ponto que exerce o mesmo papel a  $p$  em  $R$ , isto é, que corresponde ao ponto incluído em todos os intervalos de  $K(G)$ , será definido como o ponto  $\frac{r(z) + \ell(z+1)}{2}$ .

Agora, definiremos um intervalo para cada intervalo de  $K(G)$ . Note que, seja qual for tal definição, o tamanho de cada intervalo está limitado inferior e superiormente, pois os intervalos de  $I(G)$  já estão colocados. Mais especificamente, se  $k \in K_3(R')$ , o limite superior é dado por

$$|k| < c(k) + (c(k) + 1)t. \quad (3.1)$$

Quanto ao limite inferior, este se divide em dois tipos de intervalos. Para os intervalos  $(i, j) \in K_3(R')$  tal que  $i \neq z$  e  $j \neq z + 1$ , ele é dado por

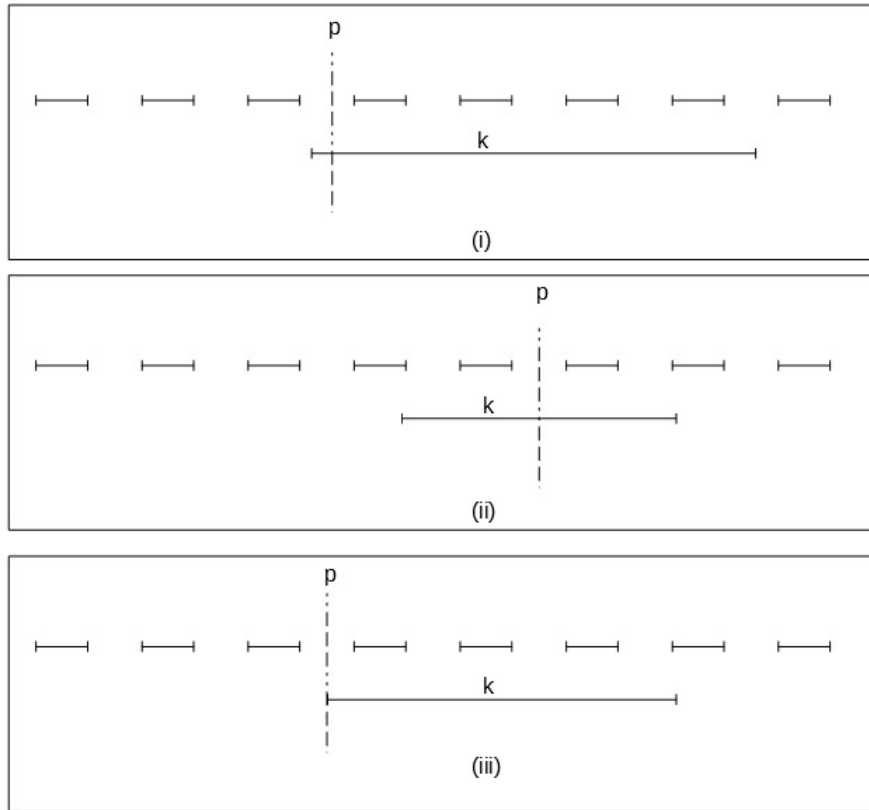
$$|k| > c(k) - 2 + (c(k) - 1)t. \quad (3.2)$$

Para os intervalos  $(i, j) \in K_3(R')$  com  $i = z$  ou  $j = z + 1$ , ele é dado por

$$|k| > c(k) - 1 + (c(k) - 1)t + \frac{t}{2}. \quad (3.3)$$

A Figura 30 ilustra um modelo  $R$ , tal que o intervalo  $k \in K_3(R)$  tem cobertura  $c(k) = 4$ . Assim, na Figura 30 (i), o limite superior de  $k \in K_3(R)$  é determinado pela inequação (3.1) e nas Figura 30 (ii), (iii), os limites inferiores do intervalo  $k \in K_3(R)$  são determinados, respectivamente, pelas inequações (3.2) e (3.3).

Figura 30 – Modelos de um grafo de divisão, com  $c(k) = 4$ .



Dividiremos os intervalos de  $K_3(R')$  em  $C_0, C_1, \dots, C_s$ , onde  $s = \lfloor \frac{|I(G')|}{2} - 1 \rfloor$ . Tal divisão pode não constituir partição pois será possível que algum destes conjuntos possam ser vazios. A prova consiste de mostrar que é possível atribuir um mesmo tamanho a intervalos de cada conjunto e, além disso, que o tamanho dos intervalos em  $C_0$  sejam unitários, seguindo o resultado.

A divisão se faz da seguinte maneira: para todo  $0 \leq i \leq s$ ,  $C_i = \{k \in K_3(R') \mid \lfloor \frac{c(k)}{2} \rfloor = i\}$ . Para cumprir o objetivo de que intervalos de cada  $C_i$  tenham um mesmo tamanho, é necessário mostrar que é possível escolher um tamanho  $\ell_i$  que satisfaça as restrições (3.1), (3.2) e (3.3) associadas a todos os intervalos de  $C_i$ . Em outras palavras,

$$\ell_i < c(k) + (c(k) + 1)t,$$

para todo  $k \in C_i$ , para todo  $1 \leq k \leq s$ .

Percebe-se pela construção de  $C_i$  que a inequação acima então se reduz a

$$\ell_i < 2i + (2i + 1)t,$$

para todo  $1 \leq i \leq s$ .

Por outro lado, quanto ao limite inferior, temos que

$$\ell_i > c(k) - 2 + (c(k) - 1)t,$$

para todo  $k = (i', j') \in C_i$  com  $i' \neq z$ ,  $j' \neq z + 1$ , para todo  $1 \leq i \leq s$ , e

$$\ell_i > c(k) - 1 + (c(k) - 1)t + \frac{t}{2},$$

para todo  $k = (i', j') \in C_i$  com  $i' = z$  ou  $j' = z + 1$ , para todo  $1 \leq i \leq s$ .

Note que as restrições dadas pelo segunda inequação são mais restritivas que aquelas do primeiro (o limite inferior da segunda inequação é o limite da primeira inequação acrescido de  $\frac{t}{2} + 1$ ). Portanto, vamos assumir que queremos satisfazer os limites da segunda inequação para cada  $C_i$ , pois assim estaremos satisfazendo ambos os limites. Analogamente ao caso anterior, podemos reescrever o limite inferior como

$$\ell_i > (2i + 1) - 1 + (2i + 1 - 1)t + \frac{t}{2} = 2i + 2it + \frac{t}{2},$$

para todo  $1 \leq i \leq s$ .

Observe que cada intervalo de possibilidade para  $\ell_i$  é não-vazio para, por exemplo,  $t = 2$ , pois tal intervalo seria dado por

$$6i + 1 < \ell_i < 6i + 2.$$

Logo, é possível ajustar todos os intervalos em  $C_i$  com um mesmo tamanho  $\ell_i$  no intervalo  $(6i + 1; 6i + 2)$ .

Em relação aos intervalos  $(i, j) \in C_0$ , note que as coberturas de cada intervalo devem ser iguais a 1 e, portanto,  $i = z$  ou  $j = z + 1$ . Definimos tais intervalos começando ou terminando em  $p'$  e de tamanho unitário.

Por fim, é fácil ver que pode-se incluir em  $R'$  os intervalos referentes a  $K_1(R)$ ,  $K_2(R)$  e universal (se existentes), todos com um mesmo tamanho, pois os intervalos já colocados em  $R'$  mantém a mesma comparabilidade daqueles de  $R$ , sendo  $R'$  ao final um modelo de  $P$  no qual  $r(R') \leq \lfloor \frac{|I(G)|}{2} \rfloor$ .  $\square$

A Figura 31 ilustra um modelo  $R$  e a Figura 32 ilustra um modelo  $R'$  obtido a partir de  $R$  após as construções contidas na prova do Lema 32. Os intervalos que se correspondem nas Figuras 31 e 32 estão na mesma posição relativa (em relação a precedência no caso do conjunto independente, ou no posicionamento vertical no caso da clique).



Figura 31 – Modelo  $R$  de um grafo de divisão.

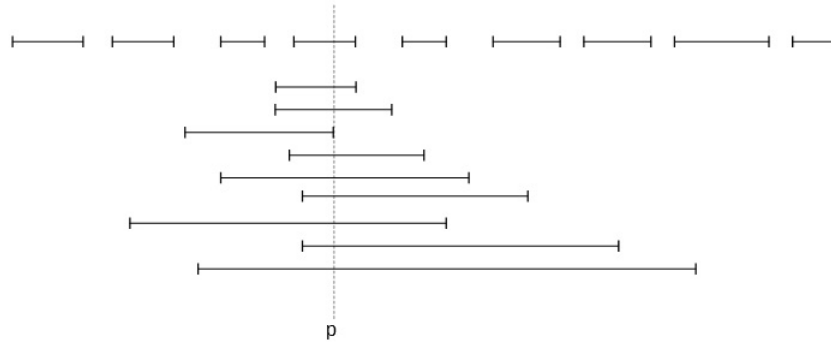
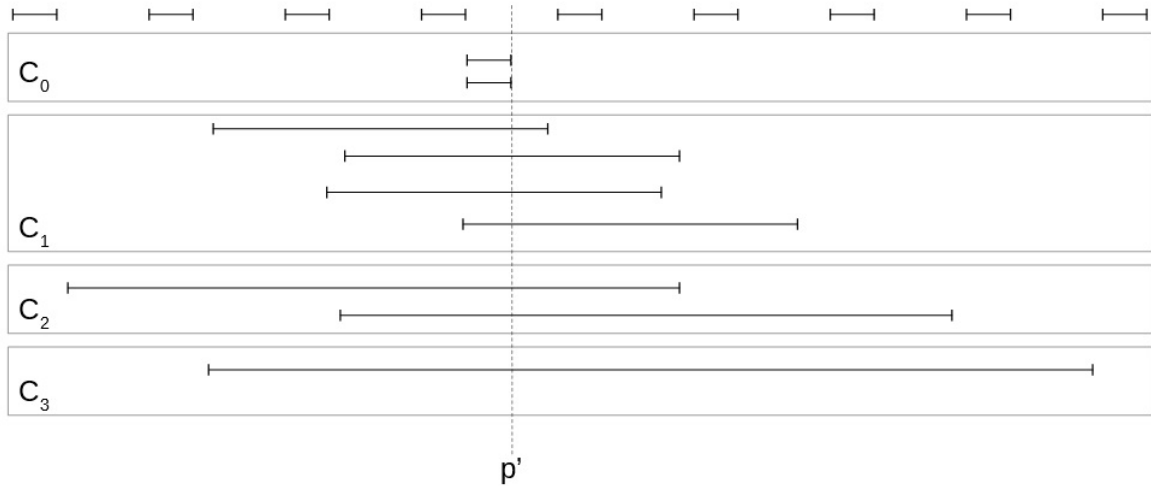


Figura 32 – Modelo  $R'$  obtido a partir de  $R$ .



**Lema 33.** *Seja  $P$  uma ordem de divisão tal que  $|K_1(P)| > 1$ . Seja  $R$  um modelo de  $P$  e  $a \in K_1(R)$  o intervalo com a menor extremidade direita. Então  $IC(P) = IC(P \setminus a)$ .*

*Demonstração.* Seja  $R$  um modelo de  $P$  tal que  $IC(R) = IC(P)$ . Seja  $R'$  o modelo obtido de  $R$  com a retirada do intervalo  $a$ . Naturalmente,  $R'$  é modelo de  $P \setminus a$  e logo  $IC(P \setminus a) \leq IC(R') \leq IC(R) = IC(P)$ . Por outro lado, tome um modelo  $R'$  de  $P \setminus a$  tal que  $IC(R') = IC(P \setminus a)$  e seja  $R$  obtido de  $R'$  acrescentando o intervalo  $a$ . Como  $a \in K_1(P)$ , então a extremidade esquerda de  $a$  é livre a esquerda. Logo, pode-se assumir que em  $R$  o intervalo  $a$  possui um dos tamanhos já existentes em  $R'$ , por exemplo, daquele intervalo de  $K_1(R)$  para o qual a extremidade direita é máxima. Portanto,  $IC(P \setminus a) = IC(R') = IC(R) \geq IC(P)$ . Logo  $IC(P) = IC(P \setminus a)$ .  $\square$

**Lema 34.** *Seja  $G$  um grafo de divisão conexo. Existe um modelo  $R$  de  $G$  tal que  $K_1(R) \neq \emptyset$ .*

*Demonstração.* Seja  $R$  um modelo de  $G$ . Se  $K_1(R) \neq \emptyset$ , então está provado. Se  $K_2(R) \neq \emptyset$ , então a reflexão de  $R$  é o modelo que justifica o resultado. Suponha então que  $|K_1(R)| = |K_2(R)| = 0$ . Como  $G$  é conexo,  $G$  possui vértice universal  $u$ . Escolha em  $R$  um intervalo  $b = (i, j) \in K_3(R)$  tal que  $i$  seja mínimo. Desloca-se os intervalos de 1 a  $i$  para a direita do último intervalo de  $I(G)$ , incrementando  $r(u)$  de modo que ele mantenha a interseção com estes intervalos deslocados, produzindo assim o modelo  $R'$ . Note que pelo menos um intervalo em  $K_3(R)$  possui agora extremidade esquerda livre em  $R'$ , pertencendo assim a  $K_1(R')$ .  $\square$

**Lema 35.** *Seja  $R$  um modelo de um grafo de divisão  $G$  tal que  $|K_3(R)| = 0$ . Então, existe um modelo  $R$  de  $G$  tal que  $IC(R) = IC(G) \leq 2$ .*

*Demonstração.* Como  $|K_3(R)| = 0$ , então  $G \in Split^2$  e a demonstração segue diretamente do Teorema 13.  $\square$

**Teorema 36.** *Seja  $G$  um grafo de divisão conexo tal que  $n = 3k - 2$  para algum  $k$  inteiro. Então,  $IC(G) \leq k - 1$ .*

*Demonstração.* Seja  $R$  um modelo de  $G$ . Em primeiro lugar, pelo Lema 34, consideraremos sem perda de generalidade que  $K_1(R) \neq \emptyset$ . Sendo assim, ao argumentarmos que  $IC(R) \leq k - 1$ , então  $IC(G) \leq IC(R) \leq k - 1$ , seguindo o resultado.

Podemos também assumir que  $|K_1(R)| = 1$  pois, caso contrário, podemos reduzir  $|K_1(R)|$  à unidade aplicando-se sucessivamente a transformação contida no Lema 33, resultando num modelo  $R'$  no qual  $|K_1(R')| = 1$  sem alterar a contagem de intervalo da ordem  $P$  associada a  $R$ . Assim, ao argumentarmos que  $IC(R') \leq k - 1$ , segue que  $IC(G) \leq IC(P) = IC(R') \leq k - 1$ . Por raciocínio análogo, e considerando a operação de reflexão, podemos também assumir que  $K_2(R) = \emptyset$  ou  $|K_2(R)| = 1$ . Além disso, como  $G$  é conexo,  $K_2(R) \neq \emptyset$  ou existe um vértice universal  $u$ .

Quando  $K_2(R) \neq \emptyset$ , podemos modificar  $R$  para que todos os intervalos de  $K_1(R) \cup K_2(R)$  tenham o mesmo tamanho (pois todos possuem extremidade livre, seja à esquerda ou à direita). Quando  $K_2(R) = \emptyset$ , então o tamanho do vértice de  $K_1(R)$  e  $u$  podem assumir o mesmo tamanho (pois ou o universal ou o intervalo de  $K_1(R)$  podem crescer até o menor dentre os dois possuir o tamanho do maior).

Por fim, consideramos que  $R$  possui todos os intervalos de  $I(G)$  com o mesmo e menor tamanho do modelo, aplicando-se a transformação do Lema 31.

Seja  $a$  o intervalo de  $K_1(R)$  e  $b = u$  se  $K_2(R) = \emptyset$  ou, caso contrário, seja  $b$  o intervalo de  $K_2(R)$ .

Em resumo, após todas as transformações anteriores, supomos  $R$  um modelo no qual há um mesmo tamanho para todos os intervalos de  $I(G)$  e outro mesmo tamanho (potencialmente distinto do tamanho de  $I(G)$ ) para os intervalos  $a$  e  $b$ . A prova segue por divisão em casos de  $|I(G)|$ .

- i* Se  $|I(G)| \geq 2k-1$ , seja  $S = V(G) \setminus I(G) \setminus \{a, b\}$ . Portanto,  $|S| \leq (3k-2) - (2k-1) - 2 = k-3$ . Sabemos, pelas hipóteses feitas sobre  $R$ , que todos os intervalos de  $I(G)$  possuem um mesmo tamanho, e os intervalos  $a$  e  $b$  possuem um mesmo tamanho entre si. Portanto,  $IC(G) \leq IC(R) \leq k-3+2 = k-1$ .
- ii* Se  $|I(G)| \leq 2k-3$ , aplicando a transformação do Lema 32 em  $R$ , temos que  $r(R) \leq \lfloor \frac{2k-3}{2} \rfloor = k-2$ . Ou seja, há no máximo  $k-2$  tamanhos distintos entre os intervalos de  $K_3(R) \cup I(G)$  e, com mais um tamanho para ambos  $a$  e  $b$ , temos  $IC(G) \leq IC(R) \leq k-1$ . Por fim, note que se  $K_2 \neq \emptyset$  e existe universal  $u$ , podemos fazer com que o tamanho de  $u, a, b$  tenham todos o mesmo tamanho, pois todos eles possuem uma extremidade livre.
- iii* Se  $|I(G)| = 2k-2$ , seja  $S = V(G) \setminus I(G) \setminus \{a, b\}$ . Assim,  $|S| = (3k-2) - (2k-2) - 2 = k-2$ .

Considere a aplicação do Lema 32 no modelo  $R$ . Seja  $C_0, C_1, \dots, C_s$  a divisão de  $K_3(R)$  obtida por tal aplicação com  $s = \lfloor \frac{|I(G)|}{2} - 1 \rfloor = k-2$ . Como  $|S| = k-2$ , algum  $C_i$  deve ser vazio, com  $0 \leq i \leq s$ . Se existe  $C_i = \emptyset$ , com  $0 < i \leq s$ , então decorre da transformação que  $r(R) \leq s = k-2$ . Contando com mais um tamanho para  $a, b$  e  $u$  (se existente),  $IC(R) \leq k-1$  (a transformação do tamanho de  $u$  naquele de  $a, b$  se faz como no caso *(ii)*). Caso contrário, como  $|S| = k-2$ , então  $C_0 = \emptyset$ ,  $|C_i| = 1$  para todo  $1 \leq i \leq s$  e o intervalo de  $C_i$  produzido pela transformação possui tamanho distinto do intervalo de  $C_j$ ,  $1 \leq i < j \leq s$ . Seja  $f, l$  respectivamente o primeiro e o último intervalo de  $I(G)$ . A prova segue de acordo com a natureza de  $b$ .

- (a) Se  $K_2(R) = \{b\}$ .

Neste caso,  $c = (1, |I(G)|)$  é a representação canônica do intervalo de  $C_s$ . Se necessário, decemente  $\ell(c)$  até que  $r(f) < \ell(c) < \ell(b)$  e incremente  $r(c)$  até que  $r(a) < r(c) < \ell(l)$ . Como  $a$  possui extremidade esquerda livre e  $b$  possui extremidade direita livre é possível expandir suas extremidades livres para que assumam um mesmo tamanho e o maior tamanho do modelo. A transformação de  $R$  continua da seguinte maneira: deslocamos  $f$  (resp.  $l$ ) à esquerda (resp. à direita) de  $x$  unidades e decrementamos  $\ell(c)$  (resp. incrementamos  $r(c)$ ) em  $x$  unidades. O objetivo é fazer com que  $a, b$  e  $c$  tenham o mesmo tamanho após tal transformação, o que se consegue com  $x = |a| - |c|$  (pois,  $a$  e  $b$  terão tamanho  $|a| + x$  ao final da transformação, enquanto  $c$  terá tamanho  $|c| + 2x$ ). Assim,  $IC(R) \leq k-1$ .

A Figura 33 exemplifica um modelo  $R$  após a aplicação do Lema 32 e a Figura 34 exemplifica um modelo  $R'$  obtido a partir de  $R$  após a aplicação do item (iii)(a). Note que os intervalos  $a$ ,  $b$  e  $c$  (em destaque na figura) assumem o mesmo tamanho.

Figura 33 – Modelo  $R$  de um grafo de divisão.

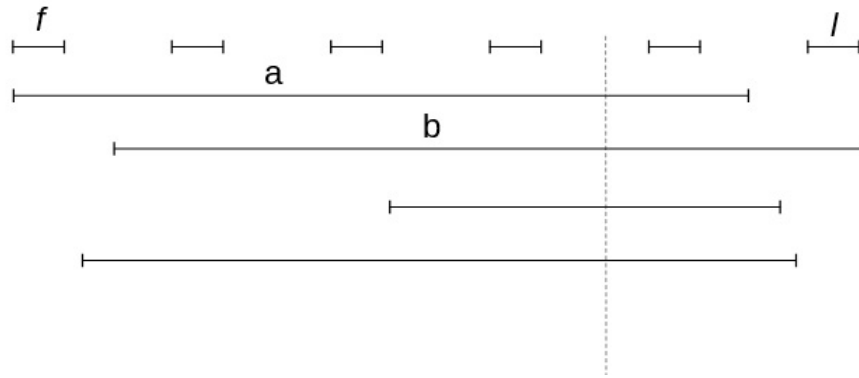
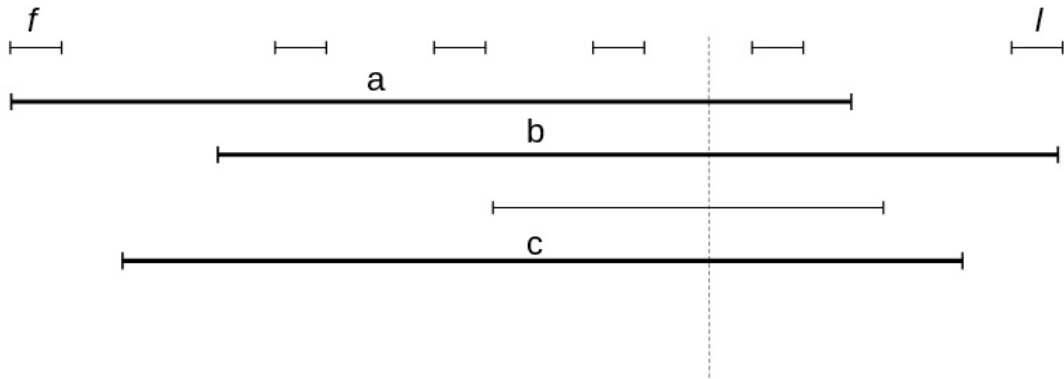


Figura 34 – Modelo  $R'$  de um grafo de divisão obtido a partir de  $R$ .



(b) Se  $u = b$  (e, portanto,  $K_2(R) = \emptyset$ ).

Como  $a$  possui extremidade esquerda livre, inicialmente decrementamos  $\ell(a)$  até que o tamanho de  $a$  seja o maior de  $R$ . Seja  $c_s$  o intervalo de  $C_s$ . Sejam  $a = (-, j_a)$  e  $c_i = (i_c, j_c)$  a representação canônica do intervalo de  $C_i$ , para algum  $1 \leq i \leq s$ , com o menor  $j_c$  tal que  $j_c \geq j_a$ . Seja  $z$  o  $(j_a - 1)$ -ésimo intervalo de  $I(G)$  em  $R$ . Se necessário, incrementamos  $r(c_i)$  até que  $r(c_i) > \max\{r(a), r(z)\}$ . Agora, modificamos o modelo  $R$  incrementando toda extremidade de intervalo maior ou igual que  $r(c_i)$  em  $|a| - |c_i|$ . Com tal transformação, os tamanhos de  $a$  e  $c_i$  se tornam iguais. Em seguida, movemos o intervalo  $l$  para que se torne o primeiro de  $I(G)$ , sem interseção com  $a$ , e decrementamos  $\ell(u)$  de modo que  $\ell(u)$  se torne igual a  $r(l)$ . Com esta última transformação,  $c_s$  passa a ter extremidade direita livre e podemos incrementar  $r(c_s)$  de modo que  $c_s$  e  $u$  tenham o mesmo tamanho. Finalmente, note que se  $i = s$ , então  $a$  também

passa a ter extremidade direita livre e podemos de maneira similar incrementar  $r(a)$  de modo que  $|a| = |c_s| = |u|$ . Na contagem de tamanhos, se  $i < s$ , os intervalos  $c_i$  e  $a$  possuem um mesmo tamanho, enquanto  $c_s$  e  $u$  passam a ter outro tamanho. Se  $i = s$ ,  $a$ , os intervalos  $c_s$  e  $u$  possuem os três um mesmo tamanho. Seja qual for o caso,  $IC(R) \leq k - 1$ .

A Figura 35 exemplifica um modelo  $R$  de um grafo de divisão  $G$  após a aplicação do Lema 32 e a Figura 36 exemplifica um modelo  $R'$  de um grafo de divisão  $G'$  obtido a partir de  $R$  após a aplicação do item (iii)(b). Neste caso, os intervalos  $a$  e  $c_i$  assumem o mesmo tamanho e  $c_s$  e  $u$  assumem o mesmo tamanho, potencialmente distinto dos intervalos de  $a$  e  $c_i$  e dos intervalos de  $I(G')$ .

Figura 35 – Modelo  $R$  de um grafo de divisão.

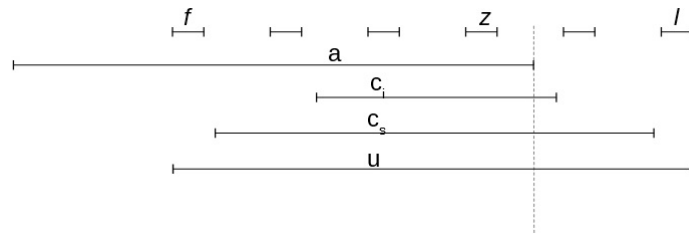
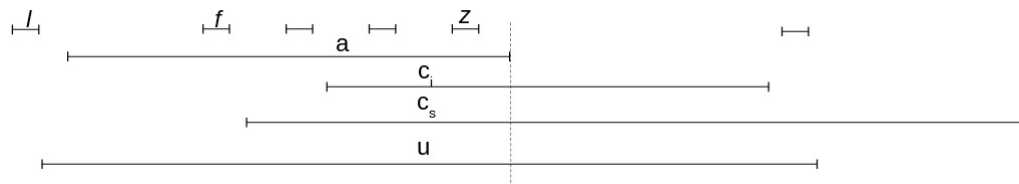


Figura 36 – Modelo  $R'$  de um grafo de divisão obtido a partir de  $R$ .



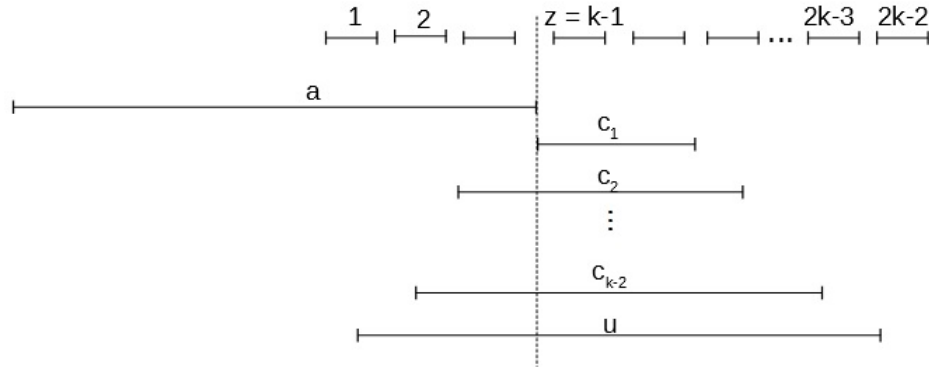
□

**Teorema 37.** *Seja  $k \geq 2$  um número inteiro. Existe uma ordem de divisão  $P = (X, \prec)$ , tal que  $IC(P) = k$ , para  $|X| = 3k - 2$ .*

*Demonstração.* Seja  $R$  o modelo de  $P$  definido esquematicamente pela Figura 37. Note que os intervalos em  $S = \{z, c_1, c_2, \dots, c_{k-2}, u\}$  estão aninhados, ou mais precisamente,  $z \subset_A c_1 \subset_A c_2 \subset_A \dots \subset_A c_{k-2} \subset_A u$ . Assim,  $IC(P) = k$ .

□

Figura 37 – Modelo  $R$  de uma ordem de divisão  $P = (X, \prec)$  com  $|X| = 3k - 2$   
 $IC(P) = k$ .



**Teorema 38.** *Seja  $P = (X, \prec)$  uma ordem de divisão tal que  $|X| = 3k - 3$  para algum  $k$  inteiro e o grafo  $G$  com o qual  $P$  concorda é conexo. Portanto,  $IC(P) \leq k - 1$ .*

*Demonstração.* Seja  $R$  um modelo de  $P$ . Em primeiro lugar, considerando a reflexão de  $R$ , assumimos sem perda de generalidade que se  $K_1(R) = \emptyset$  então  $K_2(R) = \emptyset$ .

Se  $K_1(R) \neq \emptyset$ , então podemos assumir sem perda de generalidade que  $|K_1(R)| = 1$  pois, caso contrário, podemos reduzir  $|K_1(R)|$  à unidade aplicando-se sucessivamente a transformação descrita no Lema 33, resultando num modelo  $R'$  no qual  $|K_1(R')| = 1$  sem alterar a contagem de intervalo da ordem  $P$  associada a  $R$ . Assim, ao argumentarmos que  $IC(R') \leq k - 1$ , segue que  $IC(P) = IC(R') \leq k - 1$ . Por raciocínio análogo, e considerando a operação de reflexão, podemos também assumir que  $K_2(R) = \emptyset$  ou  $|K_2(R)| = 1$ . Além disso, como  $G$  é conexo,  $K_2(R) \neq \emptyset$  ou existe um vértice universal  $u$ .

Quando  $K_2(R) \neq \emptyset$ , podemos modificar  $R$  para que todos os intervalos de  $K_1(R) \cup K_2(R)$  tenham o mesmo tamanho (pois todos possuem extremidade livre, seja à esquerda ou à direita). Quando  $K_1(R) \neq \emptyset$  e  $K_2(R) = \emptyset$ , então o tamanho do vértice de  $K_1(R)$  e  $u$  podem assumir o mesmo tamanho (pois ou o universal ou o intervalo de  $K_1(R)$  podem crescer até o menor dentre os dois possuir o tamanho do maior).

Por fim, consideramos que  $R$  possui todos os intervalos de  $I(G)$  com o mesmo e menor tamanho do modelo, aplicando-se a transformação do Lema 31.

Seja  $a = u$  se  $K_1(R) = \emptyset$  ou, caso contrário, seja  $a$  o intervalo de  $K_1(R)$ . De maneira análoga, seja  $b = u$  se  $K_2(R) = \emptyset$  ou, caso contrário, seja  $b$  o intervalo de  $K_2(R)$ .

Em resumo, após todas as transformações anteriores, supomos  $R$  um modelo no qual há um mesmo tamanho para todos os intervalos de  $I(G)$  e outro mesmo tamanho (potencialmente distinto do tamanho de  $I(G)$ ) para os intervalos  $a$  e  $b$ . A prova segue por divisão em casos de  $|I(G)|$ .

- i* Se  $|I(G)| \leq 2k - 3$ , aplicando a transformação do Lema 32 em  $R$ , temos que  $r(R) \leq \lfloor \frac{2k-3}{2} \rfloor = k-2$ . Ou seja, há no máximo  $k-2$  tamanhos distintos entre os intervalos de  $K_3(R) \cup I(G)$  e, com mais um tamanho para ambos  $a$  e  $b$ , temos  $IC(G) \leq IC(R) \leq k - 1$ . Por fim, note que se  $K_2 \neq \emptyset$  e existe universal  $u$ , podemos fazer com que o tamanho de  $u, a, b$  tenham todos o mesmo tamanho, pois todos eles possuem uma extremidade livre.

*ii* Se  $|I(G)| \geq 2k - 2$ . A prova segue com a divisão dos seguintes casos.

(a) Se  $K_1(R) \neq \emptyset$ , então seja  $S = V(G) \setminus I(G) \setminus \{a, b\}$ . Portanto,  $|S| \leq (3k - 3) - (2k - 2) - 2 = k - 3$ . Sabemos, pelas hipóteses feitas sobre  $R$ , que todos os intervalos de  $I(G)$  possuem um mesmo tamanho, e os intervalos  $a$  e  $b$  possuem um mesmo tamanho entre si. Portanto,  $IC(G) \leq IC(R) \leq k - 3 + 2 = k - 1$ .

(b) Se  $K_1 = \emptyset$ , verificamos ainda os casos:

(1)  $|I(G)| \geq 2k - 1$ , seja  $S = V(G) \setminus I(G) \setminus \{u\}$ . Portanto,  $|S| \leq (3k - 3) - (2k - 1) - 1 = k - 3$ . Sabemos, pelas hipóteses feitas sobre  $R$ , que todos os intervalos de  $I(G)$  possuem um mesmo tamanho, e o intervalo  $u$  precisa de um intervalo distinto dos demais. Portanto,  $IC(G) \leq IC(R) \leq k - 3 + 2 = k - 1$ .

(2) Se  $|I(G)| = 2k - 2$ , seja  $S = V(G) \setminus I(G) \setminus \{u\}$ . Assim,  $|S| = (3k - 3) - (2k - 2) - 1 = k - 2$ .

Considere a aplicação do Lema 32 no modelo  $R$ . Seja  $C_0, C_1, \dots, C_s$  a divisão de  $K_3(R)$  obtida por tal aplicação com  $s = \lfloor \frac{|I(G)|}{2} - 1 \rfloor = k - 2$ . Como  $|S| = k - 2$ , algum  $C_i$  deve ser vazio, com  $0 \leq i \leq s$ . Se existe  $C_i = \emptyset$ , com  $0 < i \leq s$ , então decorre da transformação que  $r(R) \leq s = k - 2$ . Permitindo mais um tamanho para  $u$ , temos que  $IC(R) \leq k - 1$ . Caso contrário, como  $|S| = k - 2$ , então  $C_0 = \emptyset$ ,  $|C_i| = 1$  para todo  $1 \leq i \leq s$  e o intervalo de  $C_i$  produzido pela transformação possui tamanho distinto do intervalo de  $C_j$ , para todo  $1 \leq i < j \leq s$ . Neste caso, ao aplicar o Lema 32 com espaçamento  $t = 1$ , podemos modificar o intervalo  $z = (i, j) \in C_1$  fazendo-o assumir o tamanho dos intervalos do conjunto independente, com  $\ell(z) = r(i+1)$  e  $r(z) = \ell(i+2)$ . Portanto, na contagem de tamanhos, o número de tamanhos distintos em  $K_3(R) \cup I(G) = k - 2$  e mais um tamanho para o universal,  $IC(G) \leq IC(R) \leq k - 1$ . A Figura 38 exemplifica um modelo  $R$  de um grafo de divisão  $G$  após a aplicação do Lema 32 e a Figura 39 exemplifica um modelo  $R'$  de um grafo de divisão  $G'$  obtido a partir de  $R$  após a aplicação do item *(ii)(b)(2)*. Neste caso, os intervalos do conjunto independente e o intervalo  $z$  assumem o mesmo tamanho.

Figura 38 – Modelo  $R$  de um grafo de divisão após aplicação do Lema 32.

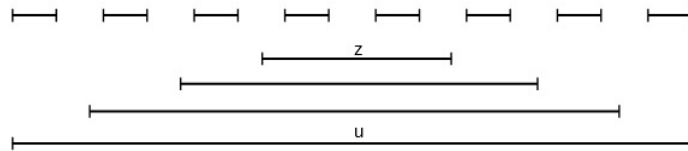
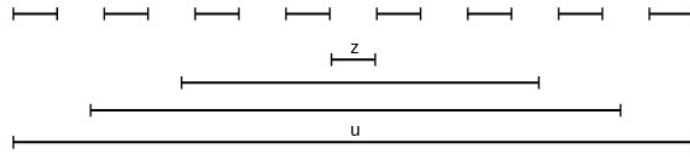


Figura 39 – Modelo  $R'$  obtido a partir de  $R$  com os intervalos do conjunto independente e o intervalo  $z$  com o mesmo tamanho.



□

**Corolário 39.** *Seja  $G$  um grafo de divisão. Então,  $IC(G) \leq \lfloor \frac{(n-1)}{3} \rfloor$ .*

*Demonstração.* Pelo Teorema 38 concluímos que para grafos de divisão  $G$ , se  $n = 3k - 2$  então  $IC(G) \leq k - 1$ . Logo,  $IC(G) \leq \lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor - 1 = \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor$ . □

### 3.4 Conclusão

Investigamos a validade da Conjectura 18 quando as ordens e grafos são restritos a certas classes. Um dos modelos de ordens sugeridos por Fishburn [1], o qual ele conjectura possuir o menor tamanho de intervalos que realiza dada contagem de intervalos, pertencem as classes trivialmente perfeita e de divisão, então determinamos os valores de  $\sigma_{\text{TP}}(k)$ ,  $\tilde{\sigma}_{\text{TP}}(k)$ ,  $\sigma_{\text{DIVISÃO}}(k)$  e  $\tilde{\sigma}_{\text{DIVISÃO}}(k)$ . A intenção nesta abordagem de investigação era aumentar evidências em favor da conjectura ou desprová-la. Os resultados seguem sumarizados pela Tabela 2.

Tabela 2 – Resultados obtidos de  $\sigma_{\mathcal{C}}(k)$  e  $\tilde{\sigma}_{\mathcal{C}}(k)$ , com  $\mathcal{C} \in \{\text{TP}, \text{DIVISÃO}\}$ .

Função \ $\mathcal{C}$	TP	DIVISÃO
$\sigma_{\mathcal{C}}$	$3k - 2$	$3k - 2$
$\tilde{\sigma}_{\mathcal{C}}$	$\frac{3^k - 1}{2}$	$3k - 1$



## 4 SOBRE AS CLASSES DE CONTAGEM DE INTERVALO IGUAL A DOIS

Como foi discutido no Capítulo 2, a complexidade de resolver 2-IC está em aberto. Neste capítulo, estudamos subclasses daquela que consiste dos grafos e ordens com contagem de intervalo no máximo 2. Destacamos os resultados da revisão de literatura que tratam de caracterizar e reconhecer algumas destas subclasses neste capítulo. Além disso, estudamos a relação de inclusão destas e outras classes.

### 4.1 Resultados existentes

Recordando do Capítulo 2, um *modelo- $\{a, b\}$  de intervalos* é um modelo no qual os intervalos possuem tamanhos  $a$  ou  $b$ . A classe dos grafos  $G$  que admitem um modelo- $\{a, b\}$  é denotada por  $\text{LEN}(a, b)$ .

Skrien [17] caracterizou as classes  $\text{LEN}(0, 1)$ . Um vértice admite tamanho zero se é simplicial, isto é, a sua vizinhança induz uma clique. Rautenbach e Szwarcfiter [18] descreveram um algoritmo de tempo linear para reconhecimento da classe  $\text{LEN}(0, 1)$ . Além disso, caracterizaram a classe  $\text{LEN}(0, 1)$  como classe livre dos grafos representados na Figura 13.

Boyadzhiyska, Isaak e Trenk [21] apresentaram uma caracterização tanto para ordens de intervalo que admitem um modelo- $\{0, 1\}$ , quanto para aquelas que admitem um modelo- $\{1, 2\}$ . Em seu trabalho, não houve discussão a respeito da relação de inclusão destas duas classes. Isto nos motivou a investigar a relação de inclusão entre as classes  $\text{LEN}(a', b')$  e  $\text{LEN}(a, b)$  para  $a' < b'$  e  $a < b$ . Inicialmente, de modo intuitivo, suspeitamos que todo modelo- $\{2, 4\}$ , por exemplo, poderia se transformar em um modelo- $\{2, 5\}$ , fixando o menor tamanho e aumentando o maior tamanho em uma unidade. Veremos neste capítulo que, mesmo que existam modelos- $\{2, 4\}$  que admitam ser transformados em modelos- $\{2, 5\}$ , este não é o caso geral. Mostraremos que  $\text{LEN}(a', b') \not\subseteq \text{LEN}(a, b)$  para todo  $a' < b'$ ,  $a < b$ , exceto se  $\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}$ . Na Seção 4.2, a classe  $\text{LEN}(0, k)$ , para todo  $k > 0$ , será comparada com todas as demais. Na Seção 4.3, apresentamos a comparação entre as demais classes.

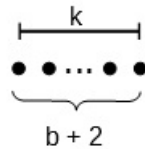
## 4.2 Relação de inclusão entre classes $\text{LEN}(0,k)$ e $\text{LEN}(a,b)$

O seguinte teorema estabelece a relação de  $\text{LEN}(0,k)$  com as demais classes.

**Teorema 40.**  $\text{LEN}(0,k) \not\subseteq \text{LEN}(a,b)$  e  $\text{LEN}(a,b) \not\subseteq \text{LEN}(0,k)$ , para todo  $k \geq 1$  e  $0 < a < b$ .

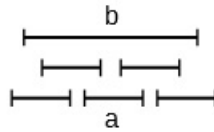
*Demonstração.* Considere a ordem associada ao modelo- $\{0,k\}$  esquematizado na Figura 40. Seja  $G$  o grafo de intervalo correspondente. Nesta figura, são apresentados  $b+2$  intervalos de tamanho 0 e mais um universal de tamanho  $k$ . Note que  $b$  intervalos daqueles de tamanho 0 estão sempre aninhados no intervalo universal e, portanto, na suposição da existência de um modelo- $\{a,b\}$   $R$  para  $G$ , tais  $b$  intervalos aninhados devem ter o tamanho  $a$  e o universal o tamanho  $b$ . Por outro lado, o intervalo universal deve ter ao menos tamanho  $ba$  em  $R$ , que é maior que  $b$ , uma contradição. Portanto,  $\text{LEN}(0,k) \not\subseteq \text{LEN}(a,b)$ .

Figura 40 – Modelo- $\{0,k\}$  de um grafo que não admite modelo- $\{a,b\}$ .



Considere agora o grafo  $G$  correspondente ao modelo- $\{a,b\}$  esquematizado na Figura 41. Este modelo possui um  $P_4$  como subgrafo induzido, então o modelo é único a menos de reflexão. Note que o intervalo  $I_a$  de tamanho  $a$  rotulado na figura não pode ser representado por tamanho 0 já que não é simplicial. Além disso, note que como  $I_b$ , o intervalo de tamanho  $b$  rotulado na figura, aninha  $I_a$ , então  $I_b$  não poderia ser representado pelo tamanho nem 0, nem  $a$ . Assim, não existe modelo- $\{0,k\}$  de  $G$  e concluímos que  $\text{LEN}(a,b) \not\subseteq \text{LEN}(0,k)$ .

Figura 41 – Modelo- $\{a,b\}$  de um grafo que não admite modelo- $\{0,k\}$ .



□

### 4.3 Relação de inclusão entre classes $\text{LEN}(a', b')$ e $\text{LEN}(a, b)$

Investigaremos a inclusão de  $\text{LEN}(a', b')$  e  $\text{LEN}(a, b)$ , com  $a' < b'$  e  $a < b$ . Observe o modelo  $R$  representado na Figura 42, de certo grafo  $G$ . Queremos mostrar que  $G$  não admite modelo- $\{1, \frac{5}{2}\}$ , ou equivalentemente não existe modelo- $\{2, 5\}$  (pelo Lema 1). Note que em  $R$  existe um caminho  $x_0, x_1, \dots, x_6$  com cada intervalo de tamanho 1. Para cada intervalo de  $x_1, \dots, x_5$  há três intervalos de modo que os intervalos  $x_1, \dots, x_5$  estão aninhados em respectivamente  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_5$ . Além disso, note o conjunto independente com dois intervalos  $y_1$  e  $y_2$  que têm o maior tamanho do modelo. Para cada intervalo  $y_1$  e  $y_2$  há três intervalos de modo que os intervalos  $y_1, y_2$  aninham respectivamente os intervalos  $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ . Em qualquer modelo de  $G$ , com o menor tamanho unitário e sendo  $\alpha$  o maior tamanho, temos que os intervalos  $y_1$  e  $y_2$  devem ficar entre os limites de  $x_1, \dots, x_5$ . Portanto,

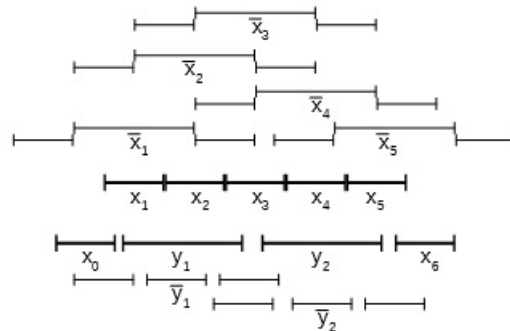
$$2\alpha < 5,$$

ou seja,

$$\alpha < \frac{5}{2}.$$

A Figura 42 apresenta um modelo- $\{1, 2\}$  de  $G$ . Concluímos que  $\text{LEN}(1, 2) \not\subseteq \text{LEN}(2, 5)$ .

Figura 42 – Modelo- $\{1, 2\}$ .

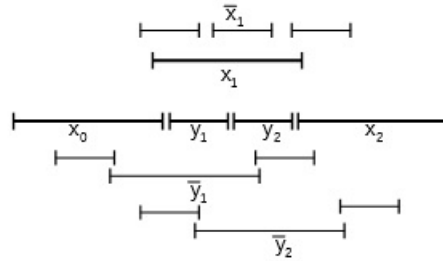


Seja agora  $G$  o grafo correspondente ao modelo da Figura 43. Queremos mostrar que  $G$  não admite modelo- $\{1, 2\}$ . Note que em  $R$  existe um caminho um caminho  $x_0, x_1, x_2$  com o maior tamanho do modelo. Para o intervalo  $x_1$ , há mais três intervalos formando uma garra, onde o intervalo  $x_1$  aninha o intervalo  $\bar{x}_1$ . Além disso, note que os intervalos  $y_1$  e  $y_2$  formam um conjunto independente e os intervalos são de tamanho 1. Para cada intervalo  $y_1$  e  $y_2$ , há mais três intervalos formando uma garra, onde cada intervalo  $y_1$  e  $y_2$  está aninhado por  $\bar{y}_1$  e  $\bar{y}_2$ . Em qualquer modelo de  $G$ , com o menor tamanho unitário e sendo  $\alpha$  o maior tamanho, temos que os intervalos  $y_1$  e  $y_2$  devem ficar compreendidos entre  $\ell(x_1)$  e  $r(x_1)$ . Portanto,

$$\alpha > 2.$$

A Figura 43 apresenta um modelo- $\{2,5\}$ . Concluimos que  $\text{LEN}(2,5) \not\subseteq \text{LEN}(1,2)$ .

Figura 43 – Modelo- $\{2,5\}$ .

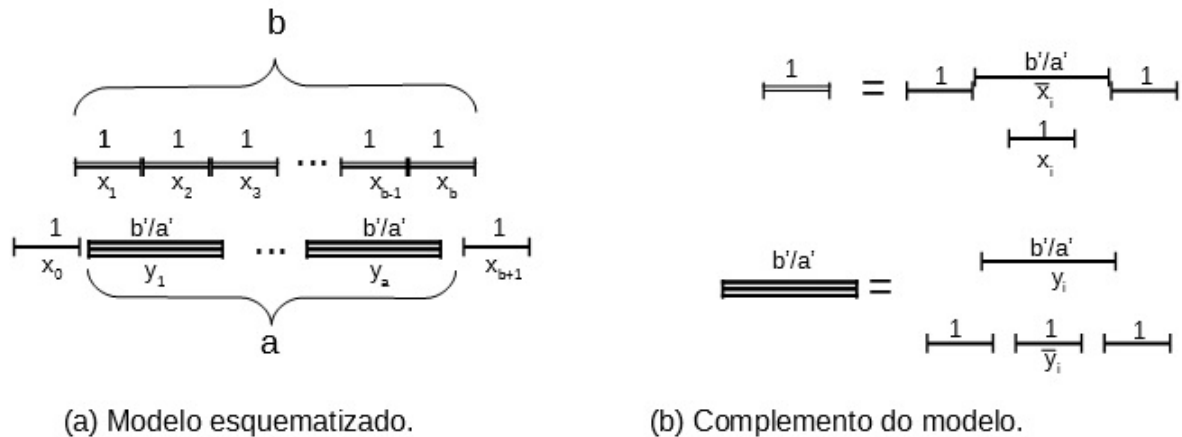


A generalização desta ideia é no que consiste o Teorema 41.

**Teorema 41.** Para todo  $0 < a' < b', 0 < a < b, a, b, a', b'$  inteiros positivos com  $\frac{b'}{a'} \neq \frac{b}{a}$ ,  $\text{LEN}(a', b') \not\subseteq \text{LEN}(a, b)$ .

*Demonstração.* Se  $\frac{b'}{a'} < \frac{b}{a}$ , seja  $G$  o grafo correspondente ao modelo obtido da construção esquematizada na Figura 44.

Figura 44 – Esquema do modelo para  $\frac{b'}{a'} < \frac{b}{a}$ .



Neste modelo, há um caminho  $x_0, x_1, \dots, x_b, x_{b+1}$  com  $b+2$  intervalos de tamanho 1. Para cada intervalo  $x_i$ , para  $1 \leq i \leq b$ , há outros três intervalos de modo que o conjunto formado por  $x_i$  e tais três intervalos associados induzam uma garra na qual  $x_i$  esteja aninhado a  $\bar{x}_i$ . No esquema da Figura 44(a), apenas os intervalos  $x_i$  estão representados e, por isso, são apresentados por intervalo com barra dupla (na Figura 44(b), evidencia-se a presença dos demais intervalos). Além disso, há no modelo um conjunto independente  $y_1, \dots, y_a$ , cada um com tamanho  $\frac{b'}{a'}$ . Para cada intervalo  $y_i$ , acrescenta-se outros três intervalos de modo que o conjunto formado por  $y_i$  e tais três intervalos associados induzam uma garra na qual  $y_i$  aninhe  $\bar{y}_i$ . No esquema da Figura 44(a), apenas os intervalos  $y_i$  estão representados e, por isso, são apresentados por intervalo com barra tripla (na Figura 44(b), evidencia-se a presença dos demais intervalos). Estes intervalos devem ser dispostos de modo que  $r(x_0) + \epsilon = \ell(y_1)$  e  $r(y_i) + \epsilon = \ell(y_i + 1)$ , para todo  $1 \leq i < a$ , onde  $\epsilon$  é qualquer valor tal que

$$\epsilon < \frac{b - a(\frac{b'}{a'})}{a}.$$

Note que

$$r(y_a) = r(x_0) + a\left(\frac{b'}{a'}\right) + a\epsilon < r(x_0) + b = \ell(x_{b+1}).$$

Portanto, os intervalos  $y_i$  estão compreendidos entre  $\ell(x_1)$  e  $r(x_b)$ . Assim, o valor  $\alpha$  para o maior tamanho em qualquer modelo  $R$  de  $G$  no qual o menor tamanho é mantido unitário é tal que

$$a\alpha < b,$$

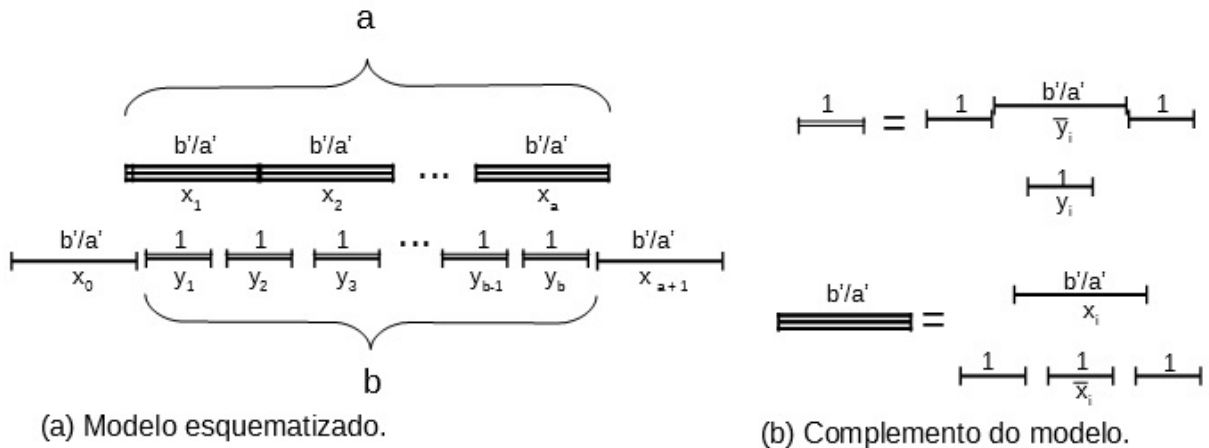
ou seja,

$$\alpha < \frac{b}{a}.$$

Portanto, o modelo de  $G \in \text{LEN}(1, \frac{b'}{a'})$ , mas  $G \notin \text{LEN}(1, \frac{b}{a})$ , ou equivalentemente,  $G \in \text{LEN}(a', b')$ , mas  $G \notin \text{LEN}(a, b)$ .

Por outro lado, se  $\frac{b'}{a'} > \frac{b}{a}$ , seja  $G$  o grafo correspondente ao modelo obtido da construção esquematizada na Figura 45.

Figura 45 – Esquema do modelo para  $\frac{b'}{a'} > \frac{b}{a}$ .



Neste modelo, há um caminho  $x_0, x_1, \dots, x_a, x_{a+1}$  com  $a + 2$  intervalos de tamanho  $\frac{b'}{a'}$ . Cada intervalo  $x_i$ , para  $1 \leq i \leq a$ , há outros três intervalos de modo que o conjunto formado por  $x_i$  e tais três intervalos associados induzam uma garra na qual  $x_i$  aninhe  $\bar{x}_i$ . No esquema da Figura 45(a), apenas os intervalos  $x_i$  estão representados e, por isso, são apresentados por intervalo com barra tripla (na Figura 45(b), evidencia-se a presença dos demais intervalos). Além disso, há no modelo um conjunto independente  $y_1, \dots, y_b$ , cada um com tamanho 1. Cada intervalo  $y_i$ , há outros três intervalos de modo que o conjunto formado por  $y_i$  e tais três intervalos associados induzam uma garra na qual  $y_i$  esteja aninhado a  $\bar{y}_i$ . No esquema da Figura 45(a), apenas os intervalos  $y_i$  estão representados e, por isso, são apresentados por intervalo com barra dupla (na Figura 45(b), evidencia-se a presença dos demais intervalos). Estes intervalos devem ser dispostos de modo que  $r(x_0) + \epsilon = \ell(y_1)$  e  $r(y_i) + \epsilon = \ell(y_{i+1})$ , para todo  $1 \leq i < b$ , onde  $\epsilon$  é qualquer valor tal que

$$\epsilon < \frac{a\left(\frac{b'}{a'} - b\right)}{b}.$$

Note que

$$r(y_a) = r(x_0) + b + b\epsilon < r(x_0) + a\left(\frac{b'}{a'}\right) = \ell(x_{a+1}).$$

Portanto, os intervalos  $y_i$  estão compreendidos entre  $\ell(x_1)$  e  $r(x_b)$ . Assim, o valor  $\alpha$  para o maior tamanho em qualquer modelo  $R$  de  $G$  no qual o menor tamanho é mantido unitário é tal que

$$a\alpha > b,$$

ou seja,

$$\alpha > \frac{b}{a}.$$

□

Portanto, o modelo de  $G \in \text{LEN}(1, \frac{b}{a})$ , mas  $G \notin \text{LEN}(1, \frac{b'}{a'})$ , ou equivalentemente,  $G \in \text{LEN}(a, b)$ , mas  $G \notin \text{LEN}(a', b')$ .

**Corolário 42.** *Para todo  $a' < b'$ ,  $a < b$ , temos que:*

- se  $a' = a = 0$ , então  $\text{LEN}(a', b') = \text{LEN}(a, b)$
- se  $a' = 0$  e  $a \neq 0$ , então  $\text{LEN}(a', b') \not\subseteq \text{LEN}(a, b)$ ,  $\text{LEN}(a, b) \not\subseteq \text{LEN}(a', b')$
- se  $a' \neq 0$ ,  $a \neq 0$ ,  $\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}$ , então  $\text{LEN}(a', b') = \text{LEN}(a, b)$
- se  $a' \neq 0$ ,  $a \neq 0$ ,  $\frac{b'}{a'} \neq \frac{b}{a}$ , então  $\text{LEN}(a', b') \not\subseteq \text{LEN}(a, b)$ ,  $\text{LEN}(a, b) \not\subseteq \text{LEN}(a', b')$

*Demonstração.* Se  $a' = a = 0$ , temos que um modelo- $\{a', b'\}$  pode ser transformado em um modelo- $\{a, b\}$  pela multiplicação de  $\frac{b}{b'}$  e um modelo- $\{a, b\}$  pode ser transformado em um modelo- $\{a', b'\}$  pela multiplicação de  $\frac{b'}{b}$ . Se  $a' \neq 0$ ,  $a \neq 0$  e  $\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}$ , então um modelo- $\{a', b'\}$  pode ser transformado em um modelo- $\{a, b\}$  pela multiplicação de  $\frac{a}{a'}$ . Com efeito, um intervalo de tamanho  $a'$  seria modificado para um de tamanho  $a$ , e um intervalo de tamanho  $b'$  teria o tamanho modificado para  $b'\frac{a}{a'} = b\frac{a}{a'} = b$ . Analogamente, um modelo- $\{a, b\}$  pode ser transformado em um modelo- $\{a', b'\}$  pela multiplicação de  $\frac{a'}{a}$ . O caso em que  $a' = 0$ ,  $a \neq 0$ , segue pelo Teorema 40 que  $\text{LEN}(a', b') \not\subseteq \text{LEN}(a, b)$  e  $\text{LEN}(a, b) \not\subseteq \text{LEN}(a', b')$ . Se  $a' \neq 0$ ,  $a \neq 0$ ,  $\frac{b'}{a'} \neq \frac{b}{a}$ , segue pelo Teorema 41 que  $\text{LEN}(a', b') \not\subseteq \text{LEN}(a, b)$  e  $\text{LEN}(a, b) \not\subseteq \text{LEN}(a', b')$ . □

## CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

O problema da contagem de intervalo, que determina o menor número de tamanhos de intervalos distintos necessário para representar um modelo tem atraído diversos pesquisadores [1, 3, 6, 7, 20, 21, 26]. Tais pesquisas são sob uma perspectiva puramente teórica ou com aplicações. Nesta dissertação, investigamos uma versão extremal deste problema, que consiste em determinar a menor ordem  $P$  (resp. grafo  $G$ ) em número de elementos (resp. vértices), dado um natural  $k$ , tal que a contagem de intervalo de  $P$  (resp.  $G$ ) seja igual a  $k$ . Tal problema foi chamado de  $\kappa$ -IC. Além disso, investigamos a hierarquia de inclusão entre um conjunto infinito de subclasses dos grafos que possuem contagem de intervalo igual a dois, cuja união resulta na própria classe dos grafos que possuem contagem de intervalo igual a dois.

No Capítulo 2, foi feita uma revisão da literatura com o objetivo de analisar os principais resultados existentes do problema da contagem de intervalo. Assim, foi possível observar que este problema possui algoritmos de reconhecimento eficientes para grafos e ordens que admitem um modelo com todos os intervalos de um mesmo tamanho, conhecidos como respectivamente grafos e ordens unitários, incluindo algoritmos lineares [14–16]. Diferente de 1-IC, a complexidade de 2-IC não é conhecida. Mostramos que existem na literatura resultados para algumas classes restritas em que a contagem de intervalo é no máximo dois [1, 17, 18, 20, 21]. Perante os problemas anteriores 1-IC e 2-IC, surgiu também uma investigação do problema IC e assim como o problema 2-IC, não se sabe se este problema é NP-Completo ou não. Uma das motivações desta dissertação, foi apresentado o problema extremal de Fishburn [1], cuja conjectura foi estudada no Capítulo 3. Apresentamos também resultados já encontrados sobre o problema da contagem de intervalo restrito à algumas classes de grafos e ordens. Por exemplo, foi mostrado que a contagem de intervalo de árvores, grafos de limiar, quase livre de  $K_{1,3}$ , grafos estrelados de limiar e grafos limiar generalizados é no máximo igual a dois. Para grafos livres de touro estendido, em particular grafos trivialmente perfeitos, existe um algoritmo eficiente que computa a contagem de intervalos e esta classe contém exemplos com contagem de intervalo de valores arbitrários [7]. Existe também um resultado da contagem de intervalo relacionado ao número de cliques, demonstrado por Cerioli, Oliveira e Szwarcfiter [7]. Alguns pesquisadores propuseram problemas relacionados à contagem de intervalo, entre eles, o problema de determinar o menor número de intervalos não-unitários entre todos os modelos de um dado grafo  $G$  [1, 25–27].

No Capítulo 3, estudamos o problema extremal definido por Fishburn [1], de determinar o valor da função  $\sigma_{\mathcal{C}}(k)$  definida como a menor quantidade de intervalos necessária para uma ordem  $P$  pertencente a classe  $\mathcal{C}$  que possuam  $IC(P) \geq k$ . A conjectura de Fishburn [1] é que  $\sigma_{\mathcal{C}}(k) = 3k - 2$  quando  $\mathcal{C}$  representa a classe de todas as ordens. Investigamos como tal conjectura se comporta se restrita a certas classes. Estudamos  $\sigma_{\text{TP}}(k)$  e  $\sigma_{\text{DIVISÃO}}(k)$  e encontramos os resultados compatíveis com a conjectura para ordens gerais. Fishburn [1] também define o problema extremal para grafos como  $\tilde{\sigma}_{\mathcal{C}}(k)$  e estabelece que  $\sigma_{\mathcal{C}}(k) \leq \tilde{\sigma}_{\mathcal{C}}(k)$ . Além disso, não há nenhuma contribuição adicional para  $\tilde{\sigma}_{\mathcal{C}}(k)$ . Investi-

gamos  $\tilde{\sigma}_C(k)$  para as classes dos grafos trivialmente perfeitos e de divisão. Encontramos um resultado para a família de grafos trivialmente perfeitos como  $\tilde{\sigma}_{\text{TP}}(k) = \frac{3^k-1}{2}$  e para grafos de divisão como  $\tilde{\sigma}_{\text{DIVISÃO}}(k) = 3k - 1$ . Os resultados desta pesquisa foram apresentados na *XII Semana do Instituto de Matemática e Estatística (IME)/UERJ* [29] e no *VIII Latin-American Workshop on Cliques in Graphs (LAWCG)* [30].

No Capítulo 4, definimos as classe  $\text{LEN}(a,b)$  como aquelas dos grafos  $G$  que admitem um modelo- $\{a,b\}$ , ou seja, um modelo que pode ser representado por tamanhos  $a$  ou  $b$ , com  $a < b$ . Motivado pelos trabalhos de [17, 18, 21] que caracterizam modelos- $\{0, 1\}$  [17, 18, 21] e modelos- $\{1, 2\}$  [21], estudamos a hierarquia de inclusão entre as classes  $\text{LEN}(a,b)$ . Em particular, mostramos que  $\text{LEN}(a', b') = \text{LEN}(a, b)$  se e somente se  $\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}$ .

Por último, ressaltamos que ainda há diversos caminhos de pesquisas relacionadas ao problema da contagem de intervalo. Como trabalho futuro, propomos alguns dos assuntos abaixo.

- i. Continuar a pesquisa para o problema extremal com o foco na conjectura de Fishburn [1] aplicados a outras classes de grafos e ordens.
- ii. Diante do estudo do problema extremal para grafo de divisão, chegamos a resultados próximos e talvez possível de demonstrar sobre a contagem de intervalo para grafos de divisão. Cerioli, Oliveira e Szwarcfiter [9] apresentam resultados para duas subclasses dos grafos de divisão, ambas com contagem de intervalo limitadas, como mostrado no Capítulo 2. A contagem de intervalo para ordens e grafos de divisão por outro lado pode crescer arbitrariamente.
- iii. Investigar a contagem de intervalo da classe dos grafos de intervalo  $\cap$  permutação. Tal classe está incluída na importante classe conhecida dos grafos de permutação (grafos de interseção de famílias de segmentos de retas entre linhas paralelas). Diante desta motivação, procurar por caracterizações desta classe, com o objetivo de usá-las na determinação da contagem de intervalo.
- iv. Investigar a caracterização da classe dos grafos que são de intervalo e de divisão. Uma vez estabelecida as propriedades de tal classe, é possível que tais propriedades sejam úteis na determinação da contagem de intervalo dos grafos de divisão.



## REFERÊNCIAS

- [1] FISHBURN, P. *Interval Orders and Interval Graphs*. New Jersey: John Wiley and Sons, 1985.
- [2] BENZER, S. On the topology of the genetic fine structure. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 45, n. 11, p. 1607–1620, 1959.
- [3] LEKKERKERKER, C.; BOLAND, J. Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line. *Fundamenta Mathematicae*, v. 51, n. 1, p. 45–64, 1962.
- [4] FULKERSON, D. R.; GROSS, O. A. Incidence matrices and interval graphs. v. 15, n. 3, p. 835–855, 1965.
- [5] OLIVEIRA, F. S. *Sobre Ordens e Grafos de Intervalo*. Tese (Doutorado), Rio de Janeiro, 2011.
- [6] GOLUMBIC, M. C. Interval graphs and related topics. *Discrete Mathematics*, v. 55, n. 2, p. 113–121, 1985.
- [7] CERIOLI, M.; OLIVEIRA, F. S.; SZWARCFITER, J. The interval count of interval graphs and orders: a short survey. *Journal of the Brazilian Computer Society*, v. 18, p. 103–112, 2012.
- [8] LEIBOWITZ, R.; PECK, G. W. The interval count of a graph. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, v. 3, n. 4, p. 485–494, 1982.
- [9] CERIOLI, M.; OLIVEIRA, F. S.; SZWARCFITER, J. Interval count of generalizations of threshold graphs. *Matemática Contemporânea*, v. 42, p. 9–16, 2014.
- [10] BONDY, J.; MURTY, U. *Graph Theory*. Ontario: Springer, 2008.
- [11] SZWARCFITER, J. L. *Teoria Computacional de Grafos*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2018.
- [12] SEDGEWICK, R.; FLAJOLET, P. *An Introduction to the Analysis of Algorithms*. Boston, MA, USA: Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1996.
- [13] GILMORE, P. C.; HOFFMAN, A. J. A characterization of comparability graphs and of interval graphs. *Canadian Journal of Mathematics*, v. 16, p. 539–548, 1964.
- [14] ROBERTS, F. Indifference graphs. *Academic Press*, F. Harary (Ed.) *Proof Techniques in Graph Theory*, p. pp. 139–146, 1969.
- [15] HELL, P.; HUANG, J. Certifying lexbfs recognition algorithms for proper interval graphs and proper interval bigraphs. *Discrete Mathematics*, v. 18, n. 3, p. 554–570, 2005.
- [16] CORNELL, D. G.; KIM, S. N. H.; OLARIU, S.; SPRAGUE, A. P. Simple linear time recognition of unit interval graphs. *Information Processing Letters*, v. 55, n. 2, p. 99–104, 1995.

- [17] SKRIEN, D. Chronological orderings of interval graphs. *Discrete Applied Mathematics*, v. 8, p. 69–83, 1984.
- [18] RAUTENBACH, D.; SZWARCFITER, J. L. Unit and single point interval graphs. *Discrete Applied Mathematics*, v. 160, n. 10, p. 1601–1609, 2012.
- [19] TROTTER, W. T. Interval graphs, interval orders, and their generalizations. *SIAM Applications of Discrete Mathematics*, R. Ringeisen and F. Roberts, p. 45–58, 1988.
- [20] JOOS, F.; LOWENSTEIN, C.; OLIVEIRA, F. S.; RAUTENBACH, D.; SZWARCFITER, J. L. Graphs of interval count two with a given partition. *Information Processing Letters*, v. 114, p. 542–546, 2014.
- [21] BOYADZHIYSKA, S.; ISAAK, G.; TRENK, A. N. Interval orders with two interval lengths. *arXiv preprint arXiv:1707.08093*, 2017.
- [22] CERIOLI, M.; OLIVEIRA, F. S.; SZWARCFITER, J. On counting interval lengths of interval graphs. *Discrete Applied Mathematics*, n. 159, p. 532–543, 2011.
- [23] KLAVÍK, P.; OTACHI, Y.; SEJNOHA, J. On the classes of interval graphs of limited nesting and count of lengths. *CoRR*, abs/1510.03998, 2015.
- [24] ISAAK, G. Bounded discrete representations of interval orders. *Discrete Applied Mathematics*, v. 44, n. 1-3, p. 157–183, 1993.
- [25] PE’ER, I.; SHAMIR, R. Realizing interval graphs with size and distance constraints. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, v. 10, n. 4, p. 662–687, 1997.
- [26] APKE, A.; SCHRADER, R. On the non-unit count of interval graphs. *Discrete Applied Mathematics*, v. 195, p. 2–7, 2015.
- [27] KLAVÍK, P.; KRATOCHVÍL, J.; OTACHI, Y.; RUTTER, I.; SAITOH, T.; SAUMELL, M.; VYSKOČIL, T. Extending partial representations of proper and unit interval graphs. *Algorithmica*, v. 77, n. 4, p. 1071–1104, 2017.
- [28] FISHBURN, P. Numbers of lengths for representations of interval orders. *Progress in Combinatorial Optimization*, p. 131–146, 1984.
- [29] MEDEIROS, L. S.; OLIVEIRA, F. S.; SZWARCFITER, J. L. Um problema extremal na contagem de intervalos. In: XII Semana do IME. Rio de Janeiro: XII Semana do IME, 2017.
- [30] MEDEIROS, L. S.; OLIVEIRA, F. S.; SZWARCFITER, J. L. An extremal problem on the interval counts. In: VIII Latin American Workshop on Cliques in Graphs. Rio de Janeiro: VIII Latin American Workshop on Cliques in Graphs, 2018.