Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Matemática e Estatística

Vitor Tocci Ferreira de Luca

Equação de Fokker-Planck não-linear: Evolução temporal na presença de força rotacional e potencial assimétrico

Rio de Janeiro
2018

Vitor Tocci Ferreira de Luca

Equação de Fokker-Planck não-linear: Evolução temporal na presença de força rotacional e potencial assimétrico

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Computacionais, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof.ª Dra. Roseli Suzi Wedemann

Coorientador: Prof. Dr. Angel Ricardo Plastino

Rio de Janeiro

2018

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

L934 Luca, Vitor Tocci Ferreira de .

Equação de Fokker-Planck não-linear: evolução temporal na presença de força rotacional e potencial assimétrico/ Vitor Tocci Ferreira de Luca. - 2018.

91f. : il.

Orientadora: Roseli Suzi Wedemann

Coorientador: Angel Ricardo Plastino

Dissertação (Mestrado em Ciências Computacionais) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística.

1. Fokker-Planck, Equação de. - Teses. 2. Equações diferenciais - Teses. I. Wedemann, Roseli Suzi. II. Plastino, Angel Ricardo. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.

CDU 517.9

Patricia Bello Meijinhos CRB7/5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

_____ _____

Assinatura Data

Vitor Tocci Ferreira de Luca

Equação de Fokker-Planck não-linear: Evolução temporal na presença de força rotacional e potencial assimétrico

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Computacionais, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 13 de novembro de 2018
Banca Examinadora:

Prof.ª Dra. Roseli Suzi Wedemann (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Angel Ricardo Plastino (Coorientador)
CeBio y Secretaría de Investigación – Universidad Nacional del Noroeste de la Província de Buenos Aires, UNNOBA

Prof. Dr. Constantino Tsallis
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF

Prof.ª Dra. Patrícia Nunes da Silva
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Marcus Vinícius Tovar Costa
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Rio de Janeiro
2018

AGRADECIMENTOS

A presente dissertação de mestrado não poderia ter sido feita sem o precioso apoio de várias pessoas.

Primeiramente, gostaria de agradecer ao apoio de meus familiares, principalmente meus pais, Mônica e Oswaldo, minha irmã, Carolina, e meus avós, Helena e Alberto. A incansável ajuda de todos eles me possibilitou completar mais uma importante etapa na minha vida.

Não posso deixar de agradecer à minha orientadora, Roseli Wedemann, por toda a paciência e empenho com que sempre me orientou neste trabalho. Muito obrigado por ter me corrigido quando necessário sem nunca me desmotivar. Agradeço também ao meu coorientador, Angel Plastino, pela inestimável contribuição no desenvolvimento do meu projeto. Agradeço aos dois pela oportunidade de trabalhar com profissionais tão qualificados e por abrir novos horizontes na minha vida acadêmica.

Agradeço também a todos os meus colegas de mestrado, especialmente a Lívia, Juliana e Raphael, pelo companheirismo durante esses dois anos de curso e pela amizade que certamente permanecerá. Aos amigos e professores que me incentivaram e me inspiraram durante toda esta jornada.

Por fim, agradeço à UERJ que, resistindo a tantos problemas políticos, me guiou ao longo de toda graduação e neste momento mais um ciclo se encerra na conclusão desse mestrado. Em particular, agradeço à CAPES pelo suporte financeiro concedido para a realização deste trabalho.

Obrigado a todos!

É um prazer dividir uma época e uma existência com todos vocês.

Carl Sagan

RESUMO

LUCA, Vitor Tocci Ferreira de. *Equação de Fokker-Planck não-linear*: evolução temporal na presença de força rotacional e potencial assimétrico. 2018. 108 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Computacionais) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

Praticamente toda a literatura sobre a equação não-linear de Fokker-Planck e suas aplicações trata de equações de Fokker-Planck onde a força externa que age sobre o sistema pode ser derivada de uma função potencial, levando a densidades estacionárias que são q-exponenciais do potencial. Este trabalho tem por objetivo estudar soluções dependentes do tempo de uma equação de Fokker-Planck não-linear, que possui um campo de *drift* com uma componente que deriva de um potencial assimétrico e uma componente que não deriva de um potencial. Em duas ou três dimensões espaciais, essa situação corresponde a ter forças com um rotacional ou *curl* não nulo, que geralmente são denominadas *forças rotacionais*. Várias aplicações podem ser abordadas com base nessa dinâmica, dentre as quais uma possível nova abordagem para o problema da assimetria sináptica em redes neuronais.

Palavras-chave: Equação não-linear de Fokker-Planck, Força rotacional, Potencial assimétrico, Evolução temporal

ABSTRACT

LUCA, Vitor Tocci Ferreira de. *Nonlinear Fokker-Planck equation*: time evolution in the presence of rotational force and asymmetric potential. 2018. 108 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Computacionais) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

Practically all the literature on the nonlinear Fokker-Planck equation and its applications deals with Fokker-Planck equations in which the drift forces can be derived from a potential function, leading to stationary densities which are q-exponentials of the potential V. This work aims to study time-dependent solutions of a nonlinear Fokker-Planck equation, which has a drift field with a component that derives from an asymmetric potential and a term that does not come from a potential. In two or three spatial dimensions, this situation corresponds to having forces exhibiting a non vanishing rotational or *curl*, which are usually referred to as *curl forces*. Various applications can be approached based on this dynamics, among which a possible new approach to the problem of synaptic asymmetry in neural networks.

Keywords: Nonlinear Fokker-Planck equation, Curl forces, Asymmetric potential, Time evolution

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Escolha dos autovetores 28

Figura 2 – Método de Euler 51
Figura 3 – Extrapolação de Richardson 53
Figura 4 – Extrapolação de Richardson - continuação 53

Figura 5 – Evolução temporal de η para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.1), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = -1, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$. 56
Figura 6 – Evolução temporal de α para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.1), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = -1, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$. 57
Figura 7 – Evolução temporal de γ para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.1), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = -1, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$. 58
Figura 8 – Evolução temporal de δ para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.1), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = -1, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$. 59
Figura 9 – Evolução temporal da excentricidade para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.1), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = -1, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$ 60
Figura 10 – Evolução temporal do ângulo θ para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.1), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = -1, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$ 60
Figura 11 – Evolução temporal de η para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.4), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 0.5, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$. 61
Figura 12 – Evolução temporal de α para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.4), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 0.5, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$. 62
Figura 13 – Evolução temporal de γ para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.4), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 0.5, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$. 63
Figura 14 – Evolução temporal de δ para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.4), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 0.5, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$. 64
Figura 15 – Evolução temporal da excentricidade para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.4), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 0.5, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$ 65
Figura 16 – Evolução temporal do ângulo θ para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.4), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 0.5, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$ 65
Figura 17 – Evolução temporal de η para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.7), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 1.3, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$. 67
Figura 18 – Evolução temporal de α para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.7), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 1.3, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$. 68
Figura 19 – Evolução temporal de γ para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.7), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 1.3, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$. 69
Figura 20 – Evolução temporal de δ para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.7), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 1.3, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$. 70

Figura 21 – Evolução temporal da excentricidade para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.7), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 1.3, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$ 71
Figura 22 – Evolução temporal do ângulo θ para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.7), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 1.3, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$ 71
Figura 23 – Evolução temporal de η para diferentes valores de γ_0, com $I = 2$ e o conjunto de parâmetros (5.7), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 1.3, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$ 72
Figura 24 – Evolução temporal de α para diferentes valores de γ_0, com $I = 2$ e o conjunto de parâmetros (5.7), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 1.3, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$ 73
Figura 25 – Evolução temporal de γ para diferentes valores de γ_0, com $I = 2$ e o conjunto de parâmetros (5.7), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 1.3, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$ 74
Figura 26 – Evolução temporal de δ para diferentes valores de γ_0, com $I = 2$ e o conjunto de parâmetros (5.7), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 1.3, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$ 75
Figura 27 – Evolução temporal da excentricidade para diferentes valores de γ_0, com $I = 2$ e o conjunto de parâmetros (5.7), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 1.3, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$ 76
Figura 28 – Evolução temporal do ângulo θ para diferentes valores de γ_0, com $I = 2$ e o conjunto de parâmetros (5.7), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 1.3, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$ 76
Figura 29 – Trajetórias de partículas geradas a partir dos parâmetros (5.1), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = -1, \alpha_0 = 1, \gamma_0 = 2.5, \delta_0 = 0$, para diferentes condições iniciais. 77
Figura 30 – Trajetórias de partículas geradas a partir dos parâmetros (5.4), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 0.5, \alpha_0 = 1, \gamma_0 = 2.5, \delta_0 = 0$, para diferentes condições iniciais. 78
Figura 31 – Trajetórias de partículas geradas a partir dos parâmetros (5.7), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 1.3, \alpha_0 = 1, \gamma_0 = 2.5, \delta_0 = 0$, para diferentes condições iniciais. 79

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 11

1 **SISTEMAS DINÂMICOS E REDES NEURONAIS CONTÍNUAS** 13

2 **A EQUAÇÃO DE FOKKER-PLANCK NÃO-LINEAR** 15
2.1 **Equação de Fokker-Planck não-linear com forças de *drift* rotacionais** 17
2.2 **Potencial quadrático** 18
2.2.1 Derivadas da equação de FPNL 19
2.2.2 Excentricidade 23
2.2.3 Ângulo entre $\hat{\mathbf{u}}_1$ e $\hat{\mathbf{x}}$ 28
2.2.4 Discriminante 29
2.2.5 Norma 31
2.2.6 Soluções estacionárias 35

3 **POTENCIAL ASSIMÉTRICO** 37
3.1 **Derivadas da equação de FPNL com potencial assimétrico** 37
3.2 **Norma** 41
3.3 **Soluções estacionárias** 42
3.4 **Trajetória de partículas** 48

4 **OS MÉTODOS NUMÉRICOS** 50
4.1 **Método Runge-Kutta** 52
4.2 **Método Bulirsch-Stoer** 53

5 **RESULTADOS** 55
5.1 **Experimento 1: $q = -1$** 55
5.2 **Experimento 2: $q = 0.5$** 61
5.3 **Experimento 3: $q = 1.3$** 66
5.4 **Experimento 4: $I = 2$** 72
5.5 **Experimento 5: Trajetórias** 77

CONCLUSÃO 81

REFERÊNCIAS 83

APÊNDICE – Programas numéricos 86

INTRODUÇÃO

A equação não-linear de Fokker-Planck [1] constitui uma ferramenta poderosa para o estudo de diversos fenômenos em sistemas complexos [2–8], com aplicações incluindo (entre muitas outras) supercondutores tipo II [9], meios granulares [10] e sistemas autogravitantes [11,12]. Ela regula o comportamento de uma densidade $F(\boldsymbol{x}, t)$ dependente do tempo, em que $\boldsymbol{x} \in \Re^N$ designa uma posição em um espaço de configuração N-dimensional. A evolução de F é determinada por dois termos: um termo de difusão não-linear [13, 14] e um termo de *drift* linear (equações mais gerais com termos de *drift* não-lineares também foram propostas, mas não vamos considerá-las no presente trabalho). Em várias das aplicações acima mencionadas, a densidade F é uma densidade física real (em oposição a uma densidade de probabilidade de um conjunto estatístico), descrevendo a evolução temporal da distribuição de um conjunto de partículas que interagem entre si e executam movimento super-amortecido no espaço de configuração relevante [8, 15]. Nestes tipos de cenários, o termo de difusão não-linear constitui uma descrição efetiva da interação entre as partículas, enquanto o termo de *drift* descreve os efeitos de outras forças externas agindo sobre elas. As equações não-lineares de Fokker-Planck recentemente abordadas na literatura exibem várias propriedades interessantes e fisicamente relevantes. Elas obedecem a um teorema H em termos de uma quantidade parecida com a energia livre [16]. Em alguns casos importantes, as equações não-lineares de Fokker-Planck admitem soluções analíticas exatas da forma q-Gaussiana, que podem ser interpretadas como densidades que maximizam a entropia (q-maxent) podem ser obtidas da otimização, sob restrições apropriadas, de funcionais entrópicos não-aditivos S_q com forma de leis de potência, S_q [17, 18]. De fato, existe uma conexão profunda entre a dinâmica não-linear de Fokker-Planck e a termoestatística generalizada baseada nas entropias S_q. Embora essa conexão tenha sido apontada pela primeira vez há mais de vinte anos [19], suas implicações físicas completas estão sendo sistematicamente exploradas apenas recentemente.

Praticamente toda a literatura sobre a equação não-linear de Fokker-Planck e suas aplicações lida com equações de Fokker-Planck, onde a força de *drift* $\boldsymbol{K}$ pode ser derivada de uma função potencial $V(\boldsymbol{x})$, levando a densidades estacionárias que são q-exponenciais do potencial confinante V. Aqui, consideramos cenários mais gerais, em que a força de *drift* $\boldsymbol{K}$ tem, além de um componente dado por menos o gradiente de um potencial V, um termo $\tilde{\boldsymbol{K}}$ que não deriva de um potencial. Em duas ou três dimensões espaciais, essa situação corresponde a ter forças com um rotacional ou *curl* não nulo, que geralmente são denominadas *forças rotacionais* [20]. A incorporação de forças rotacionais enriquece as características dinâmicas das equações não-lineares de Fokker-Planck, permitindo-lhes descrever um conjunto mais amplo de fenômenos. Embora as forças rotacionais não sejam dinamicamente fundamentais [21], elas são, no entanto, relevantes como descrições eficazes de diversos problemas físicos. Sistemas dinâmicos com forças rotacionais têm propriedades interessantes que ainda não são totalmente compreendidas e são objeto de pesquisas atuais [21].

Neste trabalho de dissertação exploramos uma possível conexão entre um problema

oriundo do estudo de modelos neuronais e a equação não-linear de Fokker-Planck. A neurociência supõe como hipótese de trabalho, que a memória humana é codificada na rede neuronal do cérebro, e que a associatividade desempenha um papel importante na descrição de processos mentais, tanto no funcionamento normal quanto no patológico. Em modelos de redes neuronais de memória tradicionais, como o modelo de Hopfield [22], a simetria das conexões sinápticas é um requisito matemático necessário para alcançar estados estacionários (memórias). As redes neuronais biológicas reais, no entanto, não satisfazem essa condição.

Existem semelhanças entre o problema de simetria sináptica e alguns aspectos da dinâmica não-linear de Fokker-Planck. Foram identificados casos em que uma equação de Fokker-Planck não-linear, com um campo de *drift* contendo uma componente que não deriva de um potencial, ainda possui uma solução estacionária [23]. Essa componente que não deriva de um potencial descreve as interações não-simétricas entre os constituintes do sistema. A questão da (as)simetria permanece como um problema aberto quase que inexplorado [23]. Isso sugere a necessidade de se considerar abordagens alternativas para esse problema, o que nos motivou a explorar semelhanças entre o problema de simetria sináptica e aspectos da dinâmica não-linear de Fokker-Planck.

No capítulo 1, são introduzidos alguns aspectos básicos do formalismo de Fokker-Planck. No capítulo 2, revisamos em detalhes o artigo [23], onde foi introduzido um termo de *drift* que não deriva do gradiente de um potencial, e que está relacionado a conexões assimétricas, e o sistema ainda evolui para estados atratores estacionários da função de densidade de probabilidade, no espaço de fase que descreve o sistema. No capítulo 3, é apresentada a contribuição original deste trabalho de dissertação, onde exploramos um exemplo bidimensional, que admite soluções analíticas dependentes do tempo, onde o campo de *drift* $\boldsymbol{K}$ possui uma componente que deriva de uma função potencial não-simétrica. As soluções q-gaussianas das equações diferenciais acopladas da seção 3.4, revelam trajetórias de partículas que compõem um sistema submetido a uma força rotacional e a um potencial assimétrico. No caso neuronal, elas podem ser vistas como trajetórias neuronais individuais, exibindo ciclos limites estacionários elípticos, causadas pelas assimetrias do sistema.

Esta seção introdutória está baseada nas referências [23, 24].

1 SISTEMAS DINÂMICOS E REDES NEURONAIS CONTÍNUAS

A solução das equações que descrevem o comportamento dinâmico de um sistema macroscópico consiste em resolver todas as equações que descrevem a evolução dos elementos microscópicos que compõem o sistema. Como isso é geralmente muito difícil de se fazer, uma descrição estocástica do sistema é adotada, onde variáveis macroscópicas, utilizadas para descrever o sistema, podem estar sujeitas a flutuações estocásticas. A equação de Fokker-Planck é, portanto, uma equação de movimento para a função distribuição de densidade de probabilidade de variáveis macroscópicas estocásticas.

Um sistema dinâmico determinista sem ruídos com N variáveis, $x_1, x_2, \ldots, x_N$, contínuas no espaço de fases tem equações de movimento

$$\frac{dx_1}{dt} = K_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_N\right), \tag{1.1a}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = K_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_N\right), \tag{1.1b}$$

$$\vdots \tag{1.1c}$$

$$\frac{dx_N}{dt} = K_N\left(x_1, x_2, \ldots, x_N\right), \tag{1.1d}$$

que em notação vetorial pode ser expressado como,

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}), \tag{1.2}$$

onde $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{K} \in \Re^N$. A evolução temporal de $\boldsymbol{x}$ é assim descrita por um fluxo de espaço de fase dado pelo campo vetorial $\boldsymbol{K}$.

Redes neuronais têm sido amplamente estudadas dentro dessa estrutura [22]. Em modelos de redes neuronais, o peso sináptico w_{ij} expressa a intensidade da influência do neurônio j no neurônio i. Logo, o sinal de entrada resultante do neurônio i é

$$u_i = \sum_j w_{ij} V_{O_j}, \tag{1.3}$$

onde V_{O_j} é o sinal de saída do neurônio j. É possível generalizar a propriedade de ativação discreta, do modelo neuronal de McCulloch-Pitts, considerando variáveis de estado contínuas [22,25,26], de modo que V_{O_i} é atualizado por uma função de ativação contínua, $g(u)$, de u_i,

$$V_{O_i}(t + \Delta t) = g(u_i(t)). \tag{1.4}$$

Na equação (1.4), $g(u)$ é geralmente não-linear e satura para valores de $|u|$ muito grandes, assim como uma sigmóide ou $\tanh(u)$. O conjunto de equações diferenciais

$$\frac{dV_{O_i}}{dt} = \frac{-V_{O_i} + g(u_i)}{\tau_i} = K_i(V_{O_1}, V_{O_2}, \ldots), \tag{1.5}$$

onde τ_i são constantes temporais específicas, constitui uma possível regra de atualização contínua para V_{O_i} [25,26]. Em modelos de redes neuronais tradicionais, como o modelo de Hopfield, BM (Boltzmann Machine) e GSA (Generalized Simulated Annealing), $w_{ij} = w_{ji}$ é uma condição necessária para atingir estados estacionários.

Considerando agora um conjunto de réplicas de um sistema de N partículas que evoluem a partir de diferentes condições iniciais, descrito por uma função distribuição de densidade de probabilidade $F(\boldsymbol{x}, t)$, dependente do tempo no espaço de fases, esta densidade de probabilidade evolui de acordo com a equação de Liouville

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot [F\boldsymbol{K}] = 0\,, \tag{1.6}$$

A adição de ruído ao sistema resulta em um novo termo de difusão na equação de evolução para F, e temos então a equação de Fokker-Planck linear

$$\frac{\partial F}{\partial t} = D\nabla^2 F - \boldsymbol{\nabla} \cdot [F\boldsymbol{K}]\,, \tag{1.7}$$

que descreve a evolução temporal da densidade de probabilidade de um grupo de partículas, sob a ação de uma força externa, onde D é o coeficiente de difusão e o último termo a direita de (1.7) é conhecido como *termo de drift*, e $\boldsymbol{K}$ é o *campo de drift*. Se

$$\boldsymbol{K} = -\boldsymbol{\nabla} V(\boldsymbol{x}) \tag{1.8}$$

para algum potencial confinante $V(\boldsymbol{x})$, existe uma solução estacionária do tipo Boltzmann-Gibbs F_{BG} para a equação (1.7) (satisfazendo $\frac{\partial F_{BG}}{\partial t} = 0$), dada por

$$F_{BG} = \frac{1}{Z} \exp\left[-\frac{1}{D} V(\boldsymbol{x})\right]\,, \tag{1.9}$$

onde Z é uma constante de normalização apropriada. A distribuição F_{BG} otimiza a entropia de Boltzmann-Gibbs, sob as restrições de que a norma e o valor médio $\langle V \rangle$ do potencial V tenham valores específicos.

Um sistema dinâmico com um fluxo no espaço fase da forma (1.8) (ou seja, da forma gradiente) evolui sempre *morro-abaixo* na superfície da energia potencial, de forma a minimizar a função de energia potencial $V(\boldsymbol{x})$. Para um tal campo $\boldsymbol{K}$ da forma (1.8), tem-se

$$\frac{\partial K_i}{\partial x_j} = \frac{\partial K_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\,. \tag{1.10}$$

Em uma rede de Hopfield, se $g(u)$ é uma função linear, por exemplo $K_i \propto \sum_j w_{ij} x_j$ na equação (1.5),

$$\frac{\partial K_i}{\partial x_j} = w_{ij}\,, \tag{1.11}$$

corresponde a forças lineares, e pela equação (1.10), $w_{ij} = w_{ji}$. A condição (1.10), que garante que a dinâmica de Fokker-Planck evolui para a distribuição de Boltzmann-Gibbs (1.9), é muito similar à simetria sináptica necessária para que as redes neuronais evoluam para o mínimo da superfície da energia potencial. Isso sugere a relevância desses cenários de Fokker-Planck com campos de drift que não derivam de um potencial, para tratar o problema da (as)simetria sináptica.

2 A EQUAÇÃO DE FOKKER-PLANCK NÃO-LINEAR

A equação de Fokker-Planck não-linear (FPNL) [1] descreve a evolução temporal de uma função distribuição de densidade de probabilidade dependente do tempo $F(\boldsymbol{x}, t)$, onde $\boldsymbol{x} \in \Re^N$ representa uma posição em um espaço de fase N-dimensional. Em diversas aplicações, a densidade F é uma densidade física real, que descreve a evolução temporal da distribuição de um conjunto de partículas que interagem entre si e executam movimento super-amortecido no espaço de configuração relevante [8, 15]. Nestes tipos de cenários, o termo de difusão não-linear e o termo de *drift*, que determinam a evolução da F, constituem respectivamente uma descrição efetiva da interação entre as partículas e uma descrição dos efeitos de outras forças externas agindo sobre elas. Consideremos equações de Fokker-Planck não-lineares da seguinte forma

$$\frac{\partial F}{\partial t} = D\nabla^2[F^{2-q}] - \boldsymbol{\nabla} \cdot [F\boldsymbol{K}], \qquad F \geq 0\,, \tag{2.1}$$

onde D é uma constante de difusão, $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})$ é uma força de *drift* (um campo externo) e q é um número real que denota o caráter não-linear do termo de difusão. No caso mais estudado da equação (2.1), supõe-se que a força de *drift* $\boldsymbol{K}$ deriva de uma função potencial $V(\boldsymbol{x})$ (1.8). As soluções estacionárias da equação de Fokker-Planck (2.1) satisfazem

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \left[D\boldsymbol{\nabla}\left(F^{2-q}\right) + F(\boldsymbol{\nabla}V)\right] = 0\,. \tag{2.2}$$

Consideremos a seguinte tentativa de solução (*ansatz*) utilizada na mecânica estatística generalizada [18],

$$F_q = A\exp_q[-\beta V(\boldsymbol{x})]\,, \tag{2.3}$$

onde A e β são constantes a serem determinadas, e a função $\exp_q(z) = [1 + (1-q)z]_+^{\frac{1}{1-q}}$, normalmente chamada de função q-exponencial, se anula sempre que $1 + (1-q)z \leq 0$. A equação (2.3) pode então ser expressa da forma,

$$\begin{aligned} F_q &= A\exp_q[-\beta V(\boldsymbol{x})] \\ &= A[1 + (1-q)\left(-\beta V(\boldsymbol{x})\right)]_+^{\frac{1}{1-q}} \\ &= A[1 - (1-q)\beta V(\boldsymbol{x})]_+^{\frac{1}{1-q}}\,. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Verifica-se que o *ansatz* (2.4) satisfaz a condição (2.2) porque

$$D\boldsymbol{\nabla}\left(F^{2-q}\right) + F(\boldsymbol{\nabla}V) = 0\,. \tag{2.5}$$

De fato, substituindo o *ansatz* (2.4) na equação (2.5), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= D\boldsymbol{\nabla}\left(F^{2-q}\right) + F(\boldsymbol{\nabla}V) \\ &= D\boldsymbol{\nabla}\left(\left(A[1-(1-q)\beta V(\boldsymbol{x})]^{\frac{1}{1-q}}\right)^{2-q}\right) + \left(A[1-(1-q)\beta V(\boldsymbol{x})]^{\frac{1}{1-q}}\right)(\boldsymbol{\nabla}V) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= D\boldsymbol{\nabla}\left(A^{2-q}[1-(1-q)\beta V(\boldsymbol{x})]^{\frac{2-q}{1-q}}\right) + \left(A[1-(1-q)\beta V(\boldsymbol{x})]^{\frac{1}{1-q}}\right)(\boldsymbol{\nabla}V) \\
&= -\frac{(2-q)D}{1-q}A^{2-q}[1-(1-q)\beta V(\boldsymbol{x})]^{\frac{1}{1-q}}(1-q)\beta(\boldsymbol{\nabla}V) \\
&\quad + \left(A[1-(1-q)\beta V(\boldsymbol{x})]^{\frac{1}{1-q}}\right)(\boldsymbol{\nabla}V) \\
&= [1-(1-q)\beta V(\boldsymbol{x})]^{\frac{1}{1-q}}(\boldsymbol{\nabla}V)\left(-(2-q)\beta D A^{2-q} + A\right), \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

para valores de F e $\boldsymbol{K}$ arbitrários. Note que o lado direito da equação (2.6) é igual a zero se

$$
\begin{aligned}
-(2-q)\beta D A^{2-q} + A &= 0 \\
A &= (2-q)\beta D A^{2-q} \\
A^{q-1} &= (2-q)\beta D\,. \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

Logo, o *ansatz* (2.4) satisfaz a equação (2.5), e portanto, satisfaz também a equação (2.2), sendo assim uma solução estacionária da equação de Fokker-Planck não-linear. Desta forma, o *ansatz* q-exponencial (2.4) será uma solução estacionária, se a força de *drift* $\boldsymbol{K}$ deriva de um potencial e A e β satisfazem a relação (2.7).

Suporemos que a distribuição estacionária F_q tem norma finita, de forma que

$$\int F_q\, d^N\boldsymbol{x} = I < \infty\,.$$

As condições específicas para que F_q tenha norma finita dependerão da forma particular da função potencial $V(\boldsymbol{x})$, e por isso não podem ser formuladas de maneira geral. Como, em muitas aplicações, a solução da equação de Fokker-Planck é interpretada como uma densidade física (em oposição a uma densidade de probabilidade), assumimos que a norma é finita, mas não necessariamente igual a 1. Note que, devido ao caráter não-linear da equação de Fokker-Planck em questão, o fator multiplicativo A, que aparece no *ansatz* (2.4), não pode ser escolhido arbitrariamente (como seria o caso da equação linear de Fokker-Planck). O parâmetro A depende do valor de β através da relação (2.7), implicando que uma solução estacionária com norma unitária corresponde a um valor β particular, que por sua vez depende do valor de q.

A densidade estacionária F_q pode ser considerada como uma distribuição q-maxent, porque extremiza o funcional q-entrópico não-aditivo

$$S_q[F] = \frac{1}{q-1}\int (F - F^q)\, d^N\boldsymbol{x}\,, \qquad (2.8)$$

sujeito às restrições de que a norma e o valor médio do potencial V [18,19] tenham valores específicos. No limite $q \to 1$, a equação de Fokker-Planck linear,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = D\nabla^2 F - \boldsymbol{\nabla}\cdot[F\boldsymbol{K}]\,, \qquad (2.9)$$

é recuperada. Neste limite, a densidade q-maxent estacionária (2.3) se reduz à densidade exponencial do tipo Boltzmann-Gibbs (1.9), com a condição (2.7) sendo expressa por $\beta D = 1$, independente da constante de normalização A. A densidade F_{BG} tem norma unitária desde que $Z = \int \exp[-\frac{1}{D}V(\boldsymbol{x})]d^N\boldsymbol{x}$. A densidade F_{BG} otimiza a entropia de Boltzmann-Gibbs $S_{BG} = -\int F \ln F d^N\boldsymbol{x}$, sob as restrições de que a norma e o valor médio $\langle V\rangle$ do potencial V tenham valores específicos (o que é consistente com o fato de que, no limite $q \to 1$, o funcional entrópico S_q se reduz à entropia padrão de Boltzmann-Gibbs).

Como vimos no capítulo 1, um sistema dinâmico com um fluxo no espaço fase da forma (1.8) (ou seja, da forma gradiente) evolui sempre *morro-abaixo* na superfície da energia potencial, de forma a minimizar a função de energia potencial $V(\boldsymbol{x})$. As componentes $\{K_i,\ i = 1, \ldots, N\}$ de um tal campo satisfazem a relação (1.10). Isto corresponde a dizer que em duas ou três dimensões, campos $\boldsymbol{K}$ que não possuem a forma de um gradiente são campos com rotacional que não se anula, *i.e.*

$$\boldsymbol{K} \neq -\boldsymbol{\nabla} V \iff \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{K} \neq 0\,. \tag{2.10}$$

2.1 Equação de Fokker-Planck não-linear com forças de *drift* rotacionais

Consideraremos agora que a força de *drift* $\boldsymbol{K}$ tem, além de uma componente derivada de um potencial V, um termo $\tilde{\boldsymbol{K}}$ que não deriva de um potencial [23], o que corresponde a ter forças rotacionais [20] que não se anulam. Isto nos permite descrever uma quantidade maior de fenômenos. Como descrito em [23], alguns exemplos de sistemas físicos que podem necessitar de uma descrição com forças rotacionais são: sistemas de geofísica e astrofísica, a descrição espaço-temporal do comportamento da difusão de populações em sistemas biológicos, e também em modelos de memória de redes neuronais. Assim sendo, consideraremos campos de *drift* com a forma

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{G} + \tilde{\boldsymbol{K}}\,, \tag{2.11}$$

onde

$$\boldsymbol{G} = -\boldsymbol{\nabla} V\,, \tag{2.12}$$

e $\tilde{\boldsymbol{K}}$ não deriva de um potencial, ou seja, $\partial \tilde{K}_i/\partial x_j \neq \partial \tilde{K}_j/\partial x_i$ para pelo menos um $i \neq j$. Devemos determinar sob quais condições uma densidade proporcional à q-exponencial do potencial V ainda fornece uma solução estacionária da equação de Fokker-Planck não-linear, preservando assim a ligação entre esta equação e a termostatística não extensiva generalizada. Substituindo o campo de *drift* $\boldsymbol{K}$ com a forma (2.11), e a densidade q-exponencial F_q (2.4) na equação estacionária (2.2), obtemos

$$D\nabla^2[F_q^{2-q}] + \boldsymbol{\nabla} \cdot [F_q(\boldsymbol{\nabla} V)] - \boldsymbol{\nabla} \cdot [F_q \tilde{\boldsymbol{K}}] = 0\,. \tag{2.13}$$

Se A e β satisfazem (2.7), a soma dos dois primeiros termos na equação (2.13) é nula, já que F_q é uma solução estacionária da equação (2.2), quando o campo de *drift* $\boldsymbol{K}$ é composto apenas pelo campo gradiente $\boldsymbol{G}$. Portanto, para que F_q satisfaça a equação (2.13), incluindo a contribuição do campo de *drift* associada ao termo $\tilde{\boldsymbol{K}}$ que não deriva de um potencial, é necessário que

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot [F_q \tilde{\boldsymbol{K}}] = 0\,. \tag{2.14}$$

Se a relação (2.14) for satisfeita, a densidade F_q constitui uma solução estacionária da equação de Fokker-Planck não-linear, correspondente ao campo de *drift* (2.11).

Para obtermos a solução estacionária q-maxent, substituindo (2.4) em (2.14), é então necessário que

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\tilde{\boldsymbol{K}} A[1 - (1-q)\beta V]^{\frac{1}{1-q}} \right) = 0\,, \tag{2.15}$$

o que nos leva à seguinte relação entre a componente do *drift* que não deriva de um potencial, $\tilde{\boldsymbol{K}}$, e a função potencial $V(\boldsymbol{x})$,

$$[1 - (1-q)\beta V](\boldsymbol{\nabla} \cdot \tilde{\boldsymbol{K}}) - \beta(\tilde{\boldsymbol{K}} \cdot \boldsymbol{\nabla} V) = 0\,. \tag{2.16}$$

Esta é uma relação de consistência que a função potencial V, o campo de força que não deriva de um gradiente $\tilde{\boldsymbol{K}}$, o multiplicador de Lagrange β e o parâmetro entrópico q têm de satisfazer, para que a equação não-linear de Fokker-Planck admita a solução estacionária q-maxent (2.4) respeitando a relação (2.7) entre A e β. A equação geral (q,β)-dependente (2.16) constitui uma relação bastante complicada entre o campo $\tilde{\boldsymbol{K}}$ e a função potencial V, difícil de ser caracterizada. Além disso, essa relação depende explicitamente do valor de β (além de depender, é claro, do valor do parâmetro entrópico q). Isto significa que, para determinadas formas de $\tilde{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{x})$ e $V(\boldsymbol{x})$ e um dado valor de q, pode-se ter soluções estacionárias da forma q-maxent (2.3), apenas para valores particulares de $\beta = \beta(q)$, que em geral serão funções de q, entrelaçando assim a β-dependência e a q-dependência. Não prosseguiremos com a análise desses tipos de cenários e focaremos, em vez disso, no caso em que (para determinados valores de q) existem soluções para um intervalo contínuo de valores de β. Neste caso, veremos que a condição (2.16) se separa em duas condições, cada uma delas independente de q e β. Ter uma faixa contínua de valores de β permitidos tem a importante vantagem de nos dar a liberdade de escolher soluções com diferentes normalizações (note que a constante A na solução estacionária (2.3) é uma função de β). Em particular, pode-se escolher soluções com norma igual a 1. Com relação a este último ponto, vale a pena mencionar que a q-dependência de β reaparece quando se considera apenas soluções com norma unitária.

Segue da relação (2.16) que, para que a equação de Fokker-Planck não-linear admita a família de soluções estacionárias β-parametrizadas (2.3), com uma faixa contínua permitida de valores β, duas condições devem ser satisfeitas. Por um lado, o componente do *drift* que não deriva de um gradiente de um potencial, $\tilde{\boldsymbol{K}}$, deve ser um campo vetorial sem divergência,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \tilde{\boldsymbol{K}} = 0\,. \tag{2.17}$$

Por outro lado, $\tilde{\boldsymbol{K}}$ deve ser ortogonal ao gradiente do potencial,

$$\tilde{\boldsymbol{K}} \cdot (\boldsymbol{\nabla} V) = 0\,. \tag{2.18}$$

Note que, as condições (2.17) e (2.18) são não apenas suficientes, mas também necessárias para que o *ansatz* (2.4) seja uma solução estacionária da equação de Fokker-Planck não-linear (2.1), para uma faixa contínua de valores de β. De fato, se (2.4) resolve (2.1) para tal conjunto de valores β, o lado esquerdo de (2.16), que é uma função linear não homogênea de β, deve desaparecer para um intervalo de valores de β. Isto implica claramente que, tanto o termo independente, quanto o coeficiente do termo β-linear, devem desaparecer individualmente, levando, por sua vez, às condições (2.17) e (2.18). É interessante que, como já foi mencionado, essas condições não dependem explicitamente do valor do parâmetro q, constituindo, portanto, uma estrutura q-invariante. Essa q-invariância é notável, pois incorpora os casos $q < 1$ e $q > 1$, que em aplicações específicas geralmente correspondem a dinâmicas bastante diferentes. A solução estacionária garantida por estas condições é uma solução física, quando é normalizável (caso contrário, não é física embora formalmente seja uma solução da equação de Fokker-Planck não-linear). A normalização da solução estacionária depende da forma particular do potencial V e do valor de q e, como já mencionado, só pode ser estudado caso a caso.

2.2 Potencial quadrático

Consideramos agora, como exemplo de uma solução dependente do tempo de uma equação não-linear de Fokker-Planck com um $\tilde{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{x})$ que não emerge de um potencial, e

que admite uma solução estacionária q-maxent, um sistema bidimensional submetido ao seguinte potencial quadrático e termo de *drift* linear não-gradiente [23]. Para simplificar a notação, nomearemos as variáveis de estado do espaço de fase como $x \equiv x_1$ e $y \equiv x_2$, de forma que o potencial e campo de *drift* possam ser expressos como

$$V(\boldsymbol{x}) = a(x^2 + y^2)\,, \tag{2.19}$$

$$\tilde{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{x}) = (-by, +bx)\,. \tag{2.20}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K} &= -\boldsymbol{\nabla} V + \tilde{\boldsymbol{K}} \\ &= (-2ax, -2ay) + (-by, +bx) \\ &= (-2ax - by, -2ay + bx)\,. \end{aligned} \tag{2.21}$$

É bem conhecido que a maioria das equações diferenciais não-lineares em física, biologia e áreas afins não admitem soluções analíticas gerais. Em alguns casos, no entanto, existe pelo menos uma solução particular analítica exata. Como mostraremos a seguir, é isso que acontece com a equação não-linear de Fokker-Planck associada ao potencial (2.19) e ao campo de *drift* (2.20). Não há solução analítica geral, mas é possível obter uma solução particular, exata e dependente do tempo da forma q-Gaussiana. Soluções analíticas particulares de equações diferenciais não-lineares são, por uma variedade de razões, de considerável valor. Elas fornecem exemplos concretos, onde o tipo de comportamento exibido pelas soluções pode ser estudado de forma detalhada e transparente (embora as soluções gerais possam ter uma dinâmica muito mais rica). Soluções analíticas particulares podem constituir pontos de partida muito úteis para a construção de soluções analíticas aproximadas, mais gerais. Elas também são úteis para testar a precisão de abordagens numéricas para resolver as equações não-lineares em questão. O caso de equações dinâmicas que admitem soluções q-gaussianas exatas é especialmente relevante, pois as densidades q-gaussianas são de fato observadas na natureza, em diversos cenários físicos e biológicos [18], sendo indispensável a identificação e investigação de todos os diferentes mecanismos dinâmicos que podem levar a elas. A divergência do produto da função distribuição F pelo campo de *drift* $\boldsymbol{K}$, que aparece do lado direito da equação (2.1), é portanto a soma das derivadas de primeira ordem do mesmo,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot [F\boldsymbol{K}] = \frac{\partial[(-2ax - by)F]}{\partial x} + \frac{\partial[(-2ay + bx)F]}{\partial y}\,. \tag{2.22}$$

Propomos uma solução tentativa do tipo q-exponencial da seguinte forma

$$F(x, y, t) = \eta(t)\left[1 - (1-q)(\alpha(t)x^2 + \delta(t)xy + \gamma(t)y^2)\right]_+^{\frac{1}{(1-q)}}\,. \tag{2.23}$$

Se definirmos

$$\varphi = 1 - (1-q)(\alpha x^2 + \delta xy + \gamma y^2)\,, \tag{2.24}$$

podemos reescrever

$$F(x, y, t) = \eta(t)\varphi^{\frac{1}{(1-q)}}\,. \tag{2.25}$$

2.2.1 Derivadas da equação de FPNL

Para calcular o primeiro termo da equação (2.1), derivamos o *ansatz* F (2.25) em relação a t, obtendo

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \dot{\eta}\varphi^{\frac{1}{1-q}} - \eta(\dot{\alpha}x^2 + \dot{\delta}xy + \dot{\gamma}y^2)\varphi^{\frac{q}{1-q}}\,, \tag{2.26}$$

onde $\dot{\eta}$, $\dot{\alpha}$, $\dot{\gamma}$ e $\dot{\delta}$ representam as derivadas temporais dos respectivos parâmetros. O laplaciano de uma função é a soma de todas as suas derivadas parciais simples de segunda ordem. Comecemos calculando as derivadas parciais de primeira ordem de F^{2-q},

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F^{2-q}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\varphi^{\frac{1}{1-q}}\right)^{2-q} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta^{2-q}\varphi^{\frac{2-q}{1-q}}\right) \\
&= \frac{2-q}{1-q}\eta^{2-q}(-(1-q)(2\alpha x+\delta y))\varphi^{\frac{1}{1-q}} \\
&= -(2-q)\eta^{2-q}(2\alpha x+\delta y)\varphi^{\frac{1}{1-q}} \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F^{2-q}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\varphi^{\frac{1}{1-q}}\right)^{2-q} \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta^{2-q}\varphi^{\frac{2-q}{1-q}}\right) \\
&= \frac{2-q}{1-q}\eta^{2-q}(-(1-q)(\delta x+2\gamma y))\varphi^{\frac{1}{1-q}} \\
&= -(2-q)\eta^{2-q}(\delta x+2\gamma y)\varphi^{\frac{1}{1-q}}\,. \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

Derivando a equação (2.27) em relação a x novamente obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2[F^{2-q}]}{\partial x^2} &= -\frac{2-q}{1-q}\eta^{2-q}(-(1-q)(2\alpha x+\delta y))(2\alpha x+\delta y)\varphi^{\frac{q}{1-q}} - 2(2-q)\eta^{2-q}\alpha\varphi^{\frac{1}{1-q}} \\
&= (2-q)\eta^{2-q}\left[(2\alpha x+\delta y)^2\varphi^{\frac{q}{1-q}} - 2\alpha\varphi^{\frac{1}{1-q}}\right], \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

e derivando a equação (2.28) em relação a y novamente obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2[F^{2-q}]}{\partial y^2} &= -\frac{2-q}{1-q}\eta^{2-q}(-(1-q)(\delta x+2\gamma y))(\delta x+2\gamma y)\varphi^{\frac{q}{1-q}} - 2(2-q)\eta^{2-q}\gamma\varphi^{\frac{1}{1-q}} \\
&= (2-q)\eta^{2-q}\left[(\delta x+2\gamma y)^2\varphi^{\frac{q}{1-q}} - 2\gamma\varphi^{\frac{1}{1-q}}\right]. \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

Calculando agora as derivadas referentes à $-\boldsymbol{\nabla}\cdot[F\boldsymbol{K}]$ obtemos,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}[(2ax+by)F] &= \frac{\partial}{\partial x}\left[(2ax+by)\eta\varphi^{\frac{1}{1-q}}\right] \\
&= 2a\eta\varphi^{\frac{1}{1-q}} + \frac{1}{1-q}(2ax+by)\eta(-(1-q)(2\alpha x+\delta y))\varphi^{\frac{q}{1-q}} \\
&= \eta\left[2a\varphi^{\frac{1}{1-q}} - (2ax+by)(2\alpha x+\delta y)\varphi^{\frac{q}{1-q}}\right] \qquad (2.31)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}[(2ay-bx)F] &= \frac{\partial}{\partial y}\left[(2ay-bx)\eta\varphi^{\frac{1}{1-q}}\right] \\
&= 2a\eta\varphi^{\frac{1}{1-q}} + \frac{1}{1-q}(2ay-bx)\eta(-(1-q)(\delta x+2\gamma y))\varphi^{\frac{q}{1-q}} \\
&= \eta\left[2a\varphi^{\frac{1}{1-q}} - (2ay-bx)(\delta x+2\gamma y)\varphi^{\frac{q}{1-q}}\right]. \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

Somando as equações (2.29) e (2.30) obtemos,

$$\begin{aligned}\nabla^2[F^{2-q}] &= \Big[(2-q)\eta^{2-q}\left[(2\alpha x+\delta y)^2\varphi^{\frac{q}{1-q}}-2\alpha\varphi^{\frac{1}{1-q}}\right]\\ &\quad+(2-q)\eta^{2-q}\left[(\delta x+2\gamma y)^2\varphi^{\frac{q}{1-q}}-2\gamma\varphi^{\frac{1}{1-q}}\right]\Big]\,. \end{aligned}\tag{2.33}$$

Somando as equações (2.31) e (2.32) obtemos,

$$\begin{aligned}-\boldsymbol{\nabla}\cdot[F\boldsymbol{K}] &= \eta\left[2a\varphi^{\frac{1}{1-q}}-(2ax+by)(2\alpha x+\delta y)\varphi^{\frac{q}{1-q}}\right]\\ &\quad+\eta\left[2a\varphi^{\frac{1}{1-q}}-(2ay-bx)(\delta x+2\gamma y)\varphi^{\frac{q}{1-q}}\right]\,. \end{aligned}\tag{2.34}$$

Reescrevendo $\varphi^{\frac{1}{1-q}}$ como $\varphi\cdot\varphi^{\frac{q}{1-q}}$ nas equações (2.33) e (2.34), obtemos

$$\begin{aligned}\nabla^2[F^{2-q}] &= \Big[(2-q)\eta^{2-q}\left[(2\alpha x+\delta y)^2\varphi^{\frac{q}{1-q}}-2\alpha\varphi\cdot\varphi^{\frac{q}{1-q}}\right]\\ &\quad+(2-q)\eta^{2-q}\left[(\delta x+2\gamma y)^2\varphi^{\frac{q}{1-q}}-2\gamma\varphi\cdot\varphi^{\frac{q}{1-q}}\right]\Big] \end{aligned}\tag{2.35}$$

e

$$\begin{aligned}-\boldsymbol{\nabla}\cdot[F\boldsymbol{K}] &= \eta\left[2a\varphi\cdot\varphi^{\frac{q}{1-q}}-(2ax+by)(2\alpha x+\delta y)\varphi^{\frac{q}{1-q}}\right]\\ &\quad+\eta\left[2a\varphi\cdot\varphi^{\frac{q}{1-q}}-(2ay-bx)(\delta x+2\gamma y)\varphi^{\frac{q}{1-q}}\right]\,. \end{aligned}\tag{2.36}$$

Multiplicando a equação (2.35) pelo termo de difusão D e somando o resultado à equação (2.36) obtemos,

$$\begin{aligned}D\nabla^2[F^{2-q}]-\boldsymbol{\nabla}\cdot[F\boldsymbol{K}] &= D\Big[(2-q)\eta^{2-q}\left[(2\alpha x+\delta y)^2\varphi^{\frac{q}{1-q}}-2\alpha\varphi\cdot\varphi^{\frac{q}{1-q}}\right]\\ &\quad+(2-q)\eta^{2-q}\left[(\delta x+2\gamma y)^2\varphi^{\frac{q}{1-q}}-2\gamma\varphi\cdot\varphi^{\frac{q}{1-q}}\right]\Big]\\ &\quad+\eta\left[2a\varphi\cdot\varphi^{\frac{q}{1-q}}-(2ax+by)(2\alpha x+\delta y)\varphi^{\frac{q}{1-q}}\right]\\ &\quad+\eta\left[2a\varphi\cdot\varphi^{\frac{q}{1-q}}-(2ay-bx)(\delta x+2\gamma y)\varphi^{\frac{q}{1-q}}\right]\,. \end{aligned}\tag{2.37}$$

Reescrevendo $\varphi^{\frac{1}{1-q}}$ como $\varphi\cdot\varphi^{\frac{q}{1-q}}$ na equação (2.26), obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\dot{\eta}\varphi\cdot\varphi^{\frac{q}{1-q}}-\eta(\dot{\alpha}x^2+\dot{\delta}xy+\dot{\gamma}y^2)\varphi^{\frac{q}{1-q}}\,.\tag{2.38}$$

Substituindo os termos do lado direito da equação (2.37) no lado lado direito da equação de FPNL (2.1), e substituindo os termos do lado direito da equação (2.38) no lado esquerdo da equação de FPNL (2.1), obtemos

$$\begin{aligned}&\dot{\eta}\varphi\cdot\varphi^{\frac{q}{1-q}}-\eta(\dot{\alpha}x^2+\dot{\delta}xy+\dot{\gamma}y^2)\varphi^{\frac{q}{1-q}}=\\ &D\Big[(2-q)\eta^{2-q}\left[(2\alpha x+\delta y)^2\varphi^{\frac{q}{1-q}}-2\alpha\varphi\cdot\varphi^{\frac{q}{1-q}}\right]\\ &+(2-q)\eta^{2-q}\left[(\delta x+2\gamma y)^2\varphi^{\frac{q}{1-q}}-2\gamma\varphi\cdot\varphi^{\frac{q}{1-q}}\right]\Big]\\ &+\eta\left[2a\varphi\cdot\varphi^{\frac{q}{1-q}}-(2ax+by)(2\alpha x+\delta y)\varphi^{\frac{q}{1-q}}\right]\\ &+\eta\left[2a\varphi\cdot\varphi^{\frac{q}{1-q}}-(2ay-bx)(\delta x+2\gamma y)\varphi^{\frac{q}{1-q}}\right]\,. \end{aligned}\tag{2.39}$$

Dividindo ambos os lados da equação (2.39) por $\varphi^{\frac{q}{1-q}}$, obtemos

$$\begin{aligned}\dot{\eta}\varphi - \eta(\dot{\alpha}x^2 + \dot{\delta}xy + \dot{\gamma}y^2) &= D\Big[(2-q)\eta^{2-q}\left[(2\alpha x + \delta y)^2 - 2\alpha\varphi\right] \\ &\quad +(2-q)\eta^{2-q}\left[(\delta x + 2\gamma y)^2 - 2\gamma\varphi\right]\Big] \\ &\quad +\eta\left[2a\varphi - (2ax + by)(2\alpha x + \delta y)\right] \\ &\quad +\eta\left[2a\varphi - (2ay - bx)(\delta x + 2\gamma y)\right] . \end{aligned} \tag{2.40}$$

Desenvolvendo os termos do lado direito da equação (2.40), obtemos

$$\begin{aligned}\dot{\eta}\varphi - \eta(\dot{\alpha}x^2 + \dot{\delta}xy + \dot{\gamma}y^2) &= (2-q)D\eta^{2-q}\Big[x^2(4\alpha^2 + \delta^2) + xy(4\alpha\delta + 4\delta\gamma) + y^2(\delta^2 + 4\gamma^2) \\ &\quad -2\varphi(\alpha + \gamma)\Big] \\ &\quad +4\eta a\varphi \\ &\quad -\eta\Big[x^2(4\alpha a - \delta b) + xy(4\delta a + 2\alpha b - 2\gamma b) \\ &\quad +y^2(\delta b + 4\gamma a)\Big] . \end{aligned} \tag{2.41}$$

Reescrevendo os termos do lado direito da equação (2.41), obtemos

$$\begin{aligned}\dot{\eta}\varphi - \eta(\dot{\alpha}x^2 + \dot{\delta}xy + \dot{\gamma}y^2) &= \varphi\left((2-q)D\eta^{2-q}(-2(\alpha+\gamma)) + 4\eta a\right) \\ &\quad +\eta\Big[x^2\left[(2-q)D\eta^{1-q}(4\alpha^2 + \delta^2) - (4\alpha a - \delta b)\right] \\ &\quad +xy\left[(2-q)D\eta^{1-q}(4\alpha\delta + 4\delta\gamma) - (4\delta a + 2\alpha b - 2\gamma b)\right] \\ &\quad +y^2\left[(2-q)D\eta^{1-q}(\delta^2 + 4\gamma^2) - (\delta b + 4\gamma a)\right]\Big] . \end{aligned} \tag{2.42}$$

Reorganizando os termos da equação (2.42) e substituindo φ pela expressão que o define (2.24), obtemos

$$\begin{aligned} &\left(1 - (1-q)(\alpha x^2 + \delta xy + \gamma y^2)\right)\left(\dot{\eta} - (2-q)D\eta^{2-q}(-2(\alpha+\gamma)) + 4\eta a\right) = \\ = \; & x^2\left[\eta\left[(2-q)D\eta^{1-q}(4\alpha^2 + \delta^2) - (4\alpha a - \delta b)\right] + \eta\dot{\alpha}\right] \\ & +xy\left[\eta\left[(2-q)D\eta^{1-q}(4\alpha\delta + 4\delta\gamma) - (4\delta a + 2\alpha b - 2\gamma b)\right] + \eta\dot{\delta}\right] \\ & +y^2\left[\eta\left[(2-q)D\eta^{1-q}(\delta^2 + 4\gamma^2) - (\delta b + 4\gamma a)\right] + \eta\dot{\gamma}\right] . \end{aligned} \tag{2.43}$$

Se definirmos

$$\dot{\eta} - (2-q)D\eta^{2-q}(-2(\alpha+\gamma)) + 4\eta a = \mathcal{H} \tag{2.44}$$

podemos reescrever a equação (2.43) como

$$\begin{aligned} &\mathcal{H} + x^2\mathcal{H}(-\alpha(1-q)) + xy\mathcal{H}(-\delta(1-q)) + y^2\mathcal{H}(-\gamma(1-q)) = \\ = \; & x^2\left[\eta\left[(2-q)D\eta^{1-q}(4\alpha^2 + \delta^2) - (4\alpha a - \delta b)\right] + \eta\dot{\alpha}\right] \\ & +xy\left[\eta\left[(2-q)D\eta^{1-q}(4\alpha\delta + 4\delta\gamma) - (4\delta a + 2\alpha b - 2\gamma b)\right] + \eta\dot{\delta}\right] \\ & +y^2\left[\eta\left[(2-q)D\eta^{1-q}(\delta^2 + 4\gamma^2) - (\delta b + 4\gamma a)\right] + \eta\dot{\gamma}\right] . \end{aligned} \tag{2.45}$$

Para que a equação (2.45) seja válida para todos os valores de x e y, igualamos os coeficientes de x^2, xy, y^2 e os termos independentes de ambos os lados desta equação. Note que, do lado direito da equação (2.45) o termo independente é igual a 0 Logo,

$$\mathcal{H} = 0 \tag{2.46}$$

e então, substituindo a equação (2.46) na equação (2.44), obtemos

$$\dot{\eta} = 4\eta a - 2(2-q)D\eta^{2-q}(\alpha+\gamma)\,. \tag{2.47}$$

Note que, como $\mathcal{H} = 0$, os coeficientes de x^2, xy e y^2 do lado esquerdo da equação (2.45) são todos iguais a 0. Igualando os coeficientes de x^2 obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \eta\left[(2-q)D\eta^{1-q}(4\alpha^2+\delta^2) - (4\alpha a - \delta b)\right] + \eta\dot{\alpha} \\ -\eta\dot{\alpha} &= \eta\left[(2-q)D\eta^{1-q}(4\alpha^2+\delta^2) - (4\alpha a - \delta b)\right] \\ \dot{\alpha} &= -(2-q)D\eta^{1-q}(4\alpha^2+\delta^2) + 4a\alpha - b\delta\,. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Igualando os coeficientes de xy, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \eta\left[(2-q)D\eta^{1-q}(4\alpha\delta+4\delta\gamma) - (4\delta a + 2\alpha b - 2\gamma b)\right] + \eta\dot{\delta} \\ -\eta\dot{\delta} &= \eta\left[(2-q)D\eta^{1-q}(4\alpha\delta+4\delta\gamma) - (4\delta a + 2\alpha b - 2\gamma b)\right] \\ \dot{\delta} &= -4(2-q)D\eta^{1-q}\delta(\alpha+\gamma) + 4a\delta + 2b(\alpha-\gamma)\,. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Igualando os coeficientes de y^2, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \eta\left[(2-q)D\eta^{1-q}(\delta^2+4\gamma^2) - (\delta b + 4\gamma a)\right] + \eta\dot{\gamma} \\ -\eta\dot{\gamma} &= \eta\left[(2-q)D\eta^{1-q}(\delta^2+4\gamma^2) - (\delta b + 4\gamma a)\right] \\ \dot{\gamma} &= -(2-q)D\eta^{1-q}(4\gamma^2+\delta^2) + 4a\gamma + b\delta\,. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Logo, teremos o seguinte conjunto de equações de movimento

$$\frac{d\eta}{dt} = 4\eta a - 2(2-q)D\eta^{2-q}(\alpha+\gamma)\,, \tag{2.51a}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -(2-q)D\eta^{1-q}(4\alpha^2+\delta^2) + 4a\alpha - b\delta\,, \tag{2.51b}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -(2-q)D\eta^{1-q}(4\gamma^2+\delta^2) + 4a\gamma + b\delta\,, \tag{2.51c}$$

$$\frac{d\delta}{dt} = -4(2-q)D\eta^{1-q}\delta(\alpha+\gamma) + 4a\delta + 2b(\alpha-\gamma)\,. \tag{2.51d}$$

Portanto F será uma solução da equação de Fokker-Planck (2.1) desde que as funções $\eta(t)$, $\alpha(t)$, $\gamma(t)$ e $\delta(t)$ satisfaçam o conjunto de equações diferenciais ordinárias (2.51).

2.2.2 Excentricidade

Em um dado tempo t, as curvas de nível da densidade descrita pela equação (2.23) são elipses de mesma excentricidade. Com efeito, a expressão

$$f(x,y,t) = \alpha(t)x^2 + \delta(t)xy + \gamma(t)y^2 \tag{2.52}$$

pode ser reescrita na forma matricial como,

$$f(x,y,t) = \begin{pmatrix} x, & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\delta}{2} \\ \frac{\delta}{2} & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\,. \tag{2.53}$$

Diagonalizemos então a matriz

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\delta}{2} \\ \frac{\delta}{2} & \gamma \end{pmatrix}\,. \tag{2.54}$$

Para tal, precisamos calcular seus autovalores. Calcular os autovalores λ, associados aos autovetores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$, da matriz M equivale a encontrar os valores de λ que satisfazem a equação,

$$M\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}\,. \tag{2.55}$$

Desenvolvendo a equação (2.55) obtemos,

$$\begin{aligned} M\boldsymbol{u} &= \lambda\boldsymbol{u} \\ M\boldsymbol{u} - \lambda\boldsymbol{u} &= 0 \\ \boldsymbol{u}(M - \lambda I) &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Como, por hipótese, $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$, isso significa que o núcleo de $M - \lambda I$, $N(M - \lambda I)$, é não-trivial. Em outras palavras, $N(M - \lambda I)$ não contém somente o vetor nulo. Logo, as colunas de $M - \lambda I$ são linearmente dependentes e, portanto, $M - \lambda I$ não é invertível, e seu determinante deve ser igual a zero. Portanto,

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda I) &= \det\left(\begin{pmatrix} \alpha & \frac{\delta}{2} \\ \frac{\delta}{2} & \gamma \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \\ & \det\begin{pmatrix} \alpha - \lambda & \frac{\delta}{2} \\ \frac{\delta}{2} & \gamma - \lambda \end{pmatrix} = 0 \\ & (\alpha - \lambda)(\gamma - \lambda) - \frac{\delta^2}{4} = 0 \\ & \lambda^2 - (\alpha + \gamma)\lambda + \alpha\gamma - \frac{\delta^2}{4} = 0 \\ \lambda &= \frac{(\alpha + \gamma) \pm \sqrt{(\alpha + \gamma)^2 - 4\left(\alpha\gamma - \frac{\delta^2}{4}\right)}}{2} \\ \lambda &= \frac{(\alpha + \gamma) \pm \sqrt{(\alpha - \gamma)^2 + \delta^2}}{2}\,. \end{aligned} \tag{2.57}$$

Logo, podemos reescrever a equação (2.53) da seguinte forma

$$f(x', y', t) = \begin{pmatrix} x', & y' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{(\alpha+\gamma) - \sqrt{(\alpha-\gamma)^2 + \delta^2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(\alpha+\gamma) + \sqrt{(\alpha-\gamma)^2 + \delta^2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \tag{2.58}$$

e a equação (2.52) torna-se

$$f(x', y', t) = \frac{(\alpha + \gamma) - \sqrt{(\alpha - \gamma)^2 + \delta^2}}{2} x'^2 + \frac{(\alpha + \gamma) + \sqrt{(\alpha - \gamma)^2 + \delta^2}}{2} y'^2\,. \tag{2.59}$$

A equação (2.59) representa uma elipse onde

$$a = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \sqrt{\frac{2}{(\alpha + \gamma) - \sqrt{(\alpha - \gamma)^2 + \delta^2}}}$$

e

$$b = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = \sqrt{\frac{2}{(\alpha + \gamma) + \sqrt{(\alpha - \gamma)^2 + \delta^2}}}\,.$$

Definimos $a = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$, para representar o semieixo maior de uma elipse cuja equação tem a forma geral

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,. \tag{2.60}$$

Como λ_1 é o menor autovalor, temos $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} > \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$.

Podemos obter a excentricidade da elipse da curva de nível da densidade dada pela expressão (2.23), calculando

$$\begin{aligned} e &= \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}}}{\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}} \\ &= \sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1\lambda_2}}\cdot\sqrt{\lambda_1} \\ &= \sqrt{\frac{\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)}{\lambda_1\lambda_2}} \\ &= \sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2}} \\ &= \sqrt{\frac{\frac{(\alpha+\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}}{2}-\frac{(\alpha+\gamma)-\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}}{2}}{\frac{(\alpha+\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}}{2}}}\,. \end{aligned} \tag{2.61}$$

De forma que

$$e=\sqrt{\frac{2\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}}{(\alpha+\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}}}\,. \tag{2.62}$$

A equação (2.59) nada mais é do que a elipse descrita pela equação (2.52), reescrita em um outro sistema de coordenadas, cuja base é $\{\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{u_2}\}$, onde $\boldsymbol{u_1}$ e $\boldsymbol{u_2}$ são os autovetores associados aos autovalores

$$\lambda_1=\frac{(\alpha+\gamma)-\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}}{2} \tag{2.63}$$

e

$$\lambda_2=\frac{(\alpha+\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}}{2}\,. \tag{2.64}$$

Para determiná-los, investiguemos o núcleo da transformação determinada pela matriz

$$M-\lambda I=\begin{pmatrix}\alpha & \frac{\delta}{2}\\ \frac{\delta}{2} & \gamma\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha-\lambda & \frac{\delta}{2}\\ \frac{\delta}{2} & \gamma-\lambda\end{pmatrix}. \tag{2.65}$$

Portanto, para λ_1 temos,

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (M-\lambda_1 I)\boldsymbol{u_1} \\ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\alpha-\lambda_1 & \frac{\delta}{2}\\ \frac{\delta}{2} & \gamma-\lambda_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\alpha-\frac{(\alpha+\gamma)-\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}}{2} & \frac{\delta}{2}\\ \frac{\delta}{2} & \gamma-\frac{(\alpha+\gamma)-\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Podemos reescrever a equação (2.66) como um sistema de equações lineares nas variáveis x_1 e y_1,

$$\begin{cases} \left(\alpha - \frac{(\alpha+\gamma)-\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}}{2}\right) x_1 + \frac{\delta}{2} y_1 &= 0 \\ \frac{\delta}{2} x_1 + \left(\gamma - \frac{(\alpha+\gamma)-\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}}{2}\right) y_1 &= 0\,. \end{cases}$$

Dividindo os dois lados da primeira equação pelo coeficiente de x_1, obtemos

$$\begin{cases} x_1 + \frac{\delta}{(\alpha-\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}} y_1 &= 0 \\ \frac{\delta}{2} x_1 + \left(\frac{(\gamma-\alpha)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}}{2}\right) y_1 &= 0\,. \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação por ela menos a primeira equação multiplicada por $\frac{\delta}{2}$ obtemos,

$$\begin{cases} x_1 + \frac{\delta}{(\alpha-\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}} y_1 &= 0 \\ 0x_1 + 0y_1 &= 0\,. \end{cases}$$

Logo,

$$x_1 = -\frac{\delta}{(\alpha-\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}} y_1\,. \tag{2.67}$$

Portanto, o autovetor associado ao autovalor λ_1 é

$$\boldsymbol{u_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\delta}{(\alpha-\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}} y_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = y_1 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\delta}{(\alpha-\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}} \\ 1 \end{pmatrix},$$

onde $y_1 \in \Re$.

Para λ_2 temos,

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (M - \lambda_2 I)\boldsymbol{u_2} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha - \lambda_2 & \frac{\delta}{2} \\ \frac{\delta}{2} & \gamma - \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha - \frac{(\alpha+\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}}{2} & \frac{\delta}{2} \\ \frac{\delta}{2} & \gamma - \frac{(\alpha+\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.68}$$

Analogamente ao que fizemos para $\boldsymbol{u_1}$, podemos reescrever a equação (2.68) como um sistema de equações lineares nas variáveis x_2 e y_2,

$$\begin{cases} \left(\alpha - \frac{(\alpha+\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}}{2}\right) x_2 + \frac{\delta}{2} y_2 &= 0 \\ \frac{\delta}{2} x_2 + \left(\gamma - \frac{(\alpha+\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}}{2}\right) y_2 &= 0\,. \end{cases}$$

Dividindo os dois lados da primeira equação pelo coeficiente de x_2 obtemos,

$$\begin{cases} x_2 + \frac{\delta}{(\alpha-\gamma)-\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}} y_2 &= 0 \\ \frac{\delta}{2} x_2 + \left(\frac{(\gamma-\alpha)-\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}}{2}\right) y_2 &= 0\,. \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação por ela menos a primeira equação multiplicada por $\frac{\delta}{2}$ obtemos,

$$\begin{cases} x_2 + \frac{\delta}{(\alpha-\gamma)-\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}} y_2 & = & 0 \\ 0x_2 + 0y_2 & = & 0\,. \end{cases}$$

Logo,

$$x_2 = -\frac{\delta}{(\alpha-\gamma)-\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}} y_2\,. \tag{2.69}$$

Portanto, o autovetor associado ao autovalor λ_2 é

$$\boldsymbol{u_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\delta}{(\alpha-\gamma)-\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}} y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_2 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\delta}{(\alpha-\gamma)-\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}} \\ 1 \end{pmatrix},$$

onde $y_2 \in \Re$.

Para normalizar os vetores $\boldsymbol{u_1}$ e $\boldsymbol{u_2}$, basta dividi-los por suas respectivas normas. Para $\boldsymbol{u_1}$ obtemos,

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{1}} = \frac{\boldsymbol{u_1}}{||\boldsymbol{u_1}||} &= \frac{y_1}{|y_1|} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\delta^2}{\left[(\alpha-\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}\right]^2}+1}} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\delta}{(\alpha-\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \pm \frac{1}{\frac{\sqrt{\delta^2+(\alpha-\gamma)^2+2(\alpha-\gamma)\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}+(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}}{\left[(\alpha-\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}\right]}} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\delta}{(\alpha-\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \pm \frac{1}{\frac{\sqrt{2\left(\delta^2+(\alpha-\gamma)\left((\alpha-\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}\right)\right)}}{\left[(\alpha-\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}\right]}} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\delta}{(\alpha-\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \pm \begin{pmatrix} -\frac{\delta}{\sqrt{2\left(\delta^2+(\alpha-\gamma)\left((\alpha-\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}\right)\right)}} \\ \frac{(\alpha-\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}}{\sqrt{2\left(\delta^2+(\alpha-\gamma)\left((\alpha-\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}\right)\right)}} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Normalizando $\boldsymbol{u_2}$ obtemos,

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{2}} = \frac{\boldsymbol{u_2}}{||\boldsymbol{u_2}||} &= \frac{y_2}{|y_2|} \frac{1}{\sqrt{\frac{\delta^2}{\left[(\alpha-\gamma)-\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}\right]^2}+1}} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\delta}{(\alpha-\gamma)-\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \pm \frac{1}{\frac{\sqrt{\delta^2+(\alpha-\gamma)^2-2(\alpha-\gamma)\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}+(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}}{\left[(\alpha-\gamma)-\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}\right]}} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\delta}{(\alpha-\gamma)-\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \pm \frac{1}{\frac{\sqrt{2\left(\delta^2+(\alpha-\gamma)\left((\alpha-\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}\right)\right)}}{\left[(\alpha-\gamma)-\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}\right]}} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\delta}{(\alpha-\gamma)-\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \pm \begin{pmatrix} -\frac{\delta}{\sqrt{2\left(\delta^2+(\alpha-\gamma)\left((\alpha-\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}\right)\right)}} \\ \frac{(\alpha-\gamma)-\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}}{\sqrt{2\left(\delta^2+(\alpha-\gamma)\left((\alpha-\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}\right)\right)}} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Tomaremos

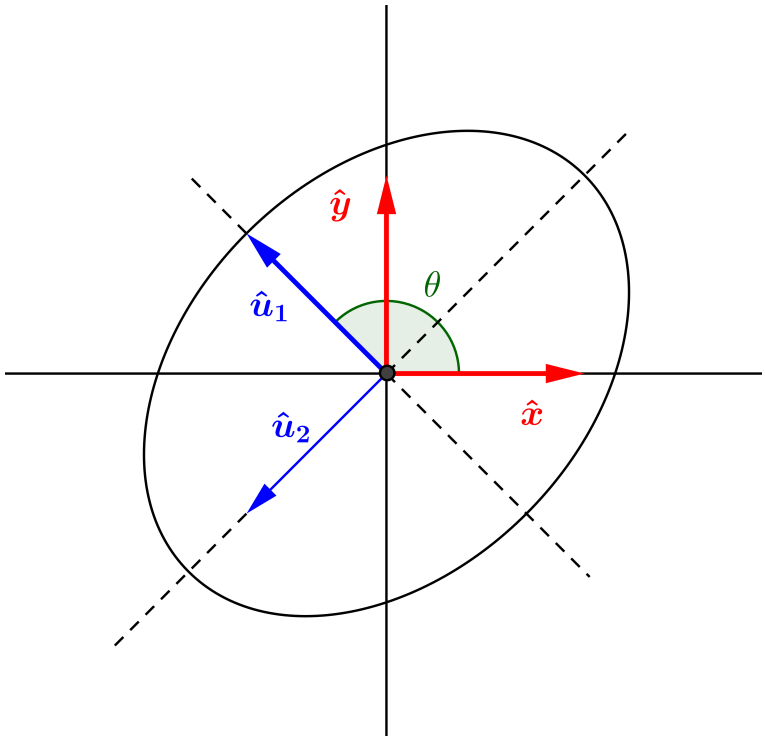
$$\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} -\frac{\delta}{\sqrt{2\left(\delta^2+(\alpha-\gamma)\left((\alpha-\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}\right)\right)}} \\ \frac{(\alpha-\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}}{\sqrt{2\left(\delta^2+(\alpha-\gamma)\left((\alpha-\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}\right)\right)}} \end{pmatrix} \tag{2.72}$$

e

$$\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{2}} = \begin{pmatrix} -\frac{\delta}{\sqrt{2\left(\delta^2+(\alpha-\gamma)\left((\alpha-\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}\right)\right)}} \\ \frac{(\alpha-\gamma)-\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}}{\sqrt{2\left(\delta^2+(\alpha-\gamma)\left((\alpha-\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}\right)\right)}} \end{pmatrix}, \tag{2.73}$$

pois dessa forma $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{1}}$ estará no segundo quadrante, já que terá sua componente x negativa (considerando o valor inicial de δ positivo) e sua componente y positiva. E $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{2}}$, por sua vez, estará no terceiro quadrante. Com isso, teremos o ângulo θ, formado por $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{1}}$ e o vetor $\hat{\mathbf{x}}$, entre 0 e π. Observe na Figura 1 a escolha dos autovetores.

Figura 1 – Escolha dos autovetores



2.2.3 Ângulo entre $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{1}}$ e $\hat{\mathbf{x}}$

Munido do nosso novo sistema de coordenadas, formado pelos vetores $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{1}}$ e $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{2}}$, obtidos na seção 2.2.2, investiguemos a evolução temporal do ângulo formado por $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{1}}$ e o vetor da base canônica $\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Fazendo o produto interno entre $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{1}}$ e $\hat{\mathbf{x}}$ obtemos,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{1}}^T\hat{\mathbf{x}} &= ||\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{1}}|| \cdot ||\hat{\mathbf{x}}|| \cdot \cos\theta \\ \cos\theta &= \left(-\frac{\delta}{\sqrt{2\left(\delta^2+(\alpha-\gamma)\left((\alpha-\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}\right)\right)}}, \ \frac{(\alpha-\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}}{\sqrt{2\left(\delta^2+(\alpha-\gamma)\left((\alpha-\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}\right)\right)}} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\cos\theta = -\frac{\delta}{\sqrt{2\left(\delta^2 + (\alpha-\gamma)\left((\alpha-\gamma) + \sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}\right)\right)}}$$

$$\theta = \arccos\left(-\frac{\delta}{\sqrt{2\left(\delta^2 + (\alpha-\gamma)\left((\alpha-\gamma) + \sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\delta^2}\right)\right)}}\right), \tag{2.74}$$

onde θ é o ângulo formado pelos dois vetores.

2.2.4 Discriminante

Para obtermos curvas de isodensidade elípticas, o discriminante

$$\zeta = \alpha\gamma - \frac{\delta^2}{4} \tag{2.75}$$

deve ser positivo. Com efeito, já vimos que a equação (2.52) pode ser reescrita como

$$f(x,y,t) = \begin{pmatrix} x, & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\delta}{2} \\ \frac{\delta}{2} & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Também vimos que a matriz

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\delta}{2} \\ \frac{\delta}{2} & \gamma \end{pmatrix},$$

diagonalizada, tem seus autovalores, λ_1 e λ_2, na diagonal principal,

$$M_{diag} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \tag{2.76}$$

Com isso, a equação (2.52) torna-se,

$$f(x,y,t) = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2. \tag{2.77}$$

Note que, para que a equação (2.77) descreva uma elipse, λ_1 e λ_2 devem ser ambos positivos. Isso implica que

$$\det(M_{diag}) = \lambda_1\lambda_2 > 0.$$

Logo, o produto dos autovalores de M é positivo. Mas o produto dos autovalores de uma matriz é igual ao seu determinante. Para mostrarmos isso, consideremos uma matriz quadrada $A_{n\times n}$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{2.78}$$

Como já vimos anteriormente, para obtermos os autovalores de A, precisamos calcular o determinante de $A - \lambda I$. Esse determinante será um polinômio na variável λ, e os autovalores serão as raízes desse polinômio. Assim,

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}. \tag{2.79}$$

O polinômio $p(\lambda)$ tem, portanto, a seguinte forma,

$$p(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \ldots + c_n\lambda^n \,, \tag{2.80}$$

onde $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \Re$.

Note que, $c_n = 1$ se n for par e $c_n = -1$ se n for ímpar, pois o coeficiente de λ^n depende apenas da multiplicação dos termos da diagonal principal. Note também que,

$$p(0) = c_0 \,, \tag{2.81}$$

e na equação (2.79) temos,

$$p(0) = \det(A - 0I) = \det A \,. \tag{2.82}$$

Logo,

$$c_0 = \det A \,. \tag{2.83}$$

Considerando que A possui autovalores distintos, podemos reescrever a equação (2.80) como,

$$p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\ldots(\lambda_n - \lambda) \,, \tag{2.84}$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são as raízes de $p(\lambda)$.

Note que, na equação (2.84), o termo independente (sem λ) é obtido quando multiplicamos todos os λ_k, $1 \leq k \leq n$, presentes nos fatores. Logo,

$$c_0 = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n \,. \tag{2.85}$$

Das equações (2.83) e (2.85) concluímos que,

$$\det A = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n \,. \tag{2.86}$$

Com isso,

$$\det M = \alpha\gamma - \frac{\delta^2}{4} = \lambda_1\lambda_2 \,. \tag{2.87}$$

Para que tenhamos curvas de isodensidade elípticas, é necessário então que

$$\zeta = \alpha\gamma - \frac{\delta^2}{4} > 0 \,.$$

Calculando sua derivada em relação ao tempo, utilizando (2.51b), (2.51c) e (2.51d)

$$\begin{aligned}
\frac{d\zeta}{dt} &= \frac{d\alpha}{dt}\gamma + \alpha\frac{d\gamma}{dt} - \frac{\delta}{2}\frac{d\delta}{dt} \\
&= \left(-(2-q)D\eta^{1-q}(4\alpha^2 + \delta^2) + 4a\alpha - b\delta\right)\gamma \\
&\quad + \left(-(2-q)D\eta^{1-q}(4\gamma^2 + \delta^2) + 4a\gamma + b\delta\right)\alpha \\
&\quad - \frac{\delta}{2}\left(-4(2-q)D\eta^{1-q}\delta(\alpha+\gamma) + 4a\delta + 2b(\alpha-\gamma)\right) \\
&= D(q-2)\eta^{1-q}\left[4\alpha^2\gamma + \delta^2\gamma + 4\gamma^2\alpha + \delta^2\alpha - 2\delta^2\alpha - 2\delta^2\gamma\right] \\
&\quad + 4a\alpha\gamma - b\delta\gamma + 4a\alpha\gamma + b\delta\alpha - 2a\delta^2 - b\delta\alpha + b\delta\gamma \\
&= D(q-2)\eta^{1-q}\left[4\alpha^2\gamma - \delta^2\gamma + 4\gamma^2\alpha - \delta^2\alpha\right] + 2a\left(4\alpha\gamma - \delta^2\right) \\
&= D(q-2)\eta^{1-q}\left[\alpha\left(4\alpha\gamma - \delta^2\right) + \gamma\left(4\alpha\gamma - \delta^2\right)\right] + 2a\left(4\alpha\gamma - \delta^2\right) \\
&= D(q-2)\eta^{1-q}(\alpha+\gamma)\left(4\alpha\gamma - \delta^2\right) + 2a\left(4\alpha\gamma - \delta^2\right) \\
&= \left(4\alpha\gamma - \delta^2\right)\left[D(q-2)\eta^{1-q}(\alpha+\gamma) + 2a\right] \\
&= 4\zeta\left[D(q-2)\eta^{1-q}(\alpha+\gamma) + 2a\right] \,.
\end{aligned} \tag{2.88}$$

Note que o valor do discriminante não é constante em relação ao tempo.

2.2.5 Norma

Ao interpretarmos uma solução da equação de Fokker-Planck como uma densidade física de partículas, devemos exigir que a norma I da função F,

$$I = \int F \, dx_1 dx_2 \ldots dx_N \,, \tag{2.89}$$

seja finita. Para que a tentativa de solução proposta (2.23) tenha norma finita, é suficiente que a forma quadrática $\alpha(t)x^2+\delta(t)xy+\gamma(t)y^2$ seja positiva. Isso garante que as curvas de densidade constante, dadas por $\alpha(t)x^2+\delta(t)xy+\gamma(t)y^2 = \text{const.} > 0$, sejam elipses. Para $q < 1$, a densidade (2.23) assume valores diferentes de zero, dentro da região delimitada pela fronteira dada pela elipse $\alpha(t)x^2 + \delta(t)xy + \gamma(t)y^2 = \frac{1}{1-q}$.

Substituindo a solução proposta (2.23) na equação (2.89) obtemos,

$$\begin{aligned} I &= \int\int F(x,y) \, dxdy \\ &= \int\int \eta(t) \left[1 - (1-q)(\alpha(t)x^2 + \delta(t)xy + \gamma(t)y^2)\right]^{\frac{1}{(1-q)}} \, dxdy \,. \end{aligned} \tag{2.90}$$

Podemos reescrever a expressão $\alpha(t)x^2 + \delta(t)xy + \gamma(t)y^2$ na base de autovetores, usando a equação (2.59), deduzida anteriormente, e então a equação (2.90) pode ser reescrita da forma

$$I = \int\int \eta(t) \left[1 - (1-q)(\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2)\right]^{\frac{1}{(1-q)}} \, dx'dy' \,, \tag{2.91}$$

onde λ_1 e λ_2 dados pelas expressões (2.63) e (2.64), são os autovalores obtidos na seção 2.2.2 e o jacobiano da mudança de variáveis é igual a 1. Façamos a seguinte substituição,

$$g_1 = \sqrt{(1-q)\lambda_1} \, x' \tag{2.92}$$

e

$$g_2 = \sqrt{(1-q)\lambda_2} \, y' \,, \tag{2.93}$$

e portanto

$$dg_1 dg_2 = (1-q)\sqrt{\lambda_1\lambda_2} \, dx'dy' \,. \tag{2.94}$$

Com isso, a equação (2.91) torna-se,

$$I = \frac{\eta}{(1-q)\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \int\int \left[1 - (g_1^2 + g_2^2)\right]^{\frac{1}{(1-q)}} \, dg_1 dg_2 \,. \tag{2.95}$$

Usando coordenadas polares, façamos a seguinte substituição

$$r^2 = g_1^2 + g_2^2 \,. \tag{2.96}$$

Portanto,

$$I = \frac{\eta}{(1-q)\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \int\int \left[1 - r^2\right]^{\frac{1}{(1-q)}} \, rdrd\theta \,, \tag{2.97}$$

onde r é a variável radial e também o determinante do jacobiano da mudança de variáveis polares para cartesianas. O ângulo θ varia de 0 a 2π e r varia de 0 a 1, pois lembremos que a equação (2.23), que representa a densidade, está definida apenas para valores positivos

de φ dado por (2.24). Portanto, para $q < 1$, como a expressão $1 - r^2$ deve ser sempre positiva, temos

$$\begin{aligned} I &= \frac{\eta}{(1-q)\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[1 - r^2\right]^{\frac{1}{(1-q)}} \, r dr d\theta \\ &= \frac{2\pi\eta}{(1-q)\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \int_0^1 \left[1 - r^2\right]^{\frac{1}{(1-q)}} \, r dr \,. \end{aligned} \tag{2.98}$$

Note que $\lambda_1\lambda_2$ é o determinante da matriz M (2.54) diagonalizada e, de acordo com (2.87)

$$\lambda_1\lambda_2 = \alpha\gamma - \frac{\delta^2}{4} \,. \tag{2.99}$$

Façamos agora a seguinte substituição na equação (2.98),

$$s = 1 - r^2 \,, \tag{2.100}$$

e portanto,

$$ds = -2rdr \,. \tag{2.101}$$

Note que, pela equação (2.100),

$$r \to 0 \Rightarrow s \to 1$$

e

$$r \to 1 \Rightarrow s \to 0 \,.$$

Assim, teremos

$$\begin{aligned} I &= -\frac{\pi\eta}{(1-q)\sqrt{\alpha\gamma - \frac{\delta^2}{4}}} \int_1^0 s^{\frac{1}{(1-q)}} \, ds \\ &= \frac{\pi\eta}{(1-q)\sqrt{\alpha\gamma - \frac{\delta^2}{4}}} \int_0^1 s^{\frac{1}{(1-q)}} \, ds \,. \end{aligned} \tag{2.102}$$

Logo,

$$I = \frac{\pi\eta}{(1-q)\sqrt{\alpha\gamma - \frac{\delta^2}{4}}} \left(\frac{1-q}{2-q} s^{\frac{2-q}{1-q}} \Big|_0^1 \right) \,. \tag{2.103}$$

Desta forma

$$I = \frac{\pi\eta}{(2-q)\sqrt{\alpha\gamma - \frac{\delta^2}{4}}} \,. \tag{2.104}$$

Consideremos agora o caso onde $1 < q < 2$. Reescrevamos a equação (2.23) da seguinte forma,

$$F(x, y, t) = \eta(t) \left[1 + (q-1)(\alpha(t)x^2 + \delta(t)xy + \gamma(t)y^2)\right]_+^{\frac{1}{(1-q)}} \,. \tag{2.105}$$

Substituindo a função (2.105) na equação (2.89) obtemos,

$$\begin{aligned} I &= \int\int F(x,y) \, dxdy \\ &= \int\int \eta(t) \left[1 + (q-1)(\alpha(t)x^2 + \delta(t)xy + \gamma(t)y^2)\right]^{\frac{1}{(1-q)}} \, dxdy \,. \end{aligned} \tag{2.106}$$

Podemos novamente reescrever a expressão, $\alpha(t)x^2 + \delta(t)xy + \gamma(t)y^2$, usando a expressão (2.59), deduzida anteriormente, e então a equação (2.106) torna-se,

$$I = \int\int \eta(t)\left[1 + (q-1)(\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2)\right]^{\frac{1}{(1-q)}}\, dx'dy'\,, \tag{2.107}$$

onde λ_1 e λ_2 dados pelas expressões (2.63) e (2.64), são os autovalores obtidos na seção 2.2.2. Façamos a seguinte substituição,

$$h_1 = \sqrt{(q-1)\lambda_1}\; x' \tag{2.108}$$

e

$$h_2 = \sqrt{(q-1)\lambda_2}\; y'\,, \tag{2.109}$$

e portanto,

$$dh_1 dh_2 = (q-1)\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\; dx'dy'\,. \tag{2.110}$$

Com isso, a equação (2.91) torna-se,

$$I = \frac{\eta}{(q-1)\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \int\int \left[1 + (h_1^2 + h_2^2)\right]^{\frac{1}{(1-q)}}\, dh_1 dh_2\,. \tag{2.111}$$

Usando coordenadas polares, façamos a seguinte substituição

$$r^2 = h_1^2 + h_2^2\,. \tag{2.112}$$

Portanto,

$$I = \frac{\eta}{(q-1)\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \int\int \left[1 + r^2\right]^{\frac{1}{(1-q)}}\, r dr d\theta\,, \tag{2.113}$$

onde r, como em (2.97), é a variável radial e também o determinante do jacobiano da mudança de variáveis polares para cartesianas. O ângulo θ varia de 0 a 2π e r varia de 0 a ∞, pois a equação (2.105), que nada mais é do que a equação (2.23) reescrita de outra forma, representa a densidade que agora (com $1 < q < 2$) está positiva e definida para todos os valores positivos de r. Assim,

$$\begin{aligned} I &= \frac{\eta}{(q-1)\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \left[1 + r^2\right]^{\frac{1}{(1-q)}}\, r dr d\theta \\ &= \frac{2\pi\eta}{(q-1)\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \int_0^{\infty} \left[1 + r^2\right]^{\frac{1}{(1-q)}}\, r dr\,. \end{aligned} \tag{2.114}$$

Substituamos novamente $\lambda_1\lambda_2$ pelo determinante da matriz M (2.54),

$$\lambda_1\lambda_2 = \alpha\gamma - \frac{\delta^2}{4}\,. \tag{2.115}$$

Façamos também a seguinte substituição na equação (2.114),

$$p = 1 + r^2\,, \tag{2.116}$$

e portanto,

$$dp = 2rdr\,. \tag{2.117}$$

Note que, pela equação (2.116),

$$r \to 0 \Rightarrow p \to 1$$

e

$$r \to \infty \Rightarrow p \to \infty\,.$$

Assim, teremos

$$I = \frac{\pi\eta}{(q-1)\sqrt{\alpha\gamma - \frac{\delta^2}{4}}} \int_1^\infty p^{\frac{1}{(1-q)}}\, dp\,. \tag{2.118}$$

Logo,

$$I = \frac{\pi\eta}{(q-1)\sqrt{\alpha\gamma - \frac{\delta^2}{4}}} \left(\frac{1-q}{2-q} p^{\frac{2-q}{1-q}} \Big|_1^\infty \right). \tag{2.119}$$

Note que, $\frac{2-q}{1-q}$ é um número negativo, pois estamos considerando o caso onde $1 < q < 2$. Assim,

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi\eta}{(q-1)\sqrt{\alpha\gamma - \frac{\delta^2}{4}}} \left(\frac{1-q}{2-q} \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{2-q}{q-1}} \Big|_1^\infty \right) \\ &= \frac{\pi\eta}{(2-q)\sqrt{\alpha\gamma - \frac{\delta^2}{4}}}\,. \end{aligned} \tag{2.120}$$

Portanto, para $q < 2$, a norma da solução proposta (2.23) é dada por,

$$I = \frac{\pi\eta}{(2-q)\sqrt{\alpha\gamma - \frac{\delta^2}{4}}}\,. \tag{2.121}$$

Isolando η na equação (2.121) obtemos,

$$\eta = \frac{I(2-q)\sqrt{\alpha\gamma - \frac{\delta^2}{4}}}{\pi}\,. \tag{2.122}$$

A norma I é uma quantidade que não varia com o tempo. Com efeito, calculemos sua derivada em relação ao tempo. Escrevendo $\frac{dI}{dt}$ como a soma de suas derivadas parciais temos,

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial t}\,. \tag{2.123}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{\pi}{(2-q)\sqrt{\alpha\gamma - \frac{\delta^2}{4}}} \left[4a\eta - 2(2-q)(\alpha+\gamma)D\eta^{2-q}\right] \\ &= \frac{2\pi\eta}{(2-q)} \left(\alpha\gamma - \frac{\delta^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \left[2a + (q-2)(\alpha+\gamma)D\eta^{1-q}\right]\,, \end{aligned} \tag{2.124}$$

e, desenvolvendo $\frac{\partial I}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial t}$ temos,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial I}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial t} = \\ &= \frac{\pi\eta}{2-q} \left[-\frac{1}{2} \left(\alpha\gamma - \frac{\delta^2}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} \right] \Big(D(q-2)\eta^{1-q}\gamma(4\alpha^2 + \delta^2) + 4a\alpha\gamma - b\delta\gamma \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +D(q-2)\eta^{1-q}\alpha(\delta^2+4\gamma^2)+b\delta\alpha+4a\alpha\gamma \\
& +D(q-2)\eta^{1-q}(-2\delta^2(\alpha+\gamma))-2a\delta^2-b\delta\alpha+b\delta\gamma\Big) \\
= & \frac{\pi\eta}{2-q}\left[-\frac{1}{2}\left(\alpha\gamma-\frac{\delta^2}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]\Big(D(q-2)\eta^{1-q}\left[4\alpha^2\gamma+\delta^2\gamma+4\alpha\gamma^2+\delta^2\alpha-2\delta^2\alpha-2\delta^2\gamma\right] \\
& +2a\left(4\alpha\gamma-\delta^2\right)\Big) \\
= & \frac{\pi\eta}{2-q}\left[-\frac{1}{2}\left(\alpha\gamma-\frac{\delta^2}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]\Big(D(q-2)\eta^{1-q}\left[4\alpha^2\gamma-\delta^2\gamma+4\alpha\gamma^2-\delta^2\alpha\right] \\
& +2a\left(4\alpha\gamma-\delta^2\right)\Big) \\
= & \frac{\pi\eta}{2-q}\left[-\frac{1}{2}\left(\alpha\gamma-\frac{\delta^2}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]\Big(D(q-2)\eta^{1-q}\left(4\alpha\gamma-\delta^2\right)(\alpha+\gamma)+2a\left(4\alpha\gamma-\delta^2\right)\Big) \\
= & \frac{\pi\eta}{2-q}\left[-\frac{1}{2}\left(\alpha\gamma-\frac{\delta^2}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]4\left(D(q-2)\eta^{1-q}(\alpha+\gamma)+2a\right)\left(\alpha\gamma-\frac{\delta^2}{4}\right) \\
= & -\frac{2\pi\eta}{2-q}\left(\alpha\gamma-\frac{\delta^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(D(q-2)\eta^{1-q}(\alpha+\gamma)+2a\right). \qquad (2.125)
\end{aligned}
$$

Substituindo a soma das equações (2.124) e (2.125) no lado direito da equação (2.123), verifica-se que

$$\frac{dI}{dt}=0\,.$$

2.2.6 Soluções estacionárias

Analisemos agora as soluções estacionárias dos parâmetros η, α, γ e δ. Para tal, investiguemos quando os mesmos deixam de variar com o tempo, ou seja, quando suas derivadas em relação ao tempo são iguais a zero. Para η temos,

$$
\begin{aligned}
\frac{d\eta}{dt} &= 0 \\
4a\eta_{\text{stat}}-2(2-q)(\alpha_{\text{stat}}+\gamma_{\text{stat}})D\eta_{\text{stat}}^{2-q} &= 0 \\
4a\eta_{\text{stat}} &= 2(2-q)(\alpha_{\text{stat}}+\gamma_{\text{stat}})D\eta_{\text{stat}}^{2-q} \\
\eta_{\text{stat}}^{1-q} &= \frac{4a}{2(2-q)D(\alpha_{\text{stat}}+\gamma_{\text{stat}})} \\
\eta_{\text{stat}} &= \left[\frac{2a}{(2-q)D(\alpha_{\text{stat}}+\gamma_{\text{stat}})}\right]^{\frac{1}{1-q}}. \qquad (2.126)
\end{aligned}
$$

Desenvolvendo $\frac{d\alpha}{dt}=0$ temos,

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d\alpha}{dt} \\
&= (q-2)D\eta_{\text{stat}}^{1-q}(4\alpha_{\text{stat}}^2+\delta_{\text{stat}}^2)+4a\alpha_{\text{stat}}-b\delta_{\text{stat}} \\
&= -\frac{2a(4\alpha_{\text{stat}}^2+\delta_{\text{stat}}^2)}{\alpha_{\text{stat}}+\gamma_{\text{stat}}}+4a\alpha_{\text{stat}}-b\delta_{\text{stat}}\,. \qquad (2.127)
\end{aligned}
$$

Desenvolvendo $\frac{d\gamma}{dt}=0$ temos,

$$0 = \frac{d\gamma}{dt}$$

$$
\begin{aligned}
&= (q-2)D\eta_{\text{stat}}^{1-q}(4\gamma_{\text{stat}}^2+\delta_{\text{stat}}^2)+4a\gamma_{\text{stat}}+b\delta_{\text{stat}} \\
&= -\frac{2a(4\gamma_{\text{stat}}^2+\delta_{\text{stat}}^2)}{\alpha_{\text{stat}}+\gamma_{\text{stat}}}+4a\gamma_{\text{stat}}+b\delta_{\text{stat}}\,. \qquad (2.128)
\end{aligned}
$$

Subtraindo a equação (2.127) da equação (2.128), obtém-se

$$
\begin{aligned}
0 &= \left[-\frac{2a(4\gamma_{\text{stat}}^2+\delta_{\text{stat}}^2)}{\alpha_{\text{stat}}+\gamma_{\text{stat}}}+4a\gamma_{\text{stat}}+b\delta_{\text{stat}}\right]-\left[-\frac{2a(4\alpha_{\text{stat}}^2+\delta_{\text{stat}}^2)}{\alpha_{\text{stat}}+\gamma_{\text{stat}}}+4a\alpha_{\text{stat}}-b\delta_{\text{stat}}\right] \\
&= \frac{2a(4\alpha_{\text{stat}}^2-4\gamma_{\text{stat}}^2)}{\alpha_{\text{stat}}+\gamma_{\text{stat}}}+4a\gamma_{\text{stat}}-4a\alpha_{\text{stat}}+2b\delta_{\text{stat}} \\
&= \frac{8a(\alpha_{\text{stat}}+\gamma_{\text{stat}})(\alpha_{\text{stat}}-\gamma_{\text{stat}})}{\alpha_{\text{stat}}+\gamma_{\text{stat}}}-4a(\alpha_{\text{stat}}-\gamma_{\text{stat}})+2b\delta_{\text{stat}} \\
&= 4a(\alpha_{\text{stat}}-\gamma_{\text{stat}})+2b\delta_{\text{stat}}\,, \qquad (2.129)
\end{aligned}
$$

e então,

$$
\begin{aligned}
\alpha_{\text{stat}}-\gamma_{\text{stat}} &= -\frac{b\delta_{\text{stat}}}{2a} \\
\alpha_{\text{stat}}-\gamma_{\text{stat}} &= -\frac{b^2(\alpha_{\text{stat}}-\gamma_{\text{stat}})}{4a^2} \\
4a^2\alpha_{\text{stat}}-4a^2\gamma_{\text{stat}} &= -b^2\alpha_{\text{stat}}+b^2\gamma_{\text{stat}} \\
4a^2\alpha_{\text{stat}}+b^2\alpha_{\text{stat}} &= 4a^2\gamma_{\text{stat}}+b^2\gamma_{\text{stat}} \\
\alpha_{\text{stat}}(4a^2+b^2) &= \gamma_{\text{stat}}(4a^2+b^2) \\
\alpha_{\text{stat}} &= \gamma_{\text{stat}}\,. \qquad (2.130)
\end{aligned}
$$

Desenvolvendo $\frac{d\delta}{dt}=0$ temos,

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d\delta}{dt} \\
&= (q-2)D\eta_{\text{stat}}^{1-q}4\delta_{\text{stat}}(\alpha_{\text{stat}}+\gamma_{\text{stat}})+4a\delta_{\text{stat}}+2b\alpha_{\text{stat}}-2b\gamma_{\text{stat}} \\
&= (q-2)D\left[\left(\frac{2a}{(2-q)D(\alpha_{\text{stat}}+\gamma_{\text{stat}})}\right)^{\frac{1}{1-q}}\right]^{1-q}4\delta_{\text{stat}}(\alpha_{\text{stat}}+\gamma_{\text{stat}}) \\
&\quad +4a\delta_{\text{stat}}+2b\alpha_{\text{stat}}-2b\gamma_{\text{stat}} \\
-8a\delta_{\text{stat}}+4a\delta_{\text{stat}} &= -2b(\alpha_{\text{stat}}-\gamma_{\text{stat}}) \\
\delta_{\text{stat}} &= \frac{b(\alpha_{\text{stat}}-\gamma_{\text{stat}})}{2a}\,. \qquad (2.131)
\end{aligned}
$$

Substituindo a equação (2.130) nas equações (2.131) e (2.126) obtemos,

$$
\delta_{\text{stat}}=0\,. \qquad (2.132)
$$

3 POTENCIAL ASSIMÉTRICO

Neste capítulo encontra-se a principal contribuição desta dissertação. Aqui, é analisada uma solução onde $\boldsymbol{K}$ tem uma componente derivada de um potencial elíptico V, com a forma,

$$V(\boldsymbol{x}) = a_1 x^2 + a_2 y^2, \qquad a_1, a_2 \in \Re\,, \tag{3.1}$$

que é um caso mais geral do que o tratado na seção 2.2. Tomaremos novamente

$$\tilde{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{x}) = (-by, +bx)\,. \tag{3.2}$$

Note que, de fato, $\tilde{\boldsymbol{K}}$ não deriva de um potencial. Com efeito,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{K}_1}{\partial y} &= -b \\ \frac{\partial \tilde{K}_2}{\partial x} &= b \\ \therefore \frac{\partial \tilde{K}_1}{\partial y} &\neq \frac{\partial \tilde{K}_2}{\partial x}\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K} &= -\boldsymbol{\nabla} V + \tilde{\boldsymbol{K}} \\ &= (-2a_1 x, -2a_2 y) + (-by, +bx) \\ &= (-2a_1 x - by, -2a_2 y + bx)\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Um potencial $V(\boldsymbol{x})$ da forma (3.1), e um campo de *drift* $\tilde{\boldsymbol{K}}$ da forma (3.2) podem ser interpretados, na estrutura usual de modelagem de redes neuronais, como um sistema de dois neurônios, onde a energia da rede tem apenas os termos de auto-interação e o *drift* gera interações assimétricas entre os dois neurônios. Como os termos de auto-interação são tais que $a_1 \neq a_2$, estamos de fato considerando um sistema de dois tipos diferentes de neurônios, conectados por sinapses assimétricas, que são suposições biologicamente realistas.

A divergência do produto da função distribuição F pelo campo de *drift* $\boldsymbol{K}$, que aparece do lado direito da equação (2.1), é portanto a soma das derivadas de primeira ordem do mesmo,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot [F\boldsymbol{K}] = \frac{\partial[(-2a_1 x - by)F]}{\partial x} + \frac{\partial[(-2a_2 y + bx)F]}{\partial y}\,. \tag{3.5}$$

3.1 Derivadas da equação de FPNL com potencial assimétrico

Para calcular o primeiro termo da equação (2.1), derivamos o ansatz F (2.25) em relação a t, obtendo

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \dot{\eta}\varphi^{\frac{1}{1-q}} - \eta(\dot{\alpha}x^2 + \dot{\delta}xy + \dot{\gamma}y^2)\varphi^{\frac{q}{1-q}}\,. \tag{3.6}$$

O laplaciano de uma função é a soma de todas as suas derivadas parciais simples de segunda ordem. Comecemos calculando as derivadas parciais de primeira ordem de F^{2-q},

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left[F^{2-q}\right]}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\varphi^{\frac{1}{1-q}}\right)^{2-q} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta^{2-q}\varphi^{\frac{2-q}{1-q}}\right) \\
&= \frac{2-q}{1-q}\eta^{2-q}\left(-(1-q)(2\alpha x+\delta y)\right)\varphi^{\frac{1}{1-q}} \\
&= -(2-q)\eta^{2-q}(2\alpha x+\delta y)\varphi^{\frac{1}{1-q}} \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left[F^{2-q}\right]}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\varphi^{\frac{1}{1-q}}\right)^{2-q} \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta^{2-q}\varphi^{\frac{2-q}{1-q}}\right) \\
&= \frac{2-q}{1-q}\eta^{2-q}\left(-(1-q)(\delta x+2\gamma y)\right)\varphi^{\frac{1}{1-q}} \\
&= -(2-q)\eta^{2-q}(\delta x+2\gamma y)\varphi^{\frac{1}{1-q}}\,. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Derivando a equação (3.7) em relação a x novamente obtemos,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2[F^{2-q}]}{\partial x^2} &= -\frac{2-q}{1-q}\eta^{2-q}\left(-(1-q)(2\alpha x+\delta y)\right)(2\alpha x+\delta y)\varphi^{\frac{q}{1-q}} - 2(2-q)\eta^{2-q}\alpha\varphi^{\frac{1}{1-q}} \\
&= (2-q)\eta^{2-q}\left[(2\alpha x+\delta y)^2\varphi^{\frac{q}{1-q}} - 2\alpha\varphi^{\frac{1}{1-q}}\right], \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

e derivando a equação (3.8) em relação a y novamente obtemos,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2[F^{2-q}]}{\partial y^2} &= -\frac{2-q}{1-q}\eta^{2-q}\left(-(1-q)(\delta x+2\gamma y)\right)(\delta x+2\gamma y)\varphi^{\frac{q}{1-q}} - 2(2-q)\eta^{2-q}\gamma\varphi^{\frac{1}{1-q}} \\
&= (2-q)\eta^{2-q}\left[(\delta x+2\gamma y)^2\varphi^{\frac{q}{1-q}} - 2\gamma\varphi^{\frac{1}{1-q}}\right]. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Calculando agora as derivadas referentes à $-\boldsymbol{\nabla}\cdot[F\boldsymbol{K}]$ obtemos,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}[(2a_1x+by)F] &= \frac{\partial}{\partial x}\left[(2a_1x+by)\eta\varphi^{\frac{1}{1-q}}\right] \\
&= 2a_1\eta\varphi^{\frac{1}{1-q}} + \frac{2a_1x+by}{1-q}\eta\varphi^{\frac{q}{1-q}}(-(1-q)(2\alpha x+\delta y)) \\
&= 2a_1\eta\varphi^{\frac{1}{1-q}} - (2a_1x+by)(2\alpha x+\delta y)\eta\varphi^{\frac{q}{1-q}} \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}[(2a_2y-bx)F] &= \frac{\partial}{\partial y}\left[(2a_2y-bx)\eta\varphi^{\frac{1}{1-q}}\right] \\
&= 2a_2\eta\varphi^{\frac{1}{1-q}} + \frac{2a_2y-bx}{1-q}\eta\varphi^{\frac{q}{1-q}}(-(1-q)(\delta x+2\gamma y)) \\
&= 2a_2\eta\varphi^{\frac{1}{1-q}} - (2a_2y-bx)(\delta x+2\gamma y)\eta\varphi^{\frac{q}{1-q}}\,. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Somando as equações (3.9) e (3.10) obtemos,

$$\nabla^2[F^{2-q}] = \Big[(2-q)\eta^{2-q}\big[(2\alpha x+\delta y)^2\varphi^{\frac{q}{1-q}} - 2\alpha\varphi^{\frac{1}{1-q}}\big]$$

$$
\begin{aligned}
& +(2-q)\eta^{2-q}\Big[(\delta x+2\gamma y)^2\varphi^{\frac{q}{1-q}}-2\gamma\varphi^{\frac{1}{1-q}}\Big]\Big] \\
= \; & (2-q)\eta^{2-q}\Big[((4\alpha^2+\delta^2)x^2+(4\alpha\delta+4\gamma\delta)xy+(\delta^2+4\gamma^2)y^2)\varphi^{\frac{q}{1-q}} \\
& +(-2\alpha-2\gamma)\varphi^{\frac{1}{1-q}}\Big] \\
= \; & (2-q)\eta^{2-q}\Big[((4\alpha^2+\delta^2)x^2+4\delta(\alpha+\gamma)xy \\
& +(\delta^2+4\gamma^2)y^2)\varphi^{\frac{q}{1-q}}-2(\alpha+\gamma)\varphi^{\frac{1}{1-q}}\Big]. \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

Somando as equações (3.11) e (3.12) obtemos,

$$
\begin{aligned}
-\boldsymbol{\nabla}\cdot[F\boldsymbol{K}] \; = \; & 2a_1\eta\varphi^{\frac{1}{1-q}}-(2a_1x+by)(2\alpha x+\delta y)\eta\varphi^{\frac{q}{1-q}} \\
& +2a_2\eta\varphi^{\frac{1}{1-q}}-(2a_2y-bx)(\delta x+2\gamma y)\eta\varphi^{\frac{1}{1-q}} \\
= \; & \eta\left[(2a_1+2a_2)\varphi^{\frac{1}{1-q}}\right]+\eta\big[(-4a_1\alpha+b\delta)x^2+(-2b\alpha-2a_1\delta-2a_2\delta+2b\gamma)xy \\
& +(-b\delta-4a_2\gamma)y^2\big]\varphi^{\frac{q}{1-q}} \\
= \; & \eta\left[2(a_1+a_2)\varphi^{\frac{1}{1-q}}\right]+\eta\big[(-4a_1\alpha+b\delta)x^2-2(b(\alpha-\gamma)+\delta(a_1+a_2))xy \\
& +(-b\delta-4a_2\gamma)y^2\big]\varphi^{\frac{q}{1-q}}\,. \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

Reescrevendo $\varphi^{\frac{1}{1-q}}$ como $\varphi\cdot\varphi^{\frac{q}{1-q}}$ nas equações (3.13) e (3.14), obtemos

$$
\begin{aligned}
\nabla^2[F^{2-q}] \; = \; & (2-q)\eta^{2-q}\varphi^{\frac{q}{1-q}}\Big[(4\alpha^2+\delta^2)x^2+4\delta(\alpha+\gamma)xy \\
& +(\delta^2+4\gamma^2)y^2-2(\alpha+\gamma)\varphi\Big] \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
-\boldsymbol{\nabla}\cdot[F\boldsymbol{K}] \; = \; & \eta\varphi^{\frac{q}{1-q}}\big[(-4a_1\alpha+b\delta)x^2-2(b(\alpha-\gamma)+\delta(a_1+a_2))xy \\
& +(-b\delta-4a_2\gamma)y^2+2(a_1+a_2)\varphi\big]\,. \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

Multiplicando a equação (3.15) pelo termo de difusão D e somando o resultado à equação (3.16) obtemos,

$$
\begin{aligned}
D\nabla^2[F^{2-q}]-\boldsymbol{\nabla}\cdot[F\boldsymbol{K}] \; = \; & (2-q)D\eta^{2-q}\varphi^{\frac{q}{1-q}}\Big[(4\alpha^2+\delta^2)x^2+4\delta(\alpha+\gamma)xy \\
& +(\delta^2+4\gamma^2)y^2\Big] \\
& -2(2-q)D\eta^{2-q}\varphi^{\frac{q}{1-q}}(\alpha+\gamma)\varphi \\
& +\eta\varphi^{\frac{q}{1-q}}\Big[(-4a_1\alpha+b\delta)x^2-2(b(\alpha-\gamma)+\delta(a_1+a_2))xy \\
& +(-b\delta-4a_2\gamma)y^2\Big] \\
& +2\eta\varphi^{\frac{q}{1-q}}\varphi(a_1+a_2)\,. \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

Substituindo os termos do lado direito da equação (3.17) no lado lado direito da equação de FPNL (2.1), e substituindo os termos do lado direito da equação (2.38) no lado esquerdo da equação de FPNL (2.1), obtemos

$$
\begin{aligned}
& \dot{\eta}\varphi\cdot\varphi^{\frac{q}{1-q}}-\eta(\dot{\alpha}x^2+\dot{\delta}xy+\dot{\gamma}y^2)\varphi^{\frac{q}{1-q}}= \\
= \; & (2-q)D\eta^{2-q}\varphi^{\frac{q}{1-q}}\Big[(4\alpha^2+\delta^2)x^2+4\delta(\alpha+\gamma)xy \\
& +(\delta^2+4\gamma^2)y^2\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-2(2-q)D\eta^{2-q}\varphi^{\frac{q}{1-q}}(\alpha+\gamma)\varphi \\
&+\eta\varphi^{\frac{q}{1-q}}\Big[(-4a_1\alpha+b\delta)x^2-2(b(\alpha-\gamma)+\delta(a_1+a_2))xy \\
&+(-b\delta-4a_2\gamma)y^2\Big] \\
&+2\eta\varphi^{\frac{q}{1-q}}\varphi(a_1+a_2)\,. \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

Dividindo ambos os lados da equação (3.18) por $\varphi^{\frac{q}{1-q}}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\dot{\eta}\varphi-\eta(\dot{\alpha}x^2+\dot{\delta}xy+\dot{\gamma}y^2)= \\
=\;&(2-q)D\eta^{2-q}\Big[(4\alpha^2+\delta^2)x^2+4\delta(\alpha+\gamma)xy \\
&+(\delta^2+4\gamma^2)y^2\Big] \\
&-2(2-q)D\eta^{2-q}(\alpha+\gamma)\varphi \\
&+\eta\Big[(-4a_1\alpha+b\delta)x^2-2(b(\alpha-\gamma)+\delta(a_1+a_2))xy \\
&+(-b\delta-4a_2\gamma)y^2\Big] \\
&+2\eta\varphi(a_1+a_2)\,. \qquad (3.19)
\end{aligned}
$$

Reescrevendo os termos do lado direito da equação (3.19), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\dot{\eta}\varphi-\eta(\dot{\alpha}x^2+\dot{\delta}xy+\dot{\gamma}y^2)= \\
=\;&\varphi\left[2\eta(a_1+a_2)-2(2-q)D\eta^{2-q}(\alpha+\gamma)\right] \\
&+\eta\Big[x^2\left[(2-q)D\eta^{1-q}(4\alpha^2+\delta^2)+(-4a_1\alpha+b\delta)\right] \\
&+xy\left[(2-q)D\eta^{1-q}4\delta(\alpha+\gamma)-2(b(\alpha-\gamma)+\delta(a_1+a_2))\right] \\
&+y^2\left[(2-q)D\eta^{1-q}(\delta^2+4\gamma^2)+(-b\delta-4a_2\gamma)\right]\Big]\,. \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

Reorganizando os termos da equação (3.20) e substituindo φ pela expressão que o define (2.24), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\big(1-(1-q)(\alpha x^2+\delta xy+\gamma y^2)\big)\big(\dot{\eta}+2(2-q)D\eta^{2-q}(\alpha+\gamma)-2\eta(a_1+a_2)\big)= \\
=\;&x^2\left[\eta\left[(2-q)D\eta^{1-q}(4\alpha^2+\delta^2)+(-4a_1\alpha+b\delta)\right]+\eta\dot{\alpha}\right] \\
&+xy\Big[\eta\left[(2-q)D\eta^{1-q}4\delta(\alpha+\gamma)-2(b(\alpha-\gamma)+\delta(a_1+a_2))\right]+\eta\dot{\delta}\Big] \\
&+y^2\left[\eta\left[(2-q)D\eta^{1-q}(\delta^2+4\gamma^2)+(-b\delta-4a_2\gamma)\right]+\eta\dot{\gamma}\right]\,. \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

Se definirmos

$$
\dot{\eta}+2(2-q)D\eta^{2-q}(\alpha+\gamma)-2\eta(a_1+a_2)=\mathcal{J} \qquad (3.22)
$$

podemos reescrever a equação (3.21) como

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{J}+x^2\mathcal{J}(-\alpha(1-q))+xy\mathcal{J}(-\delta(1-q))+y^2\mathcal{J}(-\gamma(1-q))= \\
=\;&x^2\left[\eta\left[(2-q)D\eta^{1-q}(4\alpha^2+\delta^2)+(-4a_1\alpha+b\delta)\right]+\eta\dot{\alpha}\right] \\
&+xy\Big[\eta\left[(2-q)D\eta^{1-q}4\delta(\alpha+\gamma)-2(b(\alpha-\gamma)+\delta(a_1+a_2))\right]+\eta\dot{\delta}\Big] \\
&+y^2\left[\eta\left[(2-q)D\eta^{1-q}(\delta^2+4\gamma^2)+(-b\delta-4a_2\gamma)\right]+\eta\dot{\gamma}\right]\,. \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

Para que a equação (3.23) seja válida para todos os valores de x e y, igualamos os coeficientes de x^2, xy, y^2 e os termos independentes de ambos os lados desta equação. Note que, do lado direito da equação (3.23) o termo independente é igual a 0. Logo,

$$
\mathcal{J}=0 \qquad (3.24)
$$

e então, substituindo a equação (3.24) na equação (3.22), obtemos

$$\dot{\eta} = 2\eta(a_1 + a_2) - 2(2-q)D\eta^{2-q}(\alpha + \gamma)\,. \tag{3.25}$$

Note que, como $\mathcal{J} = 0$, os coeficientes de x^2, xy e y^2 do lado esquerdo da equação (3.23) são todos iguais a 0. Igualando então os coeficientes de x^2, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \eta\left[(2-q)D\eta^{1-q}(4\alpha^2+\delta^2) + (-4a_1\alpha + b\delta)\right] + \eta\dot{\alpha} \\ -\eta\dot{\alpha} &= \eta\left[(2-q)D\eta^{1-q}(4\alpha^2+\delta^2) + (-4a_1\alpha + b\delta)\right] \\ \dot{\alpha} &= -(2-q)D\eta^{1-q}(4\alpha^2+\delta^2) + 4a_1\alpha - b\delta\,. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Igualando os coeficientes de xy, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \eta\left[(2-q)D\eta^{1-q}4\delta(\alpha+\gamma) - 2(b(\alpha-\gamma) + \delta(a_1+a_2))\right] + \eta\dot{\delta} \\ -\eta\dot{\delta} &= \eta\left[(2-q)D\eta^{1-q}4\delta(\alpha+\gamma) - 2(b(\alpha-\gamma) + \delta(a_1+a_2))\right] \\ \dot{\delta} &= -4(2-q)D\eta^{1-q}\delta(\alpha+\gamma) + 2(b(\alpha-\gamma) + \delta(a_1+a_2))\,. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Igualando os coeficientes de y^2, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \eta\left[(2-q)D\eta^{1-q}(\delta^2+4\gamma^2) + (-b\delta - 4a_2\gamma)\right] + \eta\dot{\gamma} \\ -\eta\dot{\gamma} &= \eta\left[(2-q)D\eta^{1-q}(\delta^2+4\gamma^2) + (-b\delta - 4a_2\gamma)\right] \\ \dot{\gamma} &= -(2-q)D\eta^{1-q}(\delta^2+4\gamma^2) + b\delta + 4a_2\gamma\,. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Assim, obtemos o seguinte conjunto de equações de movimento,

$$\frac{d\eta}{dt} = 2\eta(a_1+a_2) - 2(2-q)D\eta^{2-q}(\alpha+\gamma)\,, \tag{3.29a}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -(2-q)D\eta^{1-q}(4\alpha^2+\delta^2) + 4a_1\alpha - b\delta\,, \tag{3.29b}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -(2-q)D\eta^{1-q}(\delta^2+4\gamma^2) + b\delta + 4a_2\gamma\,, \tag{3.29c}$$

$$\frac{d\delta}{dt} = -4(2-q)D\eta^{1-q}\delta(\alpha+\gamma) + 2(a_1+a_2)\delta + 2b(\alpha-\gamma)\,. \tag{3.29d}$$

Portanto, F será uma solução da equação de Fokker-Planck (2.1) desde que as funções $\eta(t)$, $\alpha(t)$, $\gamma(t)$ e $\delta(t)$ satisfaçam o conjunto de equações diferenciais ordinárias (3.29). Note que, ao tomarmos $a_1 = a_2$, recuperamos as equações de movimento (2.51) obtidas no caso quadrático.

3.2 Norma

Neste caso (em que $\boldsymbol{K}$ tem uma componente derivada de um potencial elíptico), a norma ainda é dada pela equação (2.121) e ela também não varia com o tempo. Com efeito, calculemos sua derivada em relação ao tempo,

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial t}\,. \tag{3.30}$$

Teremos portanto,

$$\frac{\partial I}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\pi}{(2-q)\sqrt{\alpha\gamma - \frac{\delta^2}{4}}}\left[2\eta(a_1+a_2) - 2(2-q)(\alpha+\gamma)D\eta^{2-q}\right]$$

$$= \frac{2\pi\eta}{(2-q)}\left(\alpha\gamma - \frac{\delta^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[a_1 + a_2 + (q-2)(\alpha+\gamma)D\eta^{1-q}\right] \tag{3.31}$$

e desenvolvendo $\frac{\partial I}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial t}$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial I}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial t} = \\
= \;& \frac{\pi\eta}{2-q}\left[-\frac{1}{2}\left(\alpha\gamma - \frac{\delta^2}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]\big(D(q-2)\eta^{1-q}\gamma(4\alpha^2+\delta^2) + 4a_1\alpha\gamma - b\delta\gamma \\
& + D(q-2)\eta^{1-q}\alpha(\delta^2+4\gamma^2) + b\delta\alpha + 4a_2\alpha\gamma + D(q-2)\eta^{1-q}(-2\delta^2(\alpha+\gamma)) - \delta^2 a_1 \\
& - \delta^2 a_2 - b\delta\alpha + b\delta\gamma\big) \\
= \;& \frac{\pi\eta}{2-q}\left[-\frac{1}{2}\left(\alpha\gamma - \frac{\delta^2}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]\Big(D(q-2)\eta^{1-q}\left[4\alpha^2\gamma + \delta^2\gamma + 4\alpha\gamma^2 + \delta^2\alpha - 2\delta^2\alpha - 2\delta^2\gamma\right] \\
& + (a_1+a_2)\left(4\alpha\gamma - \delta^2\right)\Big) \\
= \;& \frac{\pi\eta}{2-q}\left[-\frac{1}{2}\left(\alpha\gamma - \frac{\delta^2}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]\Big[D(q-2)\eta^{1-q}\left[4\alpha^2\gamma - \delta^2\gamma + 4\alpha\gamma^2 - \delta^2\alpha\right] \\
& + (a_1+a_2)\left(4\alpha\gamma - \delta^2\right)\Big] \\
= \;& \frac{\pi\eta}{2-q}\left[-\frac{1}{2}\left(\alpha\gamma - \frac{\delta^2}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]\Big[D(q-2)\eta^{1-q}\left(4\alpha\gamma - \delta^2\right)(\alpha+\gamma) \\
& + (a_1+a_2)\left(4\alpha\gamma - \delta^2\right)\Big] \\
= \;& \frac{\pi\eta}{2-q}\left[-\frac{1}{2}\left(\alpha\gamma - \frac{\delta^2}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]\left[D(q-2)\eta^{1-q}(\alpha+\gamma) + a_1 + a_2\right]4\left(\alpha\gamma - \frac{\delta^2}{4}\right) \\
= \;& -\frac{2\pi\eta}{2-q}\left(\alpha\gamma - \frac{\delta^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[D(q-2)\eta^{1-q}(\alpha+\gamma) + a_1 + a_2\right]. \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

Substituindo as equações (3.31) e (3.32) no lado direito da equação (3.30), verifica-se que

$$\frac{dI}{dt} = 0\,.$$

3.3 Soluções estacionárias

Analisemos agora as soluções estacionárias dos parâmetros η, α, γ e δ. Para tal, investiguemos quando os mesmos deixam de variar com o tempo, ou seja, quando suas derivadas em relação ao tempo são iguais a zero. Para η temos,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d\eta}{dt} \\
&= 2(a_1+a_2)\eta_{\text{stat}} - 2(2-q)D\eta_{\text{stat}}^{2-q}(\alpha_{\text{stat}} + \gamma_{\text{stat}}) \\
2(a_1+a_2)\eta_{\text{stat}} &= 2(2-q)D\eta_{\text{stat}}^{2-q}(\alpha_{\text{stat}} + \gamma_{\text{stat}}) \\
\eta_{\text{stat}}^{1-q} &= \frac{a_1+a_2}{(2-q)D(\alpha_{\text{stat}} + \gamma_{\text{stat}})} \\
\eta_{\text{stat}} &= \left[\frac{a_1+a_2}{(2-q)D(\alpha_{\text{stat}} + \gamma_{\text{stat}})}\right]^{\frac{1}{1-q}}. \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

Desenvolvendo $\frac{d\alpha}{dt} = 0$ temos,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d\alpha}{dt} \\
&= (q-2)D\eta_{\text{stat}}^{1-q}(4\alpha_{\text{stat}}^2 + \delta_{\text{stat}}^2) + 4a_1\alpha_{\text{stat}} - b\delta_{\text{stat}} \\
&= (q-2)D\left[\left(\frac{a_1+a_2}{(2-q)D(\alpha_{\text{stat}}+\gamma_{\text{stat}})}\right)^{\frac{1}{1-q}}\right]^{1-q}(4\alpha_{\text{stat}}^2 + \delta_{\text{stat}}^2) \\
&\quad +4a_1\alpha_{\text{stat}} - b\delta_{\text{stat}} \\
&= -\frac{a_1+a_2}{\alpha_{\text{stat}}+\gamma_{\text{stat}}}(4\alpha_{\text{stat}}^2 + \delta_{\text{stat}}^2) + 4a_1\alpha_{\text{stat}} - b\delta_{\text{stat}}\,. \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

Desenvolvendo $\frac{d\gamma}{dt} = 0$ temos,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d\gamma}{dt} \\
&= (q-2)D\eta_{\text{stat}}^{1-q}(4\gamma_{\text{stat}}^2 + \delta_{\text{stat}}^2) + 4a_2\gamma_{\text{stat}} + b\delta_{\text{stat}} \\
&= (q-2)D\left[\left(\frac{a_1+a_2}{(2-q)D(\alpha_{\text{stat}}+\gamma_{\text{stat}})}\right)^{\frac{1}{1-q}}\right]^{1-q}(4\gamma_{\text{stat}}^2 + \delta_{\text{stat}}^2) \\
&\quad +4a_2\gamma_{\text{stat}} + b\delta_{\text{stat}} \\
&= -\frac{a_1+a_2}{\alpha_{\text{stat}}+\gamma_{\text{stat}}}(4\gamma_{\text{stat}}^2 + \delta_{\text{stat}}^2) + 4a_2\gamma_{\text{stat}} + b\delta_{\text{stat}}\,. \qquad (3.35)
\end{aligned}$$

Subtraindo a equação (3.34) da equação (3.35), obtém-se

$$\begin{aligned}
&-\frac{a_1+a_2}{\alpha_{\text{stat}}+\gamma_{\text{stat}}}(4\gamma_{\text{stat}}^2 + \delta_{\text{stat}}^2) + 4a_2\gamma_{\text{stat}} + b\delta_{\text{stat}} \\
+\ &\frac{a_1+a_2}{\alpha_{\text{stat}}-\gamma_{\text{stat}}}(4\alpha_{\text{stat}}^2 + \delta_{\text{stat}}^2) - 4a_1\alpha_{\text{stat}} + b\delta_{\text{stat}} = 0\,. \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

Desenvolvendo (3.36),

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{4(a_1+a_2)(\alpha_{\text{stat}}^2 - \gamma_{\text{stat}}^2)}{\alpha_{\text{stat}}+\gamma_{\text{stat}}} + 4a_2\gamma_{\text{stat}} - 4a_1\alpha_{\text{stat}} + 2b\delta_{\text{stat}} \\
&= 4(a_1+a_2)(\alpha_{\text{stat}} - \gamma_{\text{stat}}) + 4a_2\gamma_{\text{stat}} - 4a_1\alpha_{\text{stat}} + 2b\delta_{\text{stat}} \\
&= 4a_1\alpha_{\text{stat}} - 4a_1\gamma_{\text{stat}} + 4a_2\alpha_{\text{stat}} - 4a_2\gamma_{\text{stat}} + 4a_2\gamma_{\text{stat}} - 4a_1\alpha_{\text{stat}} + 2b\delta_{\text{stat}} \\
&= -4a_1\gamma_{\text{stat}} + 4a_2\alpha_{\text{stat}} + 2b\delta_{\text{stat}}\,, \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

e então,

$$\begin{aligned}
-4a_1\gamma_{\text{stat}} + 4a_2\alpha_{\text{stat}} + 2b^2\frac{\alpha_{\text{stat}} - \gamma_{\text{stat}}}{a_1+a_2} &= 0 \\
(a_1+a_2)(-4a_1\gamma_{\text{stat}} + 4a_2\alpha_{\text{stat}}) &= -2b^2(\alpha_{\text{stat}} - \gamma_{\text{stat}}) \\
-4a_1^2\gamma_{\text{stat}} + 4a_1a_2\alpha_{\text{stat}} - 4a_1a_2\gamma_{\text{stat}} + 4a_2^2\alpha_{\text{stat}} &= -2b^2\alpha_{\text{stat}} + 2b^2\gamma_{\text{stat}} \\
\alpha_{\text{stat}}(4a_2^2 + 4a_1a_2 + 2b^2) &= \gamma_{\text{stat}}(4a_1^2 + 4a_1a_2 + 2b^2) \\
\gamma_{\text{stat}} &= \frac{2a_2^2 + 2a_1a_2 + b^2}{2a_1^2 + 2a_1a_2 + b^2}\alpha_{\text{stat}}\,, \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

obtendo assim

$$\gamma_{\text{stat}} = \frac{2a_2(a_1+a_2) + b^2}{2a_1(a_1+a_2) + b^2}\alpha_{\text{stat}}\,. \qquad (3.39)$$

Para $\frac{d\delta}{dt} = 0$, temos que

$$4(q-2)D\eta_{\text{stat}}^{1-q}\delta_{\text{stat}}(\alpha_{\text{stat}} + \gamma_{\text{stat}}) + 2(a_1+a_2)\delta_{\text{stat}} + 2b(\alpha_{\text{stat}} - \gamma_{\text{stat}}) = 0\,. \qquad (3.40)$$

Desenvolvendo (3.40),

$$\begin{aligned}
0 &= (q-2)D\left[\left(\frac{a_1+a_2}{(2-q)D(\alpha_{\text{stat}}+\gamma_{\text{stat}})}\right)^{\frac{1}{1-q}}\right]^{1-q} 4\delta_{\text{stat}}(\alpha_{\text{stat}}+\gamma_{\text{stat}})+2\delta_{\text{stat}}(a_1+a_2) \\
&\quad +2b(\alpha_{\text{stat}}-\gamma_{\text{stat}}) \\
&= -4\delta_{\text{stat}}(a_1+a_2)+2\delta_{\text{stat}}(a_1+a_2)+2b(\alpha_{\text{stat}}-\gamma_{\text{stat}}) \\
\delta_{\text{stat}} &= \frac{b(\alpha_{\text{stat}}-\gamma_{\text{stat}})}{a_1+a_2}\,. \qquad (3.41)
\end{aligned}$$

Podemos então substituir a equação (3.39) na equação (3.33) e obter α_{stat} em função de η_{stat},

$$\begin{aligned}
\eta_{\text{stat}} &= \left[\frac{a_1+a_2}{(2-q)D\left(\alpha_{\text{stat}}+\frac{2a_2(a_1+a_2)+b^2}{2a_1(a_1+a_2)+b^2}\alpha_{\text{stat}}\right)}\right]^{\frac{1}{1-q}} \\
&= \left[\frac{a_1+a_2}{(2-q)D\alpha_{\text{stat}}\left(\frac{2((a_1+a_2)^2+b^2)}{2a_1(a_1+a_2)+b^2}\right)}\right]^{\frac{1}{1-q}} \\
&= \left[\frac{(a_1+a_2)(2a_1(a_1+a_2)+b^2)}{2(2-q)((a_1+a_2)^2+b^2)D\alpha_{\text{stat}}}\right]^{\frac{1}{1-q}} \\
\alpha_{\text{stat}} &= \frac{(a_1+a_2)(2a_1(a_1+a_2)+b^2)}{2(2-q)((a_1+a_2)^2+b^2)D\eta_{\text{stat}}^{1-q}}\,. \qquad (3.42)
\end{aligned}$$

Agora, podemos substituir a equação (3.39) na equação (3.41) e obter δ_{stat} em função de α_{stat},

$$\begin{aligned}
\delta_{\text{stat}} &= \frac{b\left(\alpha_{\text{stat}}-\frac{2a_2(a_1+a_2)+b^2}{2a_1(a_1+a_2)+b^2}\alpha_{\text{stat}}\right)}{a_1+a_2} \\
&= \frac{b\alpha_{\text{stat}}\left(1-\frac{2a_2(a_1+a_2)+b^2}{2a_1(a_1+a_2)+b^2}\right)}{a_1+a_2} \\
&= \frac{b\alpha_{\text{stat}}\left(\frac{2(a_1+a_2)(a_1-a_2)}{2a_1(a_1+a_2)+b^2}\right)}{a_1+a_2} \\
&= \frac{2b\alpha_{\text{stat}}(a_1-a_2)}{2a_1(a_1+a_2)+b^2}\,. \qquad (3.43)
\end{aligned}$$

Se substituirmos a equação (3.42) na equação (3.43), teremos δ_{stat} em função de η_{stat}. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\delta_{\text{stat}} &= \frac{2b\left(\frac{(a_1+a_2)(2a_1(a_1+a_2)+b^2)}{2(2-q)((a_1+a_2)^2+b^2)D\eta_{\text{stat}}^{1-q}}\right)(a_1-a_2)}{2a_1(a_1+a_2)+b^2} \\
&= \frac{b(a_1+a_2)(a_1-a_2)}{((a_1+a_2)^2+b^2)(2-q)D\eta_{\text{stat}}^{1-q}}\,. \qquad (3.44)
\end{aligned}$$

Por fim, substituindo a equação (3.42) na equação (3.39) teremos γ_{stat} em função de η_{stat}. Com efeito,

$$\gamma_{\text{stat}} = \frac{2a_2(a_1+a_2)+b^2}{2a_1(a_1+a_2)+b^2}\cdot\frac{(a_1+a_2)(2a_1(a_1+a_2)+b^2)}{2(2-q)((a_1+a_2)^2+b^2)D\eta_{\text{stat}}^{1-q}}$$

$$= \frac{(a_1+a_2)(2a_2(a_1+a_2)+b^2)}{((a_1+a_2)^2+b^2)2(2-q)D\eta_{\text{stat}}^{1-q}} \,. \tag{3.45}$$

Se definirmos

$$\mathcal{C} = \frac{(a_1+a_2)}{((a_1+a_2)^2+b^2)(2-q)D\eta_{\text{stat}}^{1-q}} \,, \tag{3.46}$$

podemos expressar as soluções estacionárias da seguinte forma,

$$\alpha_{\text{stat}} = \frac{\mathcal{C}}{2}\left[2a_1(a_1+a_2)+b^2\right] \,, \tag{3.47a}$$

$$\gamma_{\text{stat}} = \frac{\mathcal{C}}{2}\left[2a_2(a_1+a_2)+b^2\right] \,, \tag{3.47b}$$

$$\delta_{\text{stat}} = \mathcal{C}b(a_1-a_2) \,. \tag{3.47c}$$

Note que a solução estacionária não é única. O que encontramos foi uma família de soluções parametrizadas por η_{stat}. Para diferentes valores deste parâmetro, encontram-se diferentes soluções estacionárias através das equações (3.47). Cada uma das diferentes soluções possui uma normalização diferente dada por

$$I = \frac{\pi\eta_{\text{stat}}}{(2-q)\sqrt{\alpha_{\text{stat}}\gamma_{\text{stat}} - \frac{\delta_{\text{stat}}^2}{4}}} \,. \tag{3.48}$$

Substituindo as equações (3.39), (3.42) e (3.43) na equação (3.48) obtemos,

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\pi\left[\frac{(a_1+a_2)(2a_1(a_1+a_2)+b^2)}{2(2-q)((a_1+a_2)^2+b^2)D\alpha_{\text{stat}}}\right]^{\frac{1}{1-q}}}{(2-q)\sqrt{\alpha_{\text{stat}}\frac{2a_2(a_1+a_2)+b^2}{2a_1(a_1+a_2)+b^2}\cdot\alpha_{\text{stat}} - \frac{\left[\frac{2b\alpha_{\text{stat}}(a_1-a_2)}{2a_1(a_1+a_2)+b^2}\right]^2}{4}}} \\
&= \frac{\pi\left[\frac{(a_1+a_2)(2a_1(a_1+a_2)+b^2)}{2(2-q)((a_1+a_2)^2+b^2)D\alpha_{\text{stat}}}\right]^{\frac{1}{1-q}}}{(2-q)\alpha_{\text{stat}}\sqrt{\frac{2a_2(a_1+a_2)+b^2}{2a_1(a_1+a_2)+b^2} - \left[\frac{b(a_1-a_2)}{2a_1(a_1+a_2)+b^2}\right]^2}} \\
&= \frac{\pi\left[\frac{(a_1+a_2)(2a_1(a_1+a_2)+b^2)}{2(2-q)((a_1+a_2)^2+b^2)D\alpha_{\text{stat}}}\right]^{\frac{1}{1-q}}}{(2-q)\alpha_{\text{stat}}\frac{\sqrt{(2a_2(a_1+a_2)+b^2)(2a_1(a_1+a_2)+b^2)-(b(a_1-a_2))^2}}{2a_1(a_1+a_2)+b^2}} \\
&= \frac{\pi\left[(a_1+a_2)(2a_1(a_1+a_2)+b^2)\right]^{\frac{1}{1-q}}\left[2a_1(a_1+a_2)+b^2\right]}{\left[2((a_1+a_2)^2+b^2)D\right]^{\frac{1}{1-q}}\left[(2-q)\alpha_{\text{stat}}\right]^{\frac{2-q}{1-q}}\sqrt{(b^2+4a_1a_2)(b^2+(a_1+a_2)^2)}} \\
&= \frac{\pi(a_1+a_2)^{\frac{1}{1-q}}(2a_1(a_1+a_2)+b^2)^{\frac{2-q}{1-q}}}{(2D)^{\frac{1}{1-q}}\left((2-q)\alpha_{\text{stat}}\right)^{\frac{2-q}{1-q}}(b^2+4a_1a_2)^{\frac{1}{2}}(b^2+(a_1+a_2)^2)^{\frac{3-q}{2(1-q)}}} \\
&= \pi\left[\frac{a_1+a_2}{2D}\right]^{\frac{1}{1-q}}\left[\frac{2a_1(a_1+a_2)+b^2}{(2-q)\alpha_{\text{stat}}}\right]^{\frac{2-q}{1-q}}(b^2+4a_1a_2)^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad (b^2+(a_1+a_2)^2)^{\frac{3-q}{2(q-1)}} \,.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Combinando as equações (3.39), (3.42) e (3.43) com a equação (3.49), é possível expressar a solução estacionária em função da norma I. Com efeito, isolemos α_{stat} na equação (3.49),

$$\alpha_{\text{stat}} = \left(\frac{\pi}{I}\right)^{\frac{1-q}{2-q}}\left(\frac{a_1+a_2}{2D}\right)^{\frac{1}{2-q}}\left(b^2+4a_1a_2\right)^{\frac{1-q}{2(q-2)}}\left(b^2+(a_1+a_2)^2\right)^{\frac{3-q}{2(q-2)}}$$

$$
\begin{aligned}
& \left(\frac{2a_1(a_1+a_2)+b^2}{(2-q)}\right) \\
= & \frac{\left(\frac{\pi}{I}\right)^{\frac{1-q}{2-q}} \left(\frac{a_1+a_2}{2D}\right)^{\frac{1}{2-q}} \left(\frac{2a_1(a_1+a_2)+b^2}{(2-q)}\right)}{(b^2+4a_1a_2)^{\frac{1-q}{2(2-q)}} \left(b^2+(a_1+a_2)^2\right)^{\frac{3-q}{2(2-q)}}} \\
= & \frac{\left(\frac{\pi}{I}\right)^{\frac{1-q}{2-q}} \left(\frac{a_1+a_2}{2D}\right)^{\frac{1}{2-q}} \left(2a_1(a_1+a_2)+b^2\right)}{(2-q)\,(b^2+4a_1a_2)^{\frac{1-q}{2(2-q)}} \left(b^2+(a_1+a_2)^2\right)^{\frac{q-1}{2(2-q)}} \left(b^2+(a_1+a_2)^2\right)} \\
= & \frac{\left(\frac{\pi}{I}\right) \left(\frac{I}{\pi}\frac{(a_1+a_2)}{2D}\right)^{\frac{1}{2-q}} \left(2a_1(a_1+a_2)+b^2\right)}{(2-q)\left(\frac{b^2+4a_1a_2}{b^2+(a_1+a_2)^2}\right)^{\frac{1-q}{2(2-q)}} \left(b^2+(a_1+a_2)^2\right)} . \qquad (3.50)
\end{aligned}
$$

De forma que

$$
\alpha_{\text{stat}} = \frac{\pi}{I(2-q)} \left(\frac{I}{\pi}\frac{(a_1+a_2)}{2D}\right)^{\frac{1}{2-q}} \left(\frac{2a_1(a_1+a_2)+b^2}{b^2+(a_1+a_2)^2}\right) \left(\frac{b^2+(a_1+a_2)^2}{b^2+4a_1a_2}\right)^{\frac{1-q}{2(2-q)}} . \qquad (3.51)
$$

Como vimos no desenvolvimento da equação (3.42), η_{stat} pode ser expresso em função de α_{stat} da seguinte forma,

$$
\eta_{\text{stat}} = \left[\frac{(a_1+a_2)(2a_1(a_1+a_2)+b^2)}{2(2-q)((a_1+a_2)^2+b^2)D\alpha_{\text{stat}}}\right]^{\frac{1}{1-q}} . \qquad (3.52)
$$

Substituindo a equação (3.51) na equação (3.52) obtemos,

$$
\begin{aligned}
\eta_{\text{stat}} = & \left[(a_1+a_2)(2a_1(a_1+a_2)+b^2)\right]^{\frac{1}{1-q}} \left[2(2-q)((a_1+a_2)^2+b^2)D\right]^{\frac{1}{q-1}} \\
& \left[\frac{\pi}{I(2-q)} \left(\frac{I}{\pi}\frac{(a_1+a_2)}{2D}\right)^{\frac{1}{2-q}} \left(\frac{2a_1(a_1+a_2)+b^2}{b^2+(a_1+a_2)^2}\right)\right. \\
& \left.\left(\frac{b^2+(a_1+a_2)^2}{b^2+4a_1a_2}\right)^{\frac{1-q}{2(2-q)}}\right]^{\frac{1}{q-1}} . \qquad (3.53)
\end{aligned}
$$

Reescrevendo a equação (3.53) obtemos,

$$
\begin{aligned}
\eta_{\text{stat}} = & \left[\frac{I(2-q)}{\pi} \left(\frac{\pi}{I}\frac{2D}{(a_1+a_2)}\right)^{\frac{1}{2-q}} \left(\frac{1}{2D(2-q)}\right) \frac{(a_1+a_2)(2a_1(a_1+a_2)+b^2)}{2a_1(a_1+a_2)+b^2}\right. \\
& \left.\left(\frac{b^2+4a_1a_2}{b^2+(a_1+a_2)^2}\right)^{\frac{1-q}{2(2-q)}}\right]^{\frac{1}{1-q}} . \qquad (3.54)
\end{aligned}
$$

Simplificando os termos do lado direito da expressão (3.54) teremos a seguinte expressão para η_{stat},

$$
\begin{aligned}
\eta_{\text{stat}} = & \left[\frac{I}{2\pi D} \left(\frac{2\pi D}{I}\frac{1}{(a_1+a_2)}\right)^{\frac{1}{2-q}} (a_1+a_2) \left(\frac{b^2+4a_1a_2}{b^2+(a_1+a_2)^2}\right)^{\frac{1-q}{2(2-q)}}\right]^{\frac{1}{1-q}} \\
= & \left[\left(\frac{I}{2\pi D}(a_1+a_2)\right)^{1-\frac{1}{2-q}} \left(\frac{b^2+4a_1a_2}{b^2+(a_1+a_2)^2}\right)^{\frac{1-q}{2(2-q)}}\right]^{\frac{1}{1-q}}
\end{aligned}
$$

$$= \left[\left(\frac{I(a_1+a_2)}{2\pi D} \right)^{\frac{1-q}{2-q}} \left(\sqrt{\frac{b^2+4a_1a_2}{b^2+(a_1+a_2)^2}} \right)^{\frac{1-q}{2-q}} \right]^{\frac{1}{1-q}} . \tag{3.55}$$

De forma que

$$\eta_{\text{stat}} = \left[\frac{I(a_1+a_2)}{2\pi D} \sqrt{\frac{b^2+4a_1a_2}{b^2+(a_1+a_2)^2}} \right]^{\frac{1}{2-q}} . \tag{3.56}$$

Substituindo a equação (3.56) na equação (3.45) podemos expressar γ_{stat} em função da norma I,

$$\begin{aligned}
\gamma_{\text{stat}} &= \frac{(a_1+a_2)(2a_2(a_1+a_2)+b^2)(2\pi D)^{\frac{1-q}{2-q}}}{((a_1+a_2)^2+b^2)2(2-q)D(I(a_1+a_2))^{\frac{1-q}{2-q}}} \left[\frac{b^2+(a_1+a_2)^2}{b^2+4a_1a_2} \right]^{\frac{1-q}{2(2-q)}} \\
&= \left[\frac{2\pi D}{I(a_1+a_2)} \right]^{\frac{1-q}{2-q}} \frac{a_1+a_2}{2(2-q)D} \left[\frac{2a_2(a_1+a_2)+b^2}{(a_1+a_2)^2+b^2} \right] \left[\frac{b^2+(a_1+a_2)^2}{b^2+4a_1a_2} \right]^{\frac{1-q}{2(2-q)}} \\
&= \frac{2\pi D}{I(a_1+a_2)} \left[\frac{I(a_1+a_2)}{2\pi D} \right]^{\frac{1}{2-q}} \frac{a_1+a_2}{2(2-q)D} \left[\frac{2a_2(a_1+a_2)+b^2}{(a_1+a_2)^2+b^2} \right] \\
&\quad \left[\frac{b^2+(a_1+a_2)^2}{b^2+4a_1a_2} \right]^{\frac{1-q}{2(2-q)}} .
\end{aligned} \tag{3.57}$$

De forma que

$$\gamma_{\text{stat}} = \frac{\pi}{I(2-q)} \left[\frac{I(a_1+a_2)}{2\pi D} \right]^{\frac{1}{2-q}} \left[\frac{2a_2(a_1+a_2)+b^2}{(a_1+a_2)^2+b^2} \right] \left[\frac{b^2+(a_1+a_2)^2}{b^2+4a_1a_2} \right]^{\frac{1-q}{2(2-q)}} . \tag{3.58}$$

Substituindo a equação (3.56) na equação (3.44) podemos expressar δ_{stat} em função da norma I,

$$\begin{aligned}
\delta_{\text{stat}} &= \frac{b(a_1+a_2)(a_1-a_2)}{((a_1+a_2)^2+b^2)(2-q)D} \left[\frac{2\pi D}{I(a_1+a_2)} \right]^{\frac{1-q}{2-q}} \left[\frac{b^2+(a_1+a_2)^2}{b^2+4a_1a_2} \right]^{\frac{1-q}{2(2-q)}} \\
&= \frac{2\pi D}{I(a_1+a_2)} \left[\frac{I(a_1+a_2)}{2\pi D} \right]^{\frac{1}{2-q}} \frac{b(a_1+a_2)(a_1-a_2)}{((a_1+a_2)^2+b^2)(2-q)D} \\
&\quad \left[\frac{b^2+(a_1+a_2)^2}{b^2+4a_1a_2} \right]^{\frac{1-q}{2(2-q)}} .
\end{aligned} \tag{3.59}$$

De forma que

$$\delta_{\text{stat}} = \frac{2\pi}{I(2-q)} \left[\frac{I(a_1+a_2)}{2\pi D} \right]^{\frac{1}{2-q}} \frac{b(a_1-a_2)}{((a_1+a_2)^2+b^2)} \left[\frac{b^2+(a_1+a_2)^2}{b^2+4a_1a_2} \right]^{\frac{1-q}{2(2-q)}} . \tag{3.60}$$

Se definirmos

$$\mathcal{M} = \frac{\pi}{I(2-q)((a_1+a_2)^2+b^2)} \sqrt{\frac{b^2+(a_1+a_2)^2}{b^2+4a_1a_2}} , \tag{3.61}$$

teremos as equações estacionárias expressas da seguinte forma,

$$\eta_{\text{stat}} = \left[\frac{I(a_1+a_2)}{2\pi D}\sqrt{\frac{b^2+4a_1a_2}{b^2+(a_1+a_2)^2}}\right]^{\frac{1}{2-q}}, \tag{3.62a}$$

$$\alpha_{\text{stat}} = \mathcal{M}\eta_{\text{stat}}\left[b^2+2a_1(a_1+a_2)\right], \tag{3.62b}$$

$$\gamma_{\text{stat}} = \mathcal{M}\eta_{\text{stat}}\left[b^2+2a_2(a_1+a_2)\right], \tag{3.62c}$$

$$\delta_{\text{stat}} = 2\mathcal{M}\eta_{\text{stat}}b(a_1-a_2). \tag{3.62d}$$

3.4 Trajetória de partículas

Podemos reescrever a equação de Fokker-Planck não-linear (2.1) como uma equação de Liouville (1.6). De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial t} &= D\nabla^2[F^{2-q}] - \boldsymbol{\nabla}\cdot[F\boldsymbol{K}] \\
&= D\boldsymbol{\nabla}[\boldsymbol{\nabla}(F^{2-q})] - \boldsymbol{\nabla}\cdot[F\boldsymbol{K}] \\
&= D\boldsymbol{\nabla}[(2-q)F^{1-q}\boldsymbol{\nabla}F] - \boldsymbol{\nabla}\cdot[F\boldsymbol{K}] \\
&= D\boldsymbol{\nabla}[F(2-q)F^{-q}\boldsymbol{\nabla}F] - \boldsymbol{\nabla}\cdot[F\boldsymbol{K}] \\
&= D\boldsymbol{\nabla}\left[F\left(\frac{2-q}{1-q}\right)\boldsymbol{\nabla}(F^{1-q})\right] - \boldsymbol{\nabla}\cdot[F\boldsymbol{K}] \\
&= -\boldsymbol{\nabla}\left[F\cdot D\left(\frac{q-2}{1-q}\right)\boldsymbol{\nabla}(F^{1-q})\right] - \boldsymbol{\nabla}\cdot[F\boldsymbol{K}] \\
&= -\boldsymbol{\nabla}\left[F\left(\boldsymbol{K}+D\left(\frac{q-2}{1-q}\right)\boldsymbol{\nabla}(F^{1-q})\right)\right].
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Portanto, a equação (2.1) toma a forma

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\left[F\left(\boldsymbol{K}+D\left(\frac{q-2}{1-q}\right)\boldsymbol{\nabla}(F^{1-q})\right)\right] = 0. \tag{3.64}$$

Se definirmos

$$\boldsymbol{\mathcal{K}} = \boldsymbol{K} + D\left(\frac{q-2}{1-q}\right)\boldsymbol{\nabla}(F^{1-q}), \tag{3.65}$$

teremos o formato desejado,

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\left[F\boldsymbol{\mathcal{K}}\right] = 0. \tag{3.66}$$

Na equação (3.66) acima, $F(x,y,t)$ é uma solução da equação de Fokker-Planck e $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ é o campo de força externo efetivo experimentado por uma partícula do sistema. Cada partícula se move de acordo com a equação de movimento,

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\mathcal{K}}, \tag{3.67}$$

onde $\boldsymbol{r} = (x,y)$ e, com isso, $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$ donde

$$\frac{dx}{dt} = \boldsymbol{\mathcal{K}}_x,$$
$$\frac{dy}{dt} = \boldsymbol{\mathcal{K}}_y.$$

Substituindo a solução proposta (2.23) na equação (3.65) teremos,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{K}} &= \boldsymbol{K} + D\left(\frac{q-2}{1-q}\right)\boldsymbol{\nabla}(F^{1-q}) \\
&= \boldsymbol{K} + D\left(\frac{q-2}{1-q}\right)\boldsymbol{\nabla}(\eta^{1-q}\varphi) \\
&= \boldsymbol{K} + D\left(\frac{q-2}{1-q}\right)\eta^{1-q}\left((q-1)(2\alpha x+\delta y),(q-1)(2\gamma y+\delta x)\right) \\
&= \boldsymbol{K} + (2-q)D\eta^{1-q}\left(2\alpha x+\delta y, 2\gamma y+\delta x\right) \\
&= (-2a_1x-by, -2a_2y+bx) + (2-q)D\eta^{1-q}\left(2\alpha x+\delta y, 2\gamma y+\delta x\right) \\
&= \big(-2a_1x-by+(2-q)D\eta^{1-q}(2\alpha x+\delta y),\ -2a_2y+bx+(2-q)D\eta^{1-q}(2\gamma y+\delta x)\big)\ .
\end{aligned}
$$

E então,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{K}} = \Big(&x(2(2-q)D\eta^{1-q}\alpha-2a_1)+y((2-q)D\eta^{1-q}\delta-b), \\
&x((2-q)D\eta^{1-q}\delta+b)+y(2(2-q)D\eta^{1-q}\gamma-2a_2)\Big)\,. \qquad (3.68)
\end{aligned}
$$

Teremos portanto as seguintes equações de movimento,

$$
\frac{dx}{dt} = 2x((2-q)D\eta^{1-q}\alpha-a_1)+y((2-q)D\eta^{1-q}\delta-b)\,, \qquad (3.69a)
$$

$$
\frac{dy}{dt} = x((2-q)D\eta^{1-q}\delta+b)+2y((2-q)D\eta^{1-q}\gamma-a_2)\,. \qquad (3.69b)
$$

4 OS MÉTODOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, serão apresentados os métodos utilizados na integração numérica dos conjuntos de equações diferenciais ordinárias acopladas (3.29) e (3.69). São eles:

- Runge-Kutta
- Bulirsch-Stoer.

Para uma análise completa dos métodos ver referências [27, 28].

Consideremos o problema de encontrar as soluções numéricas de equações diferenciais

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)\,. \tag{4.1}$$

Devido à presença de y do lado direito da equação, não podemos simplesmente integrar $f(x)dx$. Precisaremos de um método iterativo para calcular novos valores para y e usá-los para calcular a função f. Felizmente, existem técnicas para a resolução de equações diferenciais ordinárias que são relativamente fáceis de implementar e usar, e que possuem extensa aplicabilidade.

O algoritmo para a resolução de uma única equação diferencial de primeira ordem pode ser generalizado para sistemas de equações

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1\left(x, y_1, \ldots, y_N\right), \tag{4.2a}$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2\left(x, y_1, \ldots, y_N\right), \tag{4.2b}$$

$$\vdots \tag{4.2c}$$

$$\frac{dy_N}{dx} = f_N\left(x, y_1, \ldots, y_N\right)\,. \tag{4.2d}$$

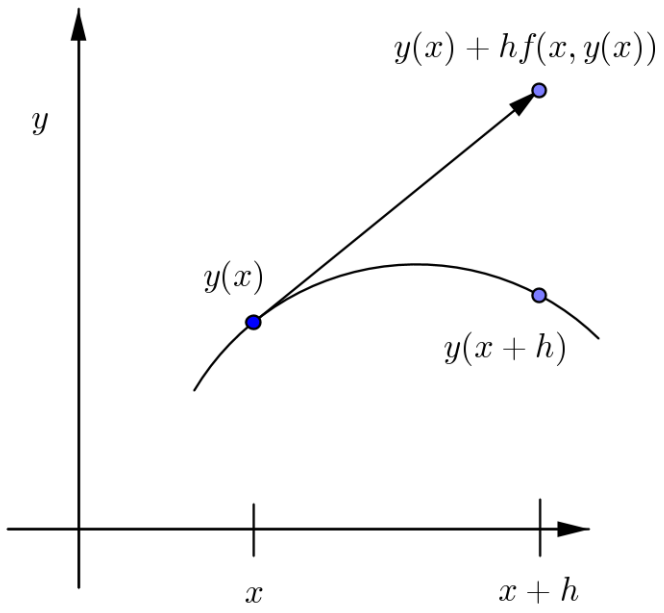


Figura 2 – Método de Euler

Gostaríamos também de encontrar uma fórmula aproximada para relacionar $y(x+h)$ a $y(x)$, para um passo h pequeno. Uma forma de fazer isso é usando expansão em série de Taylor de y

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y(x) + h\frac{dy}{dx}\bigg|_x + h^2\frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_x + O(h^3) \\ &= y(x) + hf(x,y(x)) + \frac{h^2}{2}\frac{d}{dx}f(x,y(x)) + O(h^3)\,. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Um esquema de aproximação numérica deve reproduzir os termos desta série, de forma a convergir para o valor dos termos da expansão em série de Taylor, até alguma ordem desejada.

Os dois primeiros termos da expansão

$$y(x+h) = y(x) + hf(x,y(x)) \tag{4.4}$$

podem ser usados para encontrar $y(x+h)$ dado $y(x)$, e podemos repetir este passo para encontrar $y(x+2h) = y(x+h) + hf(x+h, y(x+h))$, e assim por diante. Este é o algoritmo mais simples para a resolução de equações diferenciais, chamado de método de Euler. A cada passo o erro é $O(h^2)$, e então é necessário um passo muito pequeno para que uma solução razoavelmente precisa seja encontrada. Os erros podem até se acumular tão rapidamente que a solução numérica torna-se instável e explode.

A Figura 2 mostra porque o método de Euler é uma aproximação tão pobre. Como a derivada é avaliada apenas no início do intervalo, se um passo de tamanho muito grande for escolhido, a extrapolação pode ultrapassar a ponto de a solução inclusive mudar de sinal. Uma melhoria natural seria usar um passo de Euler para estimar a inclinação no meio do intervalo e, em seguida, usar essa inclinação para atualizar y

$$y(x+h) = y(x) + hf\left[x + \frac{h}{2}, y(x) + \frac{h}{2}f(x, y(x))\right]\,. \tag{4.5}$$

O erro causado por essa aproximação pode ser encontrado fazendo a expansão da f em série de Taylor como uma função de h:

$$\begin{aligned} & f\left[x+\frac{h}{2}, y(x)+\frac{h}{2}f(x,y(x))\right] \\ = \; & f(x,y(x)) + h\frac{d}{dh}f\left[x+\frac{h}{2}, y(x)+\frac{h}{2}f(x,y(x))\right]_{h=0} + O(h^2) \\ = \; & f(x,y(x)) + h\left[\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}f(x,y(x))\frac{\partial f}{\partial y}\right] + O(h^2)\,, \end{aligned} \tag{4.6}$$

e então a equação (4.5) pode ser expressa por

$$y(x+h) = y(x) + hf(x,y(x)) + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right] + O(h^3)\,. \tag{4.7}$$

Comparando a equação (4.7) com a equação (4.3), vemos que esta é exatamente a expansão da solução da equação diferencial até a segunda ordem. Este é o chamado método de Runge-Kutta de segunda ordem ou o método do ponto médio. Encontramos uma maneira de calcular a função que nos dá uma resposta correta de segunda ordem, mas que não requer uma expansão de fato em série de Taylor.

4.1 Método Runge-Kutta

Esse procedimento pode ser executado usando mais avaliações da função para corresponder a termos de ordem superior na expansão de Taylor. A derivação se torna rapidamente muito entediante, e não há solução única para uma dada ordem, mas de longe a aproximação mais comum é a aproximação de quarta ordem de Runge-Kutta.

$$k_1 = hf(x,y(x)) \tag{4.8a}$$

$$k_2 = hf\left(x+\frac{h}{2}, y(x)+\frac{k_1}{2}\right) \tag{4.8b}$$

$$k_3 = hf\left(x+\frac{h}{2}, y(x)+\frac{k_2}{2}\right) \tag{4.8c}$$

$$k_4 = hf(x+h, y(x)+k_3) \tag{4.8d}$$

$$y(x+h) = y(x) + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + O(h^5)\,. \tag{4.8e}$$

No método do ponto médio, melhoramos a precisão, avaliando a função no meio do intervalo. A fórmula de quarta ordem do método de Runge-Kutta melhora isso usando duas avaliações no meio do intervalo e uma no final, para tornar a solução correta até o termo de quarta ordem na série de Taylor. Para um sistema de equações, isso se torna:

$$k_{1,i} = hf_i(x, y_1, \ldots y_N) \tag{4.9a}$$

$$k_{2,i} = hf_i\left(x+\frac{h}{2}, y_1+\frac{k_{1,1}}{2}, \ldots, y_N+\frac{k_{1,N}}{2}\right) \tag{4.9b}$$

$$k_{3,i} = hf_i\left(x+\frac{h}{2}, y_1+\frac{k_{2,1}}{2}, \ldots, y_N+\frac{k_{2,N}}{2}\right) \tag{4.9c}$$

$$k_{4,i} = hf_i(x+h, y_1+k_{3,1}, \ldots, y_N+k_{3,N}) \tag{4.9d}$$

$$y_i(x+h) = y_i(x) + \frac{k_{1,i}}{6} + \frac{k_{2,i}}{3} + \frac{k_{3,i}}{3} + \frac{k_{4,i}}{6} + O(h^5)\,. \tag{4.9e}$$

Existem refinamentos das técnicas de Runge-Kutta, produzindo por exemplo o método de Runge-Kutta de quinta ordem. Embora a forma fucional deste método seja mais complexa que a forma tradicional do método de Runge-Kutta de quarta ordem, estimativas de erro podem ser realizadas sem que mais avaliações da função sejam necessárias, o que é algo extremamente desejável, se essas avaliações forem computacionalmente custosas.

4.2 Método Bulirsch-Stoer

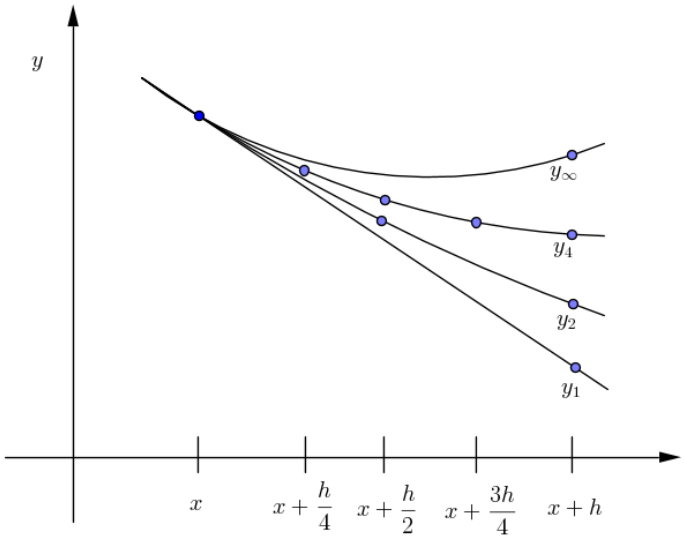


Figura 3 – Extrapolação de Richardson

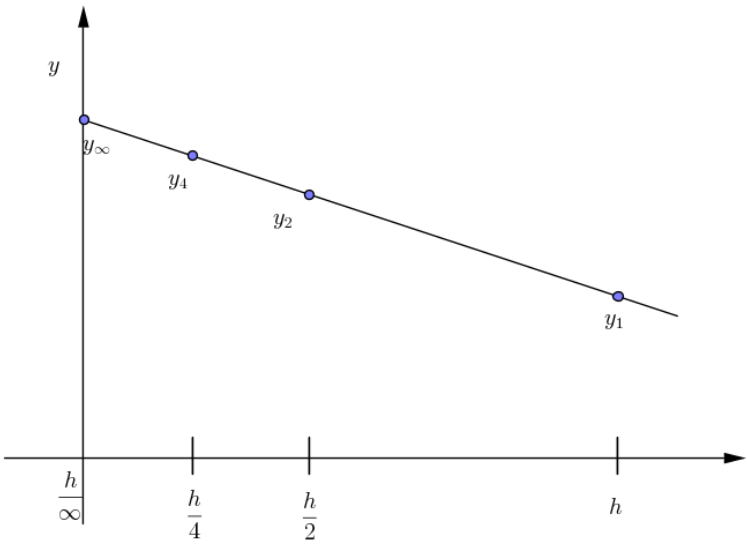


Figura 4 – Extrapolação de Richardson - continuação

A ideia de extrapolação junto com as técnicas de redução dos passos utilizadas nos métodos de Runge-Kutta, sugerem um outro método ńumérico: a extrapolação de Richardson. Vimos que dois passos de tamanho $\frac{h}{2}$ geram um erro final menor do que um

passo de tamanho h. Quatro passos de tamanho $\frac{h}{4}$ geram um erro menor ainda, e infinitos passos de $\frac{h}{\infty}$ seriam ainda melhores (exatos, na verdade). Apesar de não ser muito prático pensar em tomar infinitos passos, a seqüência que nos leva a isso pode nos dar uma visão do limite no infinito. A idéia é calcular o valor no final do intervalo muitas vezes com passos sucessivamente mais refinados, e depois ajustar uma função para extrapolar para o limite mágico de um passo de tamanho infinitamente pequeno (ver Figuras 3-4). O método de Bulirsch-Stoer usa polinômios ou razões de polinômios para fazer a extrapolação. Configurá-lo requer um algoritmo mais complexo com uma quantidade muito maior de parâmetros internos do que a quantidade usada pelo método de Runge-Kutta, mas em troca um tamanho de passo muito maior pode ser usado se a solução não for muito complexa. Os métodos de correção e previsão de erros são mais antigos e mais bem estudados do que os métodos de extrapolação de Richardson, mas é razoável acreditar que é mais fácil prever a convergência de uma sequência do que a extrapolação de uma função complicada e, por isso, os métodos de extrapolação estão se tornando cada vez mais comuns.

Nesta dissertação utilizamos as técnicas de Runge-Kutta de quarta e quinta ordem e o método de Bulirsch-Stoer na integração numérica das equações diferenciais acopladas (3.29) e (3.69).

Este capítulo está baseado na referência [27].

5 RESULTADOS

A seguir, observaremos a evolução temporal da solução q-Gaussiana (2.23), da excentricidade (2.62) e do ângulo θ (2.74), para diferentes valores do conjunto de parâmetros. Nas figuras, mostramos a evolução temporal dos parâmetros η, α, γ e δ, que determinam o tamanho e a forma da solução bidimensional (2.23). As diferentes curvas mostradas em cada figura correspondem à solução numérica da equação de Fokker-Planck (2.1), com diferentes condições iniciais. As curvas foram, portanto, obtidas a partir da integração numérica [27, 28] do conjunto de equações diferenciais ordinárias acopladas (3.29). Para realizar a integração numérica utilizamos as seguintes técnicas, abordadas no capítulo anterior: Runge-Kutta de quarta e quinta ordem e o método de Bulirsch-Stoer. Os resultados obtidos através dos três métodos, coincidiram. Além de soluções com norma unitária (ou seja, $I = 1$ na equação (2.121)), também veremos experimentos variando a norma. Veremos também trajetórias de partículas geradas a partir da integração numérica do conjunto de equações diferenciais acopladas (3.69), e neste caso, a densidade F (2.25) é interpretada como uma densidade física real.

5.1 Experimento 1: $q = -1$

Nesta seção, realizamos a integração numérica do conjunto de equações diferenciais ordinárias acopladas (3.29) considerando os seguintes valores para o conjunto de parâmetros:

$$a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = -1, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0\,. \tag{5.1}$$

Sendo assim, o potencial elíptico V (3.1) e a função distribuição de probabilidade F_q (2.23) assumem a seguinte forma,

$$V(\boldsymbol{x}) = x^2 + 2.5y^2\,, \tag{5.2a}$$

$$F(x, y, t) = \eta(t)\left[1 - 2(\alpha(t)x^2 + \delta(t)xy + \gamma(t)y^2)\right]_+^{\frac{1}{2}}\,. \tag{5.2b}$$

Observemos nas Figuras 5-8, a evolução temporal dos parâmetros η, α, γ e δ. O parâmetro γ assumiu diferentes valores iniciais conforme especificado nas figuras, e o valor inicial do parâmetro η foi calculado substituindo os valores iniciais dos outros parâmetros na equação (2.122) e considerando a norma $I = 1$. Calculemos o coeficiente $\mathcal{M}$ (3.61), considerando $\pi \approx 3.141592654$,

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \frac{\pi}{I(2-q)((a_1+a_2)^2+b^2)}\sqrt{\frac{b^2+(a_1+a_2)^2}{b^2+4a_1a_2}} \\ &\approx \frac{3.141592654}{(2-(-1))((1+2.5)^2+4^2)}\sqrt{\frac{4^2+(1+2.5)^2}{4^2+4\cdot 1\cdot 2.5}} \approx 0.038639609\,.\end{aligned} \tag{5.3}$$

Analisemos a evolução temporal do parâmetro η na Figura 5.

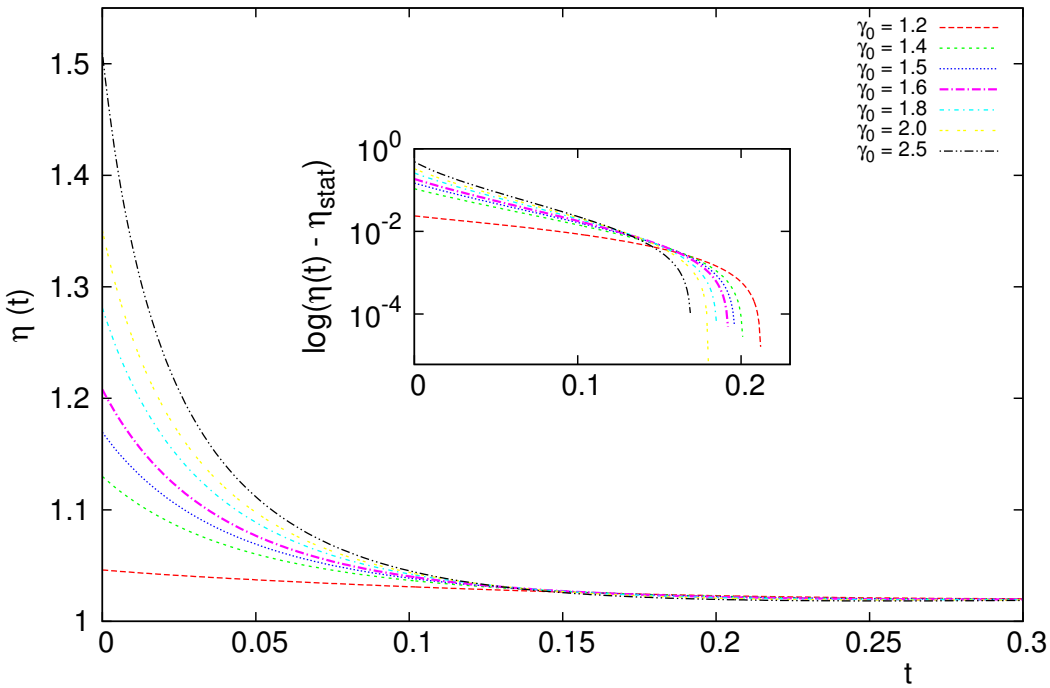


Figura 5 – Evolução temporal de η para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.1), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = -1, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$.

Note que, η aproxima-se de um valor próximo de 1 e, como podemos observar na figura menor, há um decaimento aproximadamente exponencial da diferença $\eta(t) - \eta_{\text{stat}}$ durante parte da evolução temporal. Utilizando a solução analítica dada pela equação (3.62a), obtemos o seguinte valor para η_{stat},

$$\begin{aligned}
\eta_{\text{stat}} &= \left[\frac{I(a_1+a_2)}{2\pi D}\sqrt{\frac{b^2+4a_1a_2}{b^2+(a_1+a_2)^2}}\right]^{\frac{1}{2-q}} \\
&\approx \left[\frac{(1+2.5)}{2\cdot 3.141592654\cdot 0.5}\sqrt{\frac{4^2+4\cdot 1\cdot 2.5}{4^2+(1+2.5)^2}}\right]^{\frac{1}{2-(-1)}} \\
&\approx 1.02\,.
\end{aligned}$$

O valor obtido integrando numericamente foi $\eta_{\text{stat}} \approx 1.02$.

Note na Figura 6, a evolução temporal do parâmetro α. Note que ele aproxima-se de um valor próximo de 0.9 e, como podemos observar na figura menor, há um decaimento aproximadamente exponencial do quadrado da diferença $\alpha(t) - \alpha_{\text{stat}}$ com picos nos valores de t que fazem $\alpha(t) - \alpha_{\text{stat}}$ se aproximar de 0.

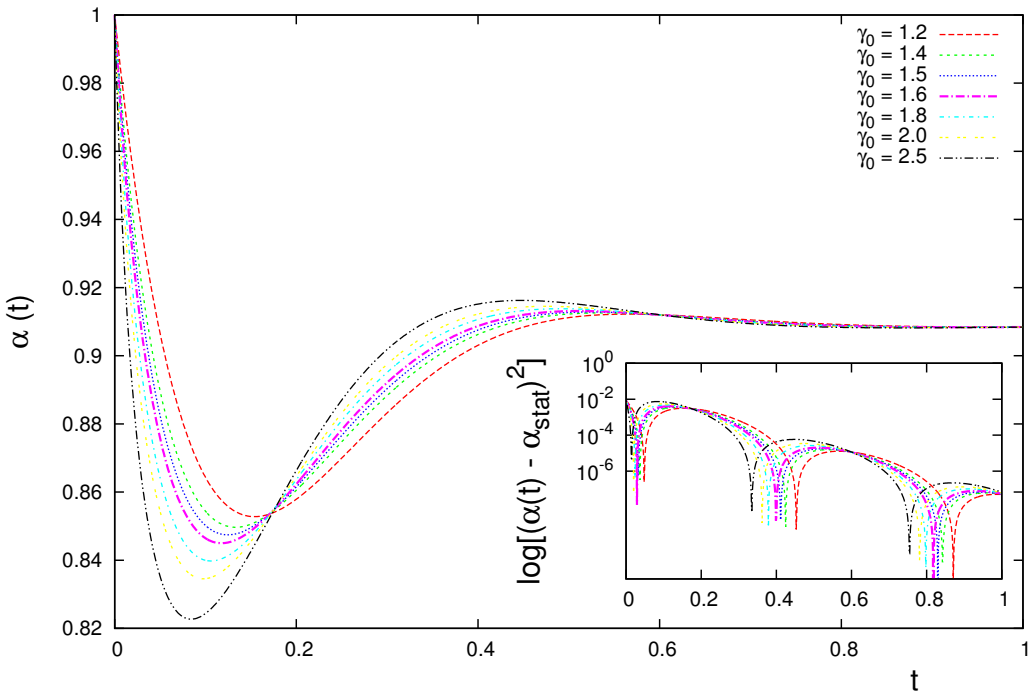


Figura 6 – Evolução temporal de α para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.1), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = -1, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$.

Utilizando a solução analítica dada pela equação (3.62b), obtemos o seguinte valor para α_{stat},

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{stat}} &= \mathcal{M}\eta_{\text{stat}}\left[b^2 + 2a_1(a_1 + a_2)\right] \\ &\approx 0.038639609 \cdot 1.02 \cdot \left[4^2 + 2(1 + 2.5)\right] \\ &\approx 0.91\,. \end{aligned}$$

O valor obtido integrando numericamente também foi $\alpha_{\text{stat}} \approx 0.91$.

Façamos o mesmo com o parâmetro γ, observemos na Figura 7 sua evolução temporal.

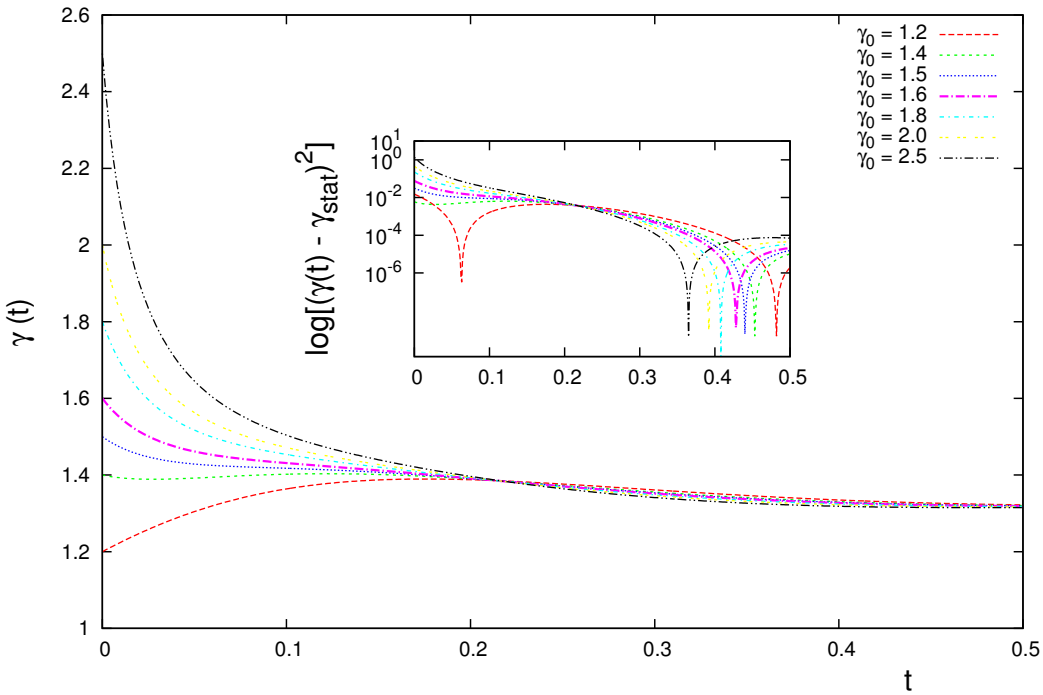


Figura 7 – Evolução temporal de γ para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.1), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = -1, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$.

Note que γ também aproxima-se de um valor entre de 1.2 e 1.4 e, como podemos observar na figura menor, há um decaimento aproximadamente exponencial do quadrado da diferença $\gamma(t) - \gamma_{\text{stat}}$ com picos nos valores de t que fazem $\gamma(t) - \gamma_{\text{stat}}$ se aproximar de 0. Utilizando a solução analítica dada pela equação (3.62c), obtemos o seguinte valor para γ_{stat},

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{stat}} &= \mathcal{M}\eta_{\text{stat}}\left[b^2 + 2a_2(a_1 + a_2)\right] \\ &\approx 0.038639609 \cdot 1.02 \cdot \left[4^2 + 2 \cdot 2.5 \cdot (1 + 2.5)\right] \\ &\approx 1.32\,. \end{aligned}$$

O valor obtido integrando numericamente foi $\gamma_{\text{stat}} \approx 1.32$.

Finalmente, observemos na Figura 8 a evolução temporal do parâmetro δ.

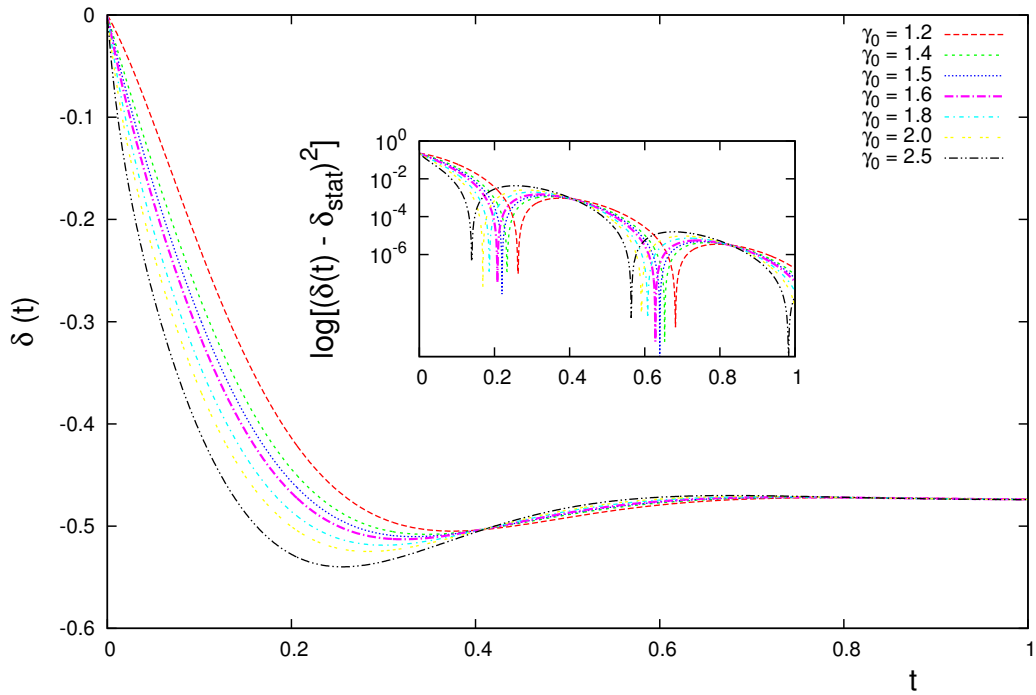


Figura 8 – Evolução temporal de δ para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.1), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = -1, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$.

Note que δ aproxima-se de um valor entre -0.4 e -0.5 e, como podemos observar na figura menor, há um decaimento aproximadamente exponencial do quadrado da diferença $\delta(t) - \delta_{\text{stat}}$ com picos nos valores de t que fazem $\delta(t) - \delta_{\text{stat}}$ se aproximar de 0. Utilizando a solução analítica dada pela equação (3.62d), obtemos o seguinte valor para δ_{stat},

$$\begin{aligned} \delta_{\text{stat}} &= 2\mathcal{M}\eta_{\text{stat}} b(a_1 - a_2) \\ &\approx 2 \cdot 0.038639609 \cdot 1.02 \cdot 4 \cdot (1 - 2.5) \\ &\approx -0.47\,. \end{aligned}$$

O valor obtido integrando numericamente foi $\delta_{\text{stat}} \approx -0.47$.

Considerando ainda o mesmo conjunto de parâmetros, analisemos nas Figuras 9 e 10 a evolução temporal da excentricidade (2.62) e do ângulo θ (2.74).

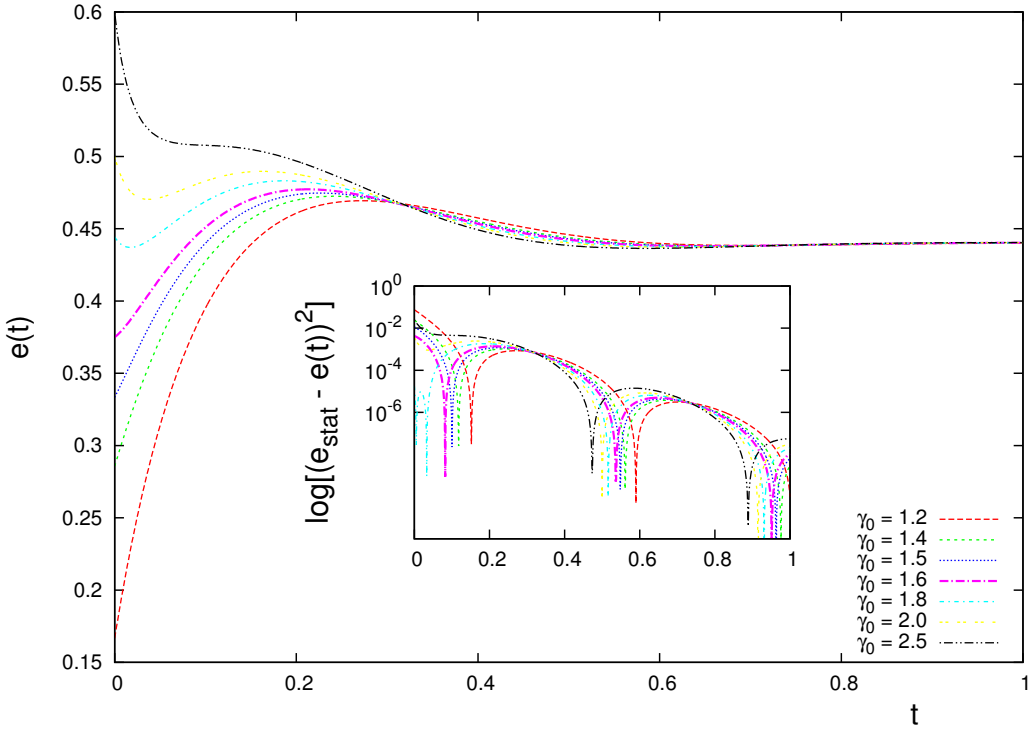


Figura 9 – Evolução temporal da excentricidade para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.1), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = -1, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$.

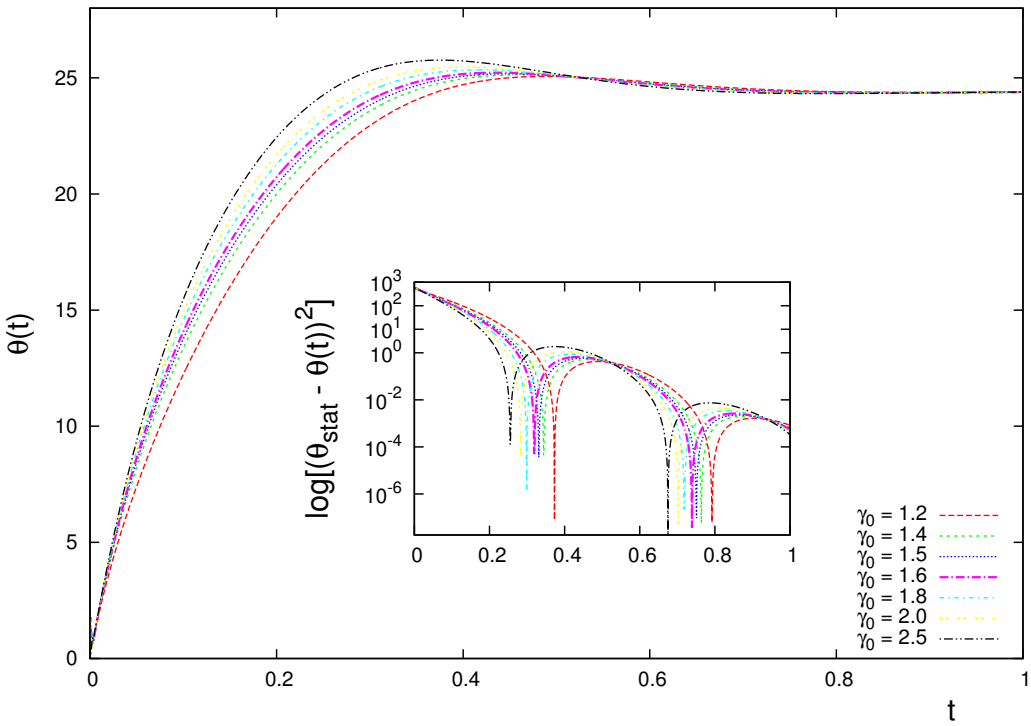


Figura 10 – Evolução temporal do ângulo θ para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.1), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = -1, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$.

Como podemos observar nas figuras menores das Figuras 9 e 10, há um decaimento aproximadamente exponencial do quadrado da diferença $e_{\text{stat}} - e(t)$ e do quadrado da

diferença $\theta_{\text{stat}} - \theta(t)$ com picos nos valores de t que fazem $e_{\text{stat}} - e(t)$ e $\theta_{\text{stat}} - \theta(t)$ se aproximarem de 0.

5.2 Experimento 2: $q = 0.5$

Consideremos agora um novo conjunto de valores dos parâmetros onde apenas o valor de q foi alterado, em relação ao experimento anterior.

$$a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 0.5, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0\,. \tag{5.4}$$

Neste caso, o potencial elíptico V (3.1) e a função distribuição de probabilidade F_q (2.23) assumem a seguinte forma,

$$V(\boldsymbol{x}) = x^2 + 2.5y^2\,, \tag{5.5a}$$

$$F(x, y, t) = \eta(t)\left[1 - (0.5)(\alpha(t)x^2 + \delta(t)xy + \gamma(t)y^2)\right]_+^2\,. \tag{5.5b}$$

Novamente, o parâmetro γ assumiu diferentes valores iniciais, especificados nas figuras, e o valor inicial do parâmetro η foi calculado substituindo os valores iniciais dos outros parâmetros na equação (2.122), e considerando a norma $I = 1$. Calculemos o coeficiente $\mathcal{M}$ (3.61) para este conjunto de parâmetros,

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \frac{\pi}{I(2-q)((a_1+a_2)^2+b^2)}\sqrt{\frac{b^2+(a_1+a_2)^2}{b^2+4a_1a_2}} \\ &\approx \frac{3.141592654}{(2-0.5)((1+2.5)^2+4^2)}\sqrt{\frac{4^2+(1+2.5)^2}{4^2+4\cdot 1\cdot 2.5}} \\ &\approx 0.077279217\,.\end{aligned} \tag{5.6}$$

Analisemos a evolução temporal do parâmetro η na Figura 11.

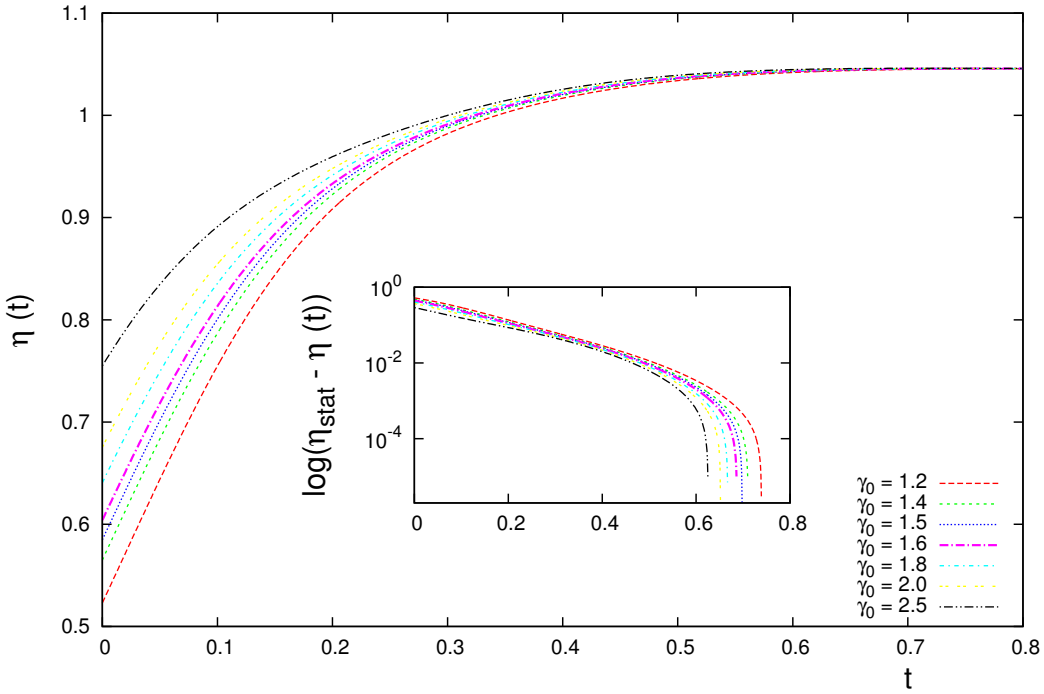


Figura 11 – Evolução temporal de η para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.4), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 0.5, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0\,.$

Note que η aproxima-se de um valor entre 1 e 1.1 e, como podemos observar na figura menor, há um decaimento aproximadamente exponencial da diferença $\eta_{\text{stat}} - \eta(t)$ durante parte da evolução temporal. Utilizando a solução analítica dada pela equação (3.62a), obtemos o seguinte valor para η_{stat},

$$\begin{aligned}
\eta_{\text{stat}} &= \left[\frac{I(a_1+a_2)}{2\pi D}\sqrt{\frac{b^2+4a_1a_2}{b^2+(a_1+a_2)^2}}\right]^{\frac{1}{2-q}} \\
&\approx \left[\frac{(1+2.5)}{2\cdot 3.141592654\cdot 0.5}\sqrt{\frac{4^2+4\cdot 1\cdot 2.5}{4^2+(1+2.5)^2}}\right]^{\frac{1}{2-0.5}} \\
&\approx 1.04\,.
\end{aligned}$$

O valor obtido integrando numericamente foi $\eta_{\text{stat}} \approx 1.04$.

Note na Figura 12 que α aproxima-se de um valor entre 1.8 e 2 e, como podemos observar na figura menor, há um decaimento aproximadamente exponencial do quadrado da diferença $\alpha_{\text{stat}} - \alpha(t)$ com picos nos valores de t que fazem $\alpha_{\text{stat}} - \alpha(t)$ se aproximar de 0.

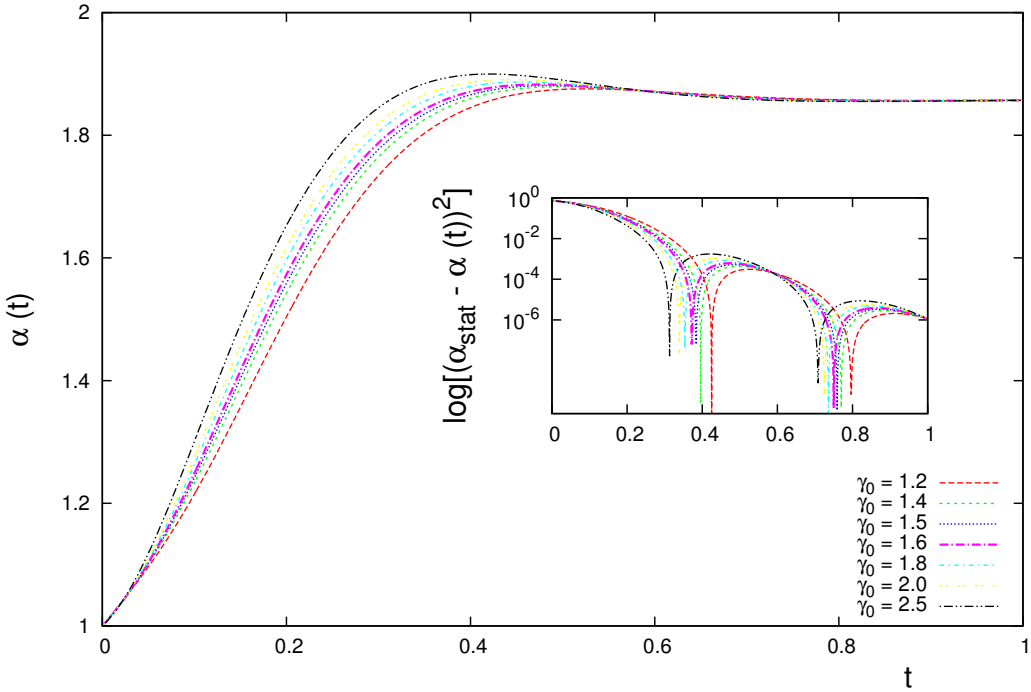


Figura 12 – Evolução temporal de α para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.4), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 0.5, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$.

Utilizando a solução analítica dada pela equação (3.62b), obtemos o seguinte valor para α_{stat},

$$\begin{aligned}
\alpha_{\text{stat}} &= \mathcal{M}\eta_{\text{stat}}\left[b^2+2a_1(a_1+a_2)\right] \\
&\approx 0.077279217\cdot 1.04\cdot\left[4^2+2(1+2.5)\right] \approx 1.85\,.
\end{aligned}$$

O valor obtido integrando numericamente foi $\alpha_{\text{stat}} \approx 1.86$.

Façamos o mesmo com o parâmetro γ, observemos na Figura 13 sua evolução temporal.

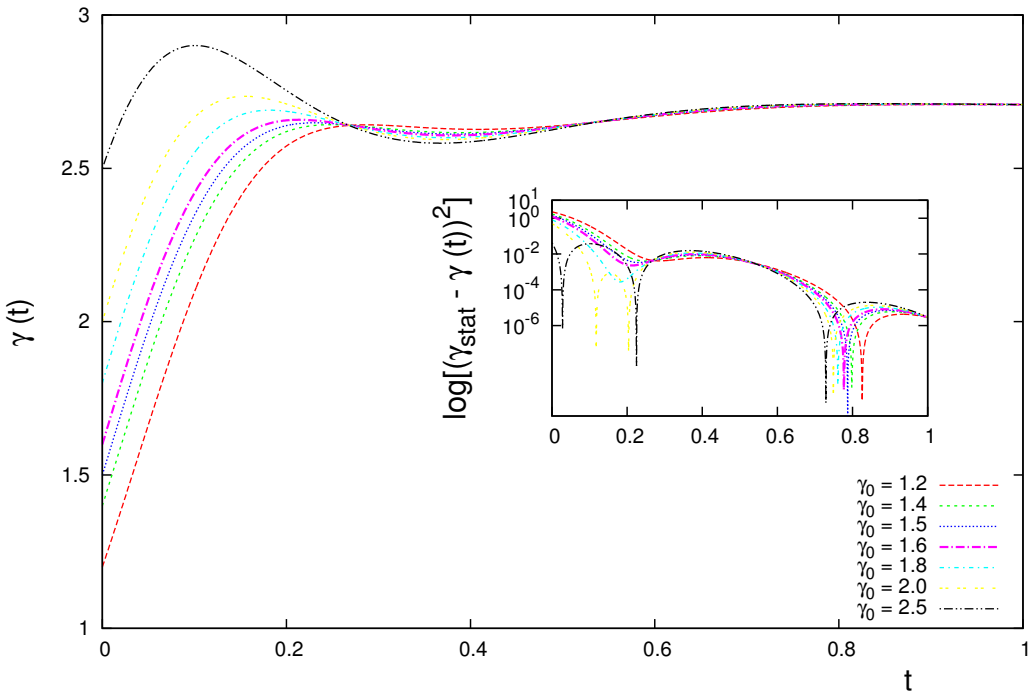


Figura 13 – Evolução temporal de γ para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.4), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 0.5, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$.

Note que γ aproxima-se de um valor entre 2.5 e 3 e, como podemos observar na figura menor, há um decaimento aproximadamente exponencial do quadrado da diferença $\gamma_{\text{stat}} - \gamma(t)$ com picos nos valores de t que fazem $\gamma_{\text{stat}} - \gamma(t)$ se aproximar de 0. Utilizando a solução analítica dada pela equação (3.62c), obtemos o seguinte valor para γ_{stat},

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{stat}} &= \mathcal{M}\eta_{\text{stat}}\left[b^2 + 2a_2(a_1 + a_2)\right] \\ &\approx 0.077279217 \cdot 1.04 \cdot \left[4^2 + 2 \cdot 2.5 \cdot (1 + 2.5)\right] \\ &\approx 2.69\,. \end{aligned}$$

O valor obtido integrando numericamente foi $\gamma_{\text{stat}} \approx 2.70$.

Finalmente, observemos na Figura 14 a evolução temporal do parâmetro δ.

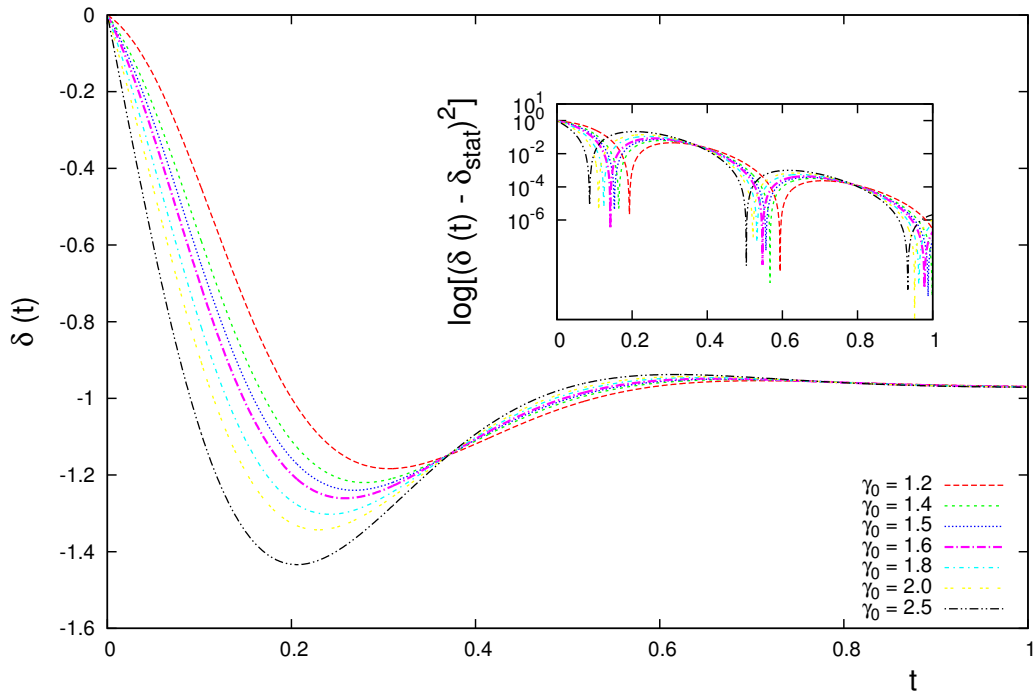


Figura 14 – Evolução temporal de δ para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.4), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 0.5, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$.

Note que δ aproxima-se de um valor próximo de -1 e, como podemos observar na figura menor, há um decaimento aproximadamente exponencial do quadrado da diferença $\delta(t) - \delta_{\text{stat}}$ com picos nos valores de t que fazem $\delta(t) - \delta_{\text{stat}}$ se aproximar de 0. Utilizando a solução analítica dada pela equação (3.62d), obtemos o seguinte valor para δ_{stat},

$$\begin{aligned} \delta_{\text{stat}} &= 2\mathcal{M}\eta_{\text{stat}} b(a_1 - a_2) \\ &\approx 2 \cdot 0.077279217 \cdot 1.04 \cdot 4 \cdot (1 - 2.5) \\ &\approx -0.96\,. \end{aligned}$$

O valor obtido integrando numericamente foi $\delta_{\text{stat}} \approx -0.97$.

Analisemos nas Figuras 15 e 16 a evolução temporal da excentricidade (2.62) e do ângulo θ (2.74).

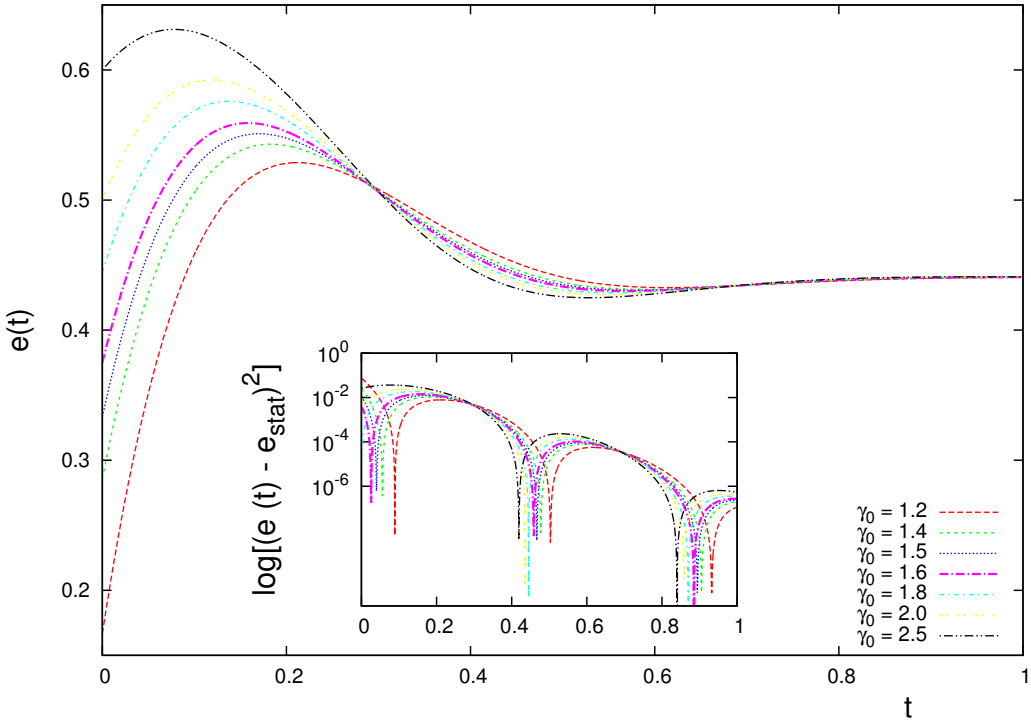


Figura 15 – Evolução temporal da excentricidade para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.4), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 0.5, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$.

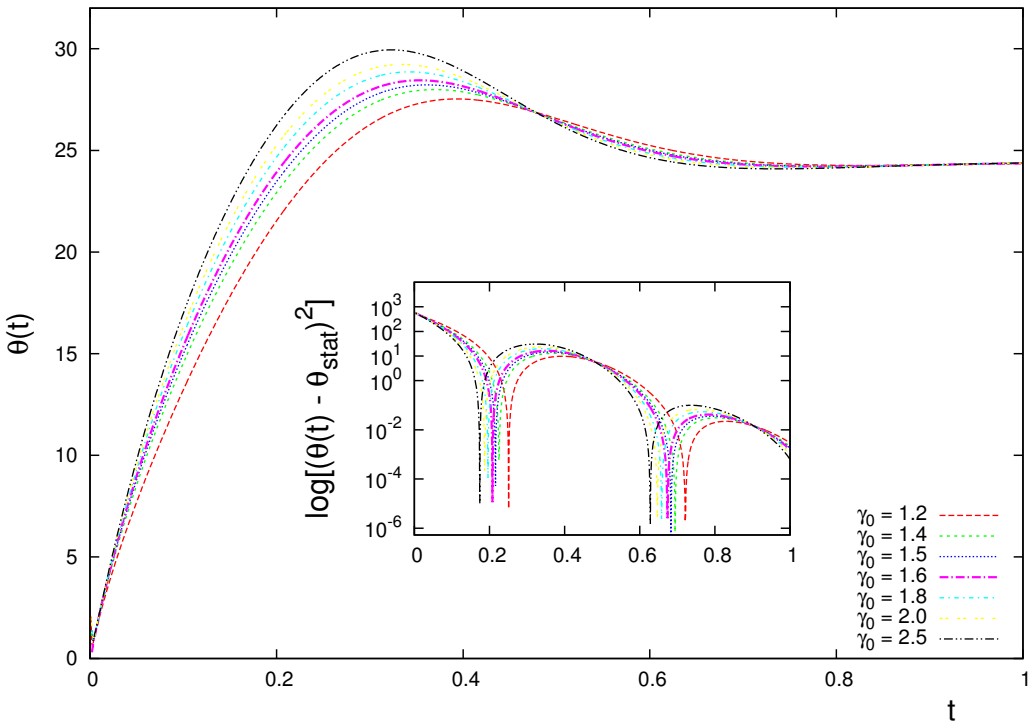


Figura 16 – Evolução temporal do ângulo θ para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.4), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 0.5, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$.

Como podemos observar nas figuras menores das Figuras 15 e 16, há um decaimento aproximadamente exponencial do quadrado da diferença $e(t) - e_{\text{stat}}$ e do quadrado da

diferença $\theta(t) - \theta_{\text{stat}}$ com picos nos valores de t que fazem $e(t) - e_{\text{stat}}$ e $\theta(t) - \theta_{\text{stat}}$ se aproximarem de 0.

5.3 Experimento 3: $q = 1.3$

Consideremos agora um novo conjunto de valores dos parâmetros onde apenas o valor de q foi alterado, em relação ao experimento anterior

$$a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 1.3, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0\,. \tag{5.7}$$

Neste caso, o potencial elíptico V (3.1) e a função distribuição de probabilidade F_q (2.23) assumem a seguinte forma,

$$V(\boldsymbol{x}) = x^2 + 2.5y^2\,, \tag{5.8a}$$

$$F(x, y, t) = \eta(t)\left[1 + (0.3)(\alpha(t)x^2 + \delta(t)xy + \gamma(t)y^2)\right]_+^{-\frac{10}{3}}\,. \tag{5.8b}$$

Assim como nos experimentos anteriores, o parâmetro γ assumiu diferentes valores iniciais especificados nas figuras, e o valor inicial do parâmetro η foi calculado substituindo os valores iniciais dos outros parâmetros na equação (2.122). Calculemos o coeficiente $\mathcal{M}$ (3.61) para este conjunto de parâmetros,

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \frac{\pi}{I(2-q)((a_1+a_2)^2+b^2)}\sqrt{\frac{b^2+(a_1+a_2)^2}{b^2+4a_1a_2}} \\ &\approx \frac{3.141592654}{(2-1.3)((1+2.5)^2+4^2)}\sqrt{\frac{4^2+(1+2.5)^2}{4^2+4\cdot 1\cdot 2.5}} \approx 0.165598322\,.\end{aligned} \tag{5.9}$$

Analisemos a evolução temporal do parâmetro η na Figura 17. Note que ele se aproxima de um valor entre 1 e 1.2 e, como podemos observar na figura menor, há um decaimento aproximadamente exponencial da diferença $\eta_{\text{stat}} - \eta(t)$ durante parte da evolução temporal.

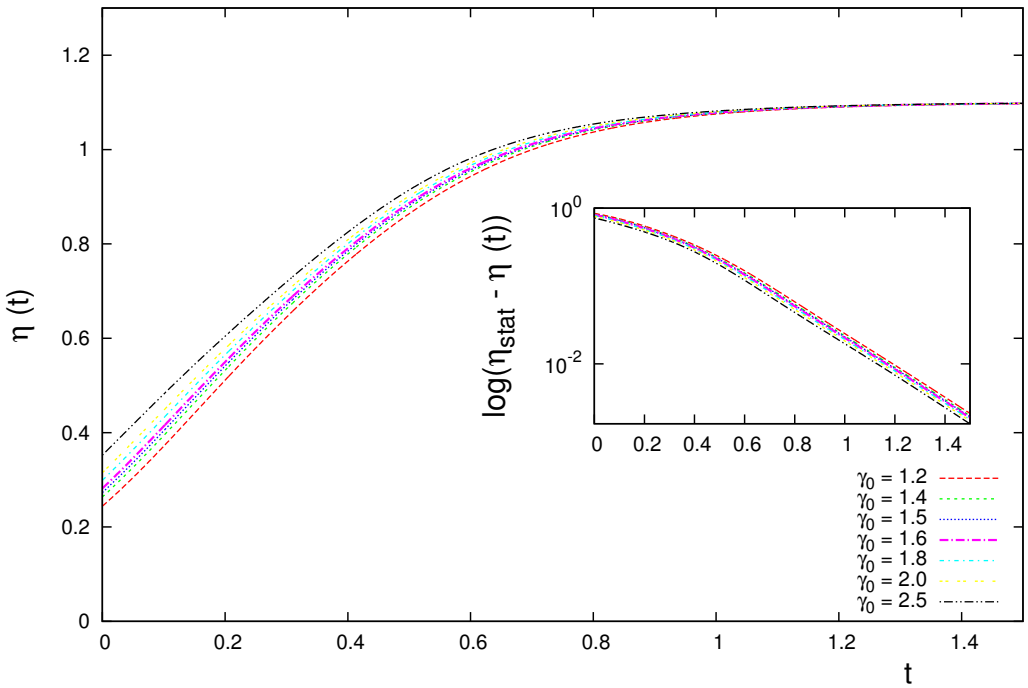


Figura 17 – Evolução temporal de η para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.7), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 1.3, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$.

Utilizando a solução analítica dada pela equação (3.62a), obtemos o seguinte valor para η_{stat},

$$\begin{aligned}
\eta_{\text{stat}} &= \left[\frac{I(a_1+a_2)}{2\pi D}\sqrt{\frac{b^2+4a_1a_2}{b^2+(a_1+a_2)^2}}\right]^{\frac{1}{2-q}} \\
&\approx \left[\frac{(1+2.5)}{2\cdot 3.141592654\cdot 0.5}\sqrt{\frac{4^2+4\cdot 1\cdot 2.5}{4^2+(1+2.5)^2}}\right]^{\frac{1}{2-1.3}} \\
&\approx 1.10\,.
\end{aligned}$$

O valor obtido integrando numericamente foi $\eta_{\text{stat}} \approx 1.10$.

Note na Figura 18 que α aproxima-se de um valor entre 4 e 4.5 e, como podemos observar na figura menor, há um decaimento aproximadamente exponencial da diferença $\alpha_{\text{stat}} - \alpha(t)$ durante parte da evolução temporal.

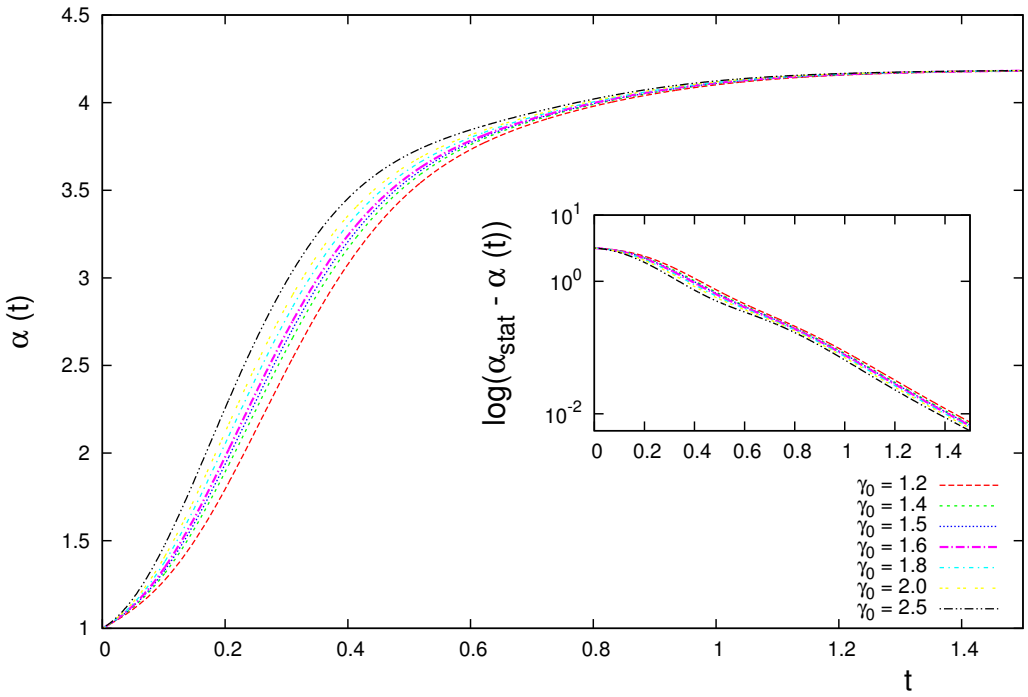


Figura 18 – Evolução temporal de α para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.7), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 1.3, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$.

Utilizando a solução analítica dada pela equação (3.62b), obtemos o seguinte valor para α_{stat},

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{stat}} &= \mathcal{M}\eta_{\text{stat}}\left[b^2 + 2a_1(a_1 + a_2)\right] \\ &\approx 0.165598322 \cdot 1.10 \cdot \left[4^2 + 2(1 + 2.5)\right] \\ &\approx 4.19\,. \end{aligned}$$

O valor obtido integrando numericamente foi $\alpha_{\text{stat}} \approx 4.19$.

Façamos o mesmo com o parâmetro γ, observemos na Figura 19 sua evolução temporal.

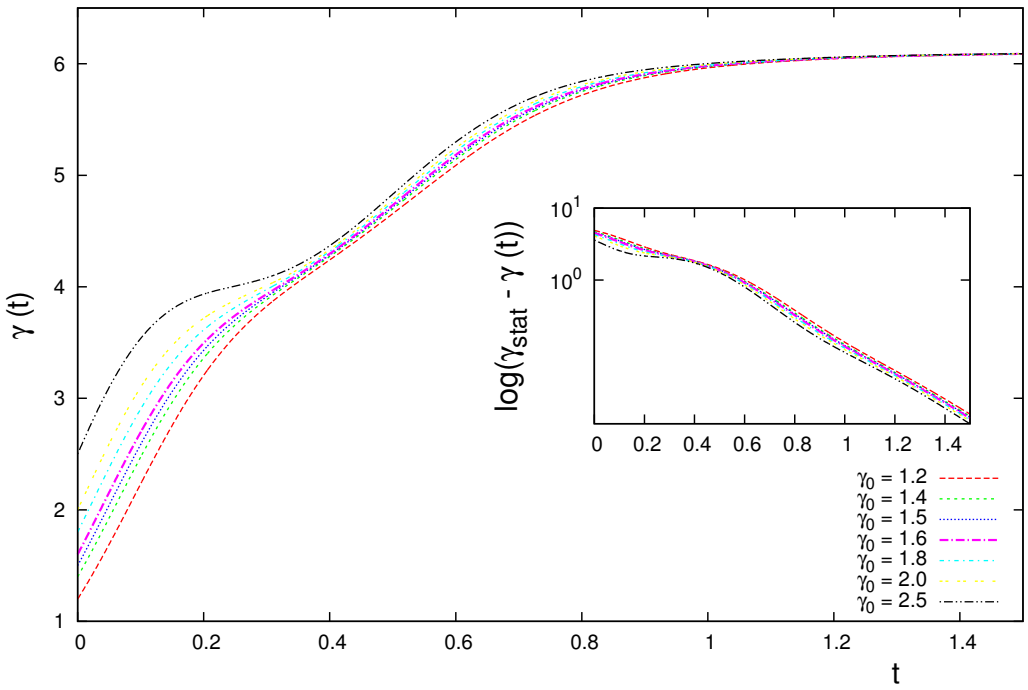


Figura 19 – Evolução temporal de γ para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.7), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 1.3, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$.

Note que γ aproxima-se de um valor próximo de 6 e, como podemos observar na figura menor, há um decaimento aproximadamente exponencial da diferença $\gamma_{\text{stat}} - \gamma(t)$ durante parte da evolução temporal. Utilizando a solução analítica dada pela equação (3.62c), obtemos o seguinte valor para γ_{stat},

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{stat}} &= \mathcal{M}\eta_{\text{stat}}\left[b^2 + 2a_2(a_1 + a_2)\right] \\ &\approx 0.165598322 \cdot 1.10 \cdot \left[4^2 + 2 \cdot 2.5 \cdot (1 + 2.5)\right] \\ &\approx 6.10\,. \end{aligned}$$

O valor obtido integrando numericamente foi $\gamma_{\text{stat}} \approx 6.10$.

Finalmente, observemos na Figura 20 a evolução temporal do parâmetro δ.

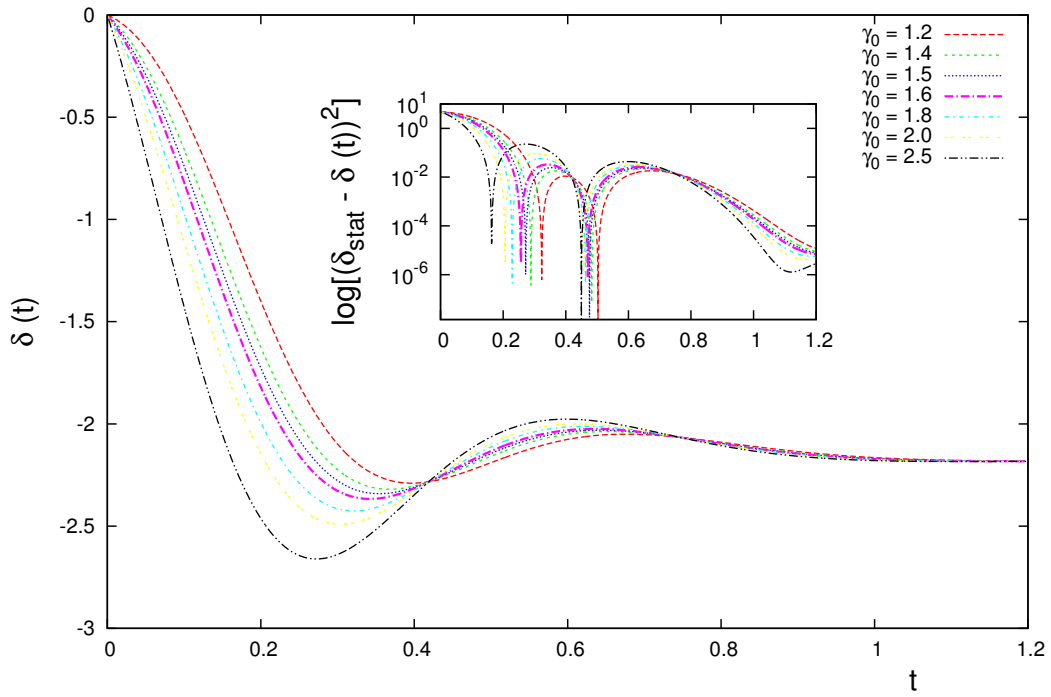


Figura 20 – Evolução temporal de δ para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.7), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 1.3, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$.

Note que δ aproxima-se de um valor entre -2 e -2.5. Utilizando a solução analítica dada pela equação (3.62d), obtemos o seguinte valor para δ_{stat},

$$\begin{aligned} \delta_{\text{stat}} &= 2\mathcal{M}\eta_{\text{stat}} b(a_1 - a_2) \\ &\approx 2 \cdot 0.165598322 \cdot 1.10 \cdot 4 \cdot (1 - 2.5) \approx -2.19\,. \end{aligned}$$

O valor obtido integrando numericamente foi $\delta_{\text{stat}} \approx -2.19$.

Analisemos nas Figuras 21 e 22 a evolução temporal da excentricidade (2.62) e do ângulo θ (2.74).

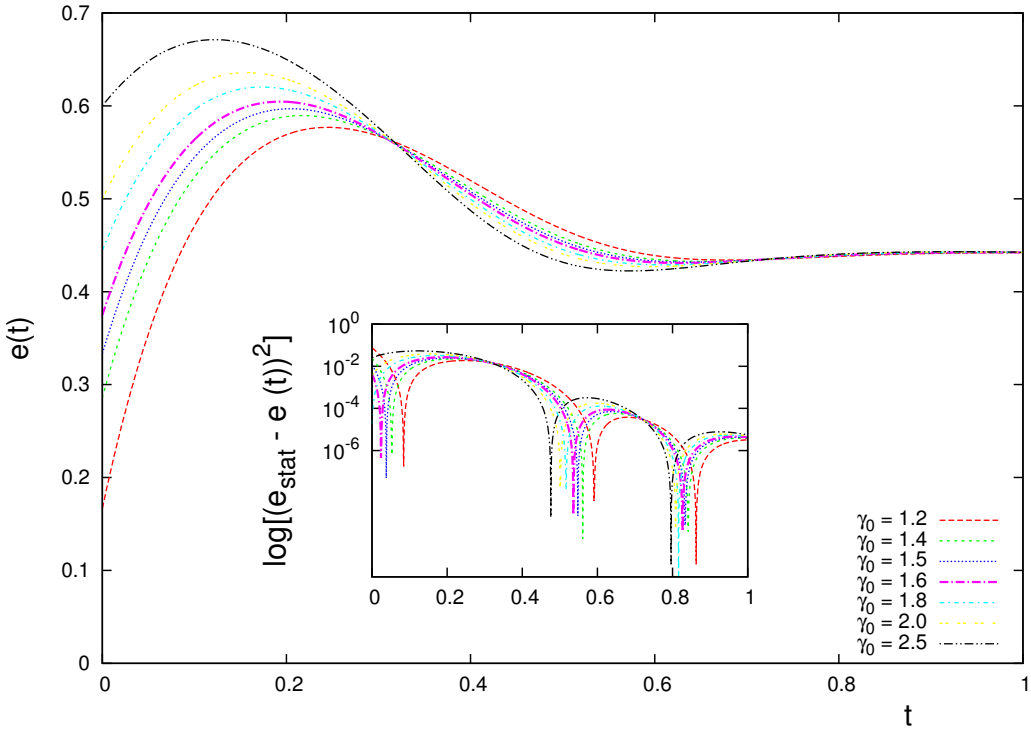


Figura 21 – Evolução temporal da excentricidade para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.7), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 1.3, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$.

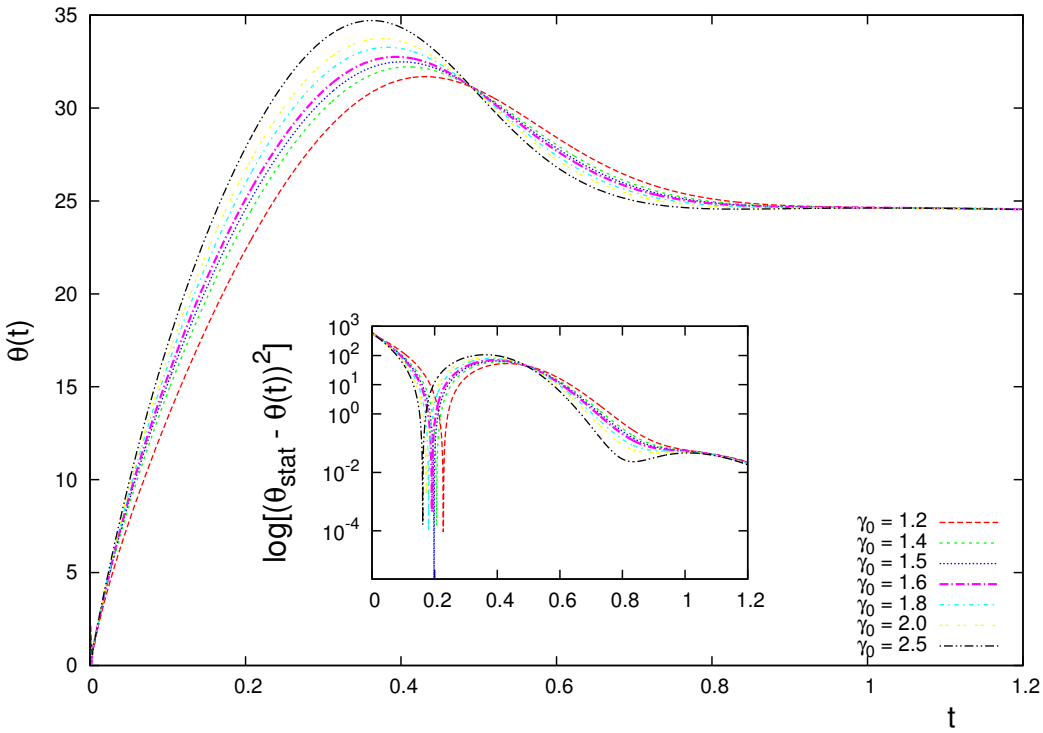


Figura 22 – Evolução temporal do ângulo θ para diferentes valores de γ_0, com o conjunto de parâmetros (5.7), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 1.3, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$.

Como podemos observar na figura menor da Figura 21, há um decaimento aproximadamente exponencial do quadrado da diferença $e_{\text{stat}} - e(t)$ com picos nos valores de t que

fazem $e_{\text{stat}} - e(t)$ se aproximar de 0.

5.4 Experimento 4: $I = 2$

Consideremos novamente o conjunto de parâmetros (5.7), mas desta vez tomaremos $I = 2$. Neste caso, o potencial elíptico V (3.1) e a função distribuição de probabilidade F_q (2.23) assumem a seguinte forma,

$$V(\boldsymbol{x}) = x^2 + 2.5y^2\,, \tag{5.10a}$$

$$F(x, y, t) = \eta(t)\left[1 + (0.3)(\alpha(t)x^2 + \delta(t)xy + \gamma(t)y^2)\right]_+^{-\frac{10}{3}}\,. \tag{5.10b}$$

Assim como nos experimentos anteriores, o parâmetro γ assumiu diferentes valores iniciais, especificados nas figuras, e o valor inicial do parâmetro η foi calculado substituindo os valores iniciais dos outros parâmetros na equação (2.122). Calculemos o coeficiente $\mathcal{M}$ (3.61) para este conjunto de parâmetros com a nova norma considerada,

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \frac{\pi}{I(2-q)((a_1+a_2)^2+b^2)}\sqrt{\frac{b^2+(a_1+a_2)^2}{b^2+4a_1a_2}} \\ &\approx \frac{3.141592654}{2\cdot(2-1.3)((1+2.5)^2+4^2)}\sqrt{\frac{4^2+(1+2.5)^2}{4^2+4\cdot 1\cdot 2.5}} \approx 0.082799161\,.\end{aligned} \tag{5.11}$$

Analisemos a evolução temporal do parâmetro η na Figura 23. Note que ele se aproxima de um valor entre 2.5 e 3 e, como podemos observar na figura menor, há um decaimento aproximadamente exponencial da diferença $\eta_{\text{stat}} - \eta(t)$ durante parte da evolução temporal.

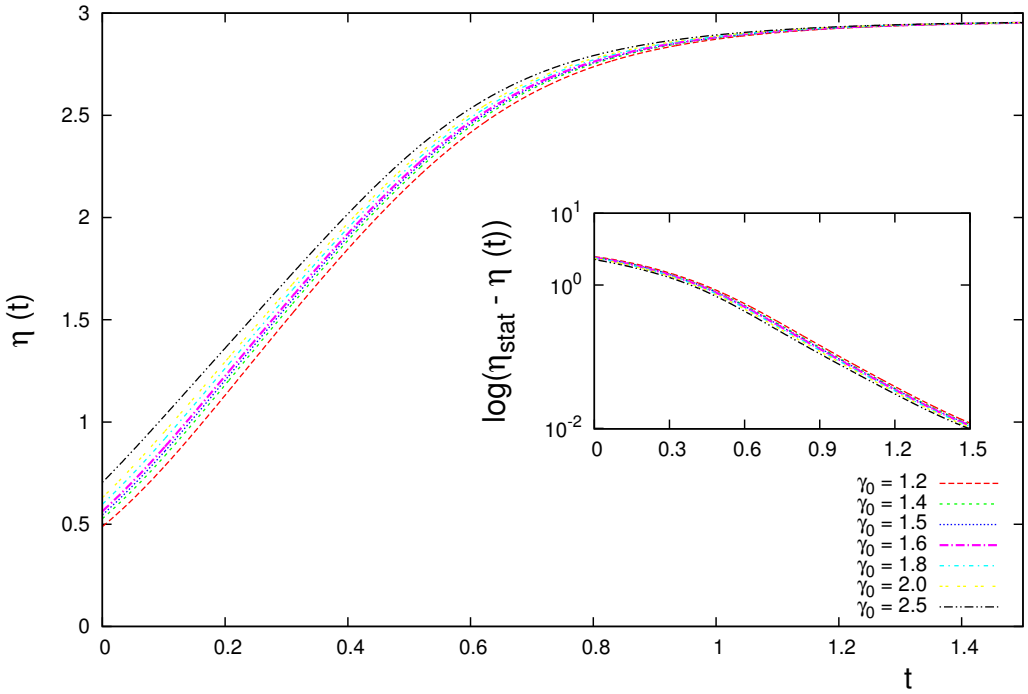


Figura 23 – Evolução temporal de η para diferentes valores de γ_0, com $I = 2$ e o conjunto de parâmetros (5.7), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 1.3, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$.

Utilizando a solução analítica dada pela equação (3.62a), obtemos o seguinte valor para η_{stat},

$$\begin{aligned}
\eta_{\text{stat}} &= \left[\frac{I(a_1+a_2)}{2\pi D}\sqrt{\frac{b^2+4a_1a_2}{b^2+(a_1+a_2)^2}}\right]^{\frac{1}{2-q}} \\
&\approx \left[\frac{2\cdot(1+2.5)}{2\cdot 3.141592654\cdot 0.5}\sqrt{\frac{4^2+4\cdot 1\cdot 2.5}{4^2+(1+2.5)^2}}\right]^{\frac{1}{2-1.3}} \\
&\approx 2.96\,.
\end{aligned}$$

O valor obtido integrando numericamente foi $\eta_{\text{stat}} \approx 2.96$.

Note na Figura 24 que α aproxima-se de um valor entre 5 e 6 e, como podemos observar na figura menor, há um decaimento aproximadamente exponencial da diferença $\alpha_{\text{stat}} - \alpha(t)$ durante parte da evolução temporal.

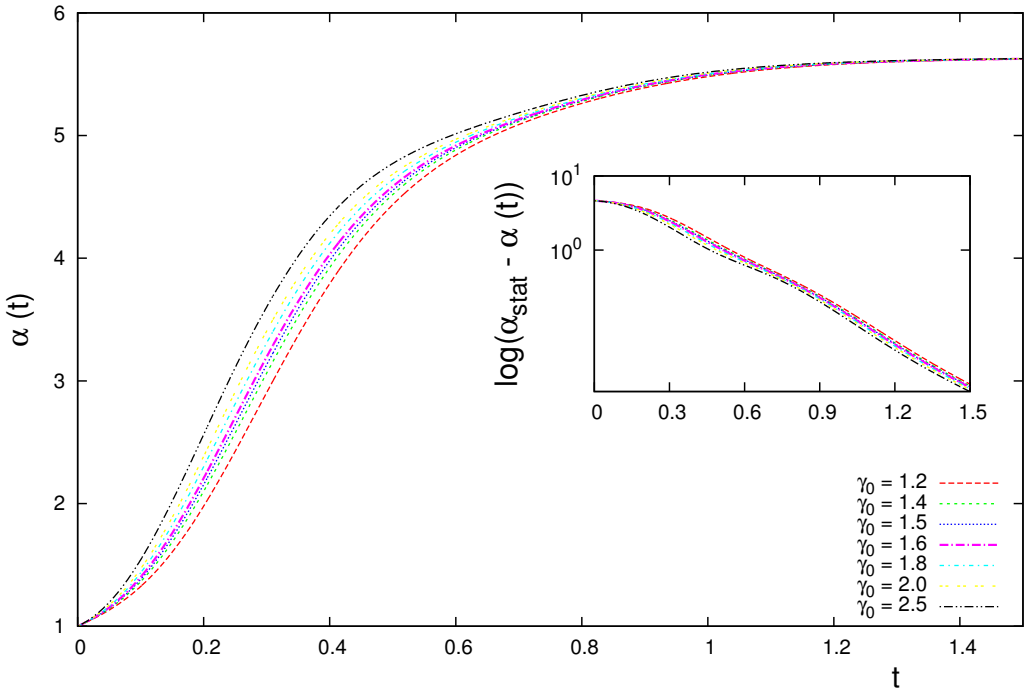


Figura 24 – Evolução temporal de α para diferentes valores de γ_0, com $I = 2$ e o conjunto de parâmetros (5.7), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 1.3, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$.

Utilizando a solução analítica dada pela equação (3.62b), obtemos o seguinte valor para α_{stat},

$$\begin{aligned}
\alpha_{\text{stat}} &= \mathcal{M}\eta_{\text{stat}}\left[b^2+2a_1(a_1+a_2)\right] \\
&\approx 0.082799161\cdot 2.96\cdot\left[4^2+2(1+2.5)\right] \\
&\approx 5.64\,.
\end{aligned}$$

O valor obtido integrando numericamente foi $\alpha_{\text{stat}} \approx 5.64$.

Façamos o mesmo com o parâmetro γ, observemos na Figura 25 sua evolução temporal.

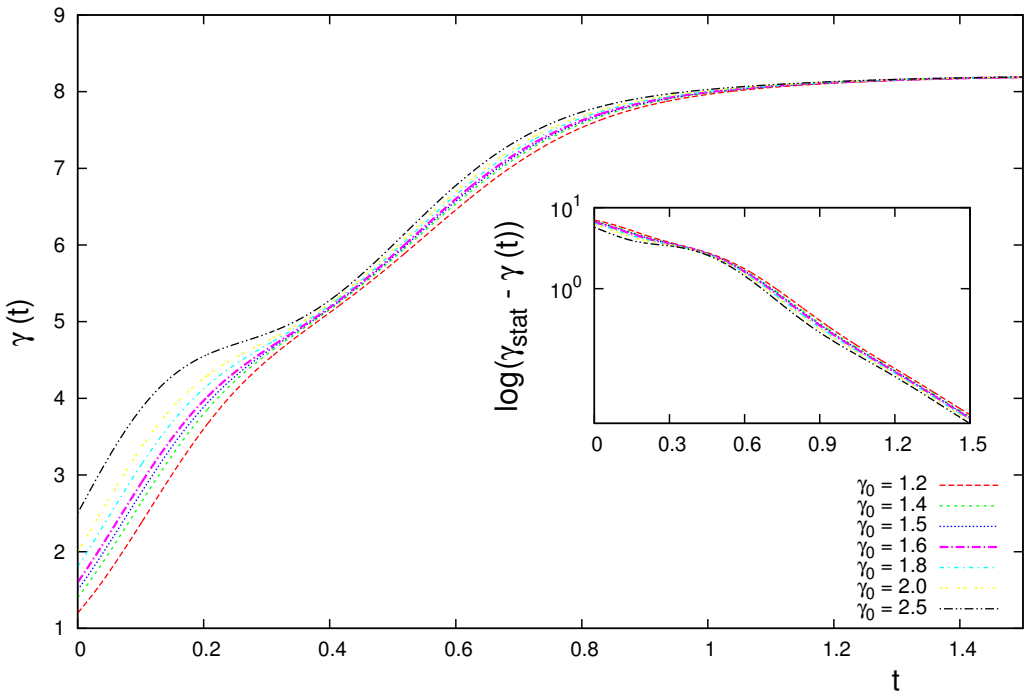


Figura 25 – Evolução temporal de γ para diferentes valores de γ_0, com $I = 2$ e o conjunto de parâmetros (5.7), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 1.3, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$.

Note que γ aproxima-se de um valor entre 8 e 9 e, como podemos observar na figura menor, há um decaimento aproximadamente exponencial da diferença $\gamma_{\text{stat}} - \gamma(t)$ durante parte da evolução temporal. Utilizando a solução analítica dada pela equação (3.62c), obtemos o seguinte valor para γ_{stat},

$$\gamma_{\text{stat}} \quad = \quad \mathcal{M}\eta_{\text{stat}}\left[b^2 + 2a_2(a_1 + a_2)\right] \approx 0.082799161 \cdot 2.96 \cdot \left[4^2 + 2 \cdot 2.5 \cdot (1 + 2.5)\right] \approx 8.21\,.$$

O valor obtido integrando numericamente foi $\gamma_{\text{stat}} \approx 8.21$.

Finalmente, observemos na Figura 26 a evolução temporal do parâmetro δ.

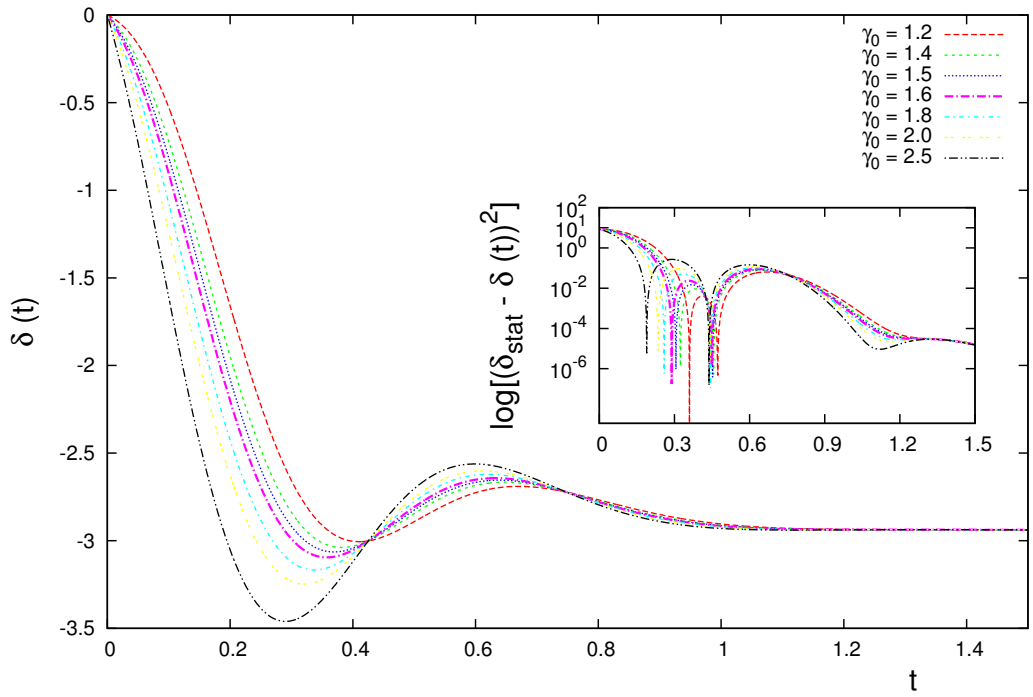


Figura 26 – Evolução temporal de δ para diferentes valores de γ_0, com $I = 2$ e o conjunto de parâmetros (5.7), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 1.3, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$.

Note que δ aproxima-se de um valor entre -2.5 e -3. Utilizando a solução analítica dada pela equação (3.62d), obtemos o seguinte valor para δ_{stat},

$$\begin{aligned} \delta_{\text{stat}} &= 2\mathcal{M}\eta_{\text{stat}} b(a_1 - a_2) \\ &\approx 2 \cdot 0.082799161 \cdot 2.96 \cdot 4 \cdot (1 - 2.5) \approx -2.94\,. \end{aligned}$$

O valor obtido integrando numericamente foi $\delta_{\text{stat}} \approx -2.94$.

Analisemos nas Figuras 27 e 28 a evolução temporal da excentricidade (2.62) e do ângulo θ (2.74).

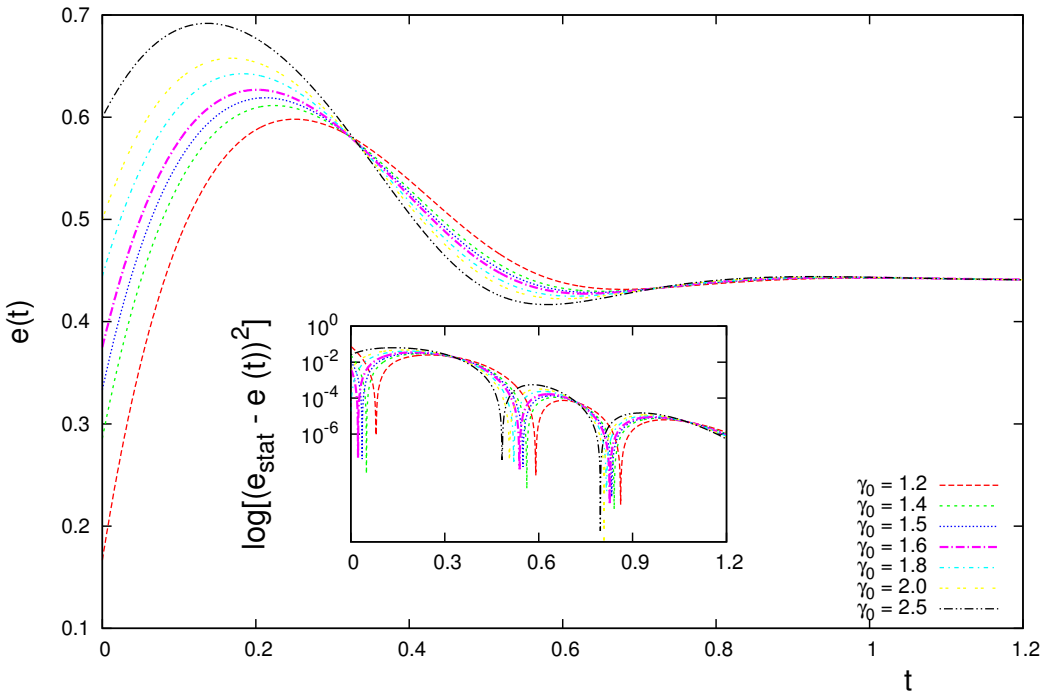


Figura 27 – Evolução temporal da excentricidade para diferentes valores de γ_0, com $I = 2$ e o conjunto de parâmetros (5.7),
$a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 1.3, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$.

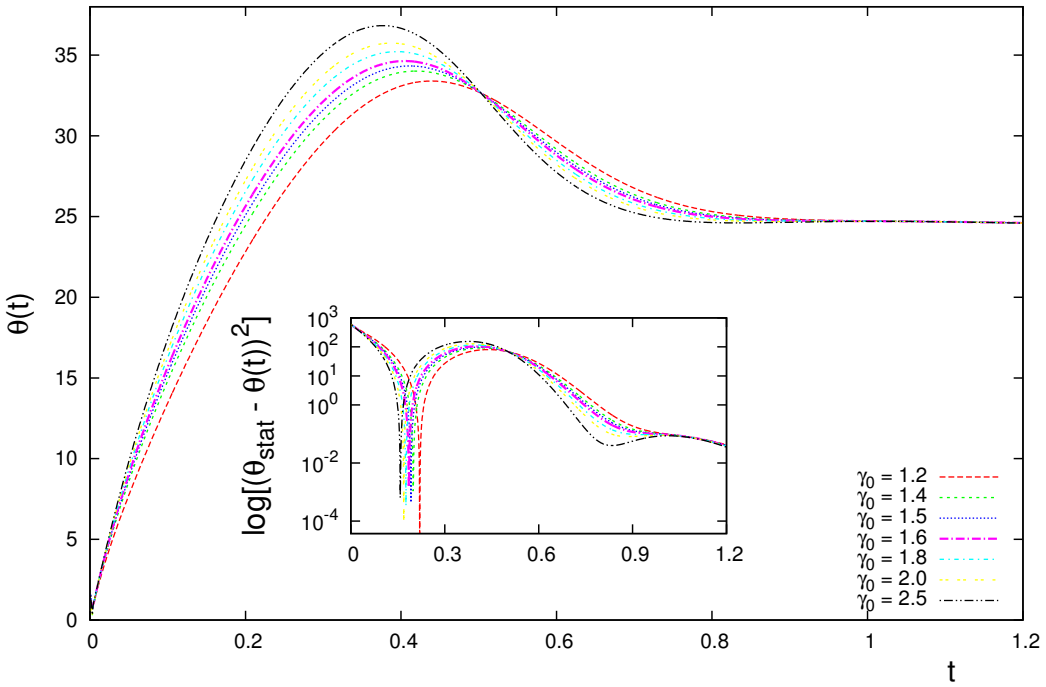


Figura 28 – Evolução temporal do ângulo θ para diferentes valores de γ_0, com $I = 2$ e o conjunto de parâmetros (5.7), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 1.3, \alpha_0 = 1, \delta_0 = 0$.

Como podemos observar na figura menor da Figura 27, há um decaimento aproximada-

mente exponencial do quadrado da diferença $e_{\text{stat}} - e(t)$ com picos nos valores de t que fazem $e_{\text{stat}} - e(t)$ se aproximar de 0.

5.5 Experimento 5: Trajetórias

Nesta seção, realizamos a integração numérica das equações de movimento (3.69), obtidas na seção 3.4. Neste caso, a densidade F (2.25) é interpretada como uma densidade física real. O objetivo aqui é analisar as trajetórias de partículas que compõem um sistema submetido a um campo de *drift* $\boldsymbol{K}$, que contém uma componente que deriva de um potencial assimétrico V (3.1) e uma componente que não deriva de um potencial. Observemos nas Figuras 29-31 as trajetórias de partículas com diferentes condições iniciais, considerando os conjuntos de parâmetros dos experimentos realizados nas seções 5.1-5.3.

Observemos na Figura 29 as trajetórias obtidas a partir do conjunto de parâmetros (5.1),

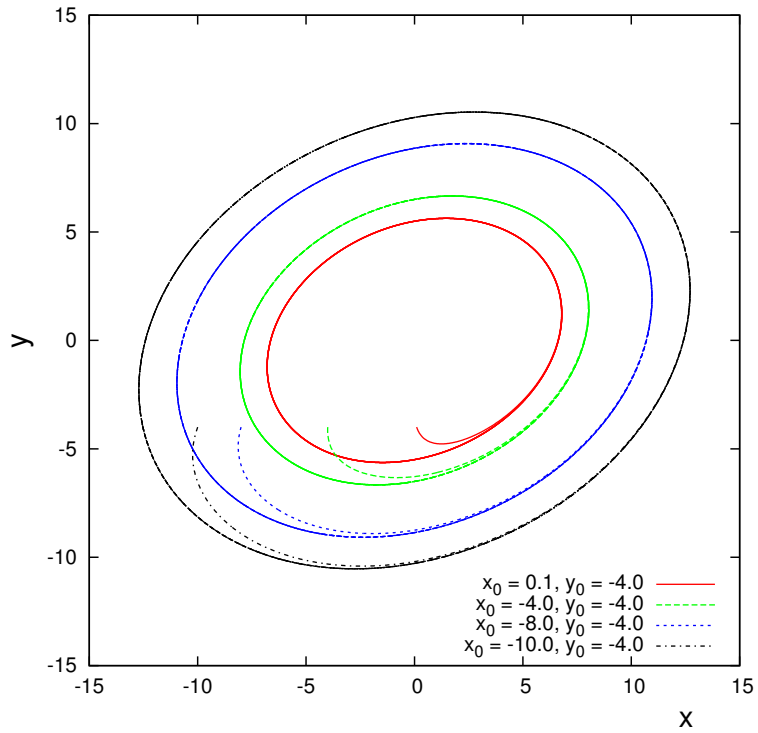


Figura 29 – Trajetórias de partículas geradas a partir dos parâmetros (5.1), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = -1, \alpha_0 = 1, \gamma_0 = 2.5, \delta_0 = 0$, para diferentes condições iniciais.

Na Figura 30 encontram-se as trajetórias obtidas a partir do conjunto de parâmetros (5.4).

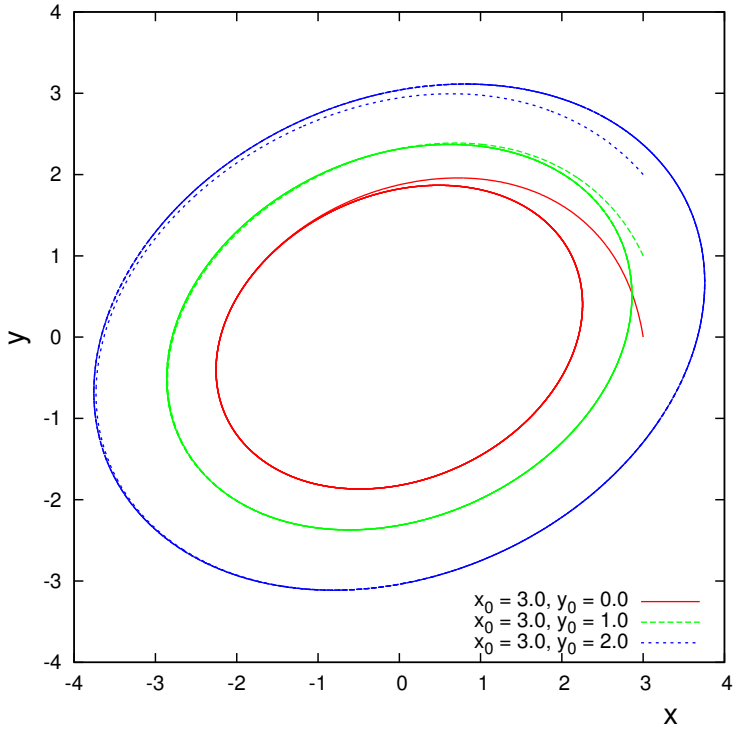


Figura 30 – Trajetórias de partículas geradas a partir dos parâmetros (5.4), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 0.5, \alpha_0 = 1, \gamma_0 = 2.5, \delta_0 = 0$, para diferentes condições iniciais.

Por fim, na Figura 31, observemos as trajetórias obtidas a partir do conjunto de parâmetros (5.7).

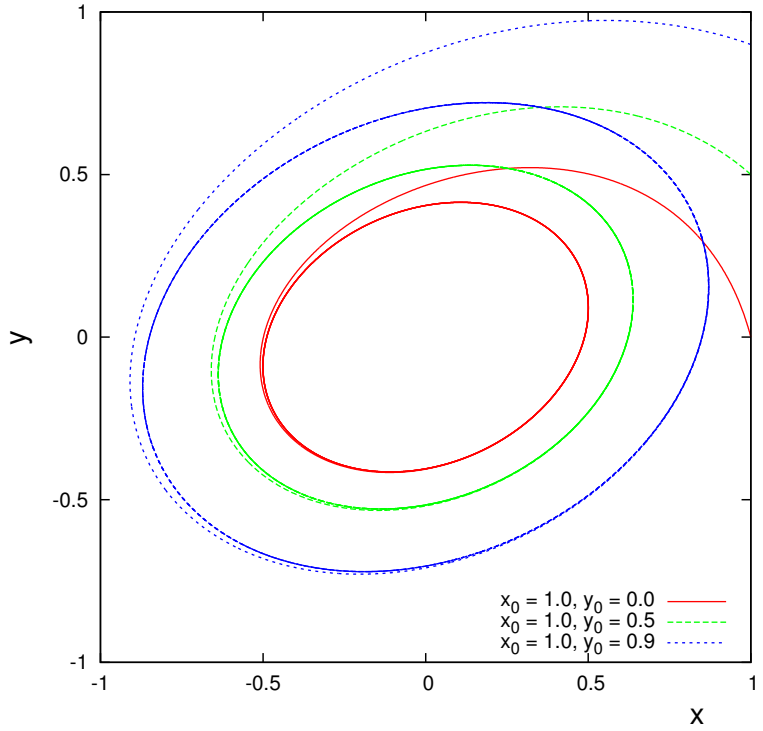


Figura 31 – Trajetórias de partículas geradas a partir dos parâmetros (5.7), $a_1 = 1, a_2 = 2.5, b = 4, D = 0.5, q = 1.3, \alpha_0 = 1, \gamma_0 = 2.5, \delta_0 = 0$, para diferentes condições iniciais.

Temos então uma família de sistemas dinâmicos com ruído (descritos pela equação de FPNL) que possuem soluções estacionárias do tipo q-maxent, caracterizadas pelos parâmetros $\eta, \alpha, \gamma, \delta, D, q, a_1, a_2$ e b, apesar de termos um campo de *drift* que não deriva necessariamente de um potencial. Podemos interpretar esses resultados, por exemplo, para o caso em que as variáveis de estado, x e y, poderiam representar esquematicamente os potenciais de ativação contínuos (sinais de saída) de dois neurônios conectados por sinapses assimétricas. As formas para o potencial $V(\boldsymbol{x})$ e para o campo de *drift* $\tilde{\boldsymbol{K}}$, dadas pelas equações (3.1) e (3.2), podem então ser interpretadas, dentro da estrutura usual de modelagem de redes neuronais, como um sistema de dois neurônios, onde a energia da rede, dada por

$$V(\boldsymbol{x}) = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j \,, \tag{5.12}$$

tem apenas os termos de auto-interação, e o *drift*, expresso na forma

$$\tilde{K}_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{j} c_{ij} x_j \,, \tag{5.13}$$

gera interações assimétricas entre os dois neurônios. Como os termos de auto-interação são tais que $a_1 \neq a_2$, estamos de fato considerando um sistema de dois tipos diferentes de neurônios, conectados por sinapses assimétricas, que são suposições biologicamente realistas. Como $\tilde{\boldsymbol{K}}$ não deriva de um potencial, este sistema de dois neurônios não obedece necessariamente à restrição da simetria descrita pela equação (1.10), que é semelhante à condição de simetria padrão em redes neuronais. As Figuras 29-31 mostram que as funções de ativação dos dois neurônios espiralam até atingir ciclos limites, de modo que, em uma situação de equilíbrio estacionário, os valores de ativação dos dois neurônios giram no

plano (x, y) do espaço de fase, seguindo uma órbita elíptica. A presença destes ciclos limite constitui uma manifestação notável dos novos tipos de dinâmica que emergem das interações assimétricas. Isso se contrasta com os modelos usuais de redes neuronais, como o de Hopfield e Máquina de Boltzmann, onde o sistema converge para estados atratores estacionários, que são pontos fixos no plano (x, y).

CONCLUSÃO

Neste trabalho, estudamos o comportamento de soluções dependentes do tempo de uma equação de FPNL, dotada de forças rotacionais e forças derivadas de um potencial assimétrico. A equação de FPNL considerada possui uma não-linearidade no termo de difusão: em contraste com a equação linear de Fokker-Planck padrão, o operador laplaciano que aparece no termo de difusão da equação de FPNL age sobre uma potência da densidade $F(x,t)$. Além deste termo de difusão, a equação de FPNL possui um termo de *drift* linear caracterizado por um campo de drift $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})$. Este campo, por sua vez, tem duas componentes: um termo de força rotacional e um componente de força dado por menos o gradiente de uma função potencial $V(\boldsymbol{x})$. Consideramos sistemas bidimensionais onde a função potencial V é uma função quadrática assimétrica (isto é, sem simetria rotacional) das coordenadas espaciais x e y. A inclusão de um potencial assimétrico estende e generaliza um trabalho anterior [23], no qual soluções explícitas, dependentes do tempo foram obtidas apenas para potenciais simétricos. As soluções que investigamos são semi-analíticas. A dependência espacial das soluções $F(x,y,t)$ é analítica, no sentido de que é dada por um *ansatz* com uma dependência analítica explícita de F sobre as variáveis espaciais x e y. Este *ansatz* tem uma forma q-gaussiana bidimensional que consiste de uma q-exponencial cujo argumento é uma forma quadrática em x e y. Os parâmetros que aparecem nesta forma quadrática, bem como uma constante de normalização global multiplicando esta q-gaussiana, são dependentes do tempo. Toda a dependência de tempo de $F(x,y,t)$ ocorre através desses parâmetros. Também obtivemos um conjunto de equações diferenciais ordinárias acopladas que descrevem a evolução desses parâmetros dependentes do tempo. Essas equações diferenciais não admitem soluções analíticas (para ser mais preciso, não conseguimos encontrar soluções analíticas para elas). Consequentemente, para explorar o comportamento das soluções q-gaussianas, integramos numericamente as equações diferenciais para os parâmetros, usando os métodos de Runge-Kutta e de Bulirsch-Stoer.

Apesar de não ter sido possível encontrar uma solução analítica completa para as equações que descrevem a evolução dos parâmetros, conseguimos obter analiticamente algumas informações parciais relativas às soluções. Por exemplo, a preservação da norma de F pode ser expressa como uma integral das equações de movimento dos parâmetros, cuja constância no tempo provamos analiticamente. Também determinamos analiticamente os pontos fixos das equações de movimento dos parâmetros, que correspondem à solução estacionária da equação de FPNL. Estes resultados analíticos, além do terem um valor intrínseco, são úteis para a verificação dos cálculos numéricos.

As equações de FPNL com forma de lei de potências são ferramentas úteis no estudo de diversos sistemas complexos. Elas estão intimamente relacionadas à termodinâmica estatística generalizada, baseada nos funcionais entrópicos não-aditivos. De fato, a conexão entre a dinâmica não-linear de Fokker-Planck e as q-entropias demonstrou ser bastante frutífera, ajudando a realizar várias aplicações interessantes da termoestatística baseada em S_q a sistemas complexos incluindo a recente confirmação, no estudo de meios granu-

lares, de uma previsão feita por Tsallis e Bukman há mais de 20 anos [29]. Esperamos que os resultados aqui reportados ajudem a desenvolver outras aplicações da equação de FPNL e suas conexões com a termoestatística baseada em S_q.

Com os resultados obtidos, estendemos aspectos relacionados à S_q, da equação de FPNL em (pelo menos, tentamos fazer pequenas incursões em) várias direções que foram relativamente inexploradas até agora:

- Consideramos soluções q-gaussianas para uma equação FPNL com forças rotacionais. Esta linha de pesquisa tem sido amplamente inexplorada, sendo que os primeiros resultados têm sido relatados apenas recentemente [23].

- Exploramos a combinação de forças rotacionais com um potencial assimétrico, estendendo assim os resultados de [23].

- Estudamos em detalhes um problema envolvendo q-gaussianas bidimensionais. A maioria das aplicações anteriores da termoestatística S_q envolvendo q-gaussianas foca em densidades unidimensionais.

- Investigamos detalhadamente as trajetórias de partículas individuais (considerando a densidade $F(x, y, t)$ como uma densidade física de partículas que interagem entre si). A maioria dos trabalhos anteriores se concentram na densidade F e não no comportamento de partículas individuais.

Além dos pontos listados acima, notamos que o formalismo matemático da equação de FPNL com forças rotacionais tem similaridades intrigantes com o formalismo de redes neuronais com sinapses assimétricas. Isso sugere que esses tipos de rede podem ser candidatos interessantes a serem modelados com equações de evolução como as introduzidas nesta dissertação. A função potencial não simétrica e o componente rotacional do campo de *drift* corresponderiam respectivamente a redes com diferentes tipos de neurônios, conectados por interações não simétricas. Mostramos que estas trajetórias resultantes dos sinais de ativação individuais exibem ciclos limites com forma elíptica. O formalismo de Fokker-Planck talvez possa, assim, fornecer uma abordagem bastante versátil e potencialmente útil para estudar alguns aspectos da dinâmica neuronal. Esta abordagem ainda está em estágio embrionário e ainda há muito trabalho a ser feito.

Neste trabalho, investigamos as soluções dependentes do tempo de uma equação de FPNL. Embora este assunto tenha antecedentes e motivações nas ciências naturais, nós o tratamos como um problema matemático. Esperamos, no entanto, que o presente desenvolvimento possa servir para a análise de problemas em física ou biologia. A história anterior da linha de pesquisa que conecta a entropia S_q e a equação de FPNL, que começou há mais de 20 anos [19], sugere que nossas expectativas possam se concretizar.

REFERÊNCIAS

[1] FRANK, T. D. *Nonlinear Fokker-Planck Equations: Fundamentals and Applications*. 1.a. ed. Berlin, Germany: Springer, 2005.

[2] RIBEIRO, M. S.; CASAS, G. A.; NOBRE, F. D. Second law and entropy production in a nonextensive system. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 91, p. 012140–1–012140–8, 2015.

[3] ARENAS, Z. G.; BARCI, D. G.; TSALLIS, C. Nonlinear inhomogeneous Fokker-Planck equation within a generalized stratonovich prescription. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 90, p. 032118–1–032118–6, 2014.

[4] MALACARNE, L. C. et al. N-dimensional nonlinear Fokker-Planck equation with time-dependent coefficients. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 65, p. 052101–1–052101–4, 2002.

[5] LENZI, E. K.; ANTENEODO, C.; BORLAND, L. Escape time in anomalous diffusive media. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 63, p. 051109–1–051109–5, 2001.

[6] SHIINO, M. Free energies based on generalized entropies and H-theorems for nonlinear Fokker–Planck equations. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 42, p. 2540–2553, 2001.

[7] FRANK, T. D. Generalized Fokker–Planck equations derived from generalized linear nonequilibrium thermodynamics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier Science Publisher, v. 310, p. 397–412, 2002.

[8] ANDRADE, J. S. et al. Thermostatistics of overdamped motion of interacting particles. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 105, p. 260601–1–260601–4, 2010.

[9] RIBEIRO, M. S.; NOBRE, F. D.; CURADO, E. M. F. Time evolution of interacting vortices under overdamped motion. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 85, p. 021146–1–021146–8, 2012.

[10] COMBE, G. et al. Experimental validation of a nonextensive scaling law in confined granular media. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 115, p. 238301–1–238301–5, 2015.

[11] SHIINO, M. Stability analysis of mean-field-type nonlinear Fokker-Planck equations associated with a generalized entropy and its application to the self-gravitating system. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 67, p. 056118–1–056118–16, 2003.

[12] CHAVANIS, P.-H. Generalized thermodynamics and Fokker-Planck equations: Applications to stellar dynamics and two-dimensional turbulence. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 68, p. 036108–1–036108–20, 2003.

[13] FRANK, T. D.; FRIEDRICH, R. Estimating the nonextensivity of systems from experimental data: A nonlinear diffusion equation approach. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier Science Publisher, v. 347, p. 65–76, 2005.

[14] UBRIACO, M. R. A simple mathematical model for anomalous diffusion via Fisher's information theory. *Physics Letters A*, Elsevier Science Publisher, v. 373, p. 4017–4021, 2009.

[15] CURADO, E. M. F. et al. Carnot cycle for interacting particles in the absence of thermal noise. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 89, p. 022117–1–022117–6, 2014.

[16] SCHWÄMMLE, V.; NOBRE, F. D.; CURADO, E. M. F. Consequences of the H-theorem from nonlinear Fokker-Planck equations. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 76, p. 041123–1–041123–8, 2007.

[17] TSALLIS, C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, v. 52, p. 479–487, 1988.

[18] TSALLIS, C. *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World*. 1.a. ed. New York, USA: Springer, 2009.

[19] PLASTINO, A. R.; PLASTINO, A. Non-extensive statistical mechanics and generalized Fokker-Planck equation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier Science Publisher, v. 222, p. 347–354, 1995.

[20] BERRY, M. V.; SHUKLA, P. Classical dynamics with curl forces, and motion driven by time-dependent flux. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 45, p. 305201–1–305201–18, 2012.

[21] BERRY, M. V.; SHUKLA, P. Curl force dynamics: Symmetries, chaos and constants of motion. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 18, p. 063018–1–063018–11, 2016.

[22] HERTZ, J.; KROGH, A.; PALMER, R. G. *Introduction to the Theory of Neural Computation.* 1.a. ed. Massachusetts, USA: Perseus Publishing, 1991.

[23] WEDEMANN, R. S.; PLASTINO, A. R.; TSALLIS, C. Curl forces and the nonlinear Fokker-Planck equation. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 94, p. 062105–1–062105–10, 2016.

[24] LUCA, V. T. F.; WEDEMANN, R. S.; PLASTINO, A. R. Neuronal asymmetries and Fokker-Planck dynamics. *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, v. 11141, p. 703–713, 2018.

[25] COHEN, M. A.; GROSSBERG, S. Absolute stability of global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, IEEE, v. SMC-13, p. 815–826, 1983.

[26] HOPFIELD, J. J. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Academy of Sciences, v. 81, p. 3088–3092, 1984.

[27] GERSHENFELD, N. A. *The Nature of Mathematical Modeling*. 1.a. ed. United Kingdom: Cambridge University Press, 1999.

[28] PRESS, W. H. et al. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. 3.a. ed. New York, USA: Cambridge University Press, 2007.

[29] TSALLIS, C.; BUKMAN, D. J. Anomalous diffusion in the presence of external forces: Exact time-dependent solutions and their thermostatistical basis. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 54, p. R2197–R2200, 1996.

APÊNDICE – Programas numéricos

Segue abaixo o procedimento *rk4* escrito em linguagem C, retirado da referência [28], que executa o *método de Runge-Kutta de quarta ordem.*

```
1 void
2 rk4(float y[], float dydx[], int n, float x, float h, float yout[], void (*derivs)(float,
      float [],
3 float []))
4 {
5   int   i;
6   float xh, hh, h6, *dym, *dyt, *yt;
7
8   dym = vector(1, n);
9   dyt = vector(1, n);
10  yt = vector(1, n);
11
12  hh = h * 0.5;
13  h6 = h / 6.0;
14  xh = x + hh;
15
16  for (i = 1; i <= n; i++) yt[i] = y[i] + hh * dydx[i];    /*  First step.  */
17  (*derivs)(xh, yt, dyt);                                  /*  Second step. dyt = k2/h */
18
19  for (i = 1; i <= n; i++) yt[i] = y[i] + hh * dyt[i];
20  (*derivs)(xh, yt, dym);                                  /*  Third step.  dym = k3/h */
21
22  for (i = 1; i <= n; i++)
23  {
24    yt[i] = y[i] + h * dym[i];
25    dym[i] = dym[i] + dyt[i];                  /* dym = (k3 + k2) / h  */
26  }
27
28  (*derivs)(x + h, yt, dyt);                                  /*  Fourth step. dyt = k4/h
      */
29
30  for (i = 1; i <= n; i++)
31     yout[i] = y[i] + h6 * (dydx[i] + dyt[i] + 2.0 * dym[i]); /* y[i] + ( k1 + k4 + 2(k2
      + k3) ) / 6 */
32
33  free_vector(yt, 1, n);
34  free_vector(dyt, 1, n);
35  free_vector(dym, 1, n);
36
37 }  /*  end rk4()   */
```

Seguem abaixo os procedimentos *rkqs* e *rkck* escritos em linguagem C, retirados da referência [28], que juntos executam o *método de Runge-Kutta de quinta ordem.*

Procedimento *rkqs*:

```
1 void
2 rkqs(float y[], float dydx[], int n, float *x, float htry, float eps,
3          float yscal[], float *hdid, float *hnext,
4          void (*derivs)(float, float [], float []))
5 {
6   void rkck(float y[], float dydx[], int n, float x, float h,
7   float ytemp[], float yerr[], void (*derivs)(float, float [], float []));
8
9   int i;
10  float errmax, h, htemp, xnew, *yerr, *ytemp;
11
12  yerr = vector(1, n);
13  ytemp = vector(1, n);
14  h = htry;                /* Set stepsize to the initial trial value. */
15
16  for ( ; ; )
17  {
```

```
18      rkck(y, dydx, n, *x, h, ytemp, yerr, derivs);    /*  Take a step.  */
19
20      errmax = 0.0;                                    /* Evaluate accuracy. */
21      for (i = 1; i <= n; i++) errmax = FMAX(errmax, fabs(yerr[i] / yscal[i]) );
22      errmax = errmax / eps;                           /*Scale relative to required
      tolerance.  */
23      if (errmax <= 1.0) break;                        /*Step succeeded. Compute size of
      next step. */
24      htemp = SAFETY * h * pow(errmax, PSHRNK);        /* Truncation error too large,
      reduce stepsize. */
25
26      if (h >= 0.0) h = FMAX(htemp, 0.1 * h);
27      else h = FMIN(htemp, 0.1 * h);                   /* No more than a factor of 10.  */
28
29      xnew = (*x) + h;
30      if (xnew == *x) nrerror("stepsize underflow in rkqs");
31   }  /* end  for ( ; ; )  */
32
33   if (errmax > ERRCON) *hnext = SAFETY * h * pow(errmax, PGROW);
34   else *hnext = 5.0 * h;                              /*  No more than a factor of 5
      increase.  */
35
36   *x += (*hdid=h);
37
38 /*  *hdid = h
39   *x = *x + (h);  */
40
41   for (i = 1; i <= n; i++) y[i] = ytemp[i];
42
43   free_vector(ytemp, 1, n);
44   free_vector(yerr, 1, n);
45
46 }  /* end rkqs()    */
```

Procedimento *rkck*:

```
 1 void
 2 rkck(float y[], float dydx[], int n, float x, float h, float yout[],
 3          float yerr[], void (*derivs)(float, float [], float []) )
 4 {
 5   int i;
 6   static float a2 = 0.2, a3 = 0.3, a4 = 0.6, a5 = 1.0, a6 = 0.875,
 7                b21 = 0.2, b31 = 3.0 / 40.0, b32 = 9.0 / 40.0,
 8                b41 = 0.3, b42 = -0.9, b43 = 1.2,
 9                b51 = -11.0 / 54.0, b52 = 2.5, b53 = -70.0 / 27.0, b54 = 35.0 / 27.0,
10                b61 = 1631.0 / 55296.0, b62 = 175.0 / 512.0, b63 = 575.0 / 13824.0,
11                b64 = 44275.0 / 110592.0, b65 = 253.0 / 4096.0,
12                c1 = 37.0 / 378.0, c3 = 250.0 / 621.0, c4 = 125.0 / 594.0, c6 = 512.0 /
      1771.0,
13                dc5 = -277.00 / 14336.0;
14   float  dc1 = c1 - 2825.0 / 27648.0, dc3 = c3 - 18575.0 / 48384.0,
15          dc4 = c4 - 13525.0 / 55296.0, dc6 = c6 - 0.25;
16   float *ak2, *ak3, *ak4, *ak5, *ak6, *ytemp;
17
18   ak2 = vector(1,n);
19   ak3 = vector(1,n);
20   ak4 = vector(1,n);
21   ak5 = vector(1,n);
22   ak6 = vector(1,n);
23   ytemp = vector(1,n);
24
25   for (i = 1; i <= n; i++) ytemp[i] = y[i] + b21 * h * dydx[i];    /*  First step.  */
26
27   (*derivs)(x + a2 * h, ytemp, ak2);                               /*  Second step. */
28   for (i = 1; i <= n; i++) ytemp[i] = y[i] + h * (b31 * dydx[i] + b32 * ak2[i]);
29
30   (*derivs)(x + a3 * h, ytemp, ak3);                               /*  Third step.  */
31   for (i = 1; i <= n; i++) ytemp[i] = y[i] + h * (b41 * dydx[i] + b42 * ak2[i] + b43 *
      ak3[i]);
32
33   (*derivs)(x + a4 * h, ytemp, ak4);                               /*  Fourth step. */
34   for (i = 1; i <= n; i++)
35     ytemp[i] = y[i] + h * (b51 * dydx[i] + b52 * ak2[i] + b53 * ak3[i] + b54 * ak4[i]);
36
```

```
37   (*derivs)(x + a5 * h, ytemp, ak5);                                /*  Fifth step.  */
38   for (i = 1; i <= n; i++)
39     ytemp[i] = y[i] + h * (b61 * dydx[i] + b62 * ak2[i] + b63 * ak3[i] + b64 * ak4[i] +
       b65 * ak5[i]);
40
41   (*derivs)(x+a6*h,ytemp,ak6);                                      /*  Sixth step.  */
42   for (i = 1; i <= n; i++)                                          /* Accumulate
       increments with
43                        proper weights. */
44     yout[i] = y[i] + h * (c1 * dydx[i] + c3 * ak3[i] + c4 * ak4[i] + c6 * ak6[i]);
45
46   for (i = 1; i <= n; i++)
47     yerr[i] = h * (dc1 * dydx[i] + dc3 * ak3[i] + dc4 * ak4[i] + dc5 * ak5[i] + dc6 * ak6
       [i]);
48     /* Estimate error as difference between fourth and fifth order methods.  */
49
50   free_vector(ytemp, 1, n);
51   free_vector(ak6, 1, n);
52   free_vector(ak5, 1, n);
53   free_vector(ak4, 1, n);
54   free_vector(ak3, 1, n);
55   free_vector(ak2, 1, n);
56
57 }  /*   end rkck()   */
```

Segue abaixo o procedimento *bsstep* escrito em linguagem C, retirado da referência [28], que executa o *método de Bulirsch-Stoer*.

```
 1 void
 2 bsstep(float y[], float dydx[], int nv, float *xx, float htry, float eps,
 3        float yscal[], float *hdid, float *hnext,
 4        void (*derivs)(float, float [], float []))
 5 {
 6   void         mmid(), pzextr();
 7   int          i, iq, k, kk, km;
 8   static int   first = 1, kmax, kopt;
 9   static float epsold = -1.0, xnew;
10   float        eps1, errmax, fact, h, red, scale, work, wrkmin, xest, test_alf, test_alf2
       ;
11   float        *err, *yerr, *ysav, *yseq;
12   static float a[IMAXX + 1];                /*  IMAXX = KMAXX + 1 defined above  */
13   static float alf[KMAXX + 1][KMAXX + 1];   /* KMAXX = 8  defined above  */
14   static int   nseq[IMAXX + 1] = {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18};
15   int          reduct, exitflag = 0;
16
17   d_BS = matrix(1, nv, 1, KMAXX);
18   err = vector(1, KMAXX);
19   x_BS = vector(1, KMAXX);
20   yerr = vector(1, nv);
21   ysav = vector(1, nv);
22   yseq = vector(1, nv);
23
24   if (eps != epsold)  /* New tolerance, so reinitialize  */
25   {
26      *hnext = xnew = -1.0e29;    /* Impossible values   */
27      eps1 = SAFE1 * eps;        /* SAFE1 is a "safety factor" in the stepsize selection
       */
28      a[1] = nseq[1] + 1;       /* Compute work coefficients A_k. Eq. (16.4.6) Numerical
       Recipies  */
29
30      for (k = 1; k <= KMAXX; k++) a[k+1] = a[k] + nseq[k+1];   /* Eq. (16.4.6) Numerical
       Recipies */
31
32      for (iq = 2; iq <= KMAXX; iq++)      /* Compute alpha(k, iq), Eq. (16.4.10)
       Numerical Recipies  */
33      {
34        for (k = 1; k < iq; k++)
35          alf[k][iq] = pow( eps1, (a[k+1] - a[iq+1]) / ( (a[iq+1] - a[1] + 1.0) * (2*k +
       1) ) );
36      }   /*  end for iq = 2... */
37
38      epsold = eps;
39
```

```
    for (kopt = 2; kopt < KMAXX; kopt++)      /*  Determine optimal row number for convergence.  */
      if ( a[kopt+1] > a[kopt] * alf[kopt-1][kopt] ) break;

    kmax = kopt;
  }  /* end if  */

  h = htry;

  for (i = 1; i <= nv; i++) ysav[i] = y[i];         /*   Save the starting values.   */

  if (*xx != xnew || h != (*hnext)) /*   A new stepsize or a new integration:  */
  {
    first = 1;    /* re-establish the order window. Eq. (16.4.16) Numerical Recipies */
    kopt = kmax;
  }   /* end if  */

  reduct = 0;

  for ( ; ; )
  {
    for (k = 1; k <= kmax; k++) /* Evaluate the sequence of modified midpoint integrations. */
    {
      xnew = (*xx) + h;

      if (xnew == (*xx)) nrerror("Step size underflow in bsstep.");

      mmid(ysav, dydx, nv, *xx, h, nseq[k], yseq, derivs);  /* yseq = y (*xx + h), is output
                 estimate from midpoint method  */

      xest = SQR( h / nseq[k] );   /* Squared, since error series is even. */

      pzextr(k, xest, yseq, y, yerr, nv);  /*  Perform extrapolation of y values obtained from
              midpoint method for different values of step sizes.
              yseq = y (*xx + h) and y = y(h/nseq[k]) = y(xest)
                                                  is output, so that stepsize tends to zero. */

      if (k != 1)       /*  Compute normalized error estimate eps(k). */
      {
        errmax = TINY;

        for (i = 1; i <= nv; i++) errmax = FMAX(errmax, fabs(yerr[i] / yscal[i]) );

        errmax = errmax / eps;      /* Scale obtained error relative to required error (tolerance).  */

        km = k - 1;

        err[km] = pow( errmax / SAFE1, 1.0 / (2 * km + 1) );   /* Eq. (Eq. 16.4.17) Numerical Recipies  */

      }  /*  end if   */

      if ( k != 1 && (k >= kopt-1 || first) )   /* In order window.  */
      {
        if (errmax < 1.0)    /*  Obtained error is less than required error. Converged. */
        {
          exitflag = 1;
          break;     /* exit loop for (k = 1; k <= kmax; k++) */
        } /*  end if   */

        if ( k == kmax || k == kopt + 1 ) /* Passed convergence column. Check for possible
              stepsize reduction. */
        {
           red = SAFE2 / err[km];
           break;    /* exit loop for (k = 1; k <= kmax; k++) */
        }
```

```
        else
           if (k == kopt && alf[kopt-1][kopt] < err[km])  /* (Arrived at convergence column, km = kopt-1.
                 Test criterium in Eq. 16.4.15)  */
           {
             red = 1.0 / err[km];
             break;     /* exit loop for (k = 1; k <= kmax; k++) */
           }   /*  end if   */
           else
             if ( kopt == kmax && alf[km][kmax - 1] < err[km] ) /* ??? (Convergence column is kmax.
                 Test criterium in Eq. 16.4.15)  */
             {
               red = alf[km][kmax - 1] * SAFE2 / err[km];
               break;     /* exit loop for (k = 1; k <= kmax; k++) */
             }   /*  end if   */
             else
               if (alf[km][kopt] < err[km])    /* ??? (k = kopt, test criterium in Eq. 16.4.15)  */
               {
                  red = alf[km][kopt - 1] / err[km];
                  break;     /* exit loop for (k = 1; k <= kmax; k++) */
               }  /*  end if   */

      }   /* end if In order window  */

    }   /*  end for (k = 1; k <= kmax; k++) Evaluate the sequence of modified midpoint integrations. */

   if (exitflag) break;  /* exit loop for ever. */

   red = FMIN(red, REDMIN);    /* Reduce stepsize by at least REDMIN and at most REDMAX. */
   red = FMAX(red, REDMAX);
   h = h * red;
   reduct = 1;

  } /* end for ever.  Try again.  */

  *xx = xnew;   /* Successful step taken.  */
  *hdid = h;
  first = 0;
  wrkmin = 1.0e35;    /* Compute optimal row for convergence and corresponding stepsize. */

  for (kk = 1; kk <= km; kk++)    /*  Eq. (16.4.9) Numerical Recipies  */
  {
     fact = FMAX(err[kk], SCALMX);
     work = fact * a[kk+1];     /* Eqs. 16.4.7 and 16.4.5 Numerical Recipies   */
     if (work < wrkmin)
     {
        scale = fact;
        wrkmin = work;
        kopt = kk + 1;    /* optimal row for convergence  */
     }  /*  end if  */
  }   /* end for  */

  *hnext = h / scale;    /* Eq. 16.4.5 and Eq. 16.4.17  Numerical Recipies  */

  if (kopt >= k && kopt != kmax && !reduct)
  {            /*  Check for possible order increase, but not if stepsize was just reduced.  */
     fact = FMAX( scale / alf[kopt-1][kopt], SCALMX);
     if ( a[kopt+1] * fact <= wrkmin )     /* Eq. 16.4.13  */
     {
        *hnext = h / fact;      /* Eqs. 16.4.14, 16.4.17 and 16.4.5 Numerical Recipies */
        kopt = kopt + 1;
     }  /*  end if  */
  }  /*  end if  */

  free_vector(yseq, 1, nv);
  free_vector(ysav, 1, nv);
```

```
  free_vector(yerr, 1, nv);
  free_vector(x_BS, 1, KMAXX);
  free_vector(err, 1, KMAXX);
  free_matrix(d_BS, 1, nv, 1, KMAXX);

}
```