



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Paula Tavares Alves Bittencourt

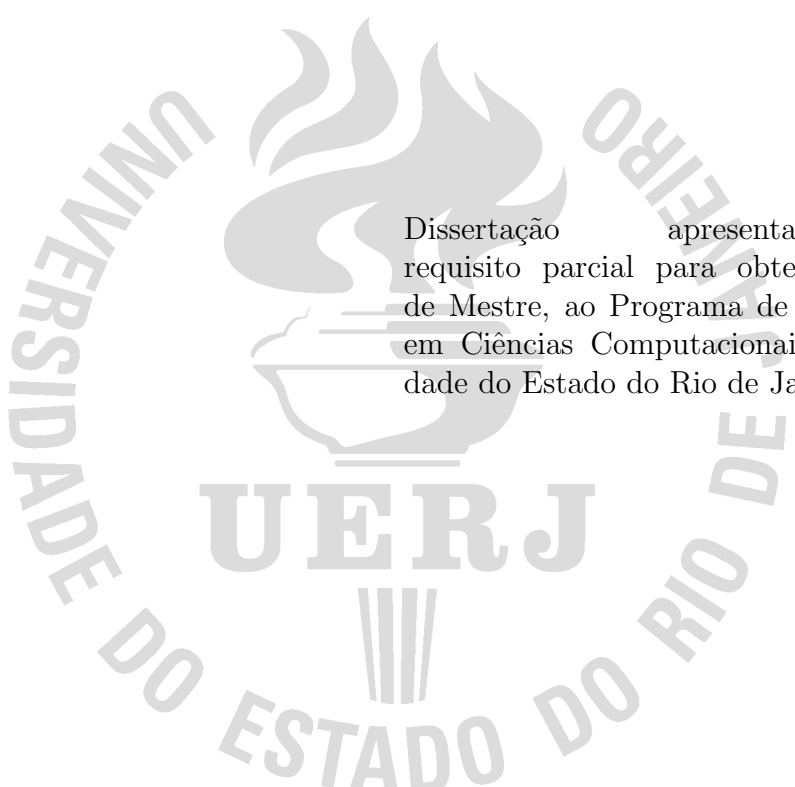
**Modelagem matemática determinística do fluxo do tráfego
veicular**

Rio de Janeiro

2014

Paula Tavares Alves Bittencourt

Modelagem matemática determinística do fluxo do tráfego veicular



Dissertação apresentada como
requisito parcial para obtenção do título
de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação
em Ciências Computacionais, da Universi-
dade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Frederico Fragoso de B. e Vasconcellos

Coorientadora: Prof^a Dra. Patrícia Nunes da Silva

Rio de Janeiro

2014

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

B624

Bittencourt, Paula Tavares Alves.

Modelagem matemática determinística do fluxo do tráfego veicular/ Paula Tavares Alves Bittencourt. - 2014.

63 f.

Orientador: Carlos Frederico Fragoso de B. e Vasconcellos.

Coorientadora: Patrícia Nunes da Silva

Banca Examinadora: Carlos Frederico Fragoso de B. e Vasconcellos, Patrícia Nunes da Silva, Sandra Mara Cardoso Malta, Carlos Antônio de Moura.

Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística.

1. Modelos matemáticos - Teses. 2. Trânsito - Fluxo. I. Vasconcellos, Carlos Frederico Fragoso de B. e II. Silva, Patrícia Nunes da. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.

CDU 519.87

Autorizo apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Paula Tavares Alves Bittencourt

Modelagem matemática determinística do fluxo do tráfego veicular

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Computacionais, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 08 de maio de 2014.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Carlos Frederico Fragoso de B. e Vasconcellos (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof^a Dra. Patrícia Nunes da Silva (Coorientadora)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof^a Dra. Sandra Mara Cardoso Malta
Laboratório Nacional de Computação Científica

Prof. Dr. Carlos Antônio de Moura
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Rio de Janeiro

2014

AGRADECIMENTOS

O primeiro gesto de agradecimento é a DEUS - d'ELE todas as coisas dependem e que, com sua infinita bondade, concedeu-me a oportunidade de, na difícil caminhada, experimentar a inefável sensação de alcançar um patamar acima, o meu mestrado.

Depois, o agradecimento aos meus pais que, na segurança de um lar bem estruturado, plasmaram minha personalidade e fincaram a marcação do meu caráter.

Logo a seguir, acode-me a imagem do meu esposo, Artur Bittencourt, sempre acreditando em mim, impelindo-me a constante buscas de aperfeiçoamento, inculcando-me o salutar desejo de superar as próprias e humanas limitações.

Ao meu orientador, Dr. Carlos Frederico F. B. Vasconcellos, a quem devoto a mais sincera e efusiva admiração por acreditar neste trabalho, pelo acompanhamento e diretrizes em todas as suas etapas e pelo convívio acadêmico de mais de dois anos.

A minha orientadora Dra. Patrícia Nunes da Silva, pelos ensinamentos transmitidos, apoio e incentivo neste trabalho.

Agradeço a minha irmã Patrícia, pela compreensão e apoio moral.

Finalmente, às agências de fomento à pesquisa; CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), pelo apoio financeiro proporcionado durante o desenvolvimento do trabalho.

Dedico esta dissertação ao meus pais, a minha irmã, ao meu marido e filho.

RESUMO

BITTENCOURT, Paula Tavares Alves. *Modelagem matemática determinística do fluxo do tráfego veicular*. 2014. 61 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Computacionais) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

Nesta dissertação consideramos duas abordagens para o tráfego de veículos: a macroscópica e a microscópica. O tráfego é descrito macroscopicamente por três grandezas físicas interligadas entre si, a saber, a velocidade, a densidade e o fluxo, descrevendo leis de conservação do número de veículos. Há vários modelos para o tráfego macroscópico de veículos. A maioria deles trata o tráfego de veículos como um fluido compressível, traduzindo a lei de conservação de massa para os veículos e requer uma lei de estado para o par velocidade-densidade, estabelecendo uma relação entre eles. Já o modelo descrito pela abordagem microscópica considera os veículos como partículas individuais. Consideramos os modelos da classe “*car – following*”. Estes modelos baseiam-se no princípio de que o $(n - 1)$ -ésimo veículo (denominado de “*following-car*”) acelera em função do estímulo que recebe do n -ésimo veículo. Analisamos a equação de conservação do número de veículos em modelos macroscópicos para fluxo de tráfego. Posteriormente resolvemos esta equação através da linearização do modelo, estudando suas retas características e apresentamos a resolução do problema não linear em domínios limitados utilizando o método das características.

Palavras-chave: Fluxo do tráfego veicular. Conservação do número de veículos.
Linearização. Método das Características.

ABSTRACT

BITTENCOURT, Paula Tavares Alves. *Deterministic mathematical modeling of the flow of vehicular traffic*. 2014. 61 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Computacionais) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

In this work we consider two approaches to vehicle traffic: the macroscopic and the microscopic one. Traffic is macroscopically described by three physical quantities interconnected: velocity, density and flow, conservation laws describing the number of vehicles. There are various models to the macroscopic vehicle traffic. Most of them treats vehicular traffic as a compressible fluid, extends the law of mass conservation for vehicles and requires state law to speed-density pair, establishing a relationship between them. And the model described by the microscopic approach considers vehicles as individual particles. We consider the class of models car-following. These models are based on the principle that the speed of the $(n - 1)$ -th vehicle (called following- car) depends on the speed of n -th vehicle. We analyze the equation of conservation of the number of vehicles for macroscopic traffic flow models. We solve this equation by linearization of the model, using the characteristics method and we also a present resolution of the nonlinear problem in bounded domains using the method of characteristics.

Keywords: Flow of vehicular traffic. Conservation number of vehicles. Linearization. Method of characteristics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Rodovia (Posição dos veículos denotada por x_i)	14
Figura 2 - Veículos 1 e 2	15
Figura 3 - Inclinação da trajetória de um veículo, $\frac{dx}{dt}$	16
Figura 4 - Velocidades dos veículos	16
Figura 5 - Campo de Velocidade constante	18
Figura 6 - Medição do fluxo da densidade em um certo trecho da rodovia	19
Figura 7 - Densidade do tráfego , $\rho = \frac{1}{L+d}$	20
Figura 8 - Medição do Fluxo de tráfego	21
Figura 9 - Fluxo de carros constante	21
Figura 10 - Distância que um veículo, movendo-se em velocidade constante u_0 , percorre em τ horas	22
Figura 11 - Distância aproximada que um veículo percorre em Δt horas	23
Figura 12 - Veículos entrando e saindo de um segmento de rodovia	25
Figura 13 - Velocidade do veículo diminui quando a densidade do tráfego aumenta	31
Figura 14 - Velocidade do veículo depende somente da densidade do tráfego	33
Figura 15 - Relação fluxo-densidade	34
Figura 16 - Relação fluxo-densidade	34
Figura 17 - Modelo estacionário “Car Following”: relação densidade-velocidade	37
Figura 18 - Limite da Velocidade limitada pela Curva da Densidade-Velocidade do “Car Following”	38
Figura 19 - Modelo estacionário do “Car Following” não Linear: Relação Densidade-Velocidade	40
Figura 20 - Tráfego Não Uniforme	42
Figura 21 - Características da equação (36)	48
Figura 22 - Curva fluxo-densidade	48
Figura 23 - Curva Fluxo-Densidade	49
Figura 24 - Tráfego uniforme	50
Figura 25 - Tráfego uniforme perturbado	50
Figura 26 - Tráfego uniforme perturbado	50
Figura 27 - Ondas de densidade linear	51
Figura 28 - Perturbação	52
Figura 29 - Diagrama fundamental do tráfego da rodovia: Tráfego da velocidade da onda c e velocidade do veículo u	53
Figura 30 - Curvas características da equação (43)	56

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	9
1	NOÇÕES BÁSICAS DE FLUXO DE TRÁFEGO	11
1.1	Velocidade do automóvel e Campo de velocidade	14
1.2	Densidade do Tráfego	18
1.3	Fluxo de Tráfego	20
2	CONSERVAÇÃO DO NÚMERO DE VEÍCULOS	24
3	UMA RELAÇÃO ENTRE VELOCIDADE E DENSIDADE	29
3.1	Fluxo de tráfego	32
3.2	Modelo <i>Car – Following</i> - estado estacionário	35
3.3	Equação Diferencial Parcial	41
4	LINEARIZAÇÃO	43
4.1	Equação Diferencial Parcial Linear	45
5	ONDAS DE DENSIDADE LINEAR	50
6	O MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS	54
6.1	Leis de Conservação Lineares	55
6.2	Leis de Conservação Não-Lineares	57
	CONCLUSÃO	60
	REFERÊNCIAS	61

INTRODUÇÃO

As Teorias do Fluxo de Tráfego Veicular procuram descrever matematicamente as interações entre veículos e rodovias incluindo os dispositivos de controle. Com aumento significativo do uso dos automóveis e a expansão do sistema viário surgiu a necessidade do estudo de características do tráfego. Uma abordagem possível envolve modelos constituídos por equações diferenciais parciais, ou seja, modelos aplicáveis na área da teoria de modelos determinísticos. Neste trabalho, apresenta-se uma modelagem determinística para o fluxo de tráfego veicular que vem sendo estudada por diversas áreas de conhecimento, tais como: computação, engenharia e matemática e pode ser desenvolvida pelo menos em duas diferentes escalas de representação: a microscópica e a macroscópica.

Tradicionalmente, o tratamento de um problema de fluxo de tráfego era baseado na análise de dados medidos experimentalmente. Contudo, a pobreza dos dados e a dificuldade dessas análises levaram a uma série de diferentes interpretações sobre o comportamento das relações entre os parâmetros fundamentais de tráfego como, por exemplo, densidade, fluxo e velocidade.

O trabalho desenvolvido nessa dissertação procura estudar modelos de fluxo de tráfego, utilizando a abordagem macroscópica, introduzindo na dinâmica do sistema novas regras de modo a torná-lo mais realista. Este estudo está voltado para um tratamento determinístico do sistema que em geral pode prover de informações com mais detalhe a respeito dos regimes e das grandezas que caracterizam o fluxo de tráfego de veículos.

O objetivo deste trabalho é analisar a equação de conservação do número de veículos em modelos macroscópicos para fluxo de tráfego e posteriormente resolver esta equação em duas etapas:

- “Linearizando” o modelo e estudando suas retas características.
- Resolvendo o problema não linear em domínios limitados.

O Capítulo 1 apresenta uma breve introdução aos conceitos básicos das variáveis que descrevem o modelo, apresentando uma revisão dos modelos de tráfego encontrados na literatura e as principais ideias de cada um destes modelos. Também traz um breve histórico sobre o desenvolvimento da Teoria do Fluxo de Tráfego Veicular.

No Capítulo 2, baseando-se nas variáveis descritas no Capítulo 1 (fluxo, velocidade e densidade), deduziremos uma equação de conservação do número de veículos. Nesta equação não consideramos veículos entrando e saindo ao longo da rodovia.

O Capítulo 3 estabelece a relação entre velocidade e densidade, este modelo consiste em uma única equação a derivadas parciais. Esta equação traduz a lei da conservação do número de veículos numa rodovia cuja velocidade é prescrita pela relação direta entre a

velocidade versus densidade vista no Capítulo 1 e assume que a velocidade depende da densidade do tráfego. Neste capítulo faremos uma breve exposição sobre o modelo “Car-Following”. O modelo tem como conceito base a relação entre o estímulo e a resposta e como objetivo descrever como um veículo segue o outro. Cada condutor controla o seu veículo em função do estímulo que recebe do veículo que o precede. Ele descreve a relação entre a variação da velocidade de um veículo, chamado seguidor (following-car), em resposta ao estímulo que recebe de um veículo que o precede.

O Capítulo 4 apresenta a linearização da equação de conservação do número de veículos.

O Capítulo 5 apresenta os resultados teóricos sobre ondas de densidade dos modelos de tráfego contínuo.

O capítulo 6 resolve a Lei de conservação linear e não linear pelo método das características. Apresentando como exemplo um modelo conhecido por Equação de Burgers.

1 NOÇÕES BÁSICAS DE FLUXO DE TRÁFEGO

Nesse capítulo, introduziremos os conceitos básicos relacionados com o fluxo de tráfego, conservação do número de veículos, e relação entre as variáveis (densidade, velocidade e fluxo de tráfego), tendo como base o livro de Haberman (1977). Quando necessário, será feita uma recordação dos conceitos pertinentes da Teoria de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), que podem ser encontrados nas referências Boyce e Di-Prima (1998) e Sotomayor (1979) e da Teoria de Equações Diferenciais Parciais (EDP), encontrados na referência Medeiros e Andrade (1978).

O capítulo inicia com definições importantes das variáveis que descrevem o fluxo de tráfego em uma rodovia, isto é, velocidade, densidade e fluxo de tráfego, as quais são ferramentas fundamentais para modelar o tráfego. Em seguida, apresentaremos uma revisão dos modelos de tráfego (abordagens teóricas) encontrados na literatura e as principais ideias de cada um destes modelos.

A teoria do fluxo de tráfego consiste na aplicação de equações matemáticas e vem sendo estudada, por várias áreas do conhecimento, como por exemplo, a computação, a engenharia, a física, a matemática, e outras áreas, na descrição do comportamento do tráfego veicular. Mediante o interesse do estudo que se deseja realizar, há pelo menos duas abordagens teóricas para o fluxo de tráfego veicular: a macroscópica, que tem como objetivo descrever o comportamento das correntes de tráfego e a microscópica, cujo interesse é a interação entre dois ou mais veículos numa corrente de tráfego.

O estudo relacionado ao fluxo de tráfego iniciou-se por volta de 1930, com a especificação de modelos analíticos que relacionavam a velocidade com a densidade do tráfego e a aplicação da teoria de probabilidades com objetivo de tentar entender o fluxo de tráfego encontrado em Greenshields et al. (1935). Nesta época, para caracterizar o fluxo de veículos, o tráfego era considerado como uma massa homogênea percorrendo um tubo, sem intervenções, sem interrupções e sem desagregação nos resultados. Este tipo de tratamento foi chamado de abordagem macroscópica do fluxo de tráfego.

Nesta abordagem macroscópica o estado do sistema é descrito por valores médios, sendo que estas médias podem ser temporais ou espaciais (quantidades macroscópicas calculadas). O fluxo de veículos, a velocidade e a densidade são consideradas grandezas básicas associadas aos movimentos dos veículos e que dependem do tempo e da posição, isto é, as variáveis macroscópicas do tráfego descritas acima aplicam-se ao conjunto dos veículos trafegando numa determinada rodovia ou trecho da rodovia e representam valores médios que estão ligados a esses conjuntos.

Neste tipo de abordagem não é considerado o comportamento individual dos veículos e ela associa o fluxo de tráfego ao escoamento de um fluido. O fluxo de tráfego é modelado como um fluido compressível formado por veículos e descrito por uma estrutura

macroscópica considerando que o sistema pode acumular um número máximo de veículos e que os veículos circulam a uma dada velocidade média.

Aproximadamente dez anos depois, aprofundou-se na investigação da operação do tráfego em interseções, iniciando o estudo das relações matemáticas que procuravam descrever as interações entre os veículos. No começo de 1950 foi observado um grande desenvolvimento nas formulações da teoria do fluxo de tráfego, quando foram implementadas as teorias do veículo “seguidor” (*car following*), de aceleração, de aceitação de brechas, incidentes nas rodovias e de mudança de faixas.

Assim, cada veículo passou a ser avaliado individualmente, sendo possível considerar interrupções no tráfego por causa de dispositivos de controle (radares, redutores de velocidades, etc...) ou incidentes nas vias e obter os dados mais desagregados, ficando caracterizada uma abordagem microscópica do tráfego. Vários trabalhos podem ser citados como contribuição para esse avanço no estudo da abordagem microscópica da teoria do fluxo de tráfego, entre eles estão os trabalhos de Pipes (1953); Lighthill e Whitham (1955); e Chandler, Herman e Montroll (1958).

A análise microscópica das relações entre pares de veículos de uma mesma corrente de tráfego permite o estudo de fluxos não necessariamente homogêneos ou contínuos.

Na abordagem microscópica, o modelo de perseguição tem sido um dos principais processos que procuram descrever o comportamento do elemento motorista-veículo como resposta a um estímulo recebido. Os modelos nesse tipo de tratamento buscam traduzir a variação de velocidade de um veículo (chamado seguidor) como resposta ao estímulo representado pela velocidade relativa entre ele e o veículo que se desloca a sua frente num fluxo de tráfego (chamado líder).

O modelo microscópico tem a premissa de que os intervalos entre os veículos, em uma seção especificada, são constantes. Apesar deste tipo de modelo ser muito útil para determinados estudos de engenharia de tráfego, essa suposição é bastante forte, visto que é fácil perceber que os “headways” (espaçamento) entre os veículos em uma via não são constantes e variam aleatoriamente.

Como a descrição microscópica trata da identificação individual dos veículos, então o estado do veículo é determinado pela sua posição e velocidade definidas como variáveis dependentes do tempo, as quais descrevem o sistema. Os modelos são caracterizados por estas variáveis as quais descrevem explicitamente o movimento de cada veículo por meio de uma equação diferencial ordinária (EDO).

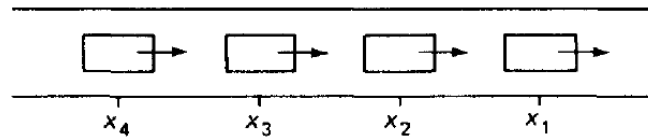
Em resumo, o quadro comparativo fornece um melhor entendimento dos modelos anteriormente mencionados.

Tabela 1 - Quadro comparativo

Características	Modelos Macroscópicos	Modelos Microscópicos
Base	Se baseiam nas relações determinísticas do fluxo, velocidade e densidade do tráfego.	Se baseiam nas relações interativas entre os veículos considerando os movimentos individuais desses veículos.
Variáveis	Fluxo (número de veículos por unidade de tempo), velocidade (distância por unidade de tempo) e densidade (número de veículos por unidade de espaço).	Intervalos de tempos entre veículos sucessivos, velocidades individuais e espaçamento entre veículos sucessivos.
Descrição	As variáveis associadas aos movimentos dos veículos dependem do tempo e da posição e são aplicadas ao conjunto de veículos trafegando num trecho da rodovia e descrevem valores médios que estão ligados a esse conjunto.	Como trata da identificação individual dos veículos, então o estado do veículo é determinado pela sua posição e as velocidades são definidas como variáveis dependentes do tempo, aos quais descrevem o sistema e o movimento do veículo. O modelo é definido por EDO's.
Vantagens e limitações	Estes modelos são eficientes, pois a análise é feita em trechos específicos, sem interrupções e sem desagregação nos resultados.	Estes modelos são eficazes na avaliação de condições de tráfego altamente congestionado de configurações geométricas complexas e em diversos estudos que avaliaram impactos no sistema ocasionados por modificações das condições padrões de tráfego. Nestes modelos as características operacionais de tráfego são influenciadas pelas condições da rodovia e dispositivos de controle.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 1 - Rodovia (Posição dos veículos denotada por x_i)



Fonte: Haberman (1977, p. 260)

1.1 Velocidade do automóvel e Campo de velocidade

A velocidade, denotada por u , é a primeira variável utilizada na modelagem matemática do fluxo de tráfego, pode ser considerada macroscopicamente, indicando em quanto tempo determinada distância foi percorrida, ou microscopicamente, descrevendo com que rapidez um veículo está se movimentando em um determinado instante.

Vamos imaginar um veículo movendo-se ao longo da estrada. Se a posição do veículo no instante de tempo t é denotada por $x_0(t)$, então sua velocidade é dada por $\frac{dx_0(t)}{dt}$ e sua aceleração é dada por $\frac{d^2x_0(t)}{dt^2}$. Em uma situação em que a estrada tem muitos veículos, cada um é designado por $x_i(t)$ com $i = 1, 2, 3, \dots$, como podemos ver na figura 1.

Existem duas maneiras de medir a velocidade em uma rodovia. A mais comum é medir a velocidade de cada veículo x_i , com $u_i = \frac{dx_i}{dt}$. Com N veículos, há N velocidades diferentes, cada uma dependendo do tempo, $u_i(t)$, $1, \dots, N$. Em muitas situações, o número de veículos é tão grande que é difícil manter o controle de cada veículo. Tornando quase impossível obter a velocidade de cada veículo.

Assim, associaremos a cada ponto no espaço (em cada instante de tempo) a velocidade do veículo nesse ponto, obtendo um campo de vetores de velocidades dos veículos, denominado Campo de Velocidade, denotado por $u(x, t)$. Isso seria a velocidade medida no tempo t por um observador fixo na posição x .

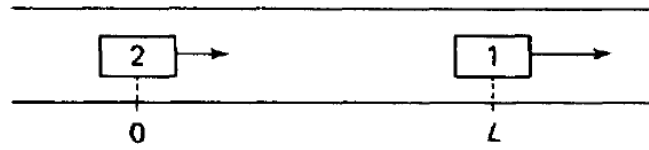
Em resumo, o campo de velocidade $u(x, t)$ do veículo, na posição do veículo x_i , no tempo t , é a velocidade $u_i(t)$ do veículo:

$$u(x_i(t), t) = u_i(t) \tag{1}$$

A existência do Campo de Velocidade $u(x, t)$ implica que para cada x e t existe uma velocidade. Então, este modelo não permite que veículos passem uns pelos outros (uma vez que existiriam simultaneamente no ponto de passagem duas velocidades diferentes).

Como, por exemplo, considere dois veículos na estrada, veículo 1 e veículo 2, como mostra a figura 2 abaixo.

Figura 2 - Veículos 1 e 2



Fonte: Haberman (1977, p. 261)

Suponhamos que o veículo 1 mova-se com velocidade 45 km/h e o veículo 2 com 30 km/h. Assumimos também que o carro 1 está em $x = L > 0$ no tempo $t = 0$, enquanto o veículo 2 está $x = 0$ no $t = 0$. Então,

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = 45, t > 0, x_1(0) = L \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = 30, t > 0, x_2(0) = 0 \end{cases}$$

Integrando estas equações produziremos a posição de cada veículo como uma função do tempo, temos:

$$\begin{cases} x_1 = 45t + L \\ x_2 = 30t \end{cases}$$

Estes movimentos estão esboçados em um Diagrama de Espaço-Tempo, conforme figura 3 a seguir, e produzem a trajetória do veículo. Neste caminho, o Campo de Velocidade, u , pode ser formado como uma função de x no tempo t .

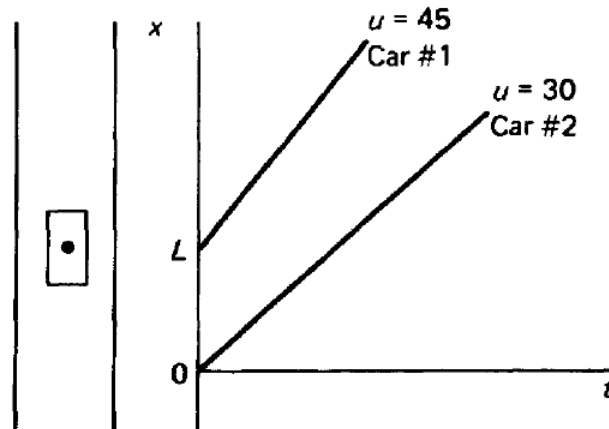
Na rodovia com dois veículos, na maioria das vezes não conseguimos definir o Campo de Velocidade. Portanto, nem sempre é conveniente usar o Campo de Velocidade a não ser que existam muitos veículos.

Suponhamos que os campos de velocidade contínuos definidos em todas as posições (para $t > 0$ e $x > 0$) existam e um exemplo disso pode ser,

$$u(x, t) = \frac{15x + 30L}{15t + L} \quad (2)$$

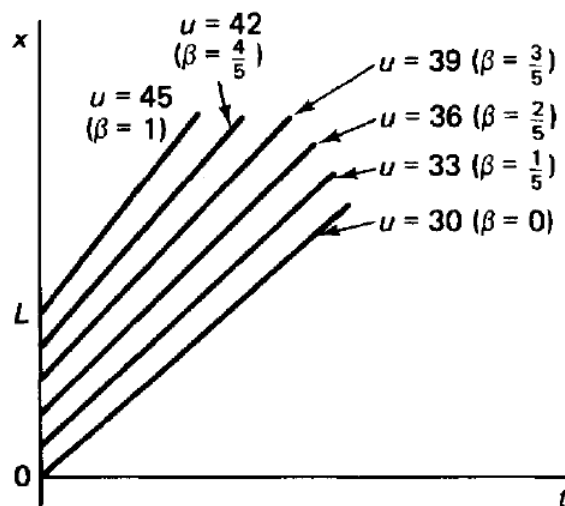
Esta expressão é consistente se o número 15 e 30 acima são velocidades. Note que quando $x = 30t$, então pela equação (2), temos $u = 30$, e quando $x = 45t + L$, temos $u = 45$. Este Campo de Velocidade é um dos muitos com esta propriedade. O campo de velocidade da equação (2) foi desenvolvido da seguinte forma:

Figura 3 - Inclinação da trajetória de um veículo, $\frac{dx}{dt}$



Fonte: Haberman (1977, p. 261)

Figura 4 - Velocidades dos veículos



Fonte: Haberman (1977, p. 262)

Como uma aproximação simples, assumiremos que exista um número infinito de veículos (de comprimento desprezível), cada um marcado com um número β . Consideremos $\beta = 0$ o primeiro veículo do lado esquerdo e $\beta = 1$ corresponde ao primeiro veículo do lado direito da faixa de comprimento L .

Supondo que o veículo marcado β move-se na velocidade, $\frac{dx}{dt} = 30 + 15\beta$, e com posição inicial, $(x(0) = \beta L)$. Quando β varia de 0 para 1, então as velocidades dos veículos variam de 30 para 45 e as posições iniciais de 0 para L , como mostrado na figura 4.

Considerando o veículo marcado β e integrando de 0 a t $\frac{dx}{dt} = 30 + 15\beta$ e usando

o dado inicial temos:

$$x = (30 + 15\beta)t + \beta L \quad \text{e,}$$

$$u = 30 + 15\beta$$

Como,

$$x(t) = (30 + 15\beta)t + \beta L = x(t) = 30t + \beta(15t + L) \quad \text{Desse modo,}$$

$$x(t) - 30t = \beta(15t + L) \quad \text{e,}$$

$$\beta = \frac{x(t) - 30t}{15t + L} \tag{3}$$

Sabemos que $\frac{dx}{dt} = 30 + 15\beta = u(x, t)$, substituindo o valor de β encontrado em (3), temos:

$$u(x, t) = 30 + 15\beta$$

$$u(x, t) = 30 + 15 \frac{x - 30t}{15t + L}$$

$$u(x, t) = 30 + \frac{15x - 30 \cdot 15t}{15t + L}$$

$$u(x, t) = \frac{30 \cdot 15t + 30L + 15x - 30 \cdot 15t}{15t + L}$$

$$u(x, t) = \frac{30L + 15x}{15t + L}$$

Sendo assim, o campo de velocidade é $u(x, t) = \frac{30L + 15x}{15t + L}$

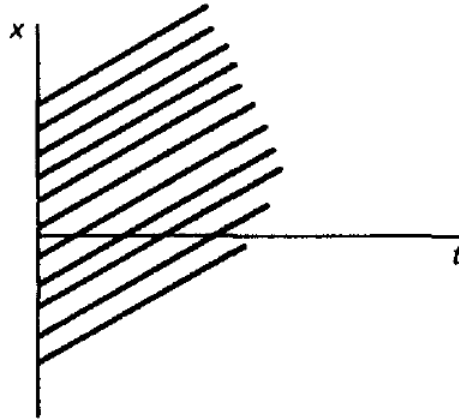
Um exemplo simples de Campo de Velocidade ocorre quando cada veículo em um fluxo de tráfego move-se ao longo de uma rodovia com velocidade constante V_0 , como indicado na figura 5. Claramente, o campo de velocidade, que usaremos para aproximar esta situação, é a mesma constante, $u(x, t) = V_0$.

Como a velocidade é uma variável cuja média pode ser obtida temporal ou espacialmente, podemos definir também a velocidade média no espaço e a velocidade média no tempo.

A velocidade média espacial (v_e) é a velocidade obtida pela média harmônica das velocidades dos veículos observadas em um determinado trecho da rodovia, ou seja,

$$v_e = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i}}$$

Figura 5 - Campo de Velocidade constante



Fonte: Haberman (1977, p. 262)

onde:

n = número total veículos num determinado trecho da rodovia.

v_i = a velocidade de cada veículo i .

A velocidade média temporal (v_t) é a velocidade obtida pela média aritmética das velocidades de v_i , isto é,

$$v_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i$$

onde:

n = número total veículos num determinado trecho da rodovia.

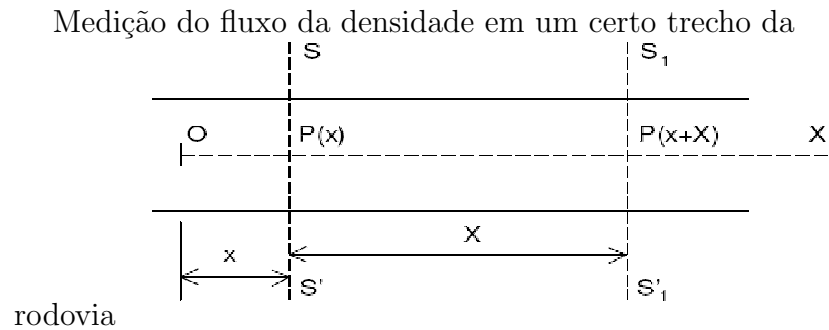
v_i = a velocidade de cada veículo i .

1.2 Densidade do Tráfego

A segunda variável utilizada na modelagem do fluxo de tráfego é a densidade de tráfego, representada por ρ , e definida como o número de veículos que ocupam uma certa extensão de uma faixa ou de uma rodovia.

Em meados de 1940 somente a técnica de fotografias aéreas era utilizada na constatação do valor da densidade de uma via (MAY, 1990). Consideremos o segmento da rodovia de comprimento X limitado pelos trechos SS' e $S_1S'_1$, representado na 6. Supondo que num determinado instante t uma fotografia é tirada e que nela seja possível contar os N veículos que se encontram naquela faixa da rodovia. A densidade $\rho(t)$, em veíc./km, é

Figura 6 - /



Fonte: Haberman (1977, p. 262)

dada pela expressão:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(x, t) = \frac{N(t)}{X} \\ \text{onde } N(t) = \text{número de veículos no instante } t \text{ e } X = \text{comprimento do trecho da rodovia.} \end{array} \right. \quad (4)$$

Portanto, a densidade veicular $\rho(x, t)$ é definida como o número N de veículos por unidade de comprimento em uma rodovia.

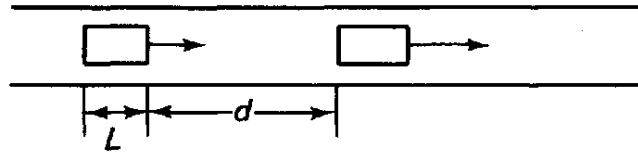
Medidas de densidade consistem em uma das mais difíceis tarefas em fluxo de tráfego veicular. Usualmente feitas por meio de dispositivos contadores que se encontram em locais estratégicos de rodovias, as medidas de densidade veicular por este método estão sujeitas a grandes variações implicando em medidas pouco precisas. Medidas de grande precisão da densidade veicular por meio de câmeras de vídeo ou fotografias aéreas em certos intervalos de rodovia são soluções interessantes do problema, mas mediante aos elevados custos, nem sempre são aplicadas.

A partir de 1960, com o objetivo de encontrar o valor da densidade de uma rodovia de uma maneira mais fácil e rápida, três novos métodos foram desenvolvidos em paralelo (MAY, 1990):

- O cálculo da densidade através de medições de fluxo e velocidade;
- A determinação da densidade através de contagens de entrada e saída de veículos em trechos determinados;
- Através da medição do percentual de ocupação de sensores instalados no pavimento.

Para o cálculo da densidade é necessário considerar o espaço longitudinal total ocupado por um veículo no fluxo do tráfego. Este espaço é composto pelo tamanho do

Figura 7 - Densidade do tráfego , $\rho = \frac{1}{L+d}$



Fonte: Haberman (1977, p. 267)

veículo e o espaço entre o primeiro veículo e o veículo “seguidor”. O espaçamento, que também é chamado de “headway”, é definido como a distância entre veículos sucessivos numa mesma corrente de tráfego, medidas na prática de pára-choque a pára-choque.

Assim, outro exemplo, imaginemos uma situação em que os veículos mantêm a mesma distância. Por conveniência, assumimos agora (como é comumente feito em análise de fluxo de tráfego) que todos os veículos têm o mesmo comprimento L . A fim de utilizar uma unidade de comprimento em problemas de tráfego, L é medido em quilômetros (Km) ao invés de metros (m). Se a distância entre os veículos é d (a distância $d + L$ é chamada de espaçamento), como mostra a figura 7, então a densidade é o número de veículos/Km:

$$\rho = \frac{1}{L + d} \quad (5)$$

Este resultado é facilmente obtido considerando um quilômetro de veículos nesta configuração e a regra de três simples (número de veículos \rightarrow quilômetros) :

$$1 \rightarrow L + d$$

$$\rho \rightarrow 1$$

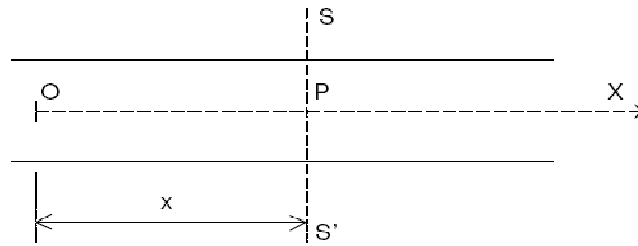
Sendo assim, a densidade corresponde a 1 quilômetro dividido pelo comprimento $L + d$, ou seja, quantos $L + d$ cabem em 1 quilômetro.

1.3 Fluxo de Tráfego

O fluxo de tráfego, também chamado de volume de tráfego, é representado pela variável q . É uma variável temporal e significa o número total de veículos que passam por um determinado trecho de uma via considerada dentro de um dado intervalo de tempo. O fluxo pode ser expresso em períodos anuais, diários e por horas.

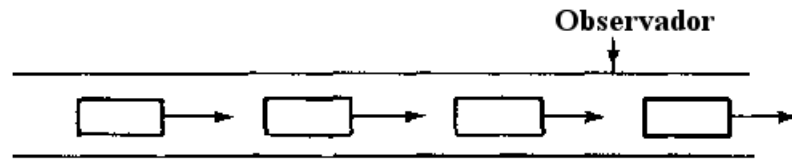
Sendo $n(x)$ o número de veículos que cruzam a seção SS' , (conforme mostrado na

Figura 8 - Medição do Fluxo de tráfego.



Fonte: Haberman (1977, p. 273)

Figura 9 - Fluxo de carros constante



Fonte: Haberman (1977, p. 273)

figura 8) durante um intervalo de tempo Δt , o fluxo $q(x)$, em veículos/h, é então definido por:

$$q(x, t) = \frac{n(x)}{\Delta t} \quad (6)$$

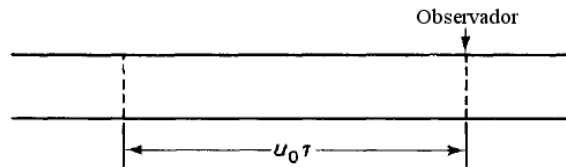
Foram aqui discutidas três variáveis fundamentais do tráfego: velocidade, densidade e fluxo. Mostraremos, agora, que existe uma relação estreita entre elas.

Consideremos primeiro situações de trânsito mais simples. Suponhamos que em algumas rodovias, o tráfego está se movendo com velocidade constante u_0 , com uma densidade constante ρ_0 , como mostrado na figura 9.

Uma vez que cada veículo se desloca com a mesma velocidade, a distância entre os carros permanece constante. Portanto, a densidade do tráfego não muda. Qual é o fluxo de veículos? Para responder, consideremos um observador medindo o fluxo (o número de veículos que passa por hora pelo observador). Em τ horas cada veículo foi movido $u_0\tau$ distância (movendo-se com velocidade constante, a distância é igual a velocidade multiplicada pelo tempo) e assim o número de automóveis que passa pelo observador em τ horas é o número de automóvel na distância $u_0\tau$, ver figura 10.

Uma vez que ρ_0 é o número de automóveis por quilômetro, existem $u_0\tau$ quilômetros, então $\rho_0 u_0\tau$ é o número de automóveis que passam pelo observador em τ horas. Assim, o

Figura 10 - Distância que um veículo, movendo-se em velocidade constante u_0 , percorre em τ horas.



Fonte: Haberman (1977, p. 273)

número de automóveis por hora, o qual foi chamado de fluxo de tráfego, q , é:

$$q = \rho_0 u_0$$

Embora esta fórmula tenha sido derivada de um caso simplificado, mostraremos que esta é uma Lei Fundamental:

o fluxo de tráfego = (densidade do tráfego) . (campo de velocidade).

Se as variáveis do tráfego dependem de x e t , isto é, $q(x, t)$, $\rho(x, t)$ e $u(x, t)$, então mostramos ainda que,

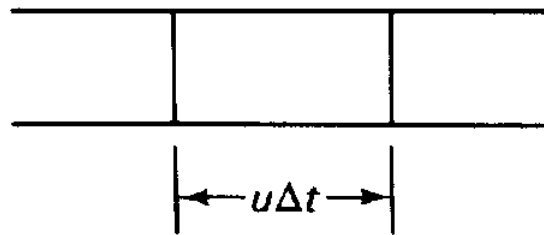
$$q(x, t) = \rho(x, t)u(x, t) \tag{7}$$

Uma maneira fácil de mostrar que o fluxo é igual a densidade vezes velocidade é considerar o número de veículos que passam por $x = x_0$ em um tempo muito pequeno Δt , isto é, entre t_0 e $t_0 + \Delta t$. Neste pequeno intervalo de tempo os veículos não ficam distantes, e portanto, (se ρ e u são funções contínuas de x e t), os valores de $u(x, t)$ e $\rho(x, t)$ podem ser aproximados por constantes em $x = x_0$ e $t = t_0$. Em um intervalo de tempo pequeno Δt , os automóveis “ocupam” um espaço pequeno, aproximadamente $u(x, t)\Delta t$, veja figura 11.

O número de automóveis passando é aproximadamente $u(x, t)\Delta t\rho(x, t)$. O fluxo de tráfego é dado pela equação (7). Consequentemente, três variáveis fundamentais do tráfego: densidade $\rho(x, t)$, velocidade $u(x, t)$ e fluxo $q(x, t)$ são relacionadas pela equação (7).

Portanto, a função de fluxo $q(x, t)$ representa a taxa com que os veículos passam na posição x no tempo t . Para um observador fixo ao longo da rodovia, a taxa com que os veículos passam por ele depende da densidade de tráfego ρ e da velocidade u . Se u é medida em km/hora temos que o fluxo q é dado pela equação (7).

Figura 11 - Distância aproximada que um veículo percorre em Δt horas.



Fonte: Haberman (1977, p. 274)

2 CONSERVAÇÃO DO NÚMERO DE VEÍCULOS

Nesta seção, formulamos um modelo determinístico para fluxo de tráfego. Supondo que a densidade e o campo de velocidade são inicialmente conhecidos para uma estrada de comprimento infinito, podemos estabelecer as densidades e velocidades em tempos futuros?

Por exemplo, se o sinal torna-se vermelho e logo depois verde, então o modelo de tráfego pode ser estabelecido?

Podemos considerar duas variáveis fundamentais, $\rho(x, t)$ e $u(x, t)$ (desde que $q = \rho u$ como foi demonstrado anteriormente). Por suposição, conhecemos a densidade inicial do tráfego ($\rho(x, 0)$) e o campo de velocidade no tempo t , $u(x, t)$. Então, o movimento de cada veículo satisfaz à seguinte EDO, com $x(0) = x_0$:

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t)$$

Veremos que a densidade do tráfego no tempo futuro pode ser calculada sabendo a velocidade do tráfego (e a densidade inicial). Inicialmente queremos determinar como a densidade pode ser calculada se a velocidade é conhecida. Seguindo cada veículo insistimos que o número de veículos fique o mesmo. Entretanto, as variáveis do tráfego: densidade, velocidade e fluxo, foram introduzidas de modo que os veículos são seguidos individualmente. Vamos agora tentar “conservar veículos”, mas usando aquelas variáveis do campo de tráfego.

Consideremos que não exista entrada nem saída de veículos ao longo de uma determinada rodovia. Selecionando algum trecho da rodovia entre os pontos $x = a$ e $x = b > a$, saberemos que o número de veículos encontrado entre a e b , em geral dependerá somente do tempo t .

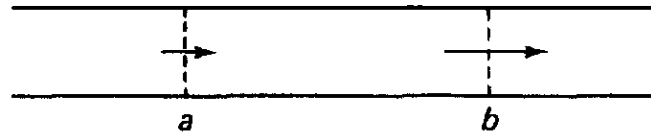
Podemos observar as seguintes situações:

- Se o fluxo de veículos em $x = a$ é maior que o fluxo de veículos em $x = b$, então o número de veículos no segmento aumentará.
- Se o fluxo de veículos em $x = b$ é maior que o fluxo de veículos em $x = a$, então o fluxo de veículos no segmento diminuirá.

No intervalo da estrada entre $x = a$ e $x = b$, como é mostrado na figura 12, o número de veículos N é a integral da densidade do tráfego:

$$N = \int_a^b \rho(x, t) dx \tag{8}$$

Figura 12 - Veículos entrando e saindo de um segmento de rodovia.



Fonte: Haberman (1977, p. 276)

Na equação (8), fica implícito que o número de veículos dentro de $[a, b]$ é igual a integral da densidade, ou seja, é associado ao número máximo de veículos que poderia caber em uma unidade de área.

Se não existem entradas nem saídas nesta estrada, então o número de veículos entre $x = a$ e $x = b$ ainda pode mudar com o tempo. O número diminui para veículos saindo da região $x = b$ e aumenta com o resultado de veículos entrando na região $x = a$. Assumindo que os veículos não são criados ou destruídos, então a mudança no número de veículos resulta somente da passagem entre $x = a$ e $x = b$. Se o número de veículos está fluindo na taxa de 300 veículos por hora em $x = a$, e se os veículos estão fluindo na taxa de 275 veículos por hora em $x = b$, então claramente o número de veículos entre $x = a$ e $x = b$ está aumentando em 25 veículos por hora.

Generalizando esse resultado para situação na qual o número de veículos passando pela fronteira (fluxo de tráfego $q(a, t)$ e $q(b, t)$) não é constante no tempo, teremos:

$$\frac{dN}{dt} = q(a, t) - q(b, t) \quad (9)$$

A diferença entre o número de carros considerando os tempos $t + \Delta t$ e t , é dada por: $N(t + \Delta t) - N(t)$, sendo aproximadamente igual ao fluxo de veículos em $x = a$ menos o fluxo de veículos em $x = b$, quando consideramos Δt muito pequeno, isto é:

$$(N(t + \Delta t) - N(t)) \approx \Delta t(q(a, t) - q(b, t))$$

Dividindo por Δt e tomando o limite de $\Delta t \rightarrow 0$, teremos:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta t(q(a, t) - q(b, t))}{\Delta t}$$

$$\frac{dN}{dt} = -(q(b, t) - q(a, t))$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, teremos:

$$\frac{dN}{dt} = - \int_a^b \frac{\partial q}{\partial x}(x, t) dx$$

Integrando ambos os lados entre $t = t_0$ e $t = t_1$, teremos:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dN}{dt} dt = - \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b \frac{\partial q}{\partial x}(x, t) dx dt$$

$$N(t_1) - N(t_0) = - \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b \frac{\partial q}{\partial x}(x, t) dx dt$$

Pela equação (8) temos:

$$\int_a^b \rho(x, t_1) dx - \int_a^b \rho(x, t_0) dx = - \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b \frac{\partial q}{\partial x}(x, t) dx dt$$

Novamente aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, teremos:

$$\int_a^b \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) dt dx = - \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b \frac{\partial q}{\partial x}(x, t) dx dt \quad \text{logo,}$$

$$\int_a^b \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) dt dx + \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b \frac{\partial q}{\partial x}(x, t) dx dt = 0 \quad (10)$$

Usando o Teorema de Fubini, teremos:

$$\int_a^b \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x}(x, t) \right) dx dt = 0 \quad (11)$$

Como a e b são posições arbitrárias, t_0 e t_1 são tempos arbitrários e o integrando é contínuo em \mathbb{R}^2 .

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} q(x, t) = 0 \quad (12)$$

ou simplesmente,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

A equação (11) afirma que a integral definida de algumas quantidade é sempre zero para todos os valores independentemente da variação dos limites da integral. A única função cuja integral é zero para todos os intervalos é a função nula.

A equação (13) é uma Equação Diferencial Parcial (EDP), e expressa a relação entre a densidade do tráfego e o fluxo do tráfego derivado, assumindo que o número de veículos é conservado, isto é, os veículos não são construídos nem destruídos. Essa relação é válida em todo x e para todo tempo t e é denominada de Equação de Conservação de Veículos.

Entretanto, para problemas de tráfego, conhecemos a relação entre as três variáveis:

$$q = \rho u$$

e então a conservação de veículos pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \quad (14)$$

Sendo assim, a equação (14) é a Lei de Conservação de Veículos na forma diferencial que regula o fluxo de tráfego sob a suposição de que a quantidade de tráfego (número de veículos) é conservada, isto é, nenhum veículo vai ser criado ou destruído (pelo menos assim esperamos) na rodovia. Mais uma suposição de modelagem pode ser incorporada na forma de função fluxo, q , que pode depender diretamente de x e t ou através de ρ ou derivadas de ρ .

A equação da conservação do número de veículos (14), que descreve a conservação de massa, é de fundamental importância para o estudo de todos os problemas relacionados ao movimento dos fluidos e neste caso no fluxo de tráfego veicular e a sua dedução pode ser vista acima.

Em resumo (14), modela o seguinte princípio físico:

Consideremos uma quantidade de veículos em uma rodovia, num determinado período de tempo. A equação da conservação do número de veículos diz que essa quantidade é constante durante todo o percurso, ou seja, não entra e nem sai veículo ao longo da rodovia.

Como a teoria do fluxo de tráfego se baseia nas variáveis anteriormente citadas (fluxo, velocidade e densidade), esta também é abordada de duas formas, a macroscópica

e a microscópica, e deduzimos a equação de conservação do número de veículos, podemos concluir que:

O modelo aplicado para representar o fluxo de tráfego veicular é de extrema importância quando se pensa em modelar de forma simplificada e determinística.

3 UMA RELAÇÃO ENTRE VELOCIDADE E DENSIDADE

No capítulo anterior demonstramos que as duas variáveis, densidade do tráfego e velocidade do veículo são relacionadas pela equação (14) de conservação do número de veículos.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0$$

Se o campo de velocidade u é conhecido, a equação (14) reduz-se a uma Equação Diferencial Parcial para a densidade do tráfego. Neste caso, a equação (14) pode ser usada para estabelecer a densidade do tráfego futuro, desde que a densidade de tráfego inicial seja conhecida.

O campo de velocidade desconhecido pode ser investigado. Considerando os veículos como partículas, é preciso saber a velocidade da partícula. Se este for um sistema mecânico, então investigamos as forças no sistema e usamos a lei de Newton para estudar o movimento das partículas. Entretanto, não existe uma lei de Newton que estabelece de qual maneira os veículos devem se mover. Não é a força que causa o movimento dos veículos, é a decisão do motorista.

Se o tráfego é suficientemente leve, então o motorista de cada veículo tem a liberdade de fazer o que quiser, certamente dentro de limitações (isto é, limites de velocidades, limites do carro, respeitando as leis de trânsito). Ocasionalmente, cada motorista diminui por causa da presença de outros veículos. Como o tráfego aumenta de leve para moderado, o motorista depara-se com veículos movendo-se lentamente em grande número. Ainda que não seja difícil passar os veículos que estão diminuindo, desde que a velocidade média dos motoristas não é menor que a velocidade desejada. Entretanto, no tráfego pesado, mudar de pista torna-se difícil e, conseqüentemente a velocidade média do tráfego diminui.

Existem muitos fatores que têm efeito sobre a velocidade na qual um veículo pode se mover desde que seja dirigido por um indivíduo. A pessoa que conduz o veículo pode querer dirigir mais rápido do que outra em um veículo diferente. Uma vez que o tráfego se torna muito mais pesado, a mudança de faixa e velocidade são, no mínimo, para cada motorista na estrada, difícil, pois mudar de faixa quando há mais veículos na estrada não é muito fácil e nem sempre é possível ir na velocidade desejada. Muitas vezes o motorista vai ficar preso à mesma velocidade com que o fluxo de tráfego está se movendo.

Com base nessas observações, pode-se dizer que em algum ponto ao longo da pista,

a velocidade do veículo depende somente da densidade de veículos,

$$u = u(\rho) \tag{15}$$

Lighthill e Whithan [8] propuseram este tipo de modelo matemático do fluxo de tráfego. Se não existem outros veículos na rodovia (densidade de tráfego pequena), então o veículo pode viajar com velocidade u_{max} ,

$$u(0) = u_{max} \tag{16}$$

Algumas vezes, u_{max} é definida como “velocidade média livre” correspondente à velocidades dos veículos, se eles estiverem livres de interferências de outros veículos. Entretanto, quando a densidade aumenta (isto é, como existem muitos veículos por quilômetros), eventualmente a presença de outros veículos pode “frear” o veículo. Como a densidade aumenta, as velocidades dos veículos continuam diminuindo, então a taxa de mudança, que é a derivada da velocidade em relação à densidade, é definida a seguir:

$$\frac{du}{d\rho} \leq 0 \tag{17}$$

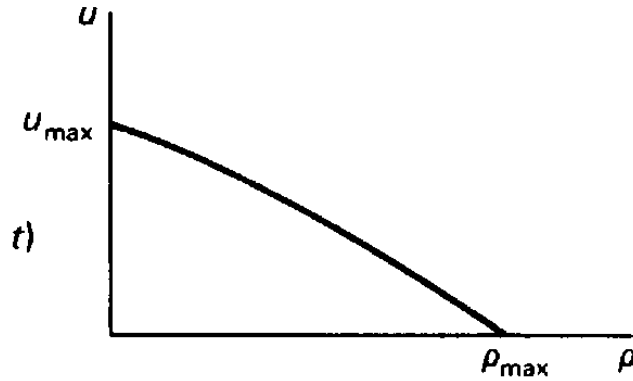
Quando a densidade é máxima, denotada por, ρ_{max} , e usualmente correspondendo ao que é chamado de engarrafamento do tráfego, os veículos irão se mover em velocidade zero, ou ficar parado:

$$u(\rho_{max}) = 0 \tag{18}$$

(Em tráfego pesado, os veículos tendem a parar antes que os veículos se toquem. Portanto $\rho_{max} < \frac{1}{L}$, quando L é o comprimento médio do veículo, ver página 7). Consequentemente, o tipo geral da curva, mostrada na figura 13, $u = u(\rho)$, relativas as duas variáveis do tráfego (densidade e velocidade), é razoável. A curva está decrescendo, isto é, $u'(\rho) \leq 0$.

Não se está sugerindo que a dependência da velocidade sobre a densidade é a mesma para toda condição da pista. Um segmento diferente da mesma rodovia pode ter condições diferentes (por exemplo, um caminho com diferentes curvatura e terraplanagem). Além disso, pode existir dependência em relação ao tempo, $u(\rho, x, t)$. De fato, por exemplo, os efeitos de um veículo da polícia (quer esteja estacionado ou em movimento) ou condições metereológicas nas velocidades dos veículos. Se um limite de velocidade u_{SL}

Figura 13 - Velocidade do veículo diminui quando a densidade do tráfego aumenta.



Fonte: Haberman (1977, p. 284)

é obedecido, então, por exemplo $u_{max} = u_{SL}$. No entanto, o limite de velocidade não precisa ser constante à medida que pode diferir em várias secções da pista. (Normalmente, mas nem sempre, em posições fixas ao longo da estrada, o limite de velocidade é o mesmo. Uma exceção ocorre quando o limite de velocidade durante a noite difere do dia. Outro exemplo é reduzir os limites de velocidades perto de algumas escolas durante o horário de funcionamento da escola). No entanto, investigamos, principalmente, um trecho determinado da estrada com propriedades aproximadamente constantes. (mesmo número de vias, não intersecções, e assim por diante). Assim vamos supor que:

$$u = u(\rho)$$

Existem algumas suposições envolvendo esta afirmação. Afirmar que todo motorista dirige com a mesma velocidade dado o mesmo espaçamento (densidade). Esta não é claramente válida, no entanto, pode não ser uma aproximação muito ruim. Ignoramos o comportamento possivelmente irregular dos motoristas. Talvez seria mais realista introduzir um modelo estocástico em que propõe-se que a uma certa densidade alguma porcentagem dos motoristas dirige a certas velocidades e outras velocidades ligeiramente diferentes. Não vamos discutir esse modelo estocástico (não determinístico), embora algumas pesquisas de trânsito desenvolveram modelos matemáticos nesta linha.

Algumas experiências tem indicado que $u = u(\rho)$ é razoável enquanto o tráfego está crescendo e também é razoável enquanto o tráfego está diminuindo, mas a curva velocidade-densidade é diferente para estas duas circunstâncias.

Se $u = u(\rho)$, então um veículo de alta velocidade que se aproxima de uma linha de

tráfego mais lento deve diminuir. Esta teoria não leva em consideração que a passagem em várias pistas não é só permitida, mas é um evento bastante frequente. A fim de que esta teoria construa uma boa aproximação, os efeitos da passagem de veículos devem ser pequeno, como por exemplo, em uma estrada e túnel, extremamente congestionados.

Além disso, $u = u(\rho, x, t)$ implica que ρ muda, então u também muda (instantaneamente). Assim, o modelo formulado não levará em conta tempo de reação finita do motorista nem o tempo de resposta finita que leva um motor de automóvel para alterar a velocidade (acelerar ou desacelerar). Estes efeitos podem também ser incorporados a uma modelo matemático mais refinado.

Em uma estrada de pista única, podemos saber qual função $u(\rho)$ deve ser. Esta suposição parece ser bastante razoável! Um veículo isolado tende a ter uma velocidade máxima de viagem, ou resultado dos limites de velocidade e as condições da estrada ou precaução do motorista, denominado de u_{max} . Então, para a função $u(\rho)$ devemos ter $u(0) = u_{max}$. Sabemos que as velocidades de tráfego tendem a diminuir com o aumento da densidade de tráfego, por isso, devemos assumir que $\frac{du}{d\rho} \leq 0$, $\rho > 0$. Em um engarrafamento, também há uma densidade, onde a velocidade é essencialmente zero, essa densidade é conhecida por ρ_{max} . Se L é o comprimento médio do veículo, poderíamos ter $\rho_{max} = \frac{1}{L}$. Logo, a relação utilizada é dado por :

$$u(\rho) = u_{max} - \left(\frac{u_{max}}{\rho_{max}} \right) \rho, \quad 0 \leq \rho \leq \rho_{max}$$

ou

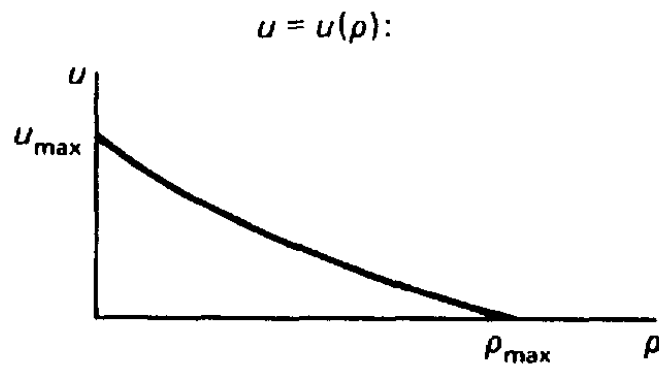
$$u(\rho) = u_{max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}} \right), \quad 0 \leq \rho \leq \rho_{max}$$

Agora que já enunciamos uma série de objeções ao modelo, vamos investigar suas implicações. Este modelo representa o primeiro passo no desenvolvimento de uma teoria matemática de fluxo de tráfego.

3.1 Fluxo de tráfego

Um engenheiro de tráfego pode solicitar mecanismos de controle do tráfego (semáforo, placa de pare, largura da faixa, número de cabines telefônicas de socorro (SOS), limites de velocidade e etc), com o objetivo de otimizar o fluxo de uma rodovia. O maior fluxo $q = \rho u$ poderia acontecer se os veículos estão movendo-se no limite da velocidade ($u = u_{max}$). E se $\rho = \rho_{max}$, então os veículos estariam num congestionamento e não poderiam se mover,

Figura 14 - Velocidade do veículo depende somente da densidade do tráfego.



Fonte: Haberman (1977, p. 289)

resultando um fluxo mínimo, ou seja, o fluxo é nulo quando a densidade é máxima.

Assumiremos que a rodovia é homogênea de modo que a velocidade do veículo depende da densidade do tráfego e não do tempo ou posição ao longo da pista, veja figura 14. Desde que o fluxo de tráfego (número de veículos por hora) é igual a densidade vezes velocidade, o fluxo também depende só da densidade.

$$q = \rho u(\rho) \quad (19)$$

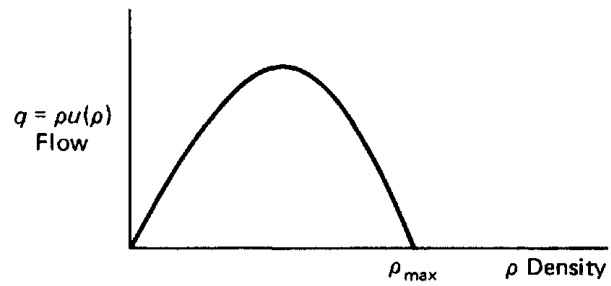
O fluxo, portanto, tem certas propriedades gerais. O fluxo pode ser zero de duas maneiras:

- se não existe tráfego ($\rho = 0$), e
- se o tráfego não está se movendo ($u = 0$ e portanto $\rho = \rho_{\max}$).

Para outros valores da densidade ($0 < \rho < \rho_{\max}$), o fluxo de tráfego deve ser positivo. Assim, em geral, a dependência do fluxo de tráfego sobre a densidade é ilustrada na 15. Esta relação fluxo densidade é, às vezes, chamada de Diagrama Fundamental do Tráfego da Rodovia. Ele mostra que o fluxo de tráfego máximo acontece em algumas densidades (com uma velocidade correspondente). Os engenheiros de tráfego chamam o fluxo de tráfego máximo de capacidade da pista. Assumimos que a relação fluxo-densidade é mostrada na figura 15, com concavidade para baixo $\frac{d^2q}{d\rho^2} < 0$.

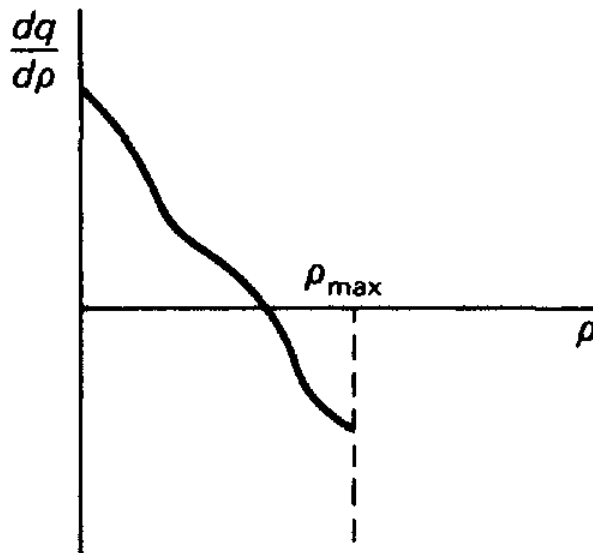
Em outras palavras, assumimos que $\frac{dq}{d\rho}$ diminui conforme ρ aumenta, como demonstrado na 16. O fluxo máximo absoluto acontece somente no máximo local.

Figura 15 - Relação fluxo-densidade.



Fonte: Haberman (1977, p. 290)

Figura 16 - Relação fluxo-densidade.



Fonte: Haberman (1977, p. 290)

Muito embora consista em um fenômeno de grande complexidade, o fluxo veicular apresenta algumas características gerais. Isto possibilita a análise de relações de velocidade-densidade e de fluxo-densidade que, por sua vez, estão ligadas as medidas das variáveis de tráfego já definidas.

A relação entre a velocidade e a densidade está ligada a uma observação muito simples e evidente do fluxo veicular que é o fato de que quanto maior for a densidade veicular ρ , menor será a velocidade média u . Isto faz bastante sentido pois, a medida em que ρ aumenta, a distância média entre os veículos diminui, acarretando uma redução nas velocidades dos veículos. Quando o limite de densidade máxima, $\rho = \rho_{max}$ é alcançado, os veículos não se movem, então $u(\rho_{max}) = 0$. Por outro lado, quando o tráfego é muito diluído, ou seja, ρ muito pequeno (quase nulo), quase não existe interações entre os veículos, logo estes devem se mover com velocidade máxima u_{max} .

3.2 Modelo *Car – Following* - estado estacionário

Nesta seção vamos apresentar um método para determinar as relações das densidades-velocidades observadas. Para explicar a curva da densidade-velocidade, podemos cuidadosamente analisar motoristas reais tomando decisões na condução do veículo e o modelo de perseguição “car - following”, buscando traduzir a variação da velocidade de um veículo, chamado seguidor, como resposta ao estímulo representado pela diferença de velocidade entre ele e o veículo que se desloca à sua frente.

Seja $x_n(t)$ a posição do n -ésimo veículo no instante de tempo t . Conforme anteriormente, assumimos que os veículos não podem ultrapassar uns aos outros (uma suposição bastante extrema). Postulamos que o movimento individual do veículo só depende do veículo da frente. Teorias destes tipos são chamadas de modelos “car-following. Neste modelo, assumiremos que a aceleração do veículo é proporcional à velocidade relativa, isto é,

$$\frac{d^2 x_n(t)}{dt^2} = -\lambda \left(\frac{dx_n(t)}{dt} - \frac{dx_{n-1}(t)}{dt} \right) \quad (20)$$

Se o “car following” vai mais rápido do que o veículo da frente, então ele irá desacelerar (e assim, $\lambda > 0$). Em função do sinal do lado direito da equação (20) o veículo de trás acelera ou desacelera. O parâmetro λ mede a sensibilidade da interação de dois veículos. Contudo, a equação (20) sugere que a aceleração ou desaceleração ocorre instantaneamente. Em vez disso, vamos levar em conta algum atraso de tempo antes do motorista reagir às mudanças na velocidade relativa. Este processo é modelado especificando a aceleração em um intervalo de tempo pequeno.

Um modelo um pouco mais preciso é obtido ao se levar em conta um tempo de atraso T da resposta do motorista no veículo n , daí:

$$\frac{d^2 x_n(t+T)}{dt^2} = -\lambda \left(\frac{dx_n(t)}{dt} - \frac{dx_{n-1}(t)}{dt} \right) \quad (21)$$

Matematicamente, esta equação representa um sistema de Equações Diferenciais com atraso, chamada de um sistema de Equações Diferenciais de Atraso.

Integrando a equação (21), obtemos:

$$\frac{dx_n(t+T)}{dt} = -\lambda (x_n(t) - x_{n-1}(t)) + d_n$$

onde:

$$d_n = \frac{dx_n(t_0+T)}{dt} + \lambda (x_n(t_0) - x_{n-1}(t_0))$$

emos uma equação que relaciona a velocidade do veículo num momento posterior àquele em que for observada a distância entre os veículos. Imagine uma situação estacionária em que todos os automóveis são equidistantes e, portanto, movendo-se na mesma velocidade.

Assim:

$$\frac{dx_n(t+T)}{dt} = \frac{dx_n(t)}{dt}$$

Fazendo $d_n = \Delta$

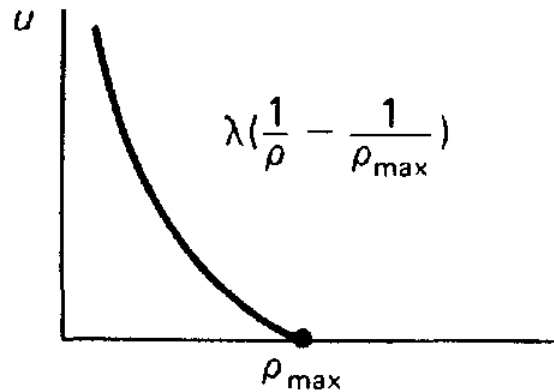
$$\frac{dx_n(t)}{dt} = -\lambda (x_n(t) - x_{n-1}(t)) + \Delta$$

Desde que, (veja equação (5)):

$$x_{n-1}(t) - x_n(t) = \frac{1}{\rho} \quad (22)$$

Observe que (22) é uma definição razoável do tráfego de densidade, este modelo “car-following” produz uma relação velocidade-densidade.

Figura 17 - Modelo estacionário “Car Following”: relação densidade-velocidade.



Fonte: Haberman (1977, p. 294)

$$u = \frac{\lambda}{\rho} + \Delta$$

Determinamos a constante Δ arbitrária, considerando que a densidade seja máxima (engarrafamento), isto é, $u = 0$, daí,

$$0 = \frac{\lambda}{\rho_{max}} + \Delta$$

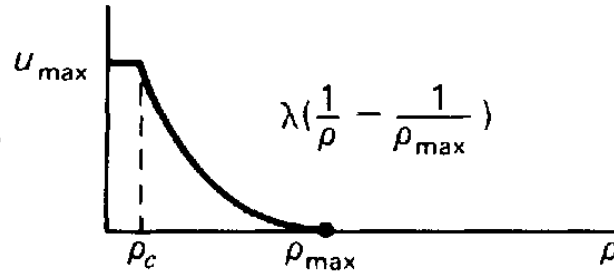
Deste modo a seguinte relação velocidade-densidade é obtida,

$$u = \lambda \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{max}} \right) \quad (23)$$

e mostrada na figura 17.

Como este resultado se compara com as observações experimentais da relação densidade-velocidade? A equação (23) parece razoável para grandes densidades, isto é, próximo $\rho = \rho_{max}$. Entretanto, ela prevê uma velocidade infinita com densidade zero. Podemos eliminar este problema, notando que este modelo não é apropriado para densidades pequenas. De fato, em densidades pequenas, as mudanças na velocidade do veículo não são esperadas para os veículos que se encontram atrás do mesmo. Em vez disso, é mais provável que o limite de velocidade influencie na velocidade do veículo (e aceleração) em densidades pequenas.

Figura 18 - Limite da Velocidade limitada pela Curva da Densidade-Velocidade do “Car Following”.



Fonte: Haberman (1977, p. 295)

Assim, podemos supor que a equação (23) é válida apenas para densidades grandes. Para densidades pequenas, talvez u seja limitada apenas pelo limite da velocidade, $u = u_{max}$. Escolhemos a densidade crítica ρ_c , de tal modo que a velocidade seja uma função contínua da densidade, como mostrado na figura 18. Temos que:

$$u = \begin{cases} u_{max}, & \rho \leq \rho_c \\ \lambda \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{max}} \right), & \rho > \rho_c \end{cases}$$

O fluxo $q = \rho u$ é dado por:

$$q = \begin{cases} \rho u_{max}, & \rho \leq \rho_c \\ \lambda \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}} \right), & \rho > \rho_c \end{cases}$$

Agora, imagine dois motoristas cada um dirigindo 20 km/h mais rápido que o veículo da frente, um 160 metros atrás, mas o outro apenas 8 metros atrás. Sabemos que os motoristas vão desacelerar de formas bastante diferentes. Uma aceleração ou desaceleração do motorista também depende da distância do veículo anterior. Quanto mais próximo o motorista está, o mais provável é que ele responda fortemente a uma velocidade relativa observada. Outro modelo é deixar λ ser inversamente proporcional à distância, ou seja,

$$\lambda = \frac{\theta}{x_{n-1}(t) - x_n(t)}$$

Assim, o modelo “car-following” revisado é:

$$\frac{d^2 x_n(t+T)}{dt^2} = \theta \left(\frac{\frac{dx_n(t)}{dt} - \frac{dx_{n-1}(t)}{dt}}{x_n(t) - x_{n-1}(t)} \right) \quad (24)$$

Que torna o modelo “car following” não linear, em contraste com a equação (21) que é linear.

Novamente, esta equação pode ser integrada, resultando:

$$\frac{dx_n(t+T)}{dt} = \theta \ln |x_n(t) - x_{n-1}(t)| + d_n$$

onde:

$$d_n = \frac{dx_n(t_0+T)}{dt} - \theta \ln |x_n(t_0) - x_{n-1}(t_0)|$$

Vamos considerar uma situação estacionária, em que os veículos se encontram equidistantes. Daí:

$$u = -\theta \ln \rho + \Delta \quad (25)$$

Mais uma vez a constante de integração é escolhida tal que a densidade é máxima e a velocidade é zero. Da equação (25), temos que:

$$0 = -\theta \ln \rho_{max} + \Delta \quad \text{e, portanto,}$$

$$\Delta = \theta \ln \rho_{max}$$

Substituindo a constante Δ na equação (25), temos:

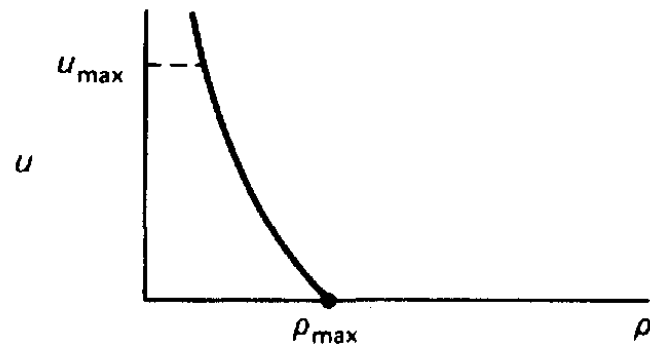
$$u = -\theta \ln \rho + \theta \ln \rho_{max}$$

$$u = -\theta \ln \frac{\rho}{\rho_{max}} \quad (26)$$

A solução densidade-velocidade é mostrada na figura 19:

Dificuldades quando $\rho \rightarrow 0$ são novamente evitadas assumindo que para baixas densidades, $u = u_{max}$. A constante θ é escolhida, de modo que a fórmula seja compatível

Figura 19 - Modelo estacionário do “Car Following” não Linear: Relação Densidade-Velocidade.



Fonte: Haberman (1977, p. 296)

com os dados observados sobre uma dada rodovia.

A constante θ tem interpretação simples, ou seja, vamos mostrar agora que θ é a velocidade correspondente ao fluxo máximo:

$$q = \rho u = -\theta \rho \ln \frac{\rho}{\rho_{max}} \quad (27)$$

Derivando a equação (27) em relação a densidade, temos:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{d\rho} &= -\theta \ln \frac{\rho}{\rho_{max}} - c\rho \left(\frac{1}{\rho} \right) \\ \frac{dq}{d\rho} &= -\theta \left(\ln \frac{\rho}{\rho_{max}} + 1 \right) \end{aligned}$$

Procurando os pontos críticos, o ponto será de máximo devido ao comportamento da derivada em uma vizinhança, o fluxo cresce antes (derivada positiva) e decresce depois (derivada negativa). Sendo assim, igualamos a zero, isto é, se $q = q_{max} \rightarrow \frac{dq}{d\rho} = 0$, temos que:

$$0 = \frac{dq}{d\rho} = -\theta \left(\ln \frac{\rho}{\rho_{max}} + 1 \right)$$

Portanto,

$$\ln \frac{\rho}{\rho_{max}} + 1 = 0, \text{ e daí,}$$

$$\frac{\rho}{\rho_{max}} = e^{-1}, \text{ assim:}$$

$$\frac{\rho}{\rho_{max}} = \frac{1}{e}$$

$$\rho = \frac{\rho_{max}}{e}$$

Implica que o fluxo de tráfego máximo ocorre em $\rho = \frac{\rho_{max}}{e}$, caso em que a velocidade do fluxo máximo é θ ,

$$u\left(\frac{\rho_{max}}{e}\right) = \theta$$

O modelo apresentado acima demonstra uma boa concordância para fluxos congestionados. Muitos outros tipos similares de teorias de “car following” têm sido formuladas por pesquisadores de tráfego (trânsito). Elas ajudam a explicar a relação entre densidade do tráfego em uma via com a velocidade dos veículos.

3.3 Equação Diferencial Parcial

Para um dado segmento da estrada podemos analisar a dependência da velocidade em relação a densidade. Se assumirmos que sob todas as circunstâncias a velocidade é uma função conhecida de ρ , determinada por $u = u(\rho)$, então a equação de conservação do número de veículos (14) é definida por:

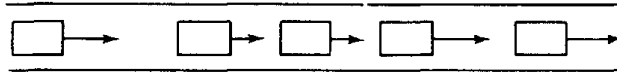
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u(\rho)) = 0 \tag{28}$$

Esta é uma equação diferencial parcial em uma variável ρ desconhecida.

Suponhamos que uma densidade de tráfego inicial com espaçamento não uniforme (tráfego não-uniforme inicial) exista, como mostrado na figura 20. Veículos diferentes irão se mover em velocidades diferentes (uma vez que o espaçamento não é uniforme). Assim, a densidade irá mudar imediatamente, e, de acordo com nossas suposições, os motoristas devem ajustar suas velocidades imediatamente. Esse processo vai continuar.

O problema de tráfego foi elaborado em termos da equação diferencial parcial (28),

Figura 20 - Tráfego Não Uniforme.



Fonte: Haberman (1977, p. 298)

ou equivalentemente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} q(\rho) = 0 \quad (29)$$

onde: $q = \rho u(\rho)$.

Usando a regra da cadeia na equação (29) temos:

$$\frac{\partial q(\rho)}{\partial x} = \frac{dq}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

e assim:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dq}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (30)$$

Para ser um problema bem posto, uma condição inicial é necessária, por exemplo, $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$.

Entretanto, agora assumiremos (como proposto originalmente) que ρ depende somente de x .

Seja ρ solução do problema, Se a densidade não dependesse do tempo t então teríamos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Portanto,

$$\rho(x, t) = \rho_0(x)$$

é solução da equação diferencial parcial (29) ou (30) satisfazendo a condição inicial $\rho_0(x)$.

4 LINEARIZAÇÃO

A equação diferencial parcial formulada matematicamente para um modelo de fluxo de tráfego é dada pelas equações (29) ou (30).

Uma possível condição inicial é estabelecida pela densidade de tráfego inicial.

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x) = h(x)$$

Vamos resolver este problema determinando a densidade de tráfego em relação a t . Embora podemos ser capazes de resolver esta equação diferencial parcial diretamente vamos, primeiro, discutir um problema mais simples. Se a densidade de tráfego inicial é constante, independente de x , então a densidade deve permanecer constante (uma vez que todos os veículos devem mover-se na mesma velocidade). De fato

$$\rho(x, 0) = \rho_0$$

A densidade constante, $\rho(x, t) = \rho_0$ satisfaz a equação diferencial (29). Qualquer densidade constante é uma densidade estacionária, isto é, uma solução da equação diferencial parcial que não depende do tempo.

Consideramos uma densidade aproximadamente constante, podendo ser escrita da seguinte forma:

$$\rho(x, t) = \rho_0 + \epsilon\rho_1(x, t) \tag{31}$$

Quando $|\epsilon\rho_1| \ll \rho_0$, $\epsilon\rho_1(x, t)$ é chamado de densidade de tráfego perturbado (ou deslocamento da densidade constante ρ_0). Assuma que a densidade inicial é uma função conhecida de x .

$$\rho(x, 0) = \rho_0 + \epsilon h(x)$$

Assim a densidade de tráfego perturbado é também inicialmente conhecida, $\rho_1(x, 0) = h(x)$. Substituindo a equação (31) na equação (30), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dq}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0 \\ \epsilon \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{dq}{d\rho}(\rho_0 + \epsilon \rho_1(x, t)) \epsilon \frac{\partial \rho_1}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Podemos escrever:

$$\frac{dq}{d\rho}(\rho_0 + \epsilon \rho_1(x, t)) = F(\rho_0 + \epsilon \rho_1(x, t))$$

e temos que o polinômio de Taylor em torno de x_0 é:

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + F''(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots$$

onde, escolhendo:

$$x = \rho_0 + \epsilon \rho_1(x, t),$$

e

$$x_0 = \rho_0,$$

temos:

$$F(\rho_0 + \epsilon \rho_1(x, t)) = F(\rho_0) + F'(\rho_0) \epsilon \rho_1(x, t) + \frac{\epsilon^2 \rho_1^2}{2!} F''(\rho_0) + \dots$$

Expandindo a equação $\frac{dq}{d\rho}(\rho_0 + \epsilon \rho_1(x, t)) = F(\rho_0 + \epsilon \rho_1(x, t))$, obtemos:

$$\frac{dq}{d\rho}(\rho_0 + \epsilon \rho_1(x, t)) = \frac{dq}{d\rho}(\rho_0) + \frac{d^2q}{d\rho^2}(\rho_0) \epsilon \rho_1(x, t) + \frac{d^3q}{d\rho^3} \frac{\epsilon^2 \rho_1^2}{2!}(\rho_0) + \dots$$

Como $\epsilon \rightarrow 0$ ($\epsilon \rho_1 \ll \rho_0$), temos:

$$\frac{dq}{d\rho}(\rho_0 + \epsilon \rho_1(x, t)) \cong \frac{dq}{d\rho}(\rho_0)$$

Dai,

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{dq}{d\rho}(\rho_0) \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = 0 \quad (33)$$

Esta equação diferencial parcial modela a densidade de tráfego perturbado. Entretanto, a equação (33) é uma equação diferencial parcial linear enquanto a equação (28) do tráfego exato, é uma equação diferencial parcial não linear. O coeficiente que aparece na equação (33), $\left(\frac{dq}{d\rho}(\rho_0)\right)$, é uma constante (derivada do fluxo em relação a densidade).

Dai, temos uma Equação Diferencial Parcial Linear da seguinte forma:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + c \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = 0 \quad (34)$$

$$\text{onde: } c = \frac{dq}{d\rho}(\rho_0)$$

4.1 Equação Diferencial Parcial Linear

Resolveremos a equação diferencial parcial (34), correspondente à linearização do problema de fluxo de tráfego.

Como c é uma constante $\left(c = \frac{dq}{d\rho}(\rho_0)\right)$ e consideremos que a densidade inicial conhecida é:

$$\rho_1(x, 0) = h(x),$$

Procurando a solução via método de D'Alembert, consideremos a seguinte mudança de variável $(x, t) \rightarrow (\xi, \eta)$, definida por:

$$\begin{cases} \xi = \alpha x + \beta t \\ \eta = \gamma x + \delta t \end{cases}$$

temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_1}{\partial x} &= \alpha \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial \rho_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} &= \beta \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \delta \frac{\partial \rho_1}{\partial \eta} \\ 0 &= \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + c \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = \beta \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \delta \frac{\partial \rho_1}{\partial \eta} + \left(\alpha \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial \rho_1}{\partial \eta} \right) c \\ 0 &= \beta \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + c\alpha \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + \delta \frac{\partial \rho_1}{\partial \eta} + c\gamma \frac{\partial \rho_1}{\partial \eta} \\ 0 &= (\beta + c\alpha) \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + (\delta + c\gamma) \frac{\partial \rho_1}{\partial \eta}\end{aligned}$$

Supondo que $\beta + c\alpha = 0$ temos que:

$$\beta = -c\alpha$$

Considerando $\alpha = 1$, temos:

$$\xi = (x - ct)$$

Assim, considerando $\delta + c\gamma \neq 0$, temos:

$$(\delta + c\gamma) \frac{\partial \rho_1}{\partial \eta} = 0 \implies \frac{\partial \rho_1}{\partial \eta} = 0 \implies \rho_1 = g(\xi)$$

Daí,

$$\rho_1 = g(x - ct) \tag{35}$$

Para verificar que (35) é solução, substituímos de volta na equação diferencial parcial (34), usando:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_1}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} &= \frac{\partial g}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -c \frac{\partial g}{\partial \xi}\end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \theta \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = -c \frac{\partial g}{\partial \xi} + c \frac{\partial g}{\partial \xi} = 0 \quad (36)$$

$$(37)$$

Portanto é verificado que a equação (34) é satisfeita por (35).

Mas, inicialmente $\rho_1(x, 0) = h(x)$. Assim $h(x) = g(x)$. Conseqüentemente, a solução da equação diferencial parcial (34) satisfazendo a condição inicial $\rho_1(x, 0) = h(x)$ é dado por:

$$\rho_1(x, t) = f(x - ct) \quad (38)$$

ou equivalentemente,

$$\rho_1(x, t) = \rho_0 + \epsilon f(x - ct)$$

Se nos movermos com a velocidade c , a densidade permanece a mesma. A densidade propaga-se como uma onda (chamada de uma onda de densidade) com a velocidade de onda c . Nota-se que esta velocidade pode ser diferente da velocidade com que um veículo se move.

Ao longo de cada reta $x - ct = \text{constante}$, a densidade permanece a mesma. Estas linhas são chamadas de características. A propriedade essencial das características é que ao longo dessas retas a equação diferencial parcial se reduz a uma equação diferencial ordinária.

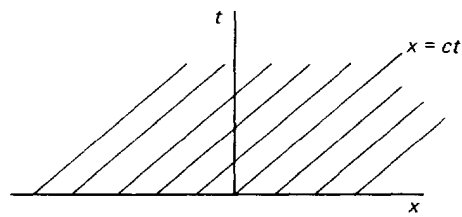
A figura 21 mostra várias características no Diagrama Espaço-Tempo. Ao longo de cada característica, a densidade é igual o valor que tem no $t = 0$ para a equação (36). Note que ρ_1 permanece constante ao longo da característica, mas $\frac{\partial \rho_1}{\partial t}$ e $\frac{\partial \rho_1}{\partial x}$ pode não ser zero, veja figura 22.

De fato, mantendo-se x fixado, ρ_1 pode variar e $\frac{\partial \rho_1}{\partial t}$ pode não ser igual a zero. Por outro lado, ρ_1 pode mudar mantendo t fixo e $\frac{\partial \rho_1}{\partial x}$ não é necessariamente zero. Nas figuras 21 e 22 assumimos $c > 0$, recordando:

$$c = \frac{dq}{d\rho}(\rho_0) \quad (39)$$

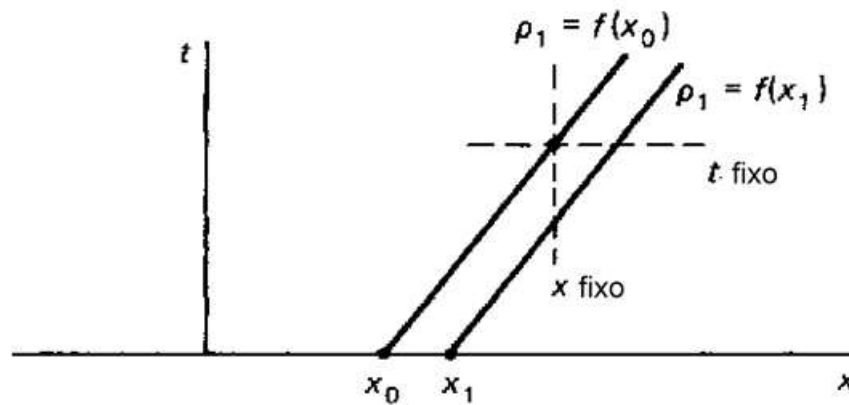
O diagrama fundamental do tráfego da rodovia é mostrado na figura 23. Assim, a inclinação é positiva para densidades menores que a capacidade da estrada e a inclinação

Figura 21 - Características da equação (36).



Fonte: Haberman (1977, p. 307)

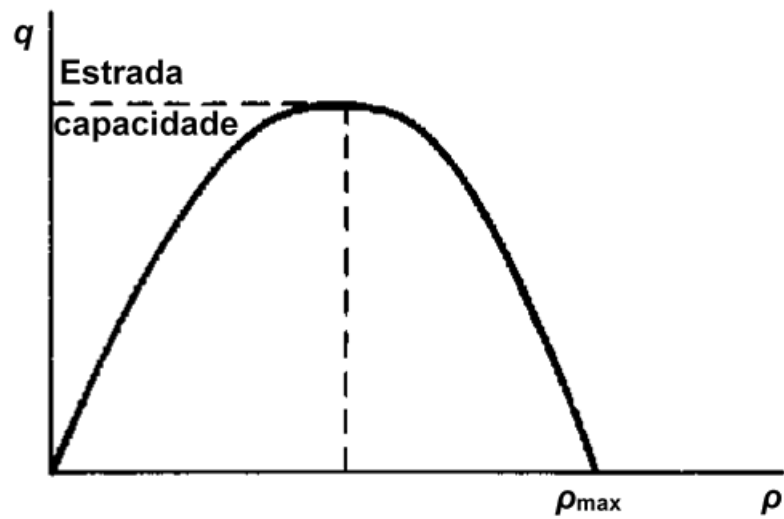
Figura 22 - Curva fluxo-densidade.



Fonte: Haberman (1977, p. 307)

é negativa para densidades maiores à capacidade estrada. O sinal da inclinação é significativo à medida que indica que pequenas perturbações da densidade uniforme movem-se com velocidade igual à inclinação (equação (39)). A velocidade de onda pode, assim, ser positiva ou negativa.

Figura 23 - Curva Fluxo-Densidade.

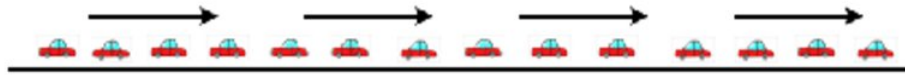


Fonte: Haberman (1977, p. 308)

5 ONDAS DE DENSIDADE LINEAR

O tráfego uniforme corresponde entre uma densidade constante, $\rho = \rho_0$, em todos os pontos e a velocidade constante em todos os trecho da rodovia, $u_0 = u(\rho_0)$. Assim, todos os veículos se deslocam com a mesma velocidade, como exibido na Figura 24.

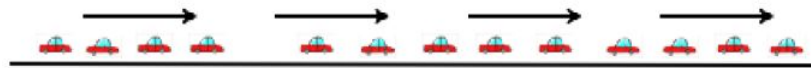
Figura 24 - Tráfego uniforme.



Fonte: Haberman (1977, p. 309)

Agora, imaginaremos que o tráfego uniforme é perturbado. Por exemplo, que um veículo sai da rodovia, deixando um “buraco”. (ver Figura 25)

Figura 25 - Tráfego uniforme perturbado.

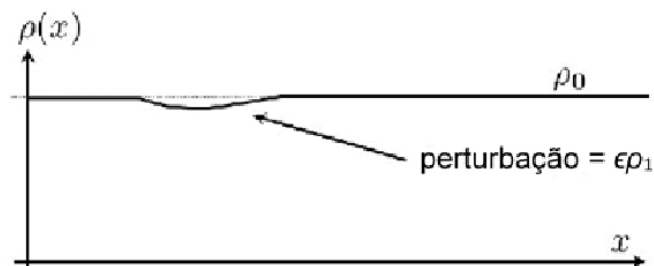


Fonte: Haberman (1977, p. 309)

A nova densidade é próxima da densidade uniforme, de modo que é possível descrevê-la como uma densidade aproximadamente uniforme com uma pequena perturbação, visto na equação (31), representada por:

$$\rho(x, t) = \rho_0 + \epsilon \rho_1(x, t)$$

onde, ϵ é pequeno, e temos uma perturbação pequena. A densidade perturbada é mostrada na Figura 26



Fonte: Haberman (1977, p. 310)

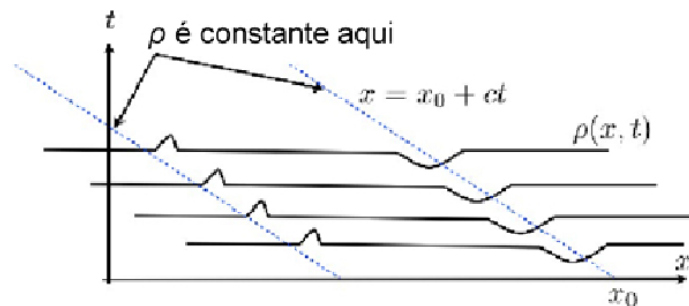
A questão é o que vai acontecer a esta perturbação. O “buraco” ficará lá, irá mover-se, crescerá ou desaparecerá, para descobrir isso, vamos substituir $\rho_0 + \epsilon\rho_1(x, t)$ na equação $\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial[q(\rho)]}{\partial x} = 0\right)$ que nos diz como ρ evolui,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \epsilon\rho_1) + \frac{\partial[q(\rho_0 + \epsilon\rho_1)]}{\partial x} = 0 \quad (40)$$

Usando regra da cadeia e fazendo a expansão na série de Taylor, conforme feito no Capítulo 4, obtemos a equação (34), isto é, $\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial t} + c\frac{\partial\rho_1}{\partial x} = 0\right)$, com: $c = q'(\rho_0) = \frac{dq}{d\rho}(\rho_0)$.

Conseguimos reduzir ao estudo da perturbação à equação linear para ρ_1 . E como já vimos anteriormente, se uma pequena perturbação ($\rho_1(x, 0) = f(x)$) é introduzida no estado do fluxo uniforme ($\rho = \rho_0$) no $t = 0$ a solução da equação diferencial parcial é dado por $\rho(x, t) = \rho_0 + \epsilon f(x - ct)$. Estas podem ser chamadas de “ondas de densidade linear”. Um exemplo com “buraco” é ilustrado na figura 27.

Figura 27 - Ondas de densidade linear.



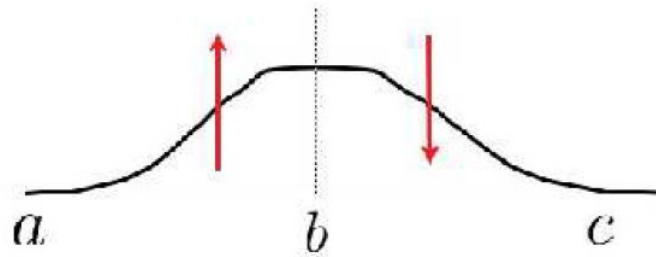
Fonte: Haberman (1977, p. 317)

Um caminho para entendermos isto, é usando o fato de que ρ é constante para um veículo movendo-se com velocidade c . A densidade é constante ao longo das curvas $x = x_0 + ct$, que correspondem ao veículo movendo-se a partir de $x = x_0$ com velocidade c . Estas linhas são chamadas de “características”, e as usaremos para resolver a equação.

Agora verificaremos se estas perturbações se movem para frente ou para trás, ou seja, e o que acontece com um “buraco” no tráfego pesado, definido como tráfego no qual a densidade é maior do que a densidade ideal (correspondente à capacidade da estrada) e no tráfego leve, definido como tráfego tal que a densidade é menor que a densidade ideal. A partir da análise anterior, sabemos que a perturbação se move com velocidade c . Entretanto, podemos verificar no Diagrama Fundamental do Tráfego (ver Figura 29), e perceber que a declividade é dada por c .

Portanto, a velocidade, c , é positiva se o tráfego for leve e negativa se o tráfego for pesado, isto é, as perturbações avançam no tráfego leve, e movem-se para trás no tráfego pesado.

Para compreender melhor, imaginaremos que a perturbação é uma colisão, e consideremos o tráfego pesado. Dividiremos a colisão em duas partes, uma de a para b e outra de b para c como é mostrado na figura 28



Fonte: Haberman (1977, p. 318)

Agora, veremos como varia o número de veículos, dado pela equação (8). Devido as mudanças do lado esquerdo da colisão, temos:

$$\frac{dN(t, a, b)}{dt} = q(a, t) - q(b, t) > 0$$

De maneira análoga faremos o mesmo para outra parte da colisão, ou seja,

$$\frac{dN(t, b, c)}{dt} = q(b, t) - q(c, t) < 0$$

Isto explica, intuitivamente, como a perturbação move-se para direita em tráfego pesado e leve.

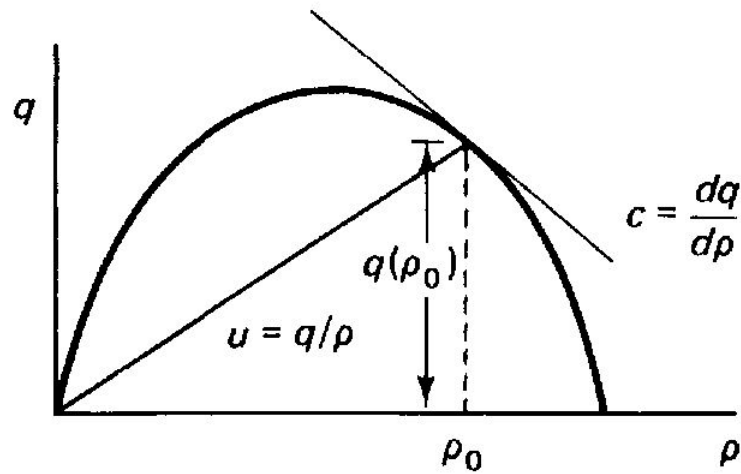
É importante notar que a velocidade (c) das ondas lineares é diferente das velocidades dos veículos ($u(\rho_0)$). A velocidade das perturbações é a declividade de $q(\rho)$ em ρ_0 . A velocidade do veículo é $u(\rho_0)$, na qual $u(\rho_0) = \frac{q(\rho_0)}{\rho_0}$, que é a inclinação da linha que vai a partir da origem para $(\rho_0, q(\rho_0))$.

Em problemas de fluxo de tráfego, existem duas velocidades importantes: uma velocidade individual dos veículos e a outra velocidade na qual uma onda de densidade se desloca. A inclinação do Diagrama Fundamental de Tráfego da Rodovia, $q(\rho)$ vezes ρ em $\rho = \rho_0$, é igual à velocidade da onda de densidade correspondente a ρ próximo a ρ_0 , isto é,

$$c = \left. \frac{dq}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0}$$

Uma inclinação da linha reta, a partir da origem ($q = 0, \rho = 0$) para o ponto na

Figura 29 - Diagrama fundamental do tráfego da rodovia: Tráfego da velocidade da onda c e velocidade do veículo u .



Fonte: Haberman (1977, p. 312)

curva de densidade, representando a densidade constante ρ_0 , é a velocidade do veículo u , desde que $u = \frac{q}{\rho}$. As linhas retas em duas inclinações são mostradas na Figura 29.

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + c \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = 0$$

Temos que a “onda de densidade” é a propagação de pequenas perturbações na velocidade c ao longo da via de tráfego e $c = \frac{dq}{d\rho}$ é a grandeza de sua velocidade de propagação.

Portanto, a equação (34), $\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + c \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = 0\right)$, representa que q é constante nas ondas que viajam para além do ponto com velocidade c , dada por $c = \frac{dq}{d\rho}(\rho_0)$. Matematicamente, a equação (34) implica em um sistema de características, pois c é a velocidade e, ao longo de cada uma dessas características, o fluxo q é constante e a velocidade da onda c é a inclinação da curva de concentração do fluxo, para um x fixo.

6 O MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

Consideremos o trânsito em uma rodovia que não tem entradas e saídas, ou seja $f(x, t) = 0$. Representaremos por $\rho(t)$ a densidade de veículos (número de veículos por quilômetros) na posição x no tempo t . A densidade em princípio é uma função discreta, pois veículos são objetos discretos, contudo, vamos supor que $\rho(t)$ é uma representação contínua da densidade de tráfego. A lei de conservação para densidade de tráfego $\rho(t)$ é dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0$$

O fluxo $q(x, t)$ é a taxa com que os veículos passam na posição x no tempo t . Para um observador fixo ao longo do trecho da rodovia, a taxa com que os veículos passam por ele depende da densidade ρ e da velocidade u .

A velocidade u dos veículos depende somente da densidade de tráfego, a velocidade é menor quando o número de veículos aumenta.

Suponhamos que se a densidade de tráfego é nula, ($\rho(x, t) = 0$), ou quase nula, a velocidade máxima, que cada veículo pode atingir, é u_{max} e que a densidade máxima ρ_{max} de veículos por quilômetros somente é atingida quando o trânsito estiver totalmente congestionado, ou seja, $u = 0$. Conforme visto anteriormente, u é uma função contínua de ρ dada por:

$$u = u_{max} - \left(\frac{u_{max}}{\rho_{max}} \right) \rho, \quad 0 \leq \rho \leq \rho_{max}$$

Logo, $q = \rho u$ é dada pela expressão:

$$q(\rho) = u \left(\rho - \frac{\rho^2}{\rho_{max}} \right)$$

Calculando $q(x, t)$ e substituindo na lei de conservação geral, equação (14), obtemos uma equação que modela a densidade de tráfego com aproximação linear da velocidade, isto é:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_{max} \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_{max}} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (41)$$

Para resolver o problema de valor inicial abaixo, usaremos retas no plano xt , de-

nominadas retas características:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial q}{\partial x}(x, t) = f(x, t), & t > 0, \quad -\infty < x < \infty \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x) \end{cases} \quad (42)$$

Estas retas transmitem o perfil do dado inicial $\rho(x, 0)$ para tempos futuros e resolvem problemas de valor inicial da forma (42), para leis de conservação lineares e não lineares.

6.1 Leis de Conservação Lineares

Usaremos o método das características para resolver problema de valor inicial de leis de conservação lineares da forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial \rho}{\partial x}(x, t) = 0, & t > 0, \quad -\infty < x < \infty \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x) \end{cases} \quad (43)$$

Seja c uma constante e $a(t) = (x(t), t)$, uma curva parametrizada com ponto inicial $(x_0, 0)$ sobre o eixo x . Restringiremos a densidade $\rho(x, t)$ à curva $a(t)$, ou seja, consideraremos a função $\rho(x(t), t)$, e teremos a taxa de variação da densidade ρ ao longo da curva $a(t)$ dada por $\frac{d}{dt}\rho(x(t), t)$. Aplicando a regra da cadeia temos:

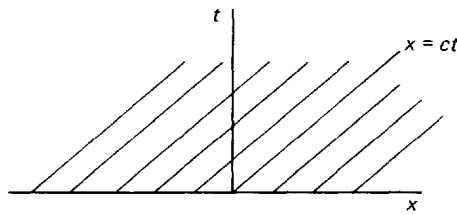
$$\frac{d}{dt}\rho(x(t), t) = \frac{\partial \rho}{\partial t}(x(t), t) + \frac{\partial \rho}{\partial x}(x(t), t) \frac{dx}{dt} \quad (44)$$

Comparemos a equação (43) com o lado direito da equação (44) e escolhemos a curva $\frac{dx}{dt} = c$, dentre todas as curvas com o dado inicial em $(x_0, 0)$, e assim:

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t), t) = \frac{\partial \rho}{\partial t}(x(t), t) + c \frac{\partial \rho}{\partial x}(x(t), t) = 0$$

Isto implica que $\rho(x(t), t)$ é constante ao longo desta curva particular. Logo, o valor da densidade ρ em cada ponto dessa curva é o mesmo valor de $\rho(x_0, 0)$. Com o dado inicial temos que $\rho(x_0, 0) = \rho_0(x_0)$. A curva $a(t) = (x(t), t)$ que escolhemos é obtida

Figura 30 - Curvas características da equação (43).



Fonte: Haberman (1977, p. 307)

resolvendo a equação diferencial ordinária:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = c \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (45)$$

cuja solução é dada por $x(t) = ct + x_0$. Esta curva é denominada curva característica, ou seja, para a lei de conservação linear, (43) as curvas características são retas no plano xt , dadas por $x(t) = ct + x_0$, que são paralelas, como mostra a 30.:

Como o ponto x_0 é dado por $x_0 = x - ct$, temos que a solução do problema (43), no ponto (x, t) , é dada por $\rho(x, t) = \rho_0(x - ct)$

Agora, consideremos o caso que o coeficiente c pode não ser constante, isto é, $c = c(x, t)$. A característica com ponto inicial $(x_0, 0)$ é obtida resolvendo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = c(x, t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (46)$$

O fato de c não ser constante implica que as características não são necessariamente retas. Entretanto, como veremos a seguir para este caso, a densidade $\rho(x, t)$ permanece constante ao longo das curvas características.

Se $(x(t), t)$ é uma curva característica, a taxa de variação da densidade ρ ao longo desta curva é dada por:

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t), t) = \frac{\partial \rho}{\partial t}(x(t), t) + \frac{\partial \rho}{\partial x}(x(t), t) \frac{dx}{dt}$$

Como $(x(t), t)$ é uma característica temos que $\frac{dx}{dt} = c(x, t)$. Assim, de (43) temos que, $\frac{d}{dt}\rho(x(t), t) = 0$, isto é, $\rho(x, t)$ é constante ao longo das curvas características.

6.2 Leis de Conservação Não-Lineares

Sabemos que o fluxo q depende da densidade, mas quando o problema não é linear, não podemos mensurar a densidade e não conseguimos definir como o fluxo depende da densidade, ou seja, $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$, a função $q = q(\rho)$ não é linear.

Utilizaremos o método das características para resolver o problema abaixo, considerando $q'(\rho) = n(\rho)$ e $n(\rho)$ não sendo constante:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + n(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x}(x, t) = 0, & t > 0, \quad -\infty < x < \infty \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x) \end{cases}$$

As características então satisfazem:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = n(\rho(x, t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (47)$$

Como a densidade $\rho(x, t)$ não é conhecida, não poderemos determinar as curvas características, entretanto, neste caso, a densidade $\rho(x, t)$ é constante ao longo da curva $(x(t), t)$, solução de (47), uma vez que:

$$\frac{d}{dt}(\rho(x(t), t)) = \frac{\partial \rho}{\partial t}(x(t), t) + \frac{\partial \rho}{\partial x}(x(t), t) \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t}(x(t), t) + n(\rho(x(t), t)) \frac{\partial \rho}{\partial x}(x(t), t) = 0 \quad (48)$$

Daí, o valor da densidade ρ ao longo de cada característica é o mesmo valor de ρ no dado inicial $(x_0, 0)$, ou seja, $\rho(x, t) = \rho(x_0, 0) = \rho_0(x_0)$. Sendo assim, rescrevemos o problema (47) da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = n(\rho_0(x_0)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

cuja solução é dada por: $x(t) = n(\rho_0(x_0))t + x_0$.

Neste caso, as características são retas não necessariamente paralelas, pois a inclinação de cada uma dessas retas é dada por $\frac{1}{n(\rho_0(x_0))}$, que depende do valor da função ρ no ponto inicial $(x_0, 0)$.

O fato das retas características não serem paralelas torna possível ocorrer interseção entre as mesmas, isto significa que a solução por características somente é válida até o

tempo t de interseção.

Podemos citar um exemplo deste tipo de problema. Considerando $n(\rho) = \rho$ (que é equivalente ao fluxo ($q = \frac{1}{2}\rho^2$)) obtemos a equação denominada equação de Burgers, dada por:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial x}(x, t) = 0, & t > 0, \quad -\infty < x < \infty \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x) \end{cases} \quad (49)$$

Cuja solução poderá desenvolver descontinuidades (ondas de choque).

Existem duas origens para ondas de choque, as alterações abruptas de densidade e do fluxo, e outra que resulta da interferência entre as ondas de perturbação decorrentes da variação do fluxo em função da densidade ao longo da curva que representa a equação fundamental do tráfego.

Numa rodovia em que há uma variação de densidade de ρ_1 para ρ_2 , segundo a teoria da Onda Cinemática, as ondas geradas na zona de concentração ρ_2 percorrem a fila de veículos mais rapidamente do que as ondas geradas na zona de concentração ρ_1 . Quando essas ondas se encontram elas geram uma onda de choque, que representa a brusca variação de concentrações, que se desloca com velocidade de propagação c

Usaremos o método das características, para obter a solução da equação de Burgers (49). As características de (49) são definidas por:

$$\frac{dx}{dt} = \rho_0(x, t) \quad (50)$$

ou seja, ρ é constante ao longo das características. Substituindo $n(\rho) = \rho$ em (48) obtemos a solução de (50) dada por:

$$\begin{cases} x(t) = \rho(x(0), 0)t + x(0) = \rho_0(x_0)t + x_0 \\ \text{onde } x_0 = x(0) \text{ e } \rho_0(x) = \rho(x, 0) \end{cases} \quad (51)$$

De (50) e (51) concluímos que:

- as características são linhas retas;
- elas podem se interceptar;
- elas não necessariamente abrangem todo espaço (x, t) .

Além disso, a inclinação de cada uma dessas retas é dada por $\frac{1}{\rho_0(x_0)}$.

Observamos que o exemplo estudado apenas ilustra uma situação particular de rodovia $\left(q = \frac{1}{2}\rho^2\right)$. A determinação da dependência do fluxo de veículo torna-se um problema com forte conotação probabilística e estatística.

CONCLUSÃO

Neste trabalho foi feito um estudo sobre a dinâmica de tráfego de veículo. Há várias abordagens para modelar o tráfego de veículos, destacamos as seguintes abordagens: a macroscópica e a microscópica. Vimos que na abordagem macroscópica aproxima-se o tráfego de veículos à dinâmica dos fluidos, onde grandezas físicas tais como a velocidade, a densidade e o fluxo, bem como as suas relações mútuas e as leis de conservação, são os pilares deste tipo de abordagem. Já na abordagem microscópica, o tráfego é considerado como um meio discreto onde os veículos são reduzidos a partículas individuais.

O propósito do estudo do tráfego é prever o comportamento dos veículos a partir de um conjunto de dados. Com base nisto, foi feito um estudo do livro de R. Haberman (HABERMAN, 1977), onde apresentamos e analisamos a equação de conservação do número de veículos através da linearização do modelo, estudando suas retas características, e apresentamos a resolução do problema não linear em domínios limitados. Apresentou-se também um exemplo para o problema não linear, conhecido como Equação de Burgers.

Feito o estudo, foi observado que tratar do problema de fluxo de tráfego modelado pela equação de conservação do número de veículos, elucida vários conceitos associados a esta categoria da equação diferencial parcial e várias informações em relação ao problema proposto. O modelo aplicado para representar o fluxo de tráfego veicular é de extrema importância quando se pensa em modelar de forma simplificada e determinística, obtendo resultados rápidos e podendo trabalhar com simulações numéricas, visto que o modelo é escalar e de fácil interpretação.

Uma extensão desta linha de pesquisa para trabalhos futuros seria:

- Considerar entrada e saídas ao longo da rodovia na equação de conservação do número de veículos;
- Resolver o modelo numericamente por aproximações por diferenças finitas;
- Trabalhar com o fluxo de tráfego veicular utilizando o métodos probabilísticos.

REFERÊNCIAS

- BOYCE, W.; DIPRIMA, R. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998.
- CHANDLER, R. E.; HERMAN, R.; MONTROLL, E. W. Traffic Dynamics: Studies in Car Following. *Operations Research*, INFORMS, v. 6, n. 2, p. 165–184, 1958. ISSN 0030364X.
- GREENSHIELDS, B. D. et al. A study in highway capacity. In: *Highway Research Board Proceedings, Transportation Research Board*. [S.l.: s.n.], 1935. v. 14.
- HABERMAN, R. *Mathematical Models: Mechanical Vibrations, Population Dynamics, and Traffic Flow*. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1977. (Classics in Applied Mathematics). ISBN 9780898714081.
- LIGHTHILL, M.; WHITHAM, G. On kinematic waves. II. A theory of traffic flow on long crowded roads. In: *Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. [S.l.: s.n.], 1955. v. 229, n. 1178, p. 317–345.
- MEDEIROS, A. L.; ANDRADE, G. N. *Iniciação às Equações Diferenciais Parciais*. [S.l.]: Livros técnicos e científicos Editora S.A, 1978.
- PIPES, L. An operation dynamics of traffic dynamics. *Journal of Applied Physics*, v. 24, p. 274–287, 1953.
- SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. [S.l.]: Inst. de Matemática Pura e Aplicada, 1979. (Projeto Euclides).