



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Centro de Tecnologia e Ciência

Instituto de Matemática e Estatística

Paulo Vinicius Brito dos Santos


**Estudo sistemático de oscilações mecânicas unidimensionais**

Rio de Janeiro

2018

Paulo Vinicius Brito dos Santos

**Estudo sistemático de oscilações mecânicas unidimensionais**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Computacionais, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientadores: Prof. Dr. Marcus Vinicius Tovar Costa  
Prof. Dr. Augusto Cesar de Castro Barbosa

Rio de Janeiro

2018

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS/ BIBLIOTECA CTC-A

S237 Santos, Paulo Vinicius Brito dos.  
Estudo sistemático de oscilações mecânicas unidimensionais / Paulo  
Vinicius Brito dos Santos.- 2018  
112f.: il.

Orientadores: Marcus Vinicius Tovar Costa, Augusto Cesar de Castro  
Barbosa.

Dissertação (Mestrado Ciências Computacionais) - Universidade do Estado  
do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Oscilações (Matemática) - Teses. 2. Equações diferenciais - Teses. 3.  
Laplace, Transformadas de. - Teses. 4. Análise de erros (Matemática) - Teses.  
I. Costa, Marcus Vinicius Tovar. II. Barbosa, Augusto Cesar de Castro. III.  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e  
Estatística. IV. Título.

CDU 517.9

Rosalina Barros *CRB/7 - 4204* - Responsável pela elaboração da ficha catalográfica.

Autorizo para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta  
dissertação, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Paulo Vinicius Brito dos Santos

**Estudo sistemático de oscilações mecânicas unidimensionais**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Computacionais, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 06 de Março de 2018.

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Marcus Vinicius Tovar Costa (Orientador)  
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

---

Prof. Dr. Augusto Cesar de Castro Barbosa (Orientador)  
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

---

Prof. Dr. Alexandre Lopes de Oliveira  
Instituto Federal do Rio de Janeiro – IFRJ

---

Prof. Dr. Fábio de Jesus Ribeiro  
Escola de Engenharia Industrial Metalúrgica – UFF

---

Prof. Dr. Carlos Frederico Fragoso de Barros e Vasconcellos  
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Rio de Janeiro

2018

## DEDICATÓRIA

Aos meus pais, amigos e todos que me ajudaram a chegar até aqui.

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, José Luiz dos Santos e Maria Joselândia dos Santos por todo apoio dado do início ao fim.

Aos meus orientadores, Marcus Vinicius Tovar Costa e Augusto Cesar de Castro Barbosa, pela disponibilidade, dedicação e ajuda ao longo de todo este trabalho.

Aos professores Alexandre Lopes de Oliveira e Vitor Luiz Bastos de Jesus pela hospitalidade no Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia (IFRJ) do Campus Nilópolis para a realização da parte experimental que compõe o capítulo 7 dessa dissertação.

À minha namorada Anna Carolina Aguiar Nascimento por todo apoio fornecido durante minha trajetória.

À CAPES pela bolsa de estudos ao longo desse trabalho

À Universidade do Estado do Rio de Janeiro e a todos os professores que fizeram parte da minha formação e contribuíram para a realização do trabalho

A sabedoria comunica a vida a seus filhos  
e acolhe os que a procuram.  
*Bíblia Sagrada. Eclo 4,12*

## RESUMO

SANTOS, Paulo V. B. *Estudo sistemático de oscilações mecânicas unidimensionais*. 2018. 112 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Computacionais) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

O estudo de oscilações em diversos sistemas tem continuamente despertado o interesse de pesquisadores teóricos e experimentais em vários campos, tanto pela curiosidade científica como pelo elevado grau de aplicabilidade do tema. Neste trabalho, abordamos o oscilador formado por um sistema massa-mola que possa oscilar em uma dimensão. Paulatinamente são incorporados ao sistema forças dissipativas como atrito e arrasto e também a ação de uma força externa dependente do tempo. Em cada um dos casos tratados, modelamos e resolvemos a equação diferencial do sistema correspondente, obtendo resultados numéricos para estes problemas. São também apresentados os resultados da realização experimental para esses sistemas e a comparação com os resultados teóricos. Por fim, construímos um modelo que trata de um sistema de compensação para a preservação de estruturas sob a ação de uma força externa como ocorre em um abalo sísmico. O sistema é formado por um tubo em formato de U colocado sobre a estrutura, e no qual se introduz um líquido. O acoplamento das equações que descrevem as dinâmicas tanto da estrutura como do líquido produz um efeito de amortecimento ao efeito da onda de choque. O resultado teórico para o modelo está de acordo com o esperado.

Palavras-chave: Oscilações mecânicas. Equações diferenciais. Transformada de Laplace.



## ABSTRACT

SANTOS, Paulo V. B. *Systematic study of one-dimensional mechanical oscillations*. 2018. 112 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Computacionais) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

The study of oscillations in several systems has continually aroused the interest of theoretical and experimental researchers in several fields, for scientific curiosity and also for the high degree of applicability of the subject. In this work, we study an oscillator composed by a mass-spring system that can oscillate in one dimension. Dissipative forces such as sliding friction and drag are gradually incorporated to the system, as well as the action of a time-dependent external force. In each case we model the system and solve the corresponding differential equation, obtaining numerical results. Experimental data are also provided and compared with the theoretical ones. Finally, we proposed a model to describe a compensation system for the preservation of building structures under the action of an external force, as occurs in a seismic shock. The system is composed of an U-shaped hollow tube placed on the top of the structure, into which a liquid is introduced. The coupling between the equations that describe the dynamics of both structure and liquid produces a damping response on the oscillations against the wave-shock effect. The theoretical results are as expected.

Keywords: Mechanical oscillations. Differential equations. Laplace transform.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Pêndulo simples e sistema massa-mola. . . . .	13
Figura 2 - Pêndulo composto e sistema massa-mola composto. . . . .	14
Figura 3 - Sistema massa-mola (OHS). . . . .	17
Figura 4 - Lei de Hooke. . . . .	18
Figura 5 - Posição, velocidade e aceleração para o Oscilador Harmônico Simples. . . . .	21
Figura 6 - Comparação entre posição e velocidade no Oscilador Harmônico Simples. . . . .	22
Figura 7 - Variação da Fase. . . . .	23
Figura 8 - Energia do Oscilador Harmônico Simples. . . . .	24
Figura 9 - Espaço de fase do Oscilador Harmônico Simples. . . . .	26
Figura 10 - Sistema massa-mola para o Oscilador Amortecido. . . . .	28
Figura 11 - Posição, velocidade e aceleração para o Oscilador Subamortecido. . . . .	31
Figura 12 - Espaço de fase para o Oscilador Subamortecido. . . . .	32
Figura 13 - Evolução do Espaço de Fase como função do coeficiente de arrasto $\rho$ . . . . .	33
Figura 14 - Perfis das energias ( $E_c$ , $E_p$ , $E_m$ ) para o Oscilador Subamortecido. . . . .	34
Figura 15 - Posição, velocidade e aceleração para o Oscilador Superamortecido. . . . .	36
Figura 16 - Espaço de fase para o Oscilador Superamortecido. . . . .	36
Figura 17 - Perfis das energias para o Oscilador Superamortecido. . . . .	37
Figura 18 - Resultados de $x(t)$ , $\dot{x}(t)$ e $\ddot{x}(t)$ no Oscilador Criticamente Amortecido. . . . .	39
Figura 19 - Espaço de fase para o Oscilador Criticamente Amortecido. . . . .	39
Figura 20 - Perfis das energias para o Oscilador Criticamente Amortecido. . . . .	40
Figura 21 - Comparação da posição entre os Osciladores Amortecidos. . . . .	41
Figura 22 - Sistema massa mola para o Oscilador Amortecido por atrito. . . . .	42
Figura 23 - Resultados de $x(t)$ , $\dot{x}(t)$ e $\ddot{x}(t)$ no Oscilador Amortecido por atrito seco. . . . .	46
Figura 24 - Perfis das energias para o Oscilador Amortecido por atrito seco. . . . .	47
Figura 25 - Sistema do Oscilador Amortecido por atrito seco e arrasto. . . . .	48
Figura 26 - $x(t)$ , $\dot{x}(t)$ e $\ddot{x}(t)$ para o Oscilador Amortecido por arrasto e atrito seco. . . . .	52
Figura 27 - Perfis das energias para o Oscilador Amortecido por arrasto e atrito seco. . . . .	53
Figura 28 - Sistema massa mola para o oscilador forçado. . . . .	54
Figura 29 - Posição, velocidade e aceleração para o Oscilador Forçado. . . . .	57
Figura 30 - Espaço de fase para o Oscilador Forçado. . . . .	57
Figura 31 - Fenômeno da Ressonância para diferentes valores de $\omega_e$ . . . . .	58
Figura 32 - Fenômeno de ressonância ( $\omega_e \rightarrow \omega_0$ ). . . . .	59
Figura 33 - Perfis das energias para o Oscilador Forçado. . . . .	60
Figura 34 - Posição em função do tempo para o caso particular do Oscilador Forçado. . . . .	61
Figura 35 - Espaço de fase para o caso particular do oscilador forçado. . . . .	62
Figura 36 - Perfis das energias para o caso particular do Oscilador Forçado. . . . .	63

Figura 37 - Sistema massa mola para o Oscilador Forçado Amortecido. . . . .	64
Figura 38 - Gráfico da posição e velocidade para o Oscilador Forçado Subamortecido. . . . .	68
Figura 39 - Espaço de fase para o Oscilador Forçado subamortecido. . . . .	68
Figura 40 - Perfis das energias para o Oscilador Forçado Subamortecido. . . . .	69
Figura 41 - Trilho de ar com corpo de massa $m$ e duas molas $k_1$ e $k_2$ . . . . .	70
Figura 42 - Suporte para as medidas das constantes elásticas das molas. . . . .	71
Figura 43 - Mínimos quadrados - Molas $k_1$ e $k_2$ . . . . .	72
Figura 44 - Balança de precisão. . . . .	72
Figura 45 - Resultado experimental para o Oscilador Harmônico Simples. . . . .	75
Figura 46 - Resultado experimental para o OHS - Espaço de Fase. . . . .	76
Figura 47 - Placa usada para amortecimento. . . . .	77
Figura 48 - Resultado experimental para o Oscilador Amortecido - $0,2m \times 0,1m$ . . . . .	78
Figura 49 - Oscilador Amortecido - Espaço de fase: Placa $0,2m \times 0,1m$ . . . . .	78
Figura 50 - Resultado experimental para o Oscilador Amortecido - $0,2m \times 0,2m$ . . . . .	79
Figura 51 - Oscilador Amortecido - Espaço de fase: Placa $0,2m \times 0,2m$ . . . . .	80
Figura 52 - Resultado experimental para o Oscilador Amortecido - $0,2m \times 0,3m$ . . . . .	81
Figura 53 - Oscilador Amortecido - Espaço de fase: Placa $0,2m \times 0,3m$ . . . . .	81
Figura 54 - Resultado experimental para o Oscilador Amortecido - $0,2m \times 0,4m$ . . . . .	82
Figura 55 - Oscilador Amortecido - Espaço de fase: Placa $0,2m \times 0,4m$ . . . . .	83
Figura 56 - Motor gerador de força externa ligado ao carrinho. . . . .	83
Figura 57 - Resultado experimental para o Oscilador forçado. . . . .	84
Figura 58 - Resultado experimental para o Oscilador forçado - Espaço de Fase. . . . .	85
Figura 59 - Resultado para o Oscilador Forçado Amortecido - $0,2m \times 0,1m$ . . . . .	86
Figura 60 - Oscilador Forçado Amortecido - Espaço de fase: Placa $0,2m \times 0,1m$ . . . . .	86
Figura 61 - Resultado para o Oscilador Forçado Amortecido - $0,2m \times 0,2m$ . . . . .	87
Figura 62 - Oscilador Forçado Amortecido - Espaço de fase: Placa $0,2m \times 0,2m$ . . . . .	87
Figura 63 - Resultado para o Oscilador Forçado Amortecido - $0,2m \times 0,3m$ . . . . .	88
Figura 64 - Oscilador Forçado Amortecido - Espaço de fase: Placa $0,2m \times 0,3m$ . . . . .	88
Figura 65 - Resultado para o Oscilador Forçado Amortecido - $0,2m \times 0,4m$ . . . . .	89
Figura 66 - Oscilador Forçado Amortecido - Espaço de fase: Placa $0,2m \times 0,4m$ . . . . .	89
Figura 67 - Tubo em U. . . . .	91
Figura 68 - Diferença na altura do líquido durante o movimento. . . . .	92
Figura 69 - Proposta experimental para utilização do TLCD. . . . .	93
Figura 70 - Amortecimento da estrutura e do fluido. . . . .	98
Figura 71 - Somatório dos quadrados dos resíduos. . . . .	108

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b>	12
1	<b>OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES</b>	16
1.1	Solução do Oscilador Harmônico Simples	19
1.2	Estudo da Fase	23
1.3	Energia do Oscilador Harmônico Simples	23
1.4	Espaço de fase do Oscilador Harmônico Simples	25
2	<b>OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO POR ARRASTO</b>	28
2.1	Solução do Oscilador Amortecido	29
2.2	Oscilador Subamortecido	30
2.3	Energia do Oscilador Subamortecido	34
2.4	Oscilador Superamortecido	35
2.5	Energia do Oscilador Superamortecido	37
2.6	Oscilador Criticamente Amortecido	38
2.7	Energia do Oscilador Criticamente Amortecido	40
2.8	Comparação entre os tipos de amortecimento	40
3	<b>OSCILADOR AMORTECIDO POR ATRITO SECO</b>	42
3.1	Solução do Oscilador Amortecido por atrito seco	43
3.2	Energia do Oscilador Amortecido por atrito seco	47
4	<b>OSCILADOR AMORTECIDO: ARRASTO E ATRITO SECO</b>	48
4.1	Solução do Oscilador Amortecido por Arrasto e Atrito Seco	49
4.2	Energia do Oscilador Amortecido por arrasto e atrito seco	53
5	<b>OSCILAÇÕES FORÇADAS</b>	54
5.1	Equação diferencial do Oscilador Forçado	55
5.2	Solução do Oscilador Forçado	55
5.3	Energia do Oscilador Forçado	59
5.4	Caso particular do Oscilador Forçado	60
5.5	Energia do caso particular do Oscilador Forçado	62
6	<b>OSCILADOR FORÇADO E AMORTECIDO POR ARRASTO</b>	64
6.1	Solução do Oscilador Forçado Amortecido	65
7	<b>ESTUDO EXPERIMENTAL DE OSCILAÇÕES</b>	70
7.1	Realização Experimental	70
7.2	Medidas e incertezas	72
7.3	O Software Tracker	74
7.4	Oscilador Harmônico Simples	75
7.5	Oscilador Amortecido	76
7.5.1	<u>Placa 0,2m x 0,1m</u>	77

7.5.2	<u>Placa 0,2m x 0,2m</u> . . . . .	79
7.5.3	<u>Placa 0,2m x 0,3m</u> . . . . .	80
7.5.4	<u>Placa 0,2m x 0,4m</u> . . . . .	82
7.6	<b>Oscilador Forçado</b> . . . . .	83
7.7	<b>Oscilador Forçado Amortecido</b> . . . . .	85
7.7.1	<u>Placa 0,2m x 0,1m</u> . . . . .	86
7.7.2	<u>Placa 0,2m x 0,2m</u> . . . . .	87
7.7.3	<u>Placa 0,2m x 0,3m</u> . . . . .	88
7.7.4	<u>Placa 0,2m x 0,4m</u> . . . . .	89
8	<b>AMORTECIMENTO PELO SISTEMA DE TUBO EM U</b> . . . . .	90
8.1	<b>Resolução do sistema de EDO's</b> . . . . .	94
	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	103
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	104
	<b>APÊNDICE A</b> – Erro do Método dos Mínimos Quadrados. . . . .	107
	<b>APÊNDICE B</b> – Método Runge-Kutta . . . . .	110

## INTRODUÇÃO

Podemos definir vibração ou oscilação como qualquer movimento que se repete após um intervalo de tempo. Um longo caminho histórico foi percorrido até que modelos provenientes de interpretações físicas e formulações matemáticas coerentes pudessem esclarecer este fenômeno.

Desde a criação de instrumentos musicais há milhares de anos procurou-se, primeiro por meio de observações, definir alguma forma de regra para a produção de sons. Pitágoras foi o primeiro a identificar padrões utilizando-se de um instrumento chamado monocórdio e lançando, a posteriori, as primeiras bases matemáticas, que se tem notícia, para as propriedades das vibrações de cordas em instrumentos musicais.

Séculos se passaram até que Galileu Galilei ao observar o comportamento pendular de um lustre pendurado no teto da Catedral de Pisa percebeu que este realizava um movimento constante e independente da amplitude de oscilação, ao comparar o tempo de uma oscilação completa (Período  $T$ ) deste pêndulo com as batidas de seu coração. Com essa conclusão, ele lança as bases para a descrição do “Pêndulo Simples”. Em seu livro “Discursos e Demonstrações Matemáticas acerca de duas Novas Ciências a respeito da Mecânica dos Movimentos Locais”, publicado em 1638, Galileu trata da vibração de corpos e estabelece a dependência da frequência de oscilação de um pêndulo com o comprimento de sua corda (GALILEI, 1985).

Em 1687, Sir Isaac Newton (NEWTON, 1962) publicou sua obra “Princípios Matemáticos da Filosofia Natural” e nela apresenta, dentre outras importantes descobertas, as três leis do movimento e a teoria da gravitação universal. Essas leis foram utilizadas em 1713 por Brook Taylor para resolver pela primeira vez o problema de uma corda vibrante. Trabalhos fazendo uso de derivadas parciais foram apresentados por Daniel Bernoulli, Jean D’Alambert, Leonard Euler, Jean Baptist Fourier e Joseph Lagrange.

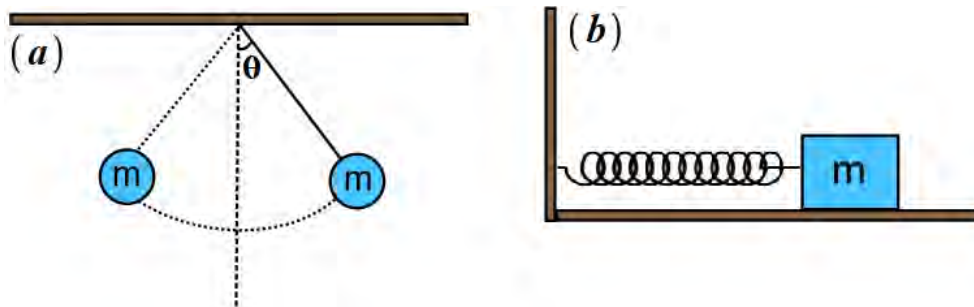
Bernoulli introduziu o princípio da superposição conhecido à época como princípio da coexistências de pequenas oscilações, que possibilitou expressar qualquer função fazendo uso das séries infinitas de senos e cossenos. Aqui, somos remetidos às funções harmônicas, o que irá nomear os sistemas oscilatórios como descritos acima de harmônicos. Ao longo dos séculos XIX e XX muitas contribuições foram realizadas, permitindo-se estudar sistemas com alto grau de complexidade. Características como não linearidade e a aleatoriedade também foram abordadas em trabalhos pioneiros de Poincaré, Lyapunov e Einstein e que também são temas de grande interesse da atualidade.

Não se tem dúvida da importância em se estudar sistemas oscilatórios ou vibrantes. Oscilações estão presentes em muitas situações na natureza, tais como o movimento dos tímpanos que nos permite ouvir, a fala que está associada ao movimento da laringe e língua, turbinas e asas de avião e uma infinidade de sistemas mecânicos (RAO, 2011),

edifícios, estabilidade em sistemas elétricos (CUSTODIO, 2009), temperatura em reações (LIMA, 2015), oscilações harmônicas em sistemas quânticos (BERTUOLA, 2005) (REIS; VITIELLO, 2006) e mais uma infinidade de outros sistemas com grande aplicação prática.

Desde o Ensino Médio estudamos diversos sistemas oscilantes que podem ser descritos por uma teoria “simples”. Dois desses sistemas mecânicos considerados bastante emblemáticos são o “pêndulo simples” e o “sistema massa-mola”, representados na figura 1.

Figura 1 - Pêndulo simples e sistema massa-mola.



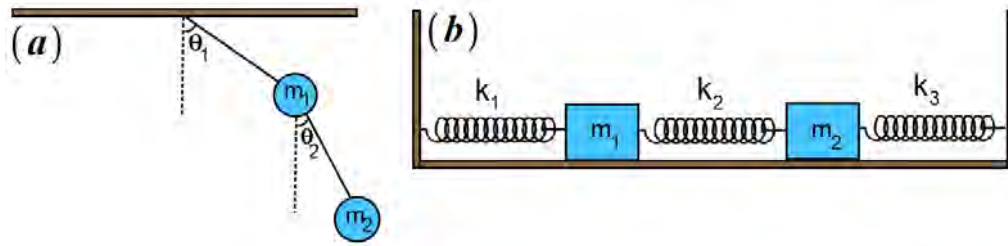
Legenda: Na figura 1(a) temos o pêndulo simples constituído por um corpo de massa  $m$  preso a uma corda de comprimento  $L$  cuja extremidade oposta é fixada no teto. Ao ser deslocado de  $\theta$  é solto e posto a oscilar. Na figura 1(b) é apresentado o sistema massa-mola no qual o corpo  $m$  é fixado e uma das extremidades da mola cuja extremidade oposta é fixada na parede. Ao ser deslocado de sua posição de equilíbrio e solto, o corpo oscila entorno desta.

Fonte: O Autor, 2018.

Como mencionamos anteriormente, chamamos de oscilação qualquer movimento que se repete em um dado intervalo de tempo. Em qualquer sistema físico que possua essa característica é importante que se elabore uma teoria e se formule um modelo, considerando as forças que agem sobre o corpo e tenham como resultado a produção de movimento. No caso de um sistema oscilatório, é de fundamental importância compreender que tem-se uma transformação de energia, seja ela potencial, cinética e até mesmo a perda delas para outro elemento do sistema ou fora do sistema.

A energia potencial se refere à configuração dos elementos do sistema, como a posição do corpo do sistema massa mola num dado instante de tempo, enquanto que a energia cinética está associada à velocidade que este corpo de massa  $m$  possui neste mesmo instante de tempo. Os sistemas apresentados acima podem ser cada vez mais sofisticados o que torna sua modelagem cada vez mais sofisticada; como exemplo podemos ver na figura 2, de um pêndulo duplo e um sistema com dois corpos acoplados a três molas.

Figura 2 - Pêndulo composto e sistema massa-mola composto.



Legenda: Na figura 2(a) temos o pêndulo composto, onde as massas  $m_1$  e  $m_2$  são deslocadas da posição de equilíbrio e postas a oscilar. Na figura 2(b), sistema massa mola com dois corpos presos a três molas, conforme desenho. Os corpos ao serem retirados das suas posições de equilíbrio e soltos são postos a oscilar.

Fonte: O Autor, 2018.

A modelagem do comportamento do sistema, como por exemplo, na análise de variação da posição do corpo com o tempo, passa pela elaboração de uma equação diferencial. Oscilações podem ser abordadas de forma aparentemente simples, tal como podemos encontrar em diversos livros de Física dos ciclos básicos das universidades (NUSSENZVEIG, 2002) (HALLIDAY; RENSHICK, 2008) até estudos mais complicados, tais como oscilador harmônico com massa variável (ORTIZ; CORREA; DUTRA, 2011), a consideração de efeito não harmônicos (CHRISTIAN, 2017). Podemos ainda estudá-los com formulações bastante diversas e relacioná-los a vários outros tópicos da Física e da Matemática, tal como o estudo do oscilador harmônico tratado por séries infinitas (RODRIGUES; BUSQUINI; SATARINE, 2010) e também considerando a sua formulação hamiltoniana (LEMOS, 2007).

Ao longo deste trabalho, nos deteremos em tratar de sistemas do tipo massa-mola quando submetidos a forças de diferentes origens, o que torna mais trabalhoso o tratamento da equação diferencial que o descreve. Uma equação diferencial ordinária é uma equação que envolve derivadas de uma ou mais funções. Elas servem para descrever o comportamento de sistemas dinâmicos e possuem enorme aplicações em áreas como a engenharia (comportamento de circuitos elétrico ou do movimento oscilatório de estruturas) (PEDROSA, 2003). Um dos primeiros estudos matemáticos sobre o oscilador harmônico foi realizado por Leonard Euler, em 1739, ao resolver a equação  $m\ddot{x} + kx = 0$  (BASSALO, 2009) que corresponde à equação diferencial do oscilador harmônico simples e que pode ser resolvida por meio de séries de potência (SOMMERFELD, 1930), técnicas de integração de trajetória e métodos operacionais da transformada de Laplace (PIMENTEL; CASTRO, 2013).

Nesse trabalho trataremos o oscilador harmônico considerando alguns métodos



algébricos e vamos estudar oscilações de diversos tipos que possuem apenas um grau de liberdade, ou seja, dependem apenas de uma coordenada como a variação da posição no tempo. Consideraremos desde o sistema de oscilação harmônica simples, submetido exclusivamente a ação da força de restituição aplicada pela mola presa ao corpo, como também introduziremos uma série de forças dissipativas o que nos levará à classe de osciladores amortecidos. Em um sistema físico real, as forças dissipativas sempre existirão, o que provocará uma perda de energia do sistema. Como exemplo, podemos citar um corpo preso a uma mola posto a oscilar em um meio viscoso. Neste meio, em que o corpo foi colocado, surgem forças que tentem a reduzir o comportamento oscilatório – diminuição da amplitude do movimento (ABDALLA; SILVA, 2016). Em muitos sistemas vibrantes as forças de amortecimento são modeladas como sendo proporcionais à velocidade de deslocamento do objeto,  $F \propto v$ , que ocorre ao considerarmos baixas velocidades.

Estes sistemas também podem estar submetidos à ação de forças externas com o objetivo de manter o sistema oscilando mesmo que haja dissipação de energia e, neste caso, são classificados como osciladores forçados. Estes tipos de oscilações ocorrem em ampla variedade de aplicações da engenharia como citamos anteriormente. Aqui podem aparecer efeitos de superposição de oscilações denominados de ressonância. As forças externas periódicas são de grande importância já que realizam trabalho sobre o sistema e suprem a energia desprendida pelas forças amortecedoras ou mesmo adicionam ainda mais energia ao sistema. Trataremos de oscilações harmônicas simples, amortecidas e amortecidas e forçadas e também o problema do oscilador harmônico pela força dissipativa do atrito e uma força externa periódica (BARBOSA; CARVALHAES; COSTA, 2005).

Procuramos fazer uma descrição bastante didática dos casos tratados o que nos levou a dividir a dissertação em oito capítulos.

No capítulo 1 (Oscilador Harmônico Simples) é apresentado o sistema físico, a modelagem matemática na construção de sua equação diferencial, sua solução e resultados para as grandezas físicas que estamos interessados.

Do capítulo 2 ao 6, passamos a incluir paulatinamente forças dissipativas e força externa com intuito de compreender os efeitos individuais dessas forças sobre o sistema massa-mola.

No capítulo 7 apresentamos o desenvolvimento experimental do sistema massa-mola para diversas situações de interesse.

No capítulo 8 é construído um modelo que trata de um problema real de grande aplicação na área das engenharias civil e mecânica que é a preservação de estruturas quando submetidas a abalos sísmicos. Construímos um modelo que acopla uma estrutura e sob esta é colocado um artefato com formato de tubo em U preenchido parcialmente com um líquido. Neste caso, o tubo servirá de amortecedor da estrutura. Este sistema recebe o nome de Amortecedor de Colunas de Líquido Sintonizado (TLCD - Tuned Liquid Column Damper) (SAKAI; TAKAEDA; TAMAKI, 1989), (WU; LIN; CHANG, 2009).

## 1 OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES

Iniciamos nosso trabalho levantando a seguinte questão: Por que estudar o oscilador harmônico é tão importante? Muitas respostas podem ditas a esse respeito: 1) Parece ser um modelo simples e assim, pode ser exemplo perfeito para introduzir o aluno no estudo tanto da mecânica clássica quanto da mecânica quântica, 2) Pode ser o ponto de partida para modelar vários sistemas físicos.

De fato, praticamente todos os sistemas próximos à região de equilíbrio são aproximadamente do tipo harmônicos. Isso pode ser entendido de forma simples quando consideramos oscilações com pequenas amplitudes (pequenas oscilações). Podemos expandir o potencial  $V(x)$  em séries de Taylor entorno do ponto de equilíbrio, que chamaremos de  $x_0$ ,

$$V(x) = V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3}V'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots \quad (1)$$

O primeiro termo é uma constante aditiva que somente altera o nível de referência do problema, enquanto que o segundo termo  $V'(x_0) = 0$  pela definição de ponto equilíbrio. Dessa forma, somente os termos que envolvem  $V''(x_0)$  e mais os termos de ordens superiores permanecem. No entanto, como estamos restringindo nosso estudo a pequenas oscilações, podemos considerar que os termos de ordem superior são desprezíveis ao compararmos com o termo da derivada segunda do potencial. Assim, o termo restante na expansão

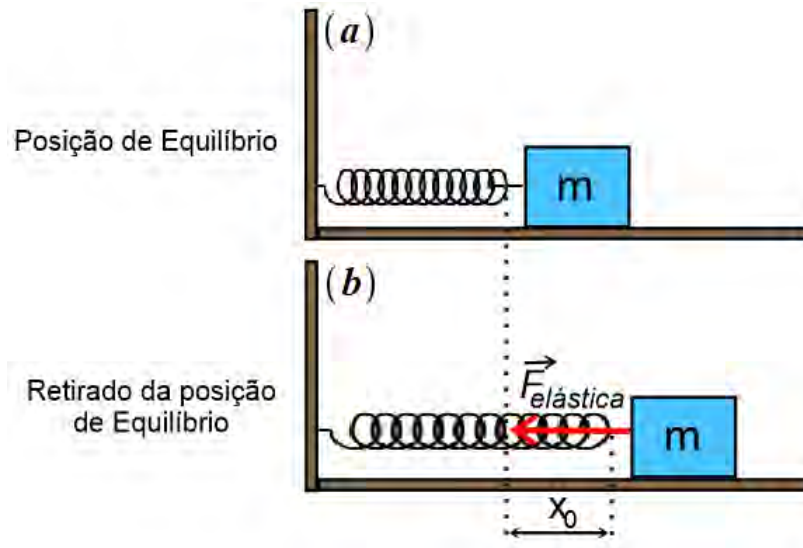
$$V(x) \approx \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2, \quad (2)$$

é igual ao termo para o potencial relativo lei de Hooke  $F(x) = -kx$  dado por  $V(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$ , mostrando que o modelo pode ser tratado (MORIN, 2008). Se considerarmos termos de ordem superior, como por exemplo, em  $\alpha x^3$  teremos termos não lineares como foi proposto por Duffing (KAVACIC; BRENNAN, 2011).

Iniciamos o estudo sistemático do oscilador harmônico considerando primeiramente um sistema do tipo massa-mola livre da ação de forças externas, tanto dissipativas quanto excitativas. A esse sistema é dado o nome de oscilador harmônico simples (OHS) (NUSSENZVEIG, 2002) (AGUIAR, 1994). Este sistema é formado por um bloco de massa  $m$  preso a uma mola, que por sua vez tem a outra extremidade fixa em uma parede, conforme figura 3(a). O bloco é retirado de sua posição de equilíbrio em uma quantidade  $x_0$ , conforme representado na Figura 3(b). Nesta posição, quando o bloco é largado, a única

força que atua sobre ele é a força produzida pela mola<sup>1</sup>, sendo esta uma força restauradora denominada “força elástica”.

Figura 3 - Sistema massa-mola (OHS).



Legenda: A figura 3(a) ilustra o bloco no estado estacionário e a figura 3(b) ilustra o bloco após um deslocamento  $x_0$  da sua posição de equilíbrio submetido à força elástica.

Fonte: O Autor, 2018.

Como neste caso o sistema não está sujeito a forças dissipativas, há conservação da energia mecânica. Assim, o corpo sujeito apenas à força elástica irá se deslocar de  $x_0$  até  $-x_0$ , que determinará a amplitude do movimento. A força restauradora  $\vec{F}_{elástica}(x)$  surge quando a mola é deslocada da posição de equilíbrio (ABDALLA; SILVA, 2016). A força elástica é aproximadamente linear para pequenos deslocamentos da posição de equilíbrio, figura 4, desde que a mola não seja danificada, obedecendo aproximadamente a lei de Hook (NUSSENZVEIG, 2002)

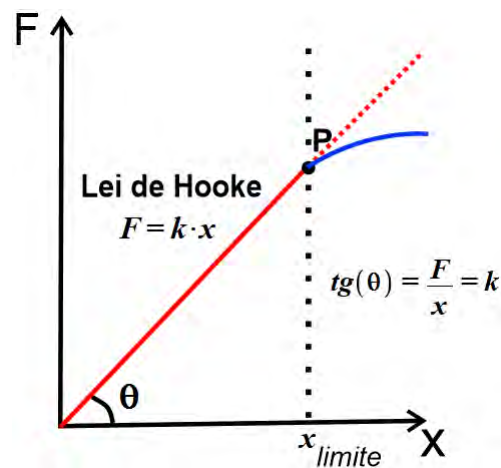
$$F_{elástica}(x) = -kx, \quad (3)$$

em que  $k$  é a constante elástica da mola, que nos dá uma ideia de sua rigidez e  $x$  a diferença entre os comprimentos da mola em repouso e quando ela é comprimida ou tracionada (BERNARDES, 2004). O sinal negativo na equação (3) se deve ao fato da força restaura-

<sup>1</sup> Como o sistema estudado se encontra na posição horizontal, as forças peso e normal são numericamente iguais e de sentidos opostos, não contribuindo para a dinâmica do sistema. Ao longo deste trabalho esta situação será considerada, dispensando a representação destas forças nas figuras ilustrativas dos sistemas a serem tratados.

dora se dar no sentido oposto ao sentido do movimento. Para grandes amplitudes em torno da posição de equilíbrio, em que é ultrapassado o limite elástico da mola ( $x_{\text{limite}}$ ), ela será danificada permanentemente, não retornando à posição de equilíbrio. Para elongações pouco superiores ao do comportamento elástico tendem a aparecer correções não lineares, que dão origem a efeitos mais complexos (NUSSENZVEIG, 2002) (ARANHA, 2016) (CHRISTIAN, 2017).

Figura 4 - Lei de Hooke.



Legenda: Curva em vermelho representa o comportamento linear e a curva em azul sinaliza o comportamento não linear da força elástica, após ultrapassado o limite elástico.

Fonte: O Autor, 2018.

Iremos abordar somente oscilações lineares em  $k$ . Pela segunda lei de Newton, temos

$$\sum_i F_i = ma,$$

em que  $F_i$  são todas as forças atuantes sobre a massa  $m$  e  $a$  é a sua aceleração. Para o oscilador harmônico simples a ser estudado, a única força atuante é a força elástica, então temos

$$\sum_i F_i = ma = -kx. \quad (4)$$

Utilizando a notação de  $\dot{x}$  e  $\ddot{x}$  para a velocidade e aceleração como primeira e segunda derivada da posição  $x(t)$  no tempo  $t$ , respectivamente, tal que

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) \quad \text{e} \quad a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}(t),$$

temos que a equação (4) passa a ser escrita na forma

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (5)$$

que é uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem. Podemos escrever (5) na forma

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (6)$$

onde

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (7)$$

é a frequência natural do oscilador harmônico. A equação diferencial (6) descreve a dinâmica do oscilador harmônico simples unidimensional. De forma geral, os sistemas oscilatórios com um grau de liberdade devem satisfazer com boa aproximação esta equação do movimento no caso de pequenas oscilações.

### 1.1 Solução do Oscilador Harmônico Simples

Resolver a equação (6) significa obter uma função que descreve  $x(t)$  e, para isso, o primeiro passo é obter as raízes de sua equação característica equivalente (BRONSON, 2008),

$$r^2 + \omega_0^2 = 0, \quad (8)$$

dadas por  $r_1 = \omega_0 i$  e  $r_2 = -\omega_0 i$ . Estas raízes são números complexos conjugados e levam  $x(t)$  a ter a forma

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad \text{ou} \quad x(t) = c_1 e^{\omega_0 i t} + c_2 e^{-\omega_0 i t}.$$

Utilizando a relação de Euler,  $e^{\pm i\theta} = \cos(\theta) \pm i \text{sen}(\theta)$ , obtemos

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 [\cos(\omega_0 t) + i \text{sen}(\omega_0 t)] + c_2 [\cos(\omega_0 t) - i \text{sen}(\omega_0 t)], \\ &= (c_1 + c_2) \cos(\omega_0 t) + i(c_1 - c_2) \text{sen}(\omega_0 t) \\ &= c_3 \cos(\omega_0 t) + c_4 \text{sen}(\omega_0 t). \end{aligned} \quad (9)$$

Fazendo  $c_3 = A \cos(\varphi)$  e  $c_4 = -A \text{sen}(\varphi)$ , temos

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) \cos(\varphi) - A \text{sen}(\omega_0 t) \text{sen}(\varphi).$$

Finalmente,  $x(t)$  é dado por

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (10)$$

que determina a variação da posição do bloco em relação ao tempo  $t$ . As constantes  $A$  e  $\varphi$  são chamadas de amplitude de oscilação e fase, respectivamente, e podem ser obtidas conhecendo-se as condições iniciais,  $x(0) = x_0$  e  $\dot{x}(0) = v(0)$  (BASSALO, 2009). Uma vez determinada a função horária da posição, podemos determinar a velocidade  $\dot{x}(t)$  de  $m$  por meio da primeira derivada em relação à  $t$ . Assim,

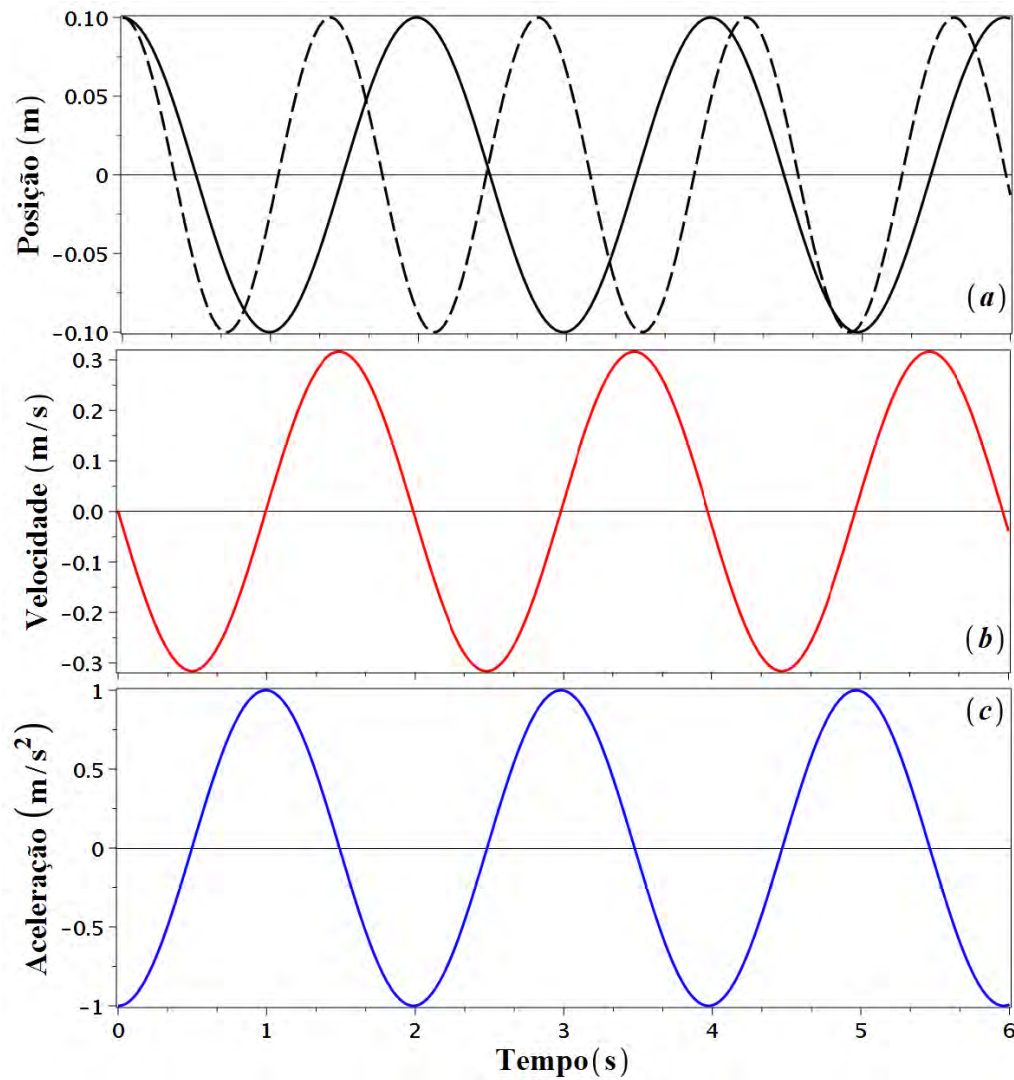
$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (11)$$

De modo análogo, sua aceleração é determinada pela segunda derivada da posição em relação à  $t$ , ou seja, pela primeira derivada da velocidade e dada por

$$\ddot{x}(t) = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (12)$$

As equações (10), (11) e (12) representam funções periódicas de  $t$  com período  $2\pi$ . Para analisar os gráficos das funções obtidas, foram utilizados os parâmetros:  $m = 0,1\text{kg}$ ,  $A = 0,1\text{m}$  e  $\varphi = 0$ . A figura 5(a) representa a evolução temporal da posição da massa  $m$  durante o movimento harmônico simples, onde são representadas duas curvas, preta sólida para  $k = 1\text{N/m}$  e preta pontilhada para  $k = 2\text{N/m}$ . Aumentando-se o valor de  $k$ , a frequência natural  $\omega_0$  do oscilador cresce para um mesmo intervalo de tempo. Nesse caso, temos:  $k = 1\text{N/m}$  implica em  $\omega_0 = 3,1623\text{s}^{-1}$  e para  $k = 2\text{N/m}$  temos  $\omega_0 = 4,4721\text{s}^{-1}$ ; esse aumento no valor de  $\omega_0$  implica em uma maior frequência no movimento do bloco. Por se tratar do oscilador harmônico simples, não houve alteração na amplitude devido a ausência de forças amortecedoras. As figuras 5(b) e 5(c) ilustram o comportamento da velocidade e da aceleração, respectivamente, utilizando os mesmos parâmetros e constante da mola  $k = 1\text{N/m}$ .

Figura 5 - Posição, velocidade e aceleração em função do tempo para o OHS.

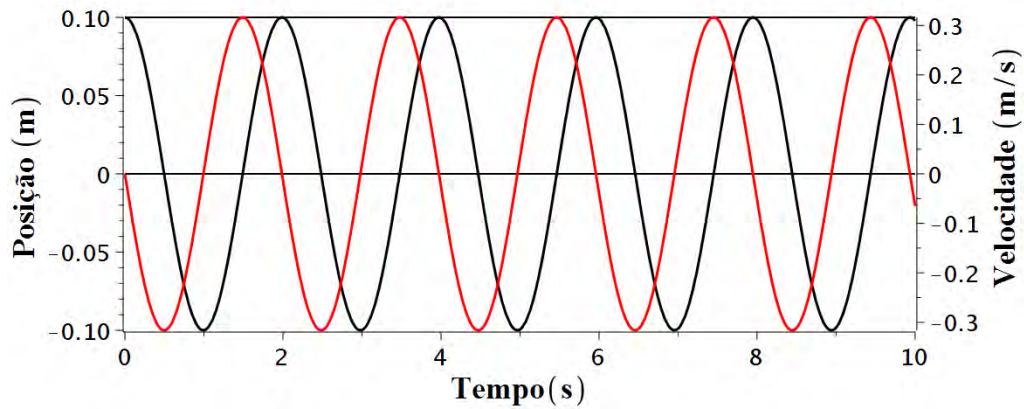


Legenda: As curvas de posição pretas sólida e tracejada foram geradas utilizando os parâmetros  $k = 1\text{N/m}$  e  $k = 2\text{N/m}$  respectivamente. As curvas de velocidade e aceleração foram geradas utilizando o parâmetro  $k = 1\text{N/m}$ .

Fonte: O Autor, 2018.

A figura 6 ilustra uma comparação das curvas da posição e velocidade em função do tempo para o OHS do caso anterior para  $k = 1\text{N/m}$ .

Figura 6 - Comparação entre posição (curva em preto) e velocidade (curva em vermelho) para Oscilador Harmônico Simples.



Fonte: O Autor, 2018.

Note que quando a posição do bloco é máxima, sua velocidade é nula e a velocidade é máxima quando o bloco está passando pela posição de equilíbrio. Isso se deve ao fato do bloco inverter o sentido do movimento ao atingir os pontos  $x_0$  e  $-x_0$ .

As constantes  $A$  e  $\varphi$  podem ser obtidas considerando-se as condições iniciais  $x(0) = x_0$  e  $v(0) = v_0$ . Das equações da posição (10) e velocidade (11), temos

$$x(0) = A\cos(\omega_0 \cdot 0 + \varphi) = x_0 \quad \text{e} \quad v(0) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 \cdot 0 + \varphi) = v_0, \quad (13)$$

que nos remete ao sistema de equações

$$\begin{cases} A\cos(\varphi) = x_0 \\ -A\omega_0 \sin(\varphi) = v_0 \end{cases} \Rightarrow A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \quad \text{e} \quad \varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega_0 x_0}\right). \quad (14)$$

Em particular, para o caso em que o bloco é retirado do repouso, deslocando-se  $x_0$  da sua posição de equilíbrio e solto, ou seja, condições iniciais  $x(0) = x_0$  e  $v(0) = 0$ , as constantes  $A$  e  $\varphi$  são dadas por

$$A = x_0 \quad \text{e} \quad \varphi = 0. \quad (15)$$

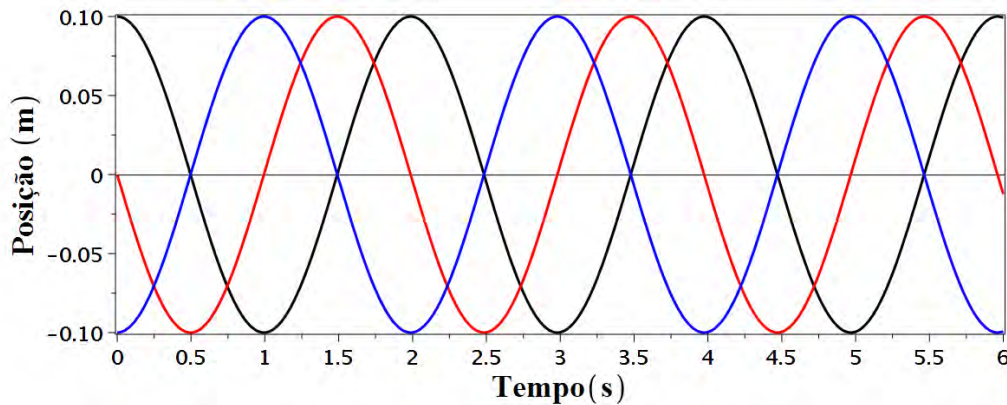
Note que a constante  $A$  possui o valor  $x_0$  deslocado da posição de equilíbrio e devido a isso recebe o nome de amplitude do movimento.



## 1.2 Estudo da Fase

A constante  $\varphi$ , chamada de constante de fase, tem o efeito de deslocar a curva como um todo horizontalmente, para esquerda ou para direita, dependendo de seu sinal (positivo desloca a curva para esquerda e negativo desloca para direita).  $\varphi$  está diretamente ligada às condições iniciais impostas pelo problema. Diz-se que duas funções estão em *quadratura* quando  $|x|$  é máximo em uma, e nulo na outra e diz-se que as funções estão em oposição de fase quando os valores de  $x$  nos instantes correspondentes são iguais e contrários (NUSSENZVEIG, 2002). No gráfico da figura 7, a curva vermelha com  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  está em quadratura em relação a curva preta  $\varphi = 0$  e a curva azul  $\varphi = \pi$  está em oposição de fase com a curva preta  $\varphi = 0$ , para a posição  $x(t)$ .

Figura 7 - Variação da Fase.



Legenda: Curva preta utilizando  $\varphi = 0$ , curva vermelha com  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (em quadratura com a curva preta) e curva azul com  $\varphi = \pi$  (em oposição de fase com a curva preta).

Fonte: O Autor, 2018.

## 1.3 Energia do Oscilador Harmônico Simples

O oscilador harmônico simples abordado representa um sistema ideal e as oscilações estão sob a ação de uma força conservativa, não havendo dissipação de energia do sistema. A energia cinética do bloco de massa  $m$  é

$$E_c(t) = \frac{mv^2}{2} \quad (16)$$

e pode ser determinada uma vez que a expressão da velocidade (11) é conhecida,

$$E_c(t) = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{m(-A\omega_0 \text{sen}(\omega_0 t + \varphi))^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2 \text{sen}^2(\omega_0 t + \varphi)}{2}.$$

Substituindo  $\omega_0^2$  dado pela equação (7), temos que a função energia cinética do oscilador no instante  $t$  é dada por

$$E_c(t) = \frac{A^2 k \operatorname{sen}^2(\omega_0 t + \varphi)}{2}. \quad (17)$$

Ao ser retirado da posição de equilíbrio e levado até a posição  $x_0$ , o corpo adquire energia potencial

$$E_p(t) = \frac{k x^2(t)}{2}, \quad (18)$$

que pode ser determinada a partir da relação (10). Temos então que

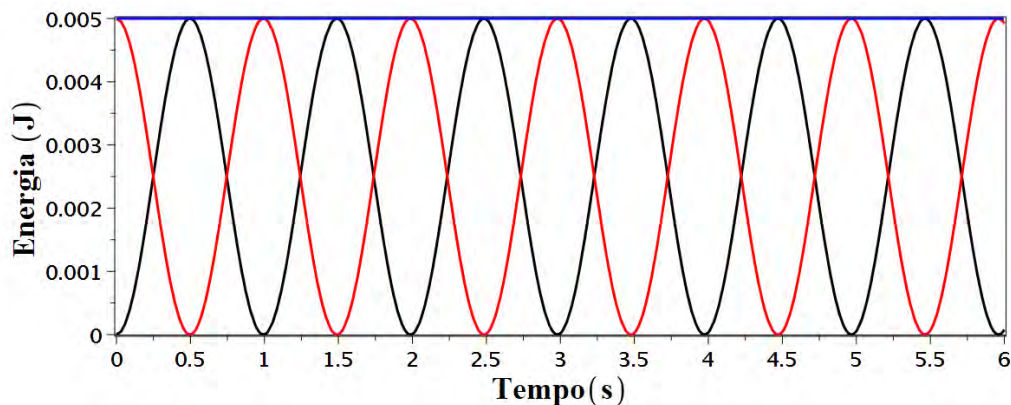
$$E_p(t) = \frac{k x^2(t)}{2} = \frac{k(A \cos(\omega_0 t + \varphi))^2}{2} = \frac{k A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)}{2}. \quad (19)$$

A energia mecânica do sistema é dada pela soma de suas energias cinética e potencial:

$$E_m(t) = E_c + E_p = \frac{A^2 k \operatorname{sen}^2(\omega_0 t + \varphi) + A^2 k \cos^2(\omega_0 t + \varphi)}{2} = \frac{A^2 k}{2} = \text{constante}. \quad (20)$$

A figura 8 ilustra o comportamento das energias, a curva em preto representa a energia cinética, em vermelho a energia potencial e em azul a energia mecânica do sistema, que é constante no tempo.

Figura 8 - Energia do Oscilador Harmônico Simples.



Legenda: Comportamento da energia cinética (curva em preto), energia potencial (curva em vermelho) e energia mecânica (curva em azul).

Fonte: O Autor, 2018.

Este resultado mostra que durante o movimento do OHS há uma troca de energia potencial e cinética do corpo,  $E_c(t)$  e  $E_p(t)$ , ambas apresentando um comportamento os-

cilatório e periódico. Note que, como não existe energia negativa, as curvas estão sempre na parte positiva. Nos instantes em que o oscilador passa pela posição de equilíbrio,  $x(t) = 0$ , a energia é puramente cinética e quando a magnitude do deslocamento é máxima,  $x(t) = A$ , a energia é puramente potencial. Naturalmente que, para que a energia mecânica permaneça constante, deve haver uma troca harmônica entre as energias cinética e potencial, o que significa que embora não haja troca de energia entre o sistema massa-mola e o meio externo, há uma troca de energia interna no sistema, entre a massa  $m$  e a mola  $k$ .

#### 1.4 Espaço de fase do Oscilador Harmônico Simples

Em mecânica, o estado de um sistema é caracterizado pelas suas grandezas cinemáticas e dinâmicas, ou seja, posição, velocidade, aceleração e massa. É muito instrutivo desenharmos uma curva tridimensional  $\gamma(t) = (x, \dot{x}, \ddot{x})$  parametrizada pelo tempo  $t$ , tendo a posição  $x(t)$ , a velocidade  $\dot{x}(t)$  e a aceleração  $\ddot{x}(t)$  como eixos cartesianos  $XYZ$ , respectivamente. Esta curva  $\gamma$  é conhecida como espaço de configuração ou espaço de fase. Quando o sistema é unidimensional, como o caso do oscilador harmônico que estamos estudando, a projeção do espaço de configurações no plano posição  $\times$  velocidade também pode ser denominado (informalmente) de espaço de fase. Em geral, a análise destas curvas produz muitas informações relevantes sobre o sistema físico em questão como por exemplo a existência forças externas atuantes, o comportamento da energia e fornecer um grande instrumento para a análise do quão caótico ou não é o sistema.

Partindo da equação da energia mecânica, que parametriza posição e velocidade em função do tempo, temos:

$$E_m(t) = E_c + E_p = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}; \quad (21)$$

$$m\dot{x}^2 + kx^2 = m\omega_0^2 A^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2 = \omega_0^2 A^2$$

$$\frac{\dot{x}^2}{(\omega_0 A)^2} + \frac{x^2}{A^2} = 1. \quad (22)$$

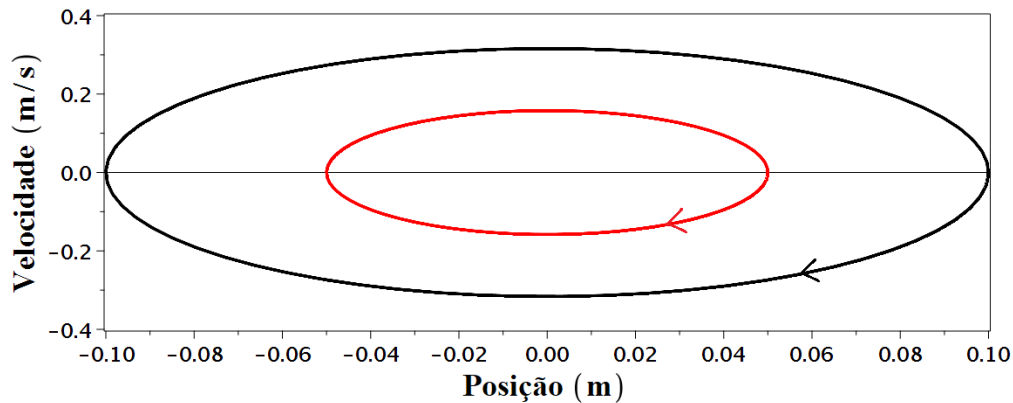
Para o caso do oscilador livre, a curva no espaço de fase é uma elipse, representada pela equação (22), com o semi-eixo horizontal  $a = A$  e o semi-eixo vertical  $b = \omega_0 A$ . De (22) podemos escrever

$$\frac{\dot{x}^2}{(\omega_0 A)^2} = 1 - \frac{x^2}{A^2}$$

$$\dot{x}^2 = (\omega_0 A)^2 \left[ 1 - \frac{x^2}{A^2} \right] \Rightarrow \dot{x}(x) = \pm \sqrt{(\omega_0 A)^2 \left[ 1 - \frac{x^2}{A^2} \right]}, \quad (23)$$

que fornece a relação da velocidade com a posição. A figura 9 ilustra a relação (23), utilizando os parâmetros  $m = 0,1\text{kg}$ ,  $\varphi = 0$  e  $k = 1\text{N/m}$ . Consideramos  $A = 0,1\text{m}$  na curva em preto e  $A = 0,05\text{m}$  na curva em vermelho.

Figura 9 - Espaço de fase do Oscilador Harmônico Simples.



Legenda: A curva em preto mostra a trajetória do corpo nesse espaço, para uma amplitude  $A = 0,1\text{m}$ ; a curva vermelha para uma amplitude  $A = 0,05\text{m}$ . Em cada uma das curvas é indicado o sentido em que as curvas são percorridas.

Fonte: O Autor, 2018.

Note que os pontos extremos das elipses são os pontos em que a velocidade é nula, ou seja, os pontos em que o movimento inverte o sentido. Para cada par  $(x, v)$  da curva temos uma leitura imediata do comportamento do corpo durante o movimento harmônico simples. A análise do espaço de fase de sistemas dinâmicos nos fornece condições de entender melhor o comportamento do sistema em questão. Cada coordenada representada no espaço de fase tem associado a ela um momentum e esse par ordenado  $(x, p)$  caracteriza um estado do sistema para um dado tempo  $t$ . Conseqüentemente, a evolução temporal ou dinâmica desse sistema terá como resultado uma órbita no espaço de fase. Considerando-se as condições iniciais do problema e o conjunto de parâmetros associados a ele, a órbita gerada no espaço de fase nos fornecerá todas as informações dinâmicas do sistema.

No caso do oscilador harmônico simples, temos um sistema determinístico que produz uma curva fechada. No entanto, se o sistema for caótico, irá fornecer curvas neste espaço em que órbitas próximas divergem umas das outras, exponencialmente; como  $e^{\lambda t}$ , onde  $\lambda$  é chamado de expoente de Lyapunov e fornece uma medida de quanto o sistema

está afastado ou não de ser caótico. Um modo bastante interessante de observar o espaço de fase é olhar sua projeção bidimensional conhecida como seção de Poincaré, que fornece uma distribuição bidimensional dos pontos de coordenada  $(x, v)$ .

Para um movimento caótico, a distribuição de pontos é ordenada enquanto que se a mesma é regular, o sistema é quasiperiódico ou periódico.

O que podemos ver nas figuras ao longo desse trabalho é a evolução da desordem da construção do mapa de Poincaré à medida que as forças irão sendo incorporadas ao sistema (CALVAO; PENNA, 2015)

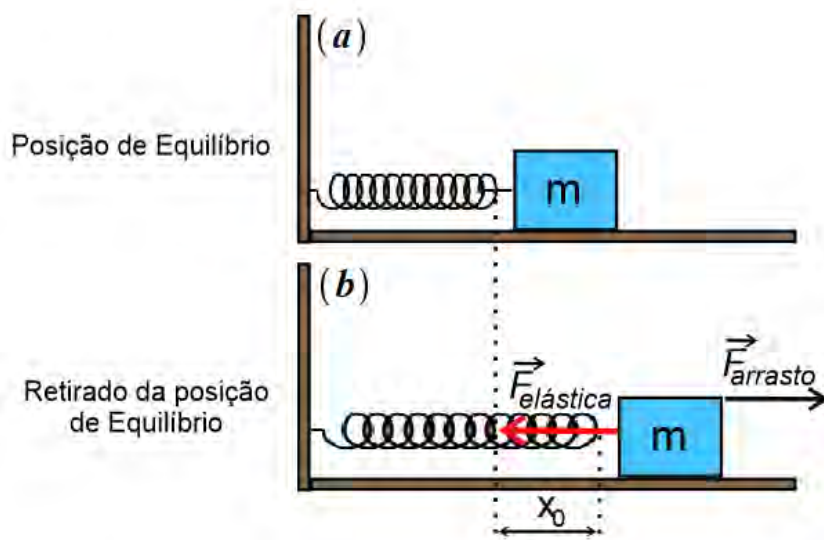
Nos capítulos que seguem, continuaremos estudando o oscilador harmônico, sendo que paulatinamente iremos considerar algum tipo de agente externo, isto é, uma força que acarretará em dissipação de energia do sistema ou que forneça energia ao mesmo.

## 2 OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO POR ARRASTO

O oscilador harmônicos simples, estudado no capítulo anterior, ocorre em sistemas conservativos. No entanto, para sistemas reais sempre ocorrerá dissipação de energia, proveniente de forças de resistência ao movimento, denominadas de forças dissipativas.

Desse capítulo em diante, incorporaremos forças que se opõem do movimento do bloco, sendo que cada uma delas é descrita a partir de um modelo físico. A primeira força dissipativa incorporada ao sistema massa-mola é proveniente da resistência do ar sobre o corpo de massa  $m$ , chamada de força de arrasto,  $\vec{F}_{\text{res}}(\vec{v}) = \vec{F}_{\text{arrasto}}(\vec{v})$ . Esta força surge imediatamente após o corpo ser abandonado e entrar em movimento. A figura 10 ilustra o caso.

Figura 10 - Sistema massa-mola para o Oscilador Amortecido.



Legenda: A figura 10(a) ilustra o bloco no estado estacionário e a figura 10(b) ilustra o bloco após um deslocamento  $x_0$  da sua posição de equilíbrio submetido à força elástica e a força de arrasto.

Fonte: O Autor, 2018.

A segunda lei de Newton nos remete a um sistema parecido ao do capítulo anterior com um termo adicional  $\vec{F}_{\text{arrasto}}(v)$  que, para pequenas velocidades, oferece uma resistência proporcional à velocidade. Assim,

$$F_{\text{arrasto}} = -\rho\dot{x}, \quad \rho > 0, \quad (24)$$

onde  $-\rho\dot{x}$  representa a força dissipativa que atua em sentido oposto à velocidade do corpo e  $\rho$  é o coeficiente de arrasto, que depende da geometria do corpo e das características do

fluido em qual o corpo está imerso. Deste forma, podemos escrever

$$\sum_i F_i = m\ddot{x} = -kx - \rho\dot{x}, \quad (25)$$

ou

$$\ddot{x} + \frac{\rho\dot{x}}{m} + \frac{kx}{m} = 0.$$

Fazendo

$$2b = \frac{\rho}{m} > 0 \quad \text{e} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad (26)$$

resulta na equação diferencial

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (27)$$

## 2.1 Solução do Oscilador Amortecido

A equação diferencial (27) é classificada como linear homogênea de 2ª ordem com coeficientes constantes, cuja equação característica é

$$r^2 + 2br + \omega_0^2 = 0, \quad (28)$$

com as raízes

$$r_1 = -b + \sqrt{(b^2 - \omega_0^2)} \quad \text{e} \quad r_2 = -b - \sqrt{(b^2 - \omega_0^2)}. \quad (29)$$

A solução de (27) tem a forma geral

$$x(t) = c_1 e^{-b + \sqrt{(b^2 - \omega_0^2)}t} + c_2 e^{-b - \sqrt{(b^2 - \omega_0^2)}t}. \quad (30)$$

Dependendo dos valores de  $b$  e  $\omega_0$ , obtemos três soluções distintas para  $x(t)$ , implicando em três casos distintos de osciladores amortecidos, classificados como:

- Oscilador Subamortecido:  $b^2 - \omega_0^2 < 0$ .
- Oscilador Superamortecido:  $b^2 - \omega_0^2 > 0$ .
- Oscilador Criticamente Amortecido:  $b^2 - \omega_0^2 = 0$ .

Para cada um desses casos, obtemos diferentes soluções, que variam de acordo com a classificação de amortecimento. Nas seções que seguem, examinamos esses três casos em detalhes.

## 2.2 Oscilador Subamortecido

Quando  $b^2 - \omega_0^2 < 0$ , dizemos que o oscilador é subamortecido e, neste caso, temos que

$$r_1 = -b + i\sqrt{\omega_0^2 - b^2} \quad \text{e} \quad r_2 = -b - i\sqrt{\omega_0^2 - b^2}. \quad (31)$$

Para simplificar, usamos a substituição

$$\omega^2 = \omega_0^2 - b^2. \quad (32)$$

Assim, escrevemos as raízes como

$$r_1 = -b + i\omega \quad \text{e} \quad r_2 = -b - i\omega. \quad (33)$$

Substituindo as raízes na solução da EDO linear em (30),

$$x(t) = c_1 e^{(-b+i\omega)t} + c_2 e^{(-b-i\omega)t} = c_1 e^{-bt} e^{i\omega t} + c_2 e^{-bt} e^{-i\omega t} \quad (34)$$

Usando a relação de Euler,  $e^{\pm i\theta} = \cos(\theta) \pm i\sin(\theta)$ , podemos reescrever (34) como

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-bt} [\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)] + c_2 e^{-bt} [\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)] \\ &= e^{-bt} [(c_1 + c_2)\cos(\omega t) + (c_1 - c_2)\sin(\omega t)] \\ &= e^{-bt} (c_3 \cos(\omega t) + c_4 \sin(\omega t)). \end{aligned} \quad (35)$$

Fazendo  $c_3 = A\cos(\varphi)$  e  $c_4 = -A\sin(\varphi)$ , temos que

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-bt} (A\cos(\omega t)\cos(\varphi) - A\sin(\omega t)\sin(\varphi)) \\ &= Ae^{-bt} \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (36)$$

Note que para este caso a amplitude de oscilação é dependente de  $t$  e dada por  $A(t) = Ae^{-bt}$ . Para  $t$  crescente, a amplitude de  $x(t)$  decai exponencialmente, diferente da expressão (10) referente ao oscilador harmônico simples. Essa redução é devida ao coeficiente de arrasto  $b$ , introduzido na equação (25) por uma força dissipativa proveniente do fluido (ar). Note também que a frequência  $\omega$ , obtida na expressão da solução para o oscilador subamortecido, é sempre menor do que a frequência  $\omega_0$ , caso não houvesse amortecimento (para  $\rho = 0$ ) (ALONSO, 2014).

Analogamente ao procedimento anterior, uma vez determinada a equação horária da posição de  $m$ , podemos determinar sua velocidade e aceleração como

$$\dot{x}(t) = -Ae^{-bt} [\omega \sin(\omega t + \varphi) + b\cos(\omega t + \varphi)] \quad (37)$$

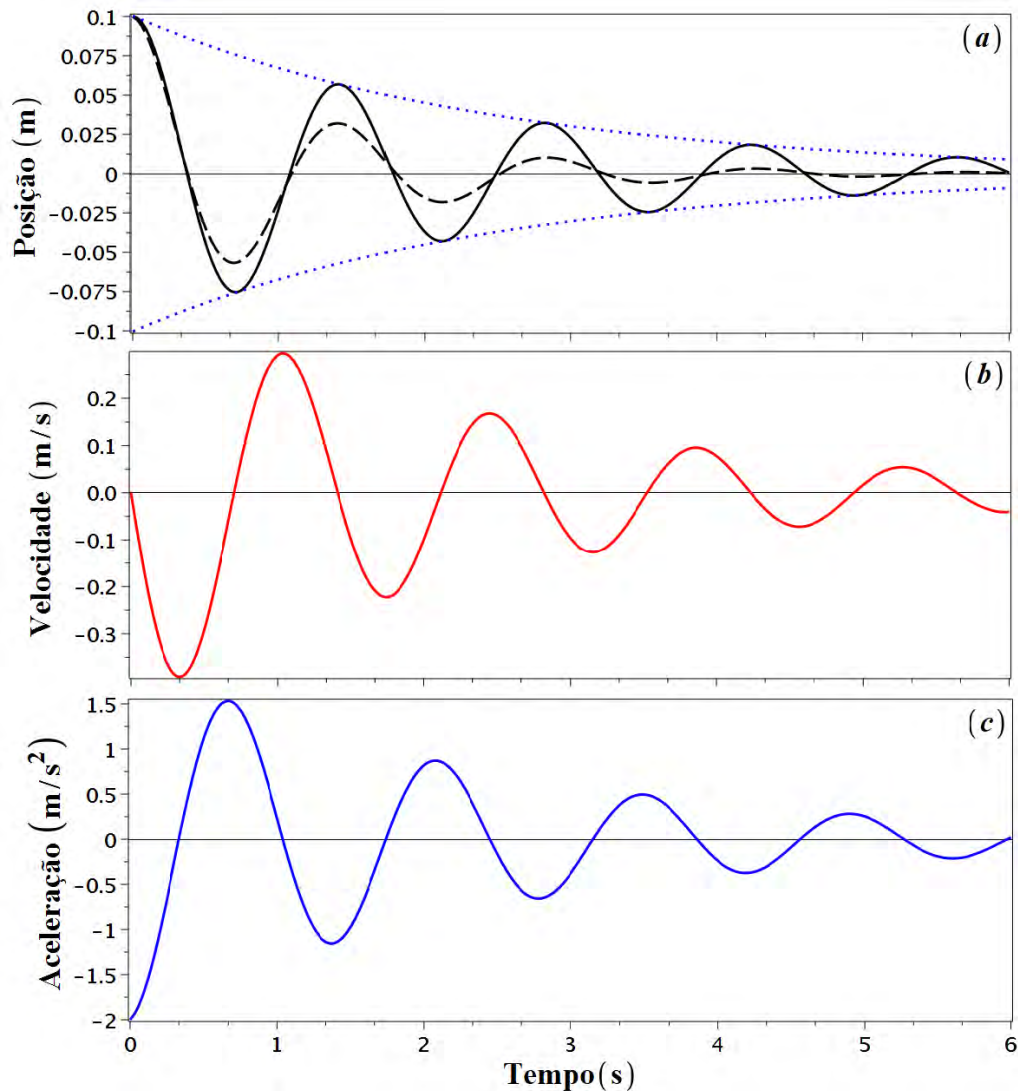


e

$$\ddot{x}(t) = Ae^{-bt}(b^2 \cos(\omega t + \varphi) + 2b\omega \sin(\omega t + \varphi) - \omega^2 \cos(\omega t + \varphi)). \quad (38)$$

A figura 11(a) ilustra a solução da EDO do oscilador subamortecido para dois diferentes coeficientes de arrasto com  $\rho = 0,04 \text{ kg/s}$  (curva preta s3lida) e  $\rho = 0,08 \text{ kg/s}$  (curva preta tracejada) e os seguintes parâmetros:  $m = 0,05\text{kg}$ ,  $k = 1\text{N/m}$ ,  $A = 0,1$  e  $\varphi = -0,08956$ .

Figura 11 - Posi33o, velocidade e acelera33o em fun33o do tempo para o Oscilador Subamortecido.



Fonte: O Autor, 2018.

Note que para um maior valor de  $\rho$  o amortecimento do sistema 33 mais acentuado. Para o caso em que  $\rho = 0,04\text{kg/s}$ , as curvas pontilhadas representam a taxa de decaimento,

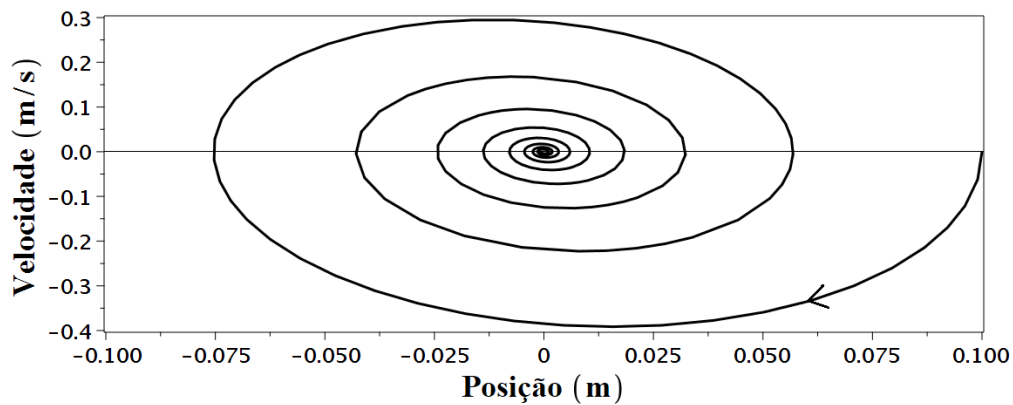
dada por um fator

$$\pm Ae^{-\frac{\rho}{2m}t}. \quad (39)$$

Nas figuras 11(b) e 11(c) temos os gráficos da velocidade e aceleração em função do tempo, utilizando coeficiente de arrasto de 0,04kg/s. Aqui é bastante instrutivo compararmos as diferenças de comportamento do sistema com amortecimento (figura 11) e sem amortecimento (figura 5).

A figura 12 apresenta o espaço de fase do oscilador amortecido onde o sentido da curva mostra que o sistema irá colapsar para o estado de repouso em  $x = 0$ .

Figura 12 - Espaço de fase para o Oscilador Subamortecido.

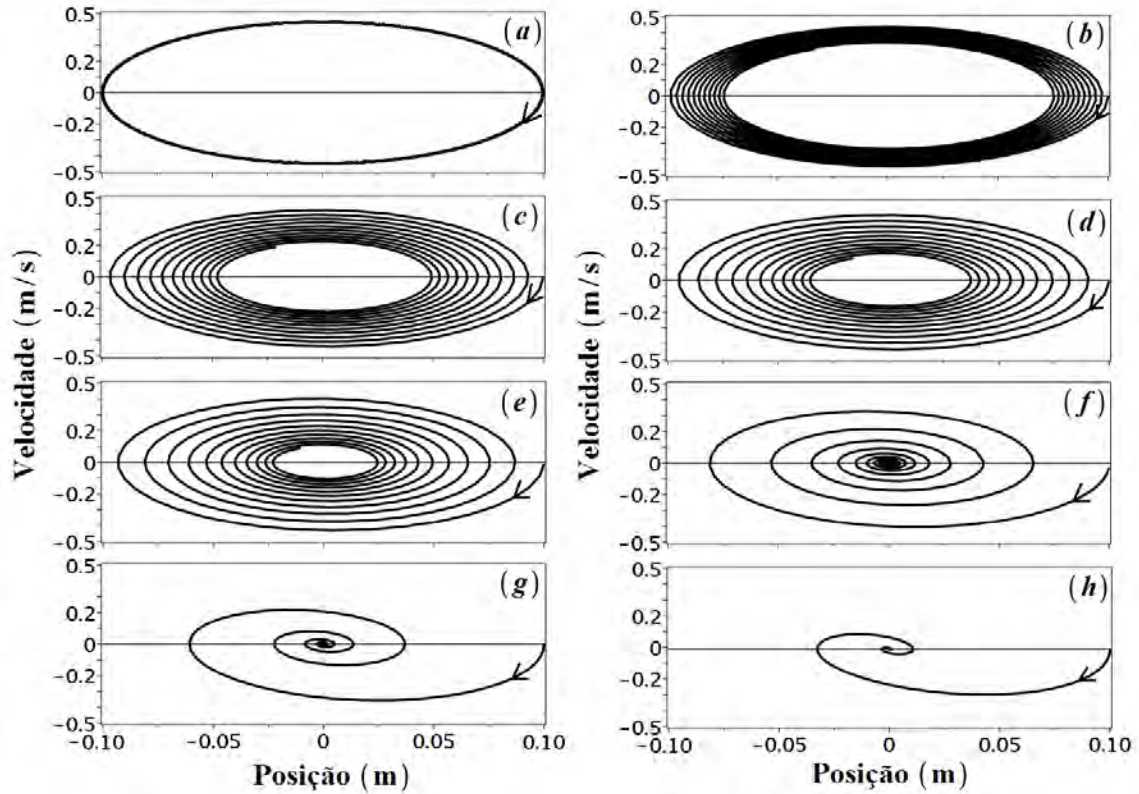


Fonte: O Autor, 2018.

Na figura 13 são apresentados os gráficos mostrando como se dá a modificação do espaço de fase do sistema à medida que o arrasto sobre o sistema aumenta, partindo do caso  $\rho = 0\text{kg/s}$ , figura 13(a) (oscilador harmônico simples) até  $\rho = 0,15\text{kg/s}$ , figura 13(h) (oscilador fortemente subamortecido), os coeficientes de arrasto são descritos na tabela 1.

Tabela 1 - Coeficientes de arrasto ( $\rho$ ) utilizados.

Figura	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)
$\rho$ (kg/s)	0	0,002	0,005	0,007	0,01	0,03	0,07	0,15

Figura 13 - Evolução do Espaço de Fase como função do coeficiente de arrasto  $\rho$ .

Legenda: A figura 13(a) ilustra o bloco oscilando indefinidamente, devido a ausência do coeficiente de arrasto ( $\rho$ ). Conforme o coeficiente de arrasto aumenta, temos um número cada vez menor de oscilações, conforme podemos ver na figura 13(h).

Fonte: O Autor, 2018.

### 2.3 Energia do Oscilador Subamortecido

A energia cinética  $E_c(t)$  e a energia potencial  $E_p(t)$  podem ser obtidas considerando as equações (36) e (37), respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned} E_c(t) &= \frac{m\dot{x}^2}{2} \\ &= \frac{mA^2e^{-2bt}[\omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) + b\cos(\omega t + \varphi)]^2}{2} \\ &= \frac{mA^2e^{-2bt}[\omega^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi) + b\omega \operatorname{sen}[2(\omega t + \varphi)] + b^2\cos^2(\omega t + \varphi)]}{2} \end{aligned} \quad (40)$$

e

$$E_p(t) = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2e^{-2bt}\cos^2(\omega t + \varphi)}{2}. \quad (41)$$

A energia mecânica do sistema é dada por

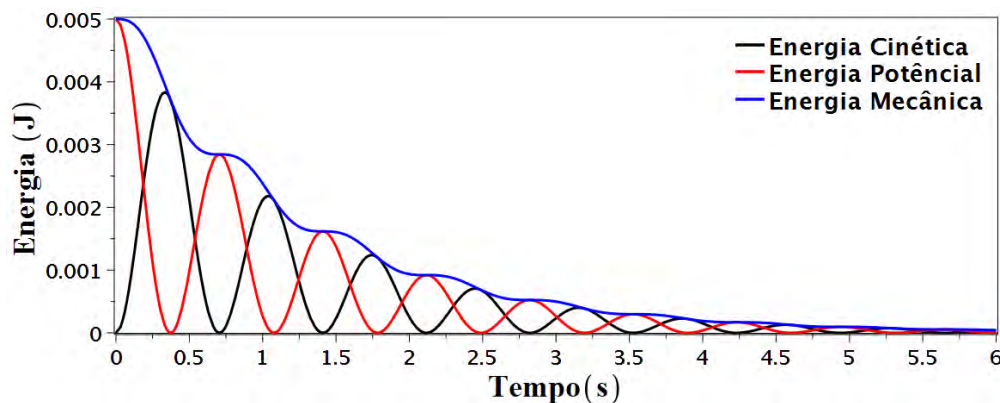
$$\begin{aligned} E_m(t) &= \frac{mA^2e^{-2bt}[\omega^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi) + b\omega \operatorname{sen}[2(\omega t + \varphi)] + b^2\cos^2(\omega t + \varphi)]}{2} \\ &\quad + \frac{kA^2e^{-2bt}\cos^2(\omega t + \varphi)}{2}, \end{aligned} \quad (42)$$

que, após simplificações e utilizando a substituição (26), toma a forma

$$E_m(t) = \frac{mA^2e^{-2bt}[\omega^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi) + b\omega \operatorname{sen}[2(\omega t + \varphi)] + (b^2 + \omega_0^2)\cos^2(\omega t + \varphi)]}{2}. \quad (43)$$

Determinadas as expressões das energias cinética, potencial e mecânica, podemos comparar graficamente seus comportamentos em função do tempo. A figura 14 ilustra os perfis das energias cinética (curva em preto), energia potencial (curva em vermelho) e energia mecânica (curva em azul).

Figura 14 - Perfis das energias ( $E_c$ ,  $E_p$ ,  $E_m$ ) para o Oscilador Subamortecido.



Fonte: O Autor, 2018.

A energia no oscilador subamortecido, diferentemente do oscilador harmônico simples, não se conservou, ou seja, ocorreu perda de energia com o meio exterior passar do tempo, devido à força dissipativa de arrasto presente no sistema. Este comportamento caracteriza um sistema não conservativo.

## 2.4 Oscilador Superamortecido

Quando  $b^2 - \omega_0^2 > 0$  em (30), dizemos que o oscilador é superamortecido. Fazendo a substituição  $\omega^2 = b^2 - \omega_0^2$ , temos

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{(-b+\omega)t} + c_2 e^{(-b-\omega)t} \\ &= e^{-bt} (c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}). \end{aligned} \quad (44)$$

Uma vez determinada a equação horária da posição, determinamos a velocidade e a aceleração de  $m$  como

$$\dot{x} = e^{-bt} (c_1 \omega e^{\omega t} - c_2 \omega e^{-\omega t}) - b e^{-bt} (c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}) \quad (45)$$

e

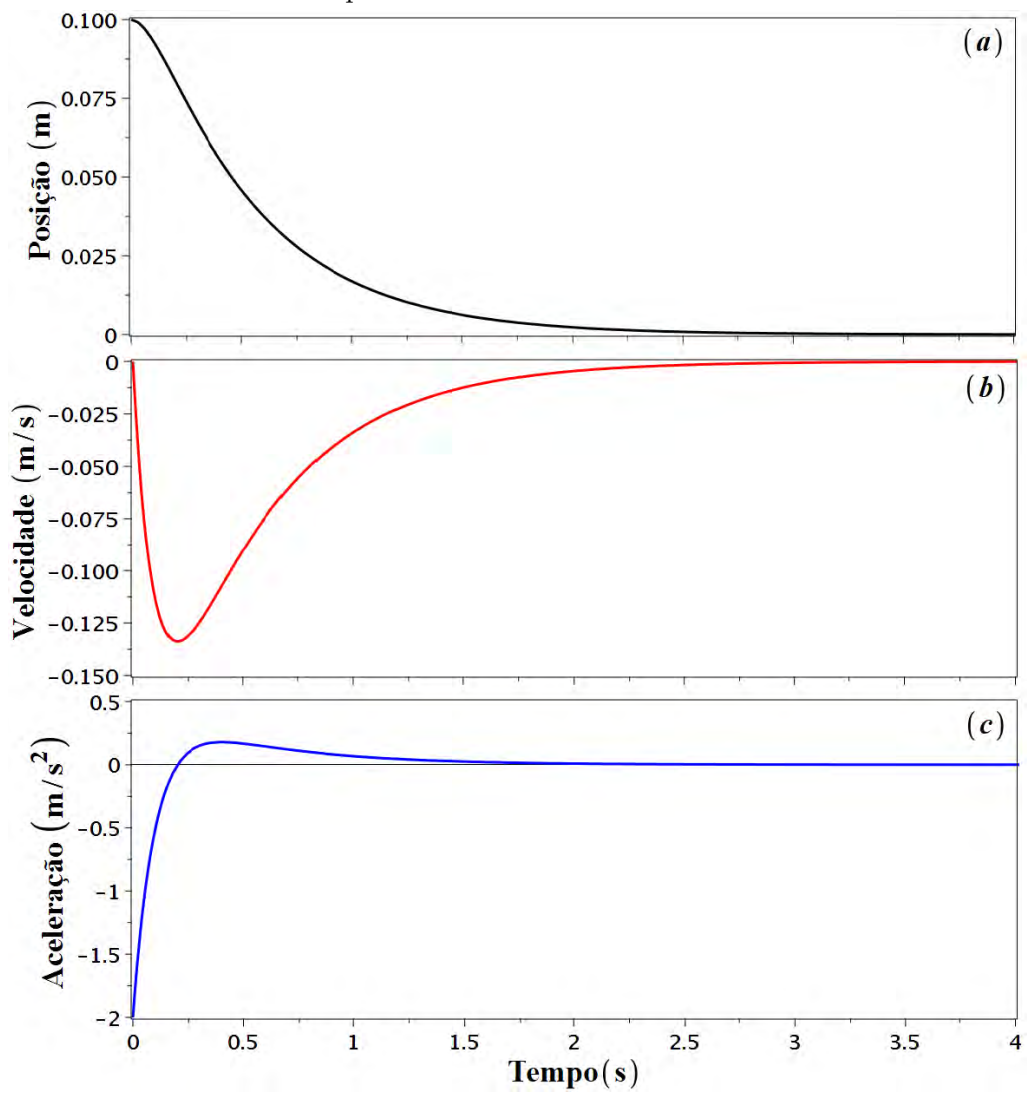
$$\begin{aligned} \ddot{x} &= b^2 e^{-bt} (c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}) + e^{-bt} (c_2 \omega^2 e^{-\omega t} + c_1 \omega^2 e^{\omega t}) - 2b e^{-bt} (c_1 \omega e^{\omega t} - c_2 \omega e^{-\omega t}) \\ &= e^{-t(b+\omega)} (c_1 (b - \omega)^2 e^{2\omega t} + c_2 (b + \omega)^2). \end{aligned} \quad (46)$$

A figura 15(a) ilustra a solução (44) do oscilador superamortecido com os seguintes parâmetros:  $m = 0,05\text{kg}$ ,  $k = 1\text{N/m}$ ,  $\rho = 0,6\text{kg/s}$ ,  $c_1 = 0,125$  e  $c_2 = -0,025$ , onde  $c_1$  e  $c_2$  foram obtidas das condições iniciais  $x(0) = 0,1\text{m}$  e  $\dot{x}(0) = 0$ .

Observe que neste caso não ocorre oscilação, o que era de se esperar, visto que a solução (44) não contém nenhuma função periódica e é composta apenas de exponenciais decrescentes. A velocidade, a aceleração e o espaço de fase são representados pelas figuras 15(b), 15(c) e 16, respectivamente, para o mesmo conjunto de parâmetros.

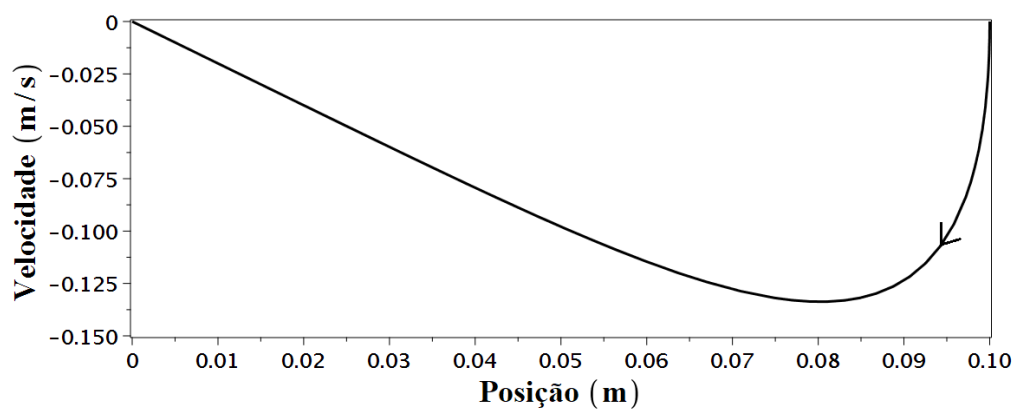
Na figura 15(b), observamos que ao ser solto o bloco ganha velocidade devido a energia potencial do sistema, obtida pela extensão da mola mas, em seguida, devido ao amortecimento, sua velocidade decresce até parar.

Figura 15 - Posição, velocidade e aceleração em função do tempo para o Oscilador Superamortecido.



Fonte: O Autor, 2018.

Figura 16 - Espaço de fase para o Oscilador Superamortecido.



Fonte: O Autor, 2018.

## 2.5 Energia do Oscilador Superamortecido

A energia mecânica para o oscilador superamortecido é dada pela expressão

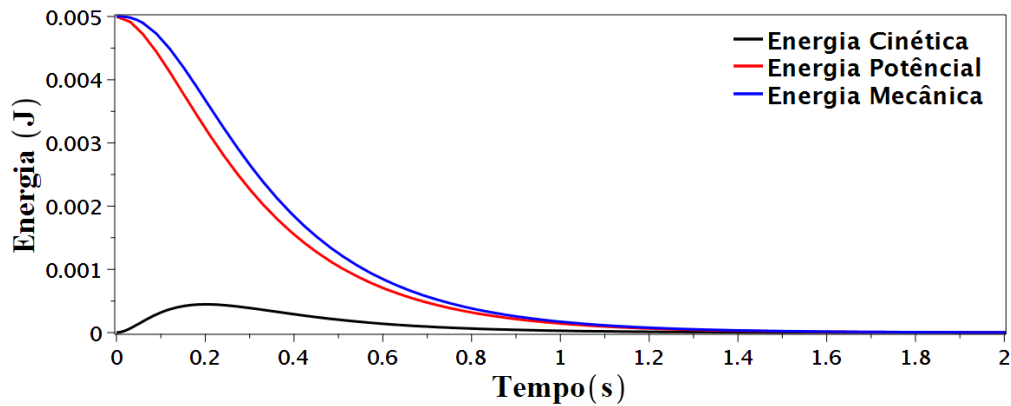
$$E_m(t) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}. \quad (47)$$

Substituindo (44) e (45) em (47), temos

$$\begin{aligned} E_m(t) &= \frac{m[(e^{-bt}(c_1\omega e^{\omega t} - c_2\omega e^{-\omega t}) - be^{-bt}(c_1e^{\omega t} + c_2e^{-\omega t}))^2]}{2} + \frac{k(e^{-bt}(c_1e^{\omega t} + c_2e^{-\omega t}))^2}{2} \\ &= \frac{me^{-2t(b+\omega)}(c_1(b-\omega)e^{2\omega t} + c_2(b+\omega))^2 + ke^{-2t(b+\omega)}(c_1e^{2\omega t} + c_2)^2}{2}. \end{aligned} \quad (48)$$

A figura 17 ilustra o comportamento das energias, onde a curva em preto representa a energia cinética, em vermelho a energia potencial e em azul a energia mecânica, considerando-se os parâmetros:  $m = 0,05\text{kg}$ ,  $k = 1\text{N/m}$ ,  $\rho = 0,6\text{kg/s}$ ,  $c_1 = 0,125$  e  $c_2 = -0,025$ .

Figura 17 - Perfis das energias cinética, potencial e mecânica para o Oscilador Superamortecido.



Fonte: O Autor, 2018.

As curvas de energia do oscilador superamortecido não possuem termos que causem comportamento oscilatório, fazendo com que sejam na maior parte do tempo decrescentes.

## 2.6 Oscilador Criticamente Amortecido

Quando  $b^2 - \omega_0^2 = 0$ , dizemos que o oscilador é criticamente amortecido. Nesse caso, as raízes encontradas em (29) são iguais, ou seja,

$$r_1 = r_2 = -b. \quad (49)$$

Como devemos ter duas soluções linearmente independentes, a solução geral da EDO tem a forma

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_2 t} \\ &= c_1 e^{-bt} + c_2 t e^{-bt} \\ &= e^{-bt}(c_1 + c_2 t). \end{aligned} \quad (50)$$

A velocidade  $\dot{x}(t)$  e aceleração  $\ddot{x}(t)$  são dadas por

$$\dot{x} = e^{-bt}(c_2 - c_1 b - c_2 t b) \quad (51)$$

e

$$\ddot{x} = b e^{-bt}(-2c_2 + c_1 b + c_2 b t). \quad (52)$$

Diferente dos casos anteriores de amortecimento, existe um único valor de  $\rho$  que torna o oscilador criticamente amortecido e este valor é encontrado pela expressão

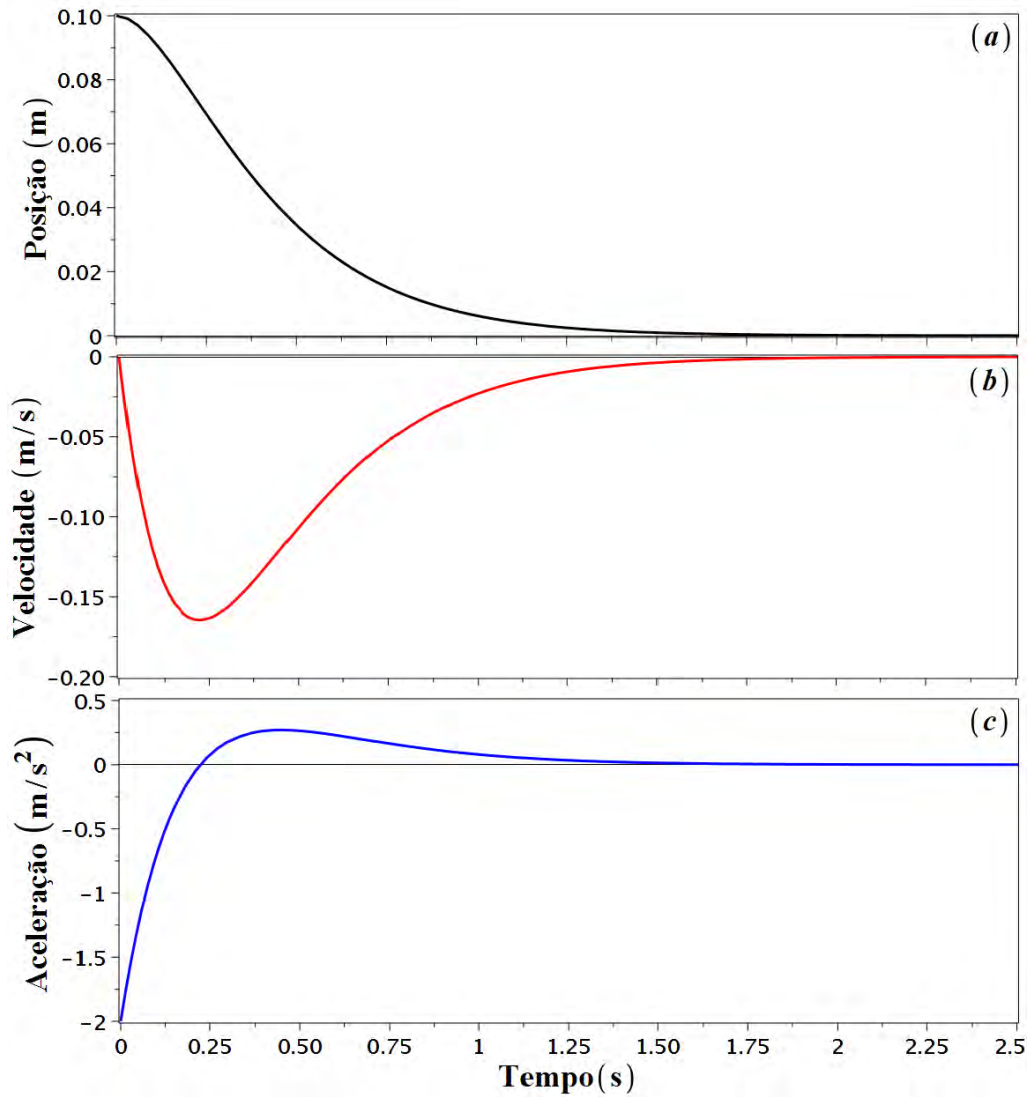
$$\rho = 2\sqrt{m}\sqrt{k}, \quad (53)$$

obtida partindo-se da condição  $b^2 - \omega_0^2 = 0$ , que determina o amortecimento crítico. A figura 18(a) ilustra a solução do oscilador criticamente amortecido, dada pela expressão (50), utilizando os seguintes parâmetros:  $m = 0,05\text{kg}$ ,  $k = 1\text{N/m}$ ,  $\rho = 0,447214\text{kg/s}$ ,  $c_1 = 0,1$  e  $c_2 = 0,447214$ .

Assim como no caso do oscilador superamortecido, ao ser solto, o bloco ganha velocidade devido à energia potencial do sistema, mas logo após, devido ao amortecimento, perde velocidade até parar, conforme figura 18(b) e, conseqüentemente, sua aceleração tem o comportamento descrito na figura 18(c). A ausência de funções periódicas nas respectivas expressões fazem com que as curvas da posição, velocidade e aceleração não oscilem. O espaço de fase é representado pela figura 19.

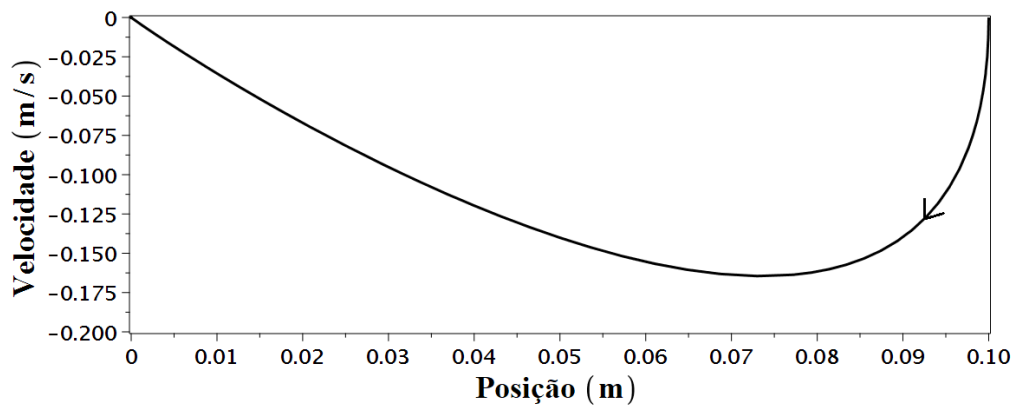


Figura 18 - Posição, velocidade e aceleração em função do tempo para o Oscilador Criticamente Amortecido.



Fonte: O Autor, 2018.

Figura 19 - Espaço de fase para o Oscilador Criticamente Amortecido.



Fonte: O Autor, 2018.

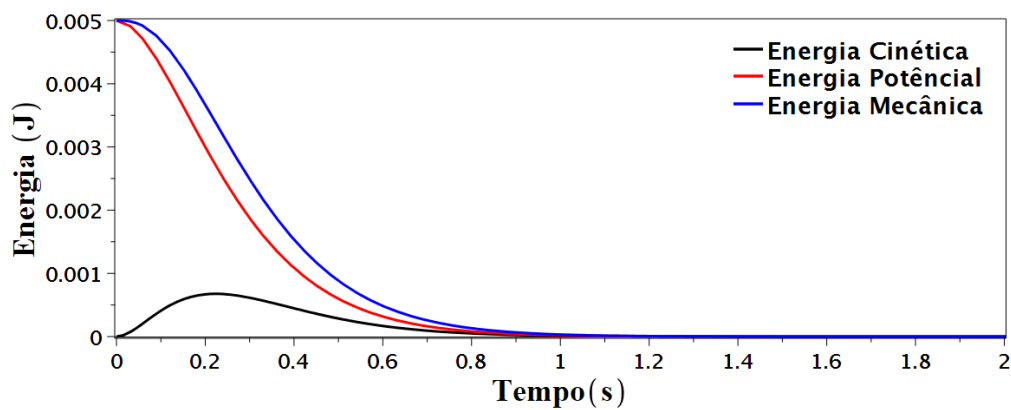
## 2.7 Energia do Oscilador Criticamente Amortecido

Neste caso, a energia mecânica é obtida substituindo (50) e (51) em (47):

$$\begin{aligned}
 E_m(t) &= \frac{me^{-2bt}(c_2 - c_2tb - c_1b)^2}{2} + \frac{k(e^{-2bt}(c_1 + c_2t)^2)}{2}; \\
 &= \frac{me^{-2bt}(c_2 - c_2tb - c_1b)^2 + k(e^{-2bt}(c_1 + c_2t)^2)}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{54}$$

A figura 20 ilustra os perfis das energias cinética (curva em preto), energia potencial (curva em vermelho) e energia mecânica (curva em azul).

Figura 20 - Perfis das energias cinética, potencial e mecânica para o Oscilador Criticamente Amortecido.



Fonte: O Autor, 2018.

## 2.8 Comparação entre os tipos de amortecimento

Após realizado o estudo dos três casos de osciladores harmônicos amortecidos, podemos analisar suas diferenças. A distinção entre os três tipos de osciladores está na intensidade do coeficiente de arrasto.

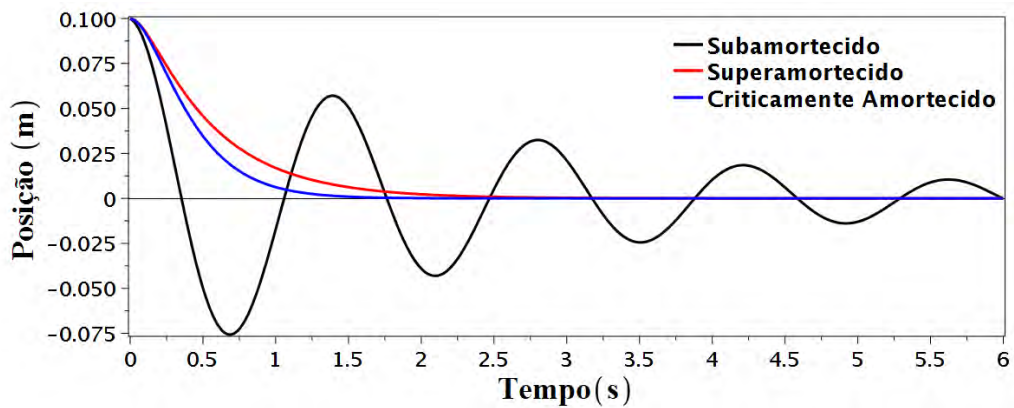
Podemos fazer uma comparação entre os três tipos de amortecimentos estudados, dadas as mesmas condições iniciais e parâmetros  $m = 0,05\text{kg}$  e  $k = 1\text{N/m}$  para três diferentes valores de arrasto  $\rho$  conforme tabela 2 abaixo.

Tabela 2 - Coeficientes de arrasto.

$\rho$ (kg/s)	Tipo de amortecimento
0.05	Subamortecido
0.447214	Criticamente Amortecido
0.6	Superamortecido

A figura 21 ilustra os gráficos onde a curva em preto representa o oscilador subamortecido, em vermelho o oscilador superamortecido e em azul o oscilador criticamente amortecido. Note que o valor  $\rho = 0,447214\text{kg/s}$  foi obtido pela expressão (53)

Figura 21 - Comparação entre as variações de posição para os Osciladores Amortecidos.



Legenda: Oscilador Subamortecido(curva em preto), Oscilador Superamortecido(curva em vermelha) e Oscilador Criticamente Amortecido(curva em azul)

Fonte: O Autor, 2018.

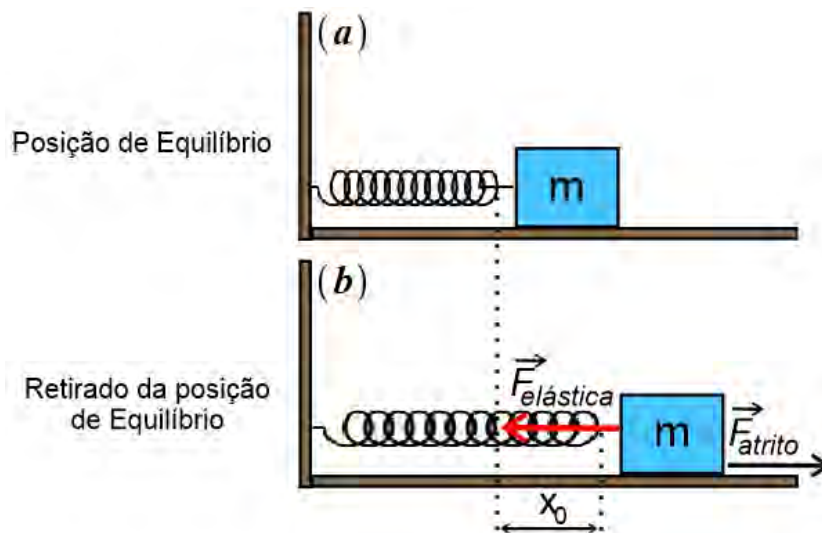
O gráfico indica que o oscilador criticamente amortecido atinge mais rapidamente a posição de equilíbrio.

### 3 OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO POR ATRITO SECO

Em praticamente todos os sistemas físicos que possamos elaborar em um laboratório, na indústria ou mesmo presente em nossa vida, a força de atrito está presente, não importando se o sistema está na escala macro, micro ou nanométrica muito estudada ultimamente. Além disso, com bastante frequência, esta força é desprezada na elaboração de modelos didáticos físicos-matemáticos pelo alto grau de complexidade em seu tratamento. De certo modo, procuramos simplificar seus efeitos nos modelos construídos. A primeira formulação deste efeito conhecido como lei de Amontons-Coulomb foi apresentada em 1699 e aprimorada por Coulomb em 1785 (POPOVA; POPOV, 2015). Um exemplo bem claro das dificuldades no tratamento da força de atrito, ocorre no estudo do oscilador harmônico (CSERNAK; STEPAN, 2006), (MARCHEWKA; ABBOTT; BEICHNER, 2004) (HONG; LIU, 2000). Resultados experimentais e modelos obtidos e elaborados recentemente (VITORINO; VIEIRA; RODRIGUES, 2017) indicam que este continua sendo um tema bastante atual de pesquisa devido sua importância.

Consideremos agora o oscilador harmônico sob a ação da força de atrito,  $F_{\text{atrito}} = \mu N$ . Esta é uma força de contato (atrito seco) e surge sempre que dois corpos entram em contato físico e depende fundamentalmente da natureza e áreas de contato entre as superfícies. A figura 22 ilustra este caso.

Figura 22 - Sistema massa mola para o Oscilador Amortecido por atrito.



Legenda: A figura 22(a) ilustra o bloco no estado estacionário e a figura 22(b) ilustra o bloco após um deslocamento  $x_0$  da sua posição de equilíbrio submetido à força elástica e a força de atrito.

Fonte: O Autor, 2018.

Pela segunda lei de Newton, temos que

$$\sum_i F_i = m\ddot{x} = -kx \pm \mu mg \quad (55)$$

ou

$$m\ddot{x} + kx = \pm \mu mg, \quad (56)$$

onde  $\mu$  é o coeficiente de atrito entre as superfícies e o sinal do termo no lado direito da expressão varia de acordo com o sentido do movimento (ONORATO; MASCOLI; DEAMBRIOSIS, 2010). Utilizando o fato do movimento ser dado na horizontal, temos que a força peso é numericamente igual à força normal, isto é,  $N = mg$ , escrevemos (56) como

$$m\ddot{x} + kx = \pm \mu N. \quad (57)$$

### 3.1 Solução do Oscilador Amortecido por atrito seco

A equação diferencial (57) pode ser escrita como

$$m\ddot{x} + kx + \mu N \operatorname{sgn}(\dot{x}) = 0, \quad (58)$$

onde  $\operatorname{sgn}(\dot{x})$  é a função sinal, definida como

$$\operatorname{sgn}(\dot{x}) = \begin{cases} -1 & \text{se } \dot{x} > 0 \\ 0 & \text{se } \dot{x} = 0 \\ 1 & \text{se } \dot{x} < 0 \end{cases} . \quad (59)$$

Esta é uma equação diferencial não linear homogênea e não existe solução analítica simples para ela. No entanto, a equação pode ser resolvida analiticamente se dividirmos o eixo do tempo em segmentos separados por  $\dot{x} = 0$ , ou seja, meio-ciclos que terminam nos extremos da amplitude. Assim, a equação (58) pode ser escrita como duas equações:

$$m\ddot{x} + kx = -\mu N \quad (\text{massa indo da esquerda para a direita}), \quad (60)$$

$$m\ddot{x} + kx = +\mu N \quad (\text{massa indo da direita para a esquerda}), \quad (61)$$

cujas soluções são

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \operatorname{sen}(\omega t) - \frac{\mu N}{k} \quad (62)$$

e

$$x(t) = A_3 \cos(\omega t) + A_4 \sin(\omega t) + \frac{\mu N}{k}, \quad (63)$$

respectivamente. Os primeiros dois termos de (62) e (63) são as soluções das equações homogêneas. As equações (62) e (63) serão utilizadas como base para obtermos a equação da posição  $x(t)$  de cada ciclo.

### 1º meio-ciclo

Consideremos o bloco sendo retirado da posição de equilíbrio e solto, partindo inicialmente da direita para esquerda. Utilizando a solução (63) e as condições iniciais  $x(0) = x_0$  e  $\dot{x}(0) = 0$ , determinamos as constantes  $A_3 = x_0 - \frac{\mu N}{k}$  e  $A_4 = 0$ , que resulta na equação do movimento

$$x(t) = \left( x_0 - \frac{\mu N}{k} \right) \cos(\omega t) + \frac{\mu N}{k}, \quad (64)$$

que é válida apenas para o primeiro meio ciclo, ou seja, para  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega}$ , que termina quando a massa chega no extremo esquerdo, cuja posição é dada por

$$x_1 = x\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = -x_0 + \frac{2\mu N}{k} = -\left(x_0 - \frac{2\mu N}{k}\right), \quad (65)$$

que por sua vez será usada como condição inicial para o próximo ciclo.

### 2º meio-ciclo

Para o segundo meio-ciclo, a solução (62) cujo sinal da força de atrito é oposto ao caso anterior e com as condições iniciais  $x\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = -x_0 + \frac{2\mu N}{k}$  e  $\dot{x}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = 0$ , determinamos as constantes  $A_1 = x_0 - \frac{3\mu N}{k}$  e  $A_2 = 0$ , que fornece a equação do movimento

$$x(t) = \left( x_0 - \frac{3\mu N}{k} \right) \cos(\omega t) - \frac{\mu N}{k}, \quad (66)$$

válida apenas para o segundo meio ciclo, ou seja, para  $\frac{\pi}{\omega} \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}$ , que acaba quando a massa chega na extrema direita do movimento e cuja posição é dada por

$$x_2 = x\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = x_0 - \frac{4\mu N}{k}. \quad (67)$$

A equação (67) é uma das condições iniciais a serem aplicadas em conjunto com a equação de ida (63) para determinarmos a equação da posição para o próximo ciclo.

3º meio-ciclo

Para o terceiro meio-ciclo, utilizamos a solução (63) com as condições iniciais  $x\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = x_0 - \frac{4\mu N}{k}$  e  $\dot{x}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = 0$ , com as constantes  $A_3 = x_0 - \frac{5\mu N}{k}$  e  $A_4 = 0$ . Assim, a equação do movimento para o terceiro meio-ciclo é

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{5\mu N}{k}\right) \cos(\omega t) + \frac{\mu N}{k}, \quad (68)$$

válida no intervalo  $\frac{2\pi}{\omega} \leq t \leq \frac{3\pi}{\omega}$ . Este meio-ciclo termina quando a massa chega na extrema esquerda, cuja posição é dada por

$$x_3 = -x_0 + \frac{6\mu N}{k} = -\left(x_0 - \frac{6\mu N}{k}\right), \quad (69)$$

utilizado como condição inicial para o próximo meio-ciclo. Assim, esse processo se repete até que o sistema não possua energia suficiente para vencer a força de atrito. Das equações (65), (67) e (69) podemos obter uma solução geral para o  $i$ -ésimo ponto de chegada de um meio-ciclo qualquer, dado por

$$x_i = (-1)^i \left(x_0 - \frac{2i\mu N}{k}\right), \text{ para } i = 1, 2, \dots, \quad (70)$$

e a massa cessa o movimento quando  $x_i k < \mu N$ , pois a força de atrito se torna maior que a força exercida pela mola. O número  $r$  de meio-ciclos que transcorrem antes do movimento cessar é dado pela condição

$$x_0 - r \frac{2\mu N}{k} \leq \frac{\mu N}{k} \quad \Rightarrow \quad r \geq \frac{x_0 - \frac{\mu N}{k}}{\frac{2\mu N}{k}}. \quad (71)$$

Das equações (64), (66) e (68) podemos obter a equação do movimento para um  $n$ -ésimo ciclo qualquer. Assim, a equação geral do movimento  $x_n(t)$  e suas derivadas  $\dot{x}_n(t)$  e  $\ddot{x}_n(t)$  para um meio-ciclo  $n$  são dadas por

$$x_n(t) = \left(x_0 - \frac{(2n-1)\mu N}{k}\right) \cos(\omega t) + (-1)^{n+1} \frac{\mu N}{k}, \quad (72)$$

$$\dot{x}_n(t) = -\left(x_0 - \frac{(2n-1)\mu N}{k}\right) \omega \sin(\omega t) \quad (73)$$

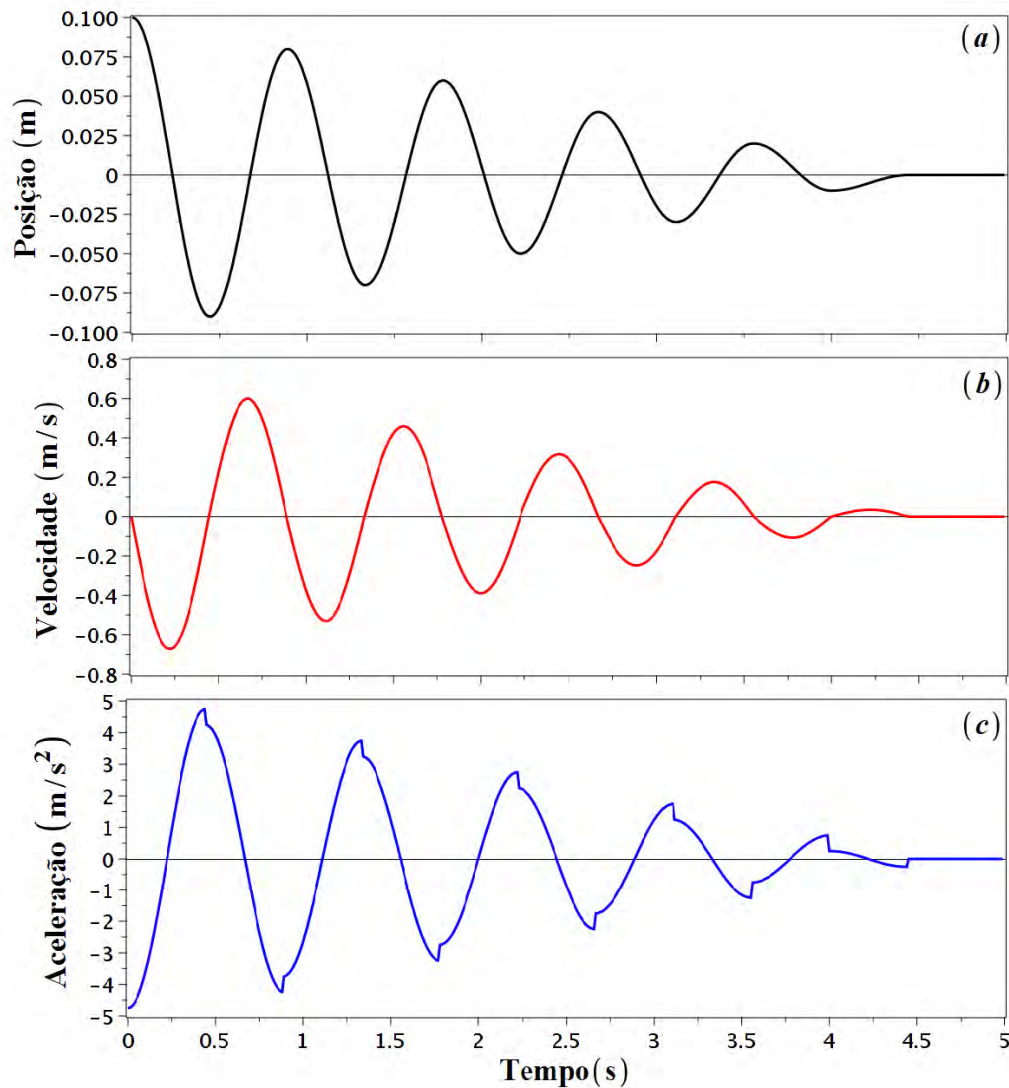
e

$$\ddot{x}_n(t) = - \left( x_0 - \frac{(2n-1)\mu N}{k} \right) \omega^2 \cos(\omega t), \quad (74)$$

onde  $n$  é o número do meio-ciclo e a equação (72) é válida para o intervalo de tempo:  $\frac{(n-1)\pi}{\omega} \leq t \leq \frac{n\pi}{\omega}$ .

As figuras 23(a), 23(b) e 23(c) ilustram a posição, velocidade e a aceleração do bloco, utilizando-se os parâmetros: massa = 0,1kg,  $k = 5\text{N/m}$ ,  $\mu = 0,025$  e  $x_0 = 0,1\text{m}$ . Na figura 23(c) observamos o aparecimento de uma descontinuidade na função  $a(t)$  sempre que o corpo atinge um ponto de retorno em  $v(t) = 0$  e a força de atrito muda de sentido. Resultado análogo foi obtido por Hickmann (HICKMANN; LIBARDI, 1997).

Figura 23 - Posição, velocidade e aceleração para o Oscilador Amortecido por atrito seco.



Fonte: O Autor, 2018.



### 3.2 Energia do Oscilador Amortecido por atrito seco

Podemos obter a expressão da energia cinética do oscilador amortecido por atrito seco, como

$$E_c(t) = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{m \left( x_0 - \frac{(2n-1)\mu N}{k} \right)^2 \omega^2 \text{sen}(\omega t)^2}{2}, \quad (75)$$

e para a sua energia potencial

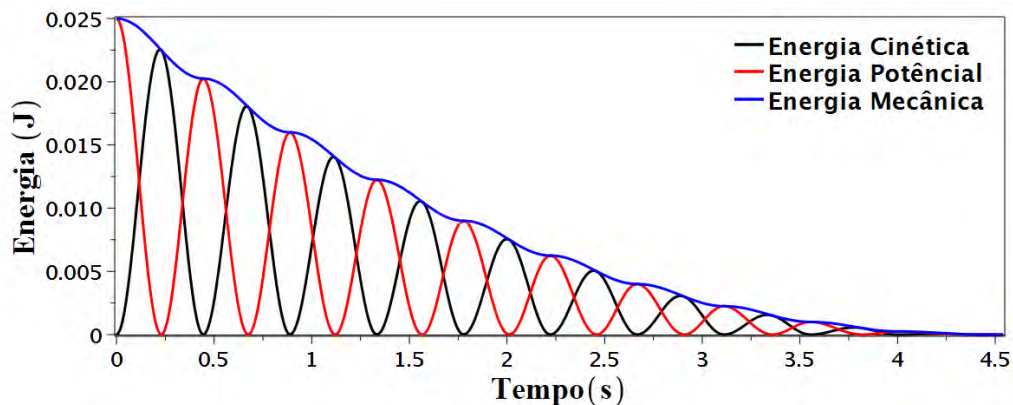
$$E_p(t) = \frac{kx^2}{2} = \frac{k \left( \left( x_0 - \frac{(2n-1)\mu N}{k} \right) \cos(\omega t) + (-1)^{n+1} \frac{\mu N}{k} \right)^2}{2}. \quad (76)$$

Com (75) e (76) temos a energia mecânica, dada por

$$E_m(t) = \frac{m \left( x_0 - \frac{(2n-1)\mu N}{k} \right)^2 \omega^2 \text{sen}(\omega t)^2}{2} + \frac{k \left( \left( x_0 - \frac{(2n-1)\mu N}{k} \right) \cos(\omega t) + (-1)^{n+1} \frac{\mu N}{k} \right)^2}{2} \quad (77)$$

A figura 24 ilustra o comportamento das energias, energia cinética (curva em preto), energia potencial (curva em vermelho) e energia mecânica (curva em azul), utilizando os parâmetros:  $m = 0,1\text{kg}$ ,  $k = 5\text{N/m}$  e  $\mu = 0,025$ .

Figura 24 - Perfis das energias cinética, potencial e mecânica para o Oscilador Amortecido por atrito seco.



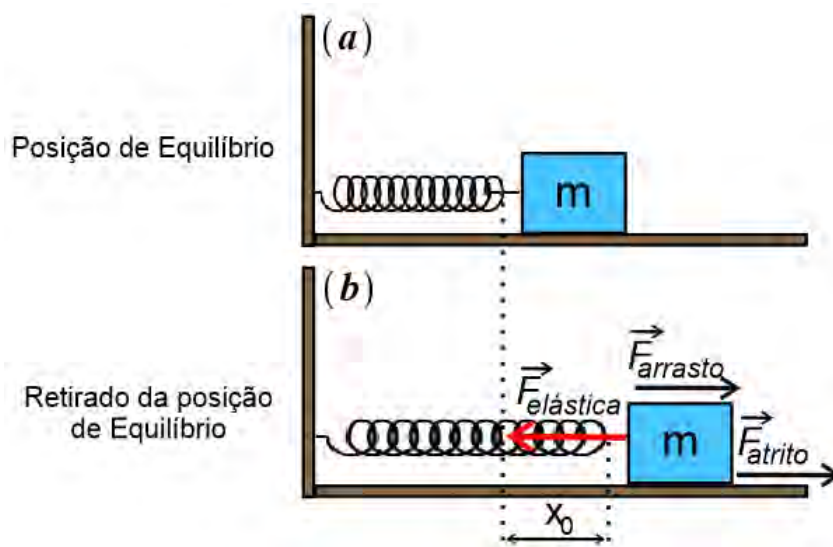
Fonte: O Autor, 2018.

Note que o gráfico das energias, figura 24, se parece com o gráfico ilustrado na figura 14, para o caso do oscilador amortecido pelo arrasto.

#### 4 OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO POR ARRASTO E ATRITO SECO

Consideraremos agora o oscilador harmônico sobre o qual agem duas forças dissipativas, a força de arrasto  $F_{\text{arrasto}} = -\rho\dot{x}$  e a força de atrito de contato  $F_{\text{atrito}} = \mu N$  (figura 25).

Figura 25 - Sistema massa mola para o Oscilador Amortecido por atrito seco e arrasto.



Legenda: A figura 25(a) ilustra o bloco no estado estacionário e a figura 25(b) ilustra o bloco após um deslocamento  $x_0$  da sua posição de equilíbrio submetido à força elástica e as forças de arrasto e atrito.

Fonte: O Autor, 2018.

Pela segunda lei de Newton, temos que

$$\sum_i F_i = ma = -kx - \rho\dot{x} \pm \mu mg \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + kx + \rho\dot{x} = \pm \mu mg, \quad (78)$$

onde  $\rho$  e  $\mu$  são grandezas já tratadas nos casos anteriores e o sinal do termo do lado direito da expressão (78) varia de acordo com o sentido do movimento.

#### 4.1 Solução do Oscilador Amortecido por Arrasto e Atrito Seco

A equação diferencial (78) pode ser escrita como

$$m\ddot{x} + kx + \rho\dot{x} + \mu N \operatorname{sgn}(\dot{x}) = 0. \quad (79)$$

Seguindo o mesmo procedimento do capítulo anterior, a equação (79) pode ser resolvida considerando meio-ciclos de oscilação. Assim,

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx + \rho\dot{x} = -\mu mg & (\text{corpo indo da esquerda para a direita}), \\ m\ddot{x} + kx + \rho\dot{x} = +\mu mg & (\text{corpo indo da direita para a esquerda}), \end{cases} \quad (80)$$

cujas as soluções são

$$x(t) = c_1 e^{-b+\sqrt{(b^2-\omega_0^2)t}} + c_2 e^{-b-\sqrt{(b^2-\omega_0^2)t}} - \frac{\mu g}{\omega^2} \quad (81)$$

e

$$x(t) = c_1 e^{-b+\sqrt{(b^2-\omega_0^2)t}} + c_2 e^{-b-\sqrt{(b^2-\omega_0^2)t}} + \frac{\mu g}{\omega^2}, \quad (82)$$

respectivamente. Considerando o caso em que  $b^2 - \omega_0^2 < 0$ , que nos remete ao regime de subamortecimento, visto no capítulo 2, reescrevemos as equações (81) e (82) como

$$x(t) = e^{-bt}(A_1 \cos(\omega t) + A_2 \operatorname{sen}(\omega t)) - \frac{\mu g}{\omega^2} \quad (83)$$

e

$$x(t) = e^{-bt}(A_3 \cos(\omega t) + A_4 \operatorname{sen}(\omega t)) + \frac{\mu g}{\omega^2}, \quad (84)$$

que fornecem as posições da massa como função do tempo  $t$  para cada sentido de movimento do corpo com suas respectivas velocidades,

$$\dot{x}(t) = -be^{-bt}(A_3 \cos(\omega t) + A_4 \operatorname{sen}(\omega t)) + e^{-bt}(-A_3 \omega \operatorname{sen}(\omega t) + A_4 \omega \cos(\omega t)) \quad (85)$$

e

$$\dot{x}(t) = -be^{-bt}(A_1 \cos(\omega t) + A_2 \operatorname{sen}(\omega t)) + e^{-bt}(-A_1 \omega \operatorname{sen}(\omega t) + A_2 \omega \cos(\omega t)). \quad (86)$$

Mais uma vez consideraremos o movimento do bloco em cada meio-ciclo.

##### 1º meio-ciclo

Consideraremos o bloco sendo retirado da posição de equilíbrio e solto partindo inicialmente da direita para esquerda. Utilizando a solução (84), o movimento da direita para esquerda, e as condições iniciais  $x(0) = x_0$  e  $\dot{x}(0) = 0$ , determinamos as constantes  $A_3$  e  $A_4$  como:

$$A_3 = \frac{-\mu N + x_0 k}{k} \quad \text{e} \quad A_4 = -\frac{b(\mu N - x_0 k)}{k\omega}. \quad (87)$$

Assim, a equação do movimento (84) fica

$$x_1(t) = e^{-bt} \left( \frac{(-\mu N + x_0 k) \cos(\omega t)}{k} - \frac{b(\mu N - x_0 k) \text{sen}(\omega t)}{k\omega} \right) + \frac{\mu N}{k}, \quad (88)$$

ou

$$x_1(t) = \frac{(\text{sen}(\omega t)b + \omega \cos(\omega t))(kx_0 - N\mu)e^{-bt} + \mu N\omega}{\omega k} \quad (89)$$

e é válida apenas no primeiro meio ciclo, em que  $0 < t < \frac{\pi}{\omega}$ . Quando a massa chega na extrema esquerda, em  $t = \frac{\pi}{\omega}$  sua posição é dada por

$$x_1 = x\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = \frac{1}{k} \left( (\mu N - x_0 k) e^{-\frac{b\pi}{\omega}} + \mu N \right), \quad (90)$$

condição inicial para o próximo meio-ciclo.

### 2º meio-ciclo

No segundo meio ciclo, utilizamos a equação (83) com as condições iniciais:

$$x\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = \frac{1}{k} \left( (\mu N - x_0 k) e^{-\frac{b\pi}{\omega}} + \mu N \right) \quad \text{e} \quad \dot{x}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = 0 \quad (91)$$

e, assim, determinamos as constantes  $A_1$  e  $A_2$  como:

$$A_1 = \frac{1}{k} \left( -2\mu N e^{\frac{b\pi}{\omega}} - \mu N + x_0 k \right) \quad \text{e} \quad A_2 = -\frac{b}{\omega k} \left( 2\mu N e^{\frac{b\pi}{\omega}} + \mu N - x_0 k \right). \quad (92)$$

Desta forma, a solução para o segundo ciclo é dada por

$$x(t) = \frac{-2\mu N (\text{sen}(\omega t)b + \omega \cos(\omega t)) e^{\frac{b(-\omega t + \pi)}{\omega}}}{\omega k} \quad (93)$$

$$+ \frac{-(\text{sen}(\omega t)b + \omega \cos(\omega t))(\mu N - x_0 k) e^{-bt} - \mu N\omega}{\omega k},$$

válida apenas para o segundo meio-ciclo, com  $\frac{\pi}{\omega} \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}$ .

O segundo meio ciclo acaba quando a massa chega na extrema direita, cuja posição é dada por

$$x_2 = x \left( \frac{2\pi}{\omega} \right) = -\frac{1}{k} \left( \mu N e^{2\frac{b\pi}{\omega}} + 2\mu N e^{\frac{b\pi}{\omega}} + \mu N - x_0 k \right) e^{-2\frac{b\pi}{\omega}}. \quad (94)$$

Repetindo o processo de forma análoga ao caso em que tratamos do oscilador harmônico amortecido por atrito de contato, obtemos as expressões  $x_n(t)$ ,  $\dot{x}_n(t)$  e  $\ddot{x}_n(t)$ :

$$x_1(t) = \frac{(\text{sen}(\omega t)b + \omega \text{cos}(\omega t))(kx_0 - N\mu)e^{-bt} + \mu N\omega}{\omega k} \quad (95)$$

e para  $n \geq 2$  temos

$$x_n(t) = \frac{\sum_{j=2}^n \left( -2N\mu (\text{sen}(\omega t)b + \omega \text{cos}(\omega t)) e^{-\frac{b(\omega t - (j-1)\pi)}{\omega}} \right)}{\omega k} \quad (96)$$

$$+ \frac{-(\text{sen}(\omega t)b + \omega \text{cos}(\omega t))(N\mu - kx_0)e^{-bt} + (-1)^{n+1}\mu N\omega}{\omega k},$$

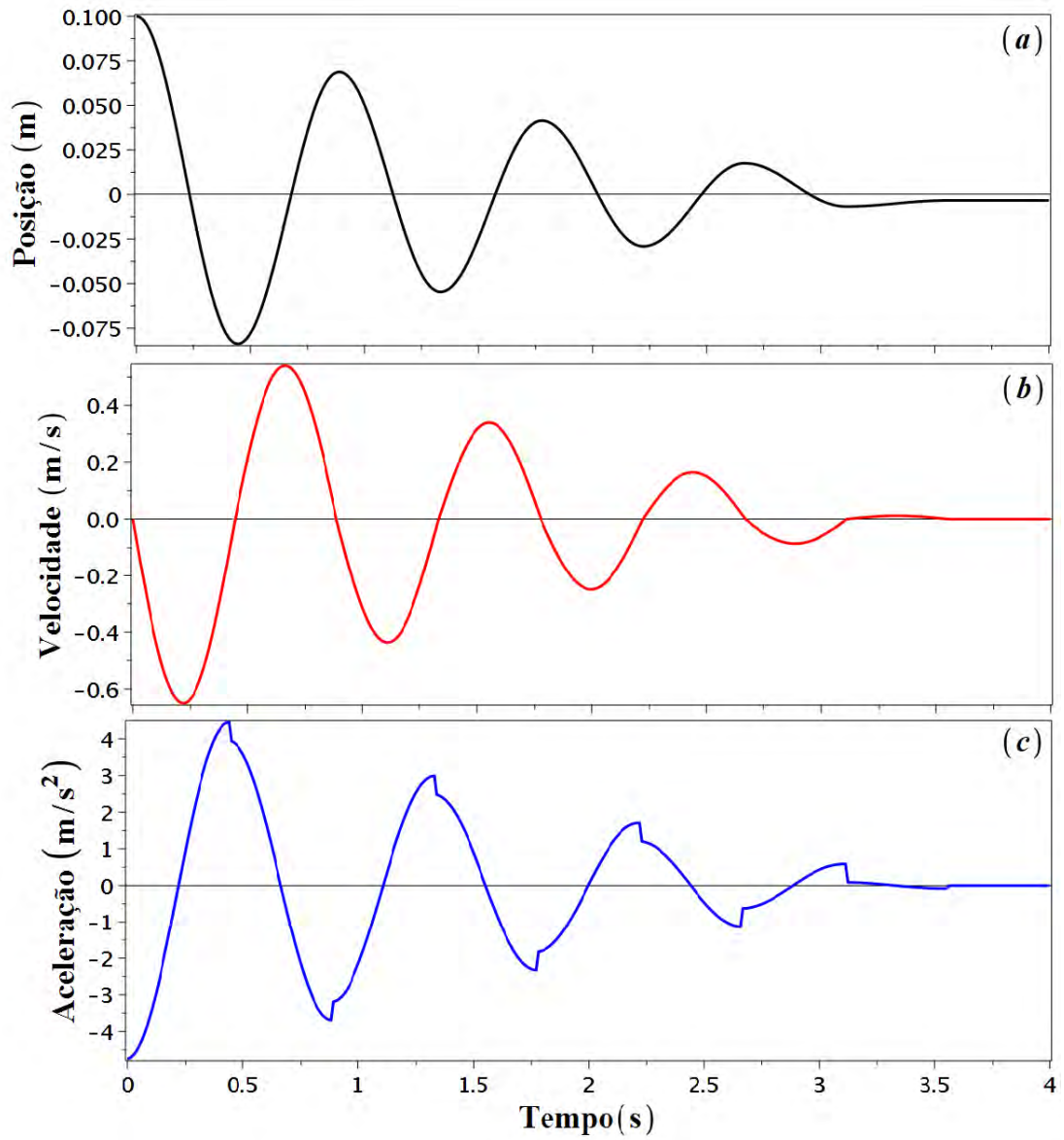
$$\dot{x}_n(t) = \frac{\text{sen}(\omega t)(b^2 + \omega^2)e^{-bt} \left( \sum_{j=1}^n \left( 2N\mu e^{\frac{(j-1)b\pi}{\omega}} \right) + N\mu - kx_0 \right)}{\omega k} \quad (97)$$

e

$$\ddot{x}_n(t) = -\frac{(b\text{sen}(\omega t) - \omega \text{cos}(\omega t))(b^2 + \omega^2)e^{-bt} \left( \sum_{j=1}^n \left( 2N\mu e^{\frac{(j-1)b\pi}{\omega}} \right) + N\mu - kx_0 \right)}{\omega k}, \quad (98)$$

onde  $n$  é o número do meio-ciclo e as expressões (96), (97) e (98) são válidas apenas para o intervalo  $\frac{(n-1)\pi}{\omega} \leq t \leq \frac{n\pi}{\omega}$ . Vale mencionar que, ao contrário do que ocorreu com  $x_1(t)$ ,  $\dot{x}_1(t)$  e  $\ddot{x}_1(t)$  puderam ser incorporados às expressões de  $\dot{x}(t)$  e  $\ddot{x}(t)$ , respectivamente. As figuras 26(a), 26(b) e 26(c) ilustram os perfis de  $x$ ,  $\dot{x}$  e  $\ddot{x}$ , considerando os parâmetros: massa = 0,1kg,  $k = 5\text{N/m}$ ,  $\mu = 0,025$  e  $\rho = 0,03\text{kg/s}$ . Notamos que na figura 26(c), que representa a aceleração experimentada pelo corpo, o aparecimento de descontinuidades sempre que  $v(t) = 0$ , de forma análoga à situação discutida na figura 23(c), porém, com um maior amortecimento devido a superposição das duas forças dissipativas aplicadas ao sistema.

Figura 26 - Posição, velocidade e aceleração para o Oscilador Amortecido por arrasto e atrito seco.



Fonte: O Autor, 2018.

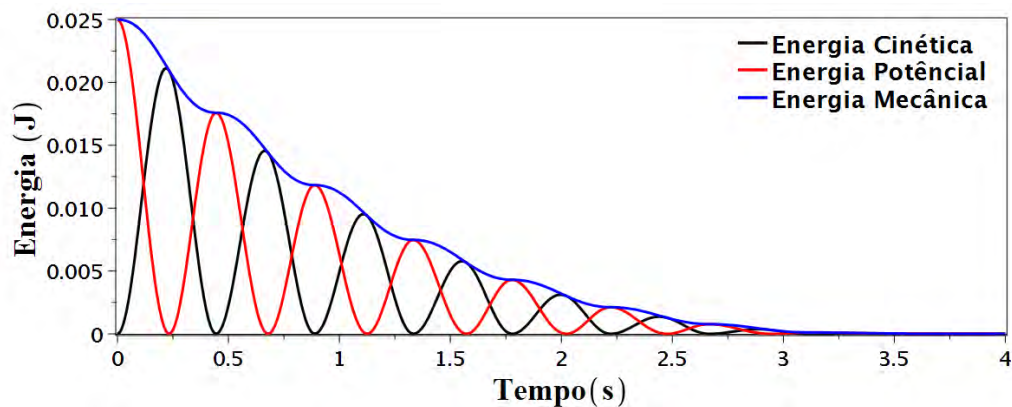
## 4.2 Energia do Oscilador Amortecido por arrasto e atrito seco

A energia mecânica  $E_m(t) = E_c(t) + E_p(t)$  é dada por

$$E_m(t) = \frac{m\dot{x}_n^2}{2} + \frac{kx_n^2}{2}, \quad (99)$$

onde  $x_n$  e  $\dot{x}_n$  são dadas pelas equações (96) e (97), respectivamente. A figura 27 ilustra o comportamento das energias no oscilador amortecido por arrasto e atrito seco ao longo do tempo, utilizado o conjunto de parâmetros: massa = 0,1kg,  $k = 5\text{N/m}$ ,  $\mu = 0,025$  e  $\rho = 0,03\text{kg/s}$ , onde curva em preto representa a energia cinética, em vermelho a energia potencial e em azul a energia mecânica. Entretanto, aqui temos a ação de duas forças dissipativas, atrito e arrasto, o que acentua a taxa de dissipação de energia, levando o corpo ao repouso em um tempo  $t$  menor.

Figura 27 - Perfis das energias cinética, potencial e mecânica para o Oscilador Amortecido por arrasto e atrito seco.



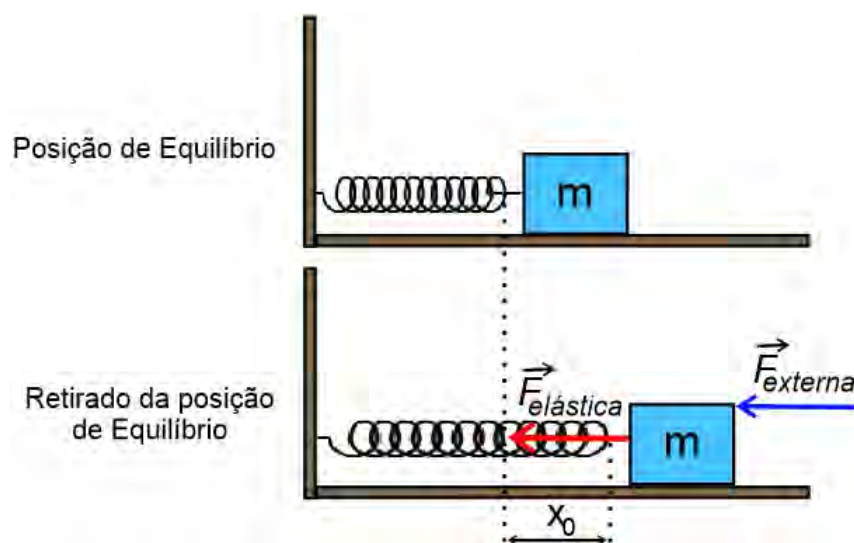
Fonte: O Autor, 2018.

## 5 OSCILAÇÕES FORÇADAS

Até agora, consideramos apenas oscilações em que o oscilador recebe uma energia potencial inicial e depois é solto, evoluindo livremente, possuindo período de oscilação determinado pela própria natureza do oscilador, por sua inércia, pela força restauradora que atua sobre ele e também sob a influência das forças dissipativas  $F_{\text{arrasto}} = -\rho\dot{x}$  e  $F_{\text{atrito}} = \mu N$ . Neste capítulo vamos estudar o efeito produzido sobre o oscilador por uma força externa (figura 28). Quando um sistema é submetido a ação de uma força externa, suas características básicas são modificadas, podendo oscilar com uma maior ou menor frequência do que a frequência natural do sistema. Assim, aos sistemas submetidos a força externa damos o nome de oscilador forçado e as oscilações experimentadas por ele são denominadas de oscilações forçadas. Estes tipos de movimentos oscilatórios podem ocorrer tanto na natureza quanto elaboradas em aplicações na engenharia (TZUOH; WALSH; ALPHENAAR, 2012) (ABDALLA; SILVA, 2016).

As forças que atuam sobre os sistemas podem ser de dois tipos: constantes ou variáveis no tempo. O caso aqui considerado é o de uma força externa periódica de módulo constante. Em geral, a frequência da força externa não coincide com o frequência natural do oscilador, de modo que as oscilações por ela produzidas chamam-se oscilações forçadas. Alguns exemplos de oscilações forçadas são: o tímpano de nosso ouvido sob a ação das ondas sonoras, as oscilações de uma pessoa sentada em um balanço sob a ação de empurrões periódicos, as oscilações dos elétrons em átomos ou moléculas de um meio material sob a ação de uma onda eletromagnética, como a luz, que se propaga nesse meio (NUSSENZVEIG, 2002).

Figura 28 - Sistema massa mola para o oscilador forçado.



Fonte: O Autor, 2018.



## 5.1 Equação diferencial do Oscilador Forçado

A força externa periódica aplicada ao sistema massa-mola é do tipo

$$F(t) = F_0 \cos(\omega_e t), \quad (100)$$

onde  $F_0$  é sua amplitude.  $F(t)$  varia no tempo e sua frequência angular representada por  $\omega_e$  para diferenciar da frequência natural  $\omega_0$  de oscilação do sistema. Da 2ª lei de Newton,  $\sum_i F_i = m\ddot{x}$ , podemos escrever

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos(\omega_e t), \quad (101)$$

ou

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_e t), \quad (102)$$

que é uma EDO linear de 2ª ordem não homogênea.

## 5.2 Solução do Oscilador Forçado

Na teoria das equações diferenciais, sabemos que para o caso de uma EDO não homogênea sua solução geral é dada pela soma das soluções homogênea e particular,

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t). \quad (103)$$

A solução homogênea  $x_h(t)$ , obtida no capítulo 1, quando tratamos do oscilador harmônico simples é dada por

$$x_h(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (104)$$

O problema então consiste em achar a solução particular  $x_p(t)$ , que aqui será obtida pelo método dos coeficientes a determinar. Como a força externa varia segundo  $\cos(\omega_e t)$ , espera-se que a solução particular para a EDO (102) seja obtida pela combinação linear de senos e cossenos, tal como

$$x_p = C_1 \cos(\omega_e t) + C_2 \sin(\omega_e t), \quad (105)$$

que possui as seguintes derivadas

$$x'_p = -C_1 \omega_e \sin(\omega_e t) + C_2 \omega_e \cos(\omega_e t) \quad \text{e} \quad x''_p = -C_1 \omega_e^2 \cos(\omega_e t) - C_2 \omega_e^2 \sin(\omega_e t). \quad (106)$$

Substituindo (105) e (106) na equação diferencial (102), vem que

$$-C_1\omega_e^2\cos(\omega_e t) - C_2\omega_e^2\sen(\omega_e t) + \omega_0^2(C_1\cos(\omega_e t) + C_2\sen(\omega_e t)) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_e t), \quad (107)$$

que nos leva ao sistema de equações

$$\begin{cases} -C_1\omega_e^2 + C_1\omega_0^2 = \frac{F_0}{m} \\ C_2\omega_0^2 - C_2\omega_e^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(\omega_0^2 - \omega_e^2) = \frac{F_0}{m} \\ C_2(\omega_0^2 - \omega_e^2) = 0 \end{cases}$$

e cuja solução é dada por

$$C_1 = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega_e^2)} \quad \text{e} \quad C_2 = 0. \quad (108)$$

Substituindo as soluções encontradas para  $C_1$  e  $C_2$  em (105), encontramos solução particular

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega_e^2)}\cos(\omega_e t). \quad (109)$$

Assim, a solução geral (103) procurada é

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega_e^2)}\cos(\omega_e t). \quad (110)$$

As equações para a velocidade e a aceleração neste caso são

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0\sen(\omega_0 t + \varphi) - \frac{F_0\omega_e}{m(\omega_0^2 - \omega_e^2)}\sen(\omega_e t) \quad (111)$$

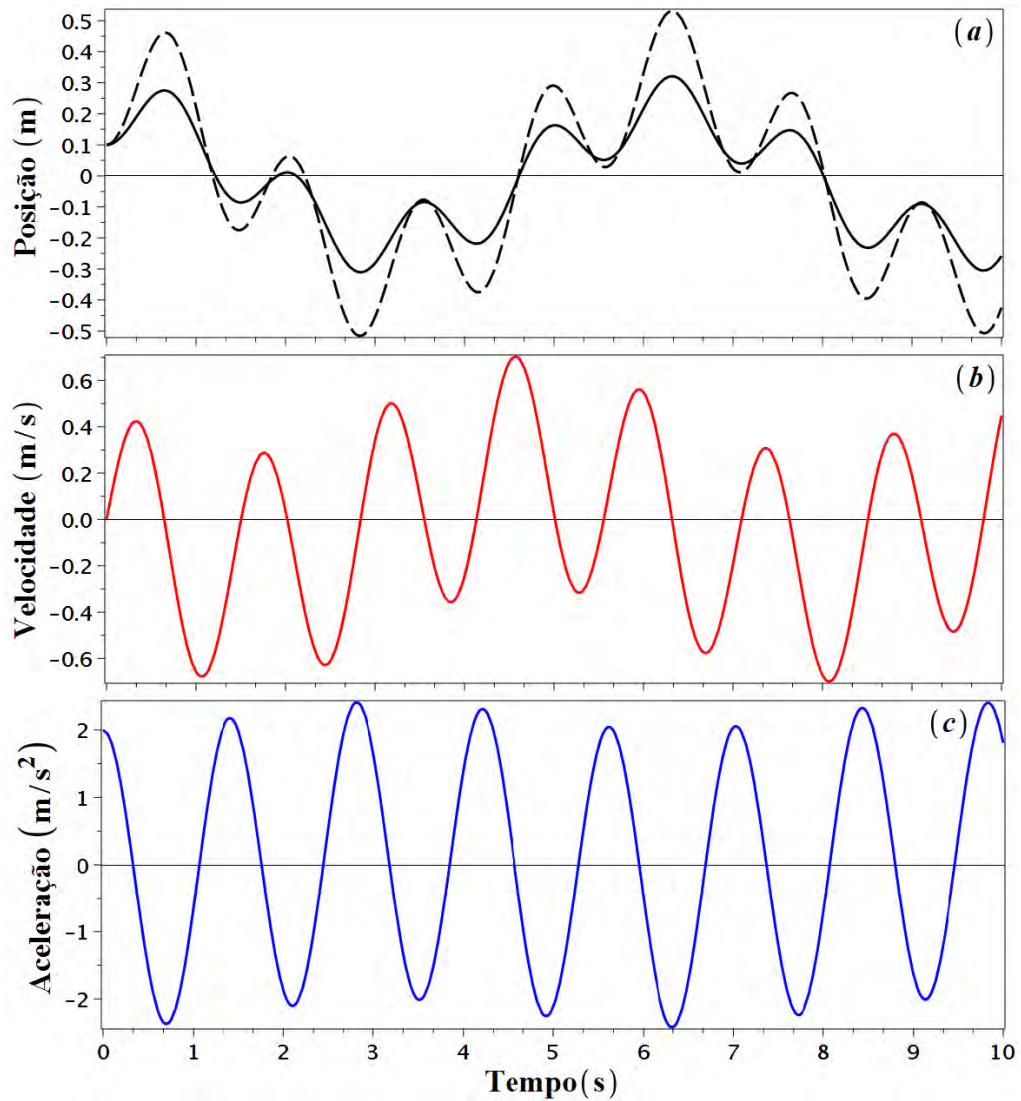
e

$$\ddot{x}(t) = -A\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi) - \frac{F_0\omega_e^2}{m(\omega_0^2 - \omega_e^2)}\cos(\omega_e t). \quad (112)$$

A figura 29(a) ilustra o comportamento do oscilador harmônico forçado, usando como parâmetros:  $m = 0,05\text{kg}$ ,  $k = 1\text{N/m}$ ,  $\omega_0 = 4,4721\text{rad/s}$ ,  $\omega_e = 1\text{rad/s}$ ,  $\varphi = 0$  e  $A = -0,11054\text{m}$ . Na curva em preto temos  $F_0 = 0,2\text{N}$  e na curva tracejada  $F_0 = 0,3\text{N}$ .

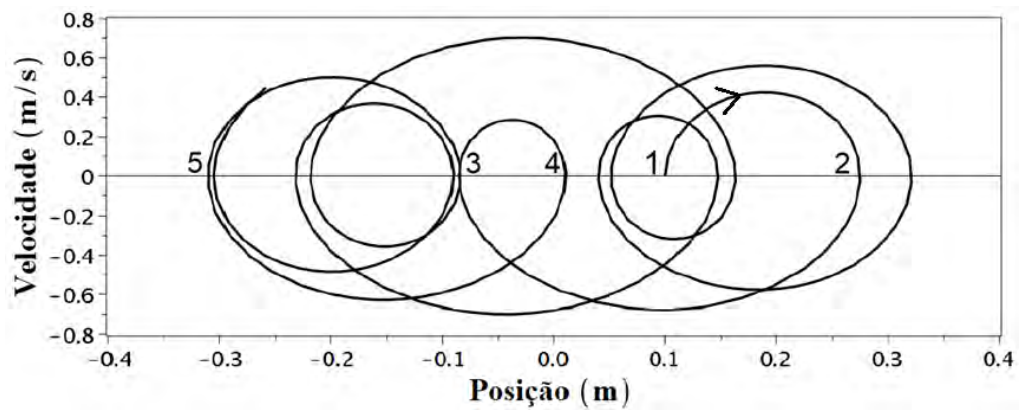
Observando o gráfico da posição do oscilador forçado, como  $\omega_0 \neq \omega_e$ , existem impulsos que não coincidem com a frequência natural  $\omega_0$ , fazendo com que a curva tenha um comportamento peculiar. A figura 29(b) ilustra o comportamento da velocidade e a figura 29(c) ilustra a aceleração. A figura 30 ilustra o espaço de fase do oscilador forçado para  $F_0 = 0,2\text{N}$ , onde foram colocados números para facilitar o entendimento de sua trajetória.

Figura 29 - Posição, velocidade e aceleração em função do tempo para o Oscilador Forçado.



Fonte: O Autor, 2018.

Figura 30 - Espaço de fase para o Oscilador Forçado.



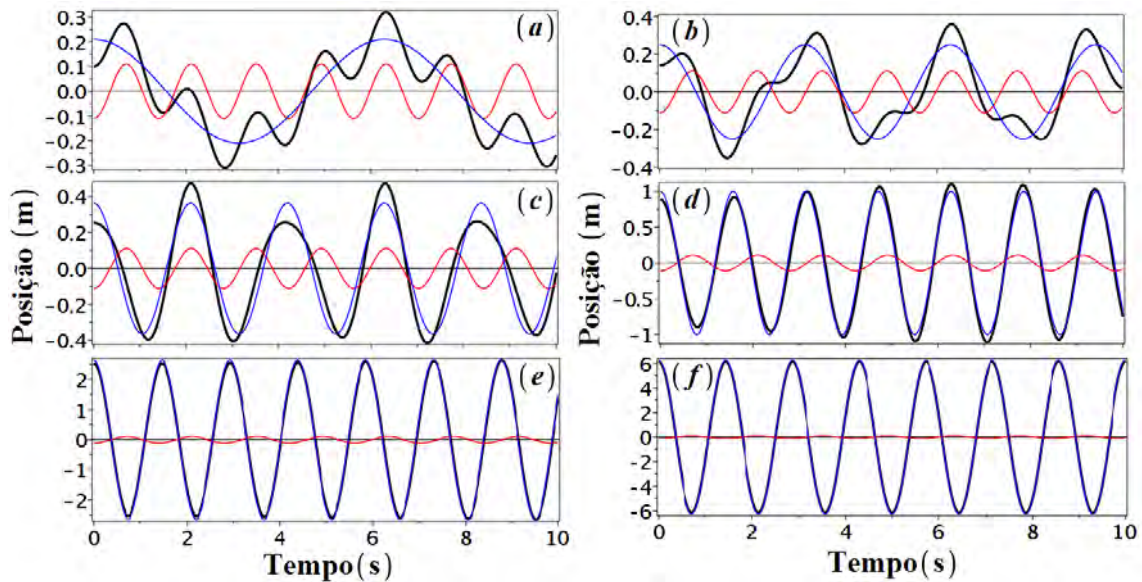
Fonte: O Autor, 2018.

Na equação (110) o segundo termo do lado direito tem em seu denominador o termo  $\omega_0^2 - \omega_e^2$  que representa a diferença entre quadrados das frequências natural e da força externa. À medida que  $\omega_e \rightarrow \omega_0$  este termo cresce, podendo ser muito maior que o primeiro, que representa o OHS. A este aumento abrupto da amplitude de oscilação devido a aproximação das frequências dá-se o nome de ressonância. Este comportamento pode ser observado nas figuras 31 e 32 onde os valores de  $\omega_e$  se aproximam de  $\omega_0 = 4,4721\text{rad/s}$  e variam de acordo com a tabela 3.

Tabela 3 - Frequências da força externa.

Figura	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
$\omega_e$ (rad/s)	1	2	3	4	4.2	4.3

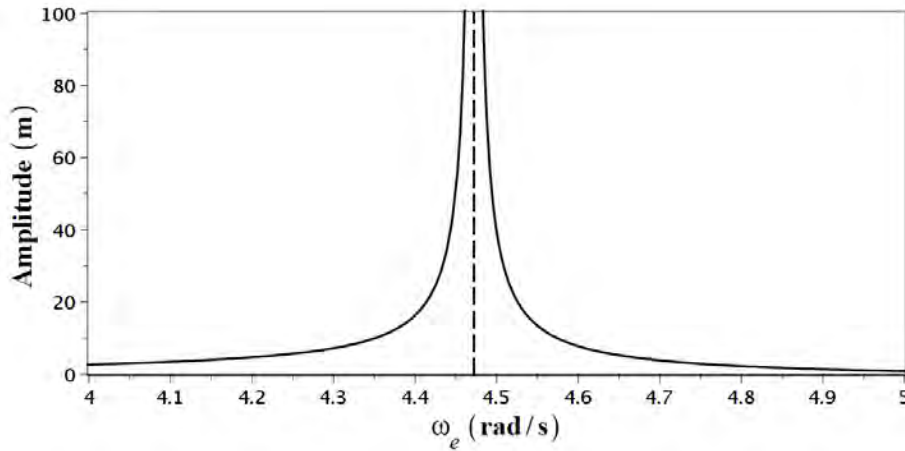
Figura 31 - Fenômeno da Ressonância para diferentes valores de  $\omega_e$ .



Legenda: As curvas vermelha e azul representam respectivamente os termos  $A\cos(\omega_0 t + \varphi)$  e  $\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega_e^2)}\cos(\omega_e t)$  da solução  $x(t)$  do oscilador forçado. A curva preta representa a solução  $x(t)$  para o oscilador forçado.

Fonte: O Autor, 2018.

Figura 32 - Fenômeno de ressonância ( $\omega_e \rightarrow \omega_0$ ).



Fonte: O Autor, 2018.

### 5.3 Energia do Oscilador Forçado

Dadas as expressões (110) e (111) para  $x(t)$  e  $\dot{x}(t)$ ; respectivamente; podemos obter expressões para as energias cinética, potencial e total para o oscilador forçado, dadas por

$$E_c(t) = \frac{mA^2\omega_0^2 \text{sen}^2(\omega_0 t + \varphi)}{2} + A\omega_0 \text{sen}(\omega_0 t + \varphi) \frac{F_0 \omega}{(\omega_0^2 - \omega_e^2)} \text{sen}(\omega_e t) + \frac{F_0^2 \omega_e^2}{2m(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2} \text{sen}^2(\omega_e t), \quad (113)$$

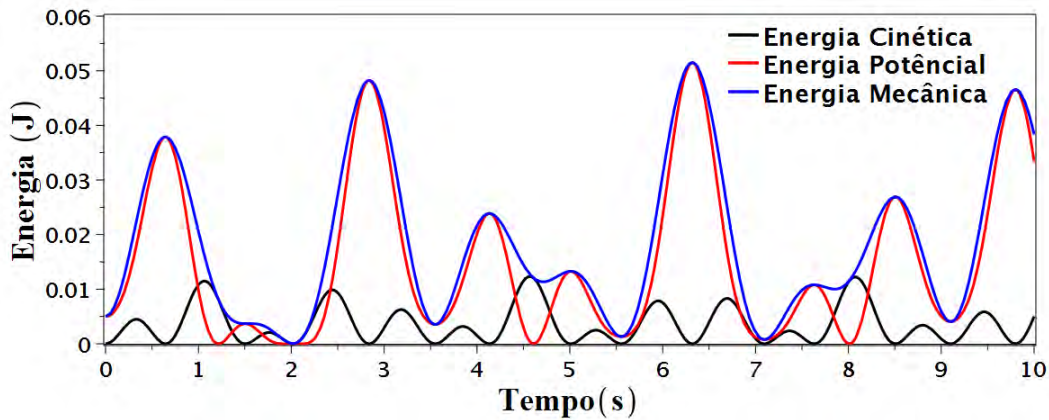
$$E_p(t) = \frac{kA^2 \text{cos}^2(\omega_0 t + \varphi)}{2} + kA \text{cos}(\omega_0 t + \varphi) \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \text{cos}(\omega t) + \frac{F_0^2 k \text{cos}^2(\omega t)}{2m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2}, \quad (114)$$

e

$$E_m(t) = \frac{m \left( -A\omega_0 \text{sen}(\omega_0 t + \varphi) - \frac{F_0 \omega \text{sen}(\omega t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right)^2 + k \left( A \text{cos}(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F_0 \text{cos}(\omega t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right)^2}{2}. \quad (115)$$

A figura 33 ilustra o comportamento das energias cinética (curva preta), potencial (curva vermelha) e mecânica (curva azul), utilizando os parâmetros:  $m = 0,05\text{kg}$ ,  $k = 1\text{N/m}$ ,  $\omega_e = 1\text{rad/s}$ ,  $\varphi = 0$ ,  $A = -0,11054\text{m}$  e  $F_0 = 0,2\text{N}$ . Note que existem ganhos periódicos de energias devido à força externa atuante no sistema.

Figura 33 - Perfis das energias cinética, potencial e mecânica para o Oscilador Forçado.



Fonte: O Autor, 2018.

#### 5.4 Caso particular do Oscilador Forçado

Nesta seção estudamos o caso particular em que o oscilador está inicialmente em repouso na posição de equilíbrio, com as condições iniciais  $x(0) = 0$  e  $\dot{x}(0) = 0$ . Substituindo as condições iniciais nas equações (110) e (111), obtemos o sistema

$$\begin{cases} A \cos(\varphi) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega_e^2)} = 0 \\ -A\omega_0 \sin(\varphi) = 0 \end{cases}, \quad (116)$$

em que

$$\varphi = 0 \quad \text{e} \quad A = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega_e^2)}. \quad (117)$$

Substituindo (117) em (110), obtemos a solução

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega_e^2)} \cos(\omega_e t) - \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega_e^2)} \cos(\omega_0 t), \quad (118)$$

que pode ser escrita como

$$x(t) = -\frac{F_0}{m(\omega_0 + \omega_e)} \left[ \frac{\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega_e t)}{\omega_0 - \omega_e} \right]. \quad (119)$$

A equação (118) corresponde a superposição de dois movimentos harmônicos simples. Essa superposição com frequências diferentes, sendo um com frequência natural ( $\omega_0$ ) e outro com frequência forçada ( $\omega_e$ ), pode levar a um fenômeno conhecido como batimento

para  $\omega_e$  próximos de  $\omega_0$ . No limite em que  $\omega_e \rightarrow \omega_0$ , a parte entre colchetes da equação (119) toma a forma

$$\lim_{\omega_e \rightarrow \omega_0} \left[ \frac{\cos(\omega_e t) - \cos(\omega_0 t)}{\omega_e - \omega_0} \right] = \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} \cos(\omega t) \right]_{\omega_e = \omega_0} = -t \operatorname{sen}(\omega_0 t), \quad (120)$$

de modo que a equação (119) pode ser escrita na forma

$$x(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen}(\omega_0 t), \quad (121)$$

que é a solução do oscilador forçado com as condições iniciais aplicadas no limite da ressonância exata. A velocidade e a aceleração são dadas por

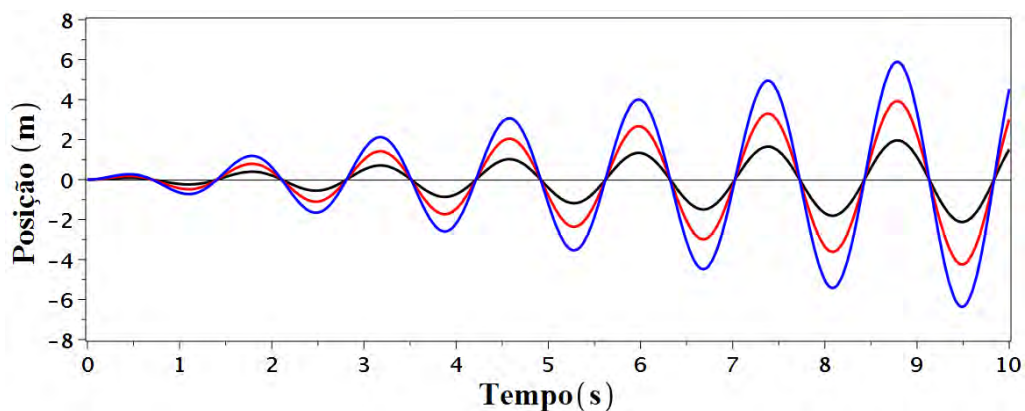
$$\dot{x}(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m} t \cos(\omega_0 t) \quad (122)$$

e

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= \frac{F_0}{2m} \cos(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m} \cos(\omega_0 t) - \frac{F_0 \omega_0}{2m} t \operatorname{sen}(\omega_0 t) \\ &= \frac{F_0}{m} \cos(\omega_0 t) - \frac{F_0 \omega_0}{2m} t \operatorname{sen}(\omega_0 t). \end{aligned} \quad (123)$$

A figura 34 ilustra o comportamento desse caso particular do oscilador forçado, comparando diferentes intensidades de forças externas. Utilizamos os parâmetros:  $m = 0,05\text{kg}$  e  $k = 1\text{N/m}$  para três valores da força externa,  $0,1\text{N}$  (curva em preto),  $0,2\text{N}$  (curva em vermelho) e  $0,3\text{N}$  (curva em azul).

Figura 34 - Posição em função do tempo para o caso particular do Oscilador Forçado.



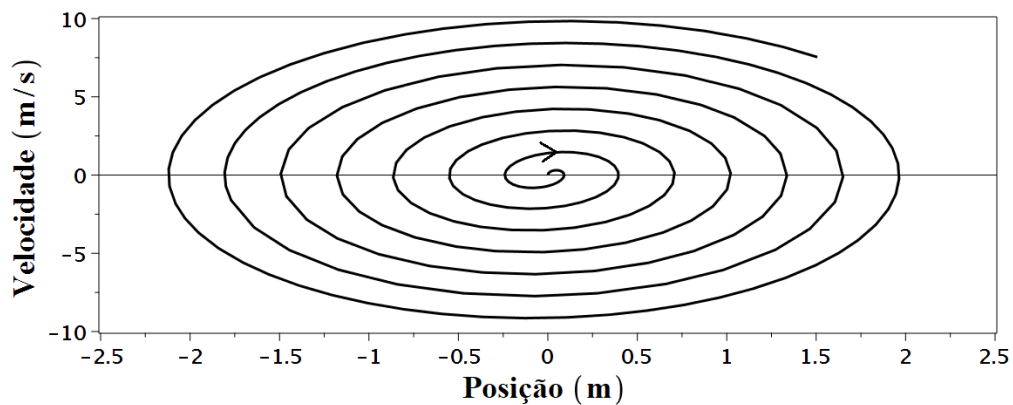
Fonte: O Autor, 2018.

Note que a amplitude aumenta indefinidamente, crescendo linearmente com o tempo, sendo expressada por

$$A(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0}t. \quad (124)$$

A figura 35 representa o espaço de fase. É possível perceber que a trajetória no espaço de fase se dá do centro  $x = 0$  e  $\dot{x} = 0$ , crescendo no sentido horário da espiral, diferentemente do caso do oscilador subamortecido mostrado na figura 12.

Figura 35 - Espaço de fase para o caso particular do oscilador forçado.



Fonte: O Autor, 2018.

### 5.5 Energia do caso particular do Oscilador Forçado

Também neste caso, podemos obter as expressões para as energias cinética, potencial e mecânica, utilizando (121) e (122).

$$E_c(t) = \frac{m}{2} \left( \frac{F_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t)}{2m\omega_0} + \frac{F_0 t \operatorname{cos}(\omega_0 t)}{2m} \right)^2, \quad (125)$$

$$E_p(t) = \frac{k F_0^2 t^2 \operatorname{sen}^2(\omega_0 t)}{8 m^2 \omega_0^2}. \quad (126)$$

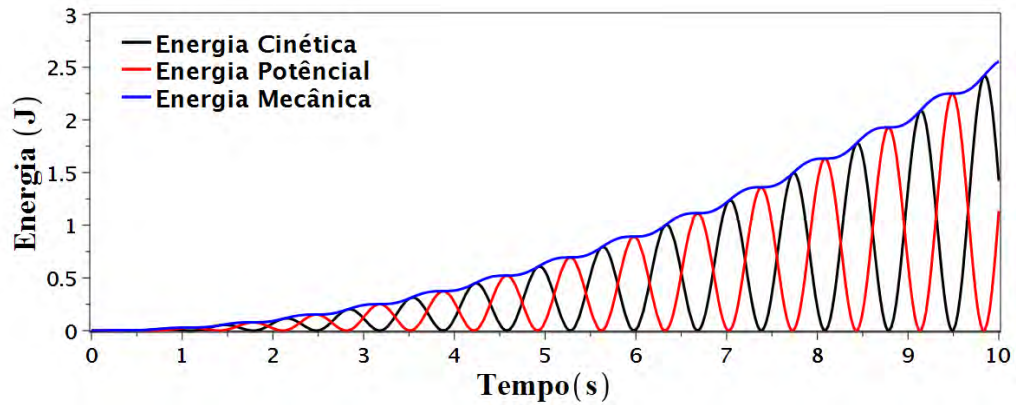
e

$$E_m(t) = \frac{m}{2} \left( \frac{F_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t)}{2m\omega_0} + \frac{F_0 t \operatorname{cos}(\omega_0 t)}{2m} \right)^2 + \frac{k F_0^2 t^2 \operatorname{sen}^2(\omega_0 t)}{8 m^2 \omega_0^2}. \quad (127)$$



A figura 36 ilustra o comportamento das curvas das energias, a curva em preto representa a energia cinética, em vermelho a energia potencial e em azul a energia mecânica, respectivamente para o conjunto de parâmetros:  $m = 0,05\text{kg}$  ,  $k = 1\text{N/m}$  e força externa  $F_0 = 0,1\text{N}$ .

Figura 36 - Perfis das energias cinética, potencial e mecânica para o caso particular do Oscilador Forçado.



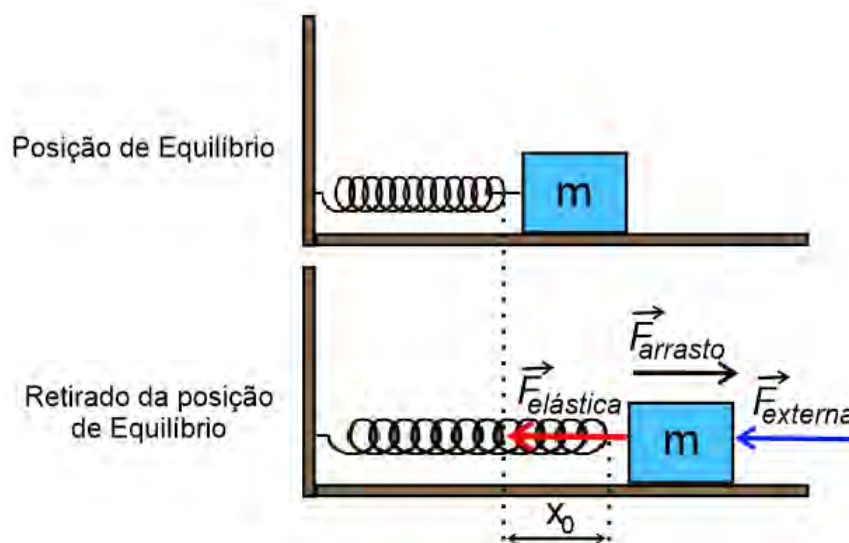
Fonte: O Autor, 2018.

A força externa periódica fornece continuamente energia ao sistema, que na ausência de forças dissipativas, tem a amplitude dada por (124), assim as energias cinética, potencial e mecânicas crescem indefinidamente em função do tempo.

## 6 OSCILADOR FORÇADO E AMORTECIDO POR ARRASTO

Seja um oscilador harmônico submetido a ação de uma força dissipativa proporcional à velocidade,  $F_{\text{res}} = -\rho\dot{x}$  e uma força externa periódica,  $F_{\text{ext}} = F_0\cos(\omega_e t)$ , conforme representado na figura 37.

Figura 37 - Sistema massa mola para o Oscilador Forçado Amortecido.



Fonte: O Autor, 2018.

A equação de movimento considerando os dois termos fica

$$\sum_i F_i = m\ddot{x} = -kx + F_0 \cos(\omega_e t) - \rho\dot{x}, \quad (128)$$

que nos leva a equação diferencial

$$m\ddot{x} + \rho\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega_e t). \quad (129)$$

Dividindo ambos os lados por  $m$  e usando as substituições

$$2b = \frac{\rho}{m} > 0 \quad \text{e} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad (130)$$

obtemos a equação diferencial do oscilador harmônico forçado amortecido por atrito viscoso

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_e t). \quad (131)$$

### 6.1 Solução do Oscilador Forçado Amortecido

A equação (131) é uma equação diferencial linear não homogênea de 2ª ordem, cuja solução geral é dada por  $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ ; a solução homogênea  $x_h(t)$  é obtida resolvendo-se a equação  $\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ , já estudada no capítulo 2, em que tratamos de oscilações amortecidas e que tem como solução

$$x_h(t) = c_1 e^{-b+\sqrt{(b^2-\omega_0^2)}t} + c_2 e^{-b-\sqrt{(b^2-\omega_0^2)}t}. \quad (132)$$

A solução particular de (131) é dada pela solução da equação

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = F \cos(\omega_e t), \quad \text{onde} \quad F = \frac{F_0}{m}, \quad (133)$$

resolvida pelo método dos coeficientes a determinar e cuja solução particular esperada é da forma

$$x_p = A \cos(\omega_e t) + B \sin(\omega_e t), \quad (134)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes a serem determinadas. As derivadas primeira e segunda de  $x_p(t)$  são

$$x_p' = -A\omega_e \sin(\omega_e t) + B\omega_e \cos(\omega_e t) \quad \text{e} \quad x_p'' = -A\omega_e^2 \cos(\omega_e t) - B\omega_e^2 \sin(\omega_e t). \quad (135)$$

Substituindo (134) e (135) em (131), vem que

$$-A\omega_e^2 \cos(\omega_e t) - B\omega_e^2 \sin(\omega_e t) + 2b(-A\omega_e \sin(\omega_e t) + B\omega_e \cos(\omega_e t)) + \omega_0^2(A \cos(\omega_e t) + B \sin(\omega_e t)) = F \cos(\omega_e t).$$

Após algumas manipulações algébricas chegamos na equação

$$\cos(\omega_e t)[-A\omega_e^2 + 2bB\omega_e + \omega_0^2 A] + \sin(\omega_e t)[-B\omega_e^2 - 2bA\omega_e + \omega_0^2 B] = F \cos(\omega_e t), \quad (136)$$

que nos leva ao sistema linear

$$\begin{cases} A(\omega_0^2 - \omega_e^2) + 2bB\omega_e = F \\ B(\omega_0^2 - \omega_e^2) - 2bA\omega_e = 0 \end{cases}, \quad (137)$$

cujas soluções nos fornece os coeficientes  $A$  e  $B$ , dados por

$$A = \frac{(\omega_0^2 - \omega_e^2)F}{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4b^2\omega_e^2} \quad \text{e} \quad B = \frac{2b\omega_e F}{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4b^2\omega_e^2}. \quad (138)$$

Substituindo a solução encontrada em (134), obtemos

$$x_p = \frac{(\omega_0^2 - \omega_e^2)F}{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4b^2\omega_e^2} \cos(\omega_e t) + \frac{2b\omega_e F}{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4b^2\omega_e^2} \text{sen}(\omega_e t). \quad (139)$$

Usando as substituições

$$\cos(\theta) = \frac{(\omega_0^2 - \omega_e^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4b^2\omega_e^2}} \quad \text{e} \quad \text{sen}(\theta) = \frac{2b\omega_e}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4b^2\omega_e^2}}, \quad (140)$$

a equação (139) fica escrita como

$$x_p = \frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4b^2\omega_e^2}} (\cos(\theta)\cos(\omega_e t) + \text{sen}(\theta)\text{sen}(\omega_e t)) \quad (141)$$

ou

$$x_p = \frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4b^2\omega_e^2}} \cos(\omega_e t - \theta). \quad (142)$$

Substituindo  $F$  novamente, obtemos uma forma final de expressar a solução particular da equação (131)

$$x_p = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4b^2\omega_e^2}} \cos(\omega_e t - \theta). \quad (143)$$

Observe que

$$\text{tg}(\theta) = \frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\frac{2b\omega_e}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4b^2\omega_e^2}}}{\frac{(\omega_0^2 - \omega_e^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4b^2\omega_e^2}}} = \frac{2b\omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2}, \quad (144)$$

onde  $\theta$  é dado por

$$\theta = \text{arctg} \left( \frac{2b\omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2} \right), \quad (145)$$

e representa uma fase devido a aplicação da  $\vec{F}_{\text{externa}}$  sobre o sistema massa-mola. Com as soluções homogêneas e particular, podemos finalmente obter a expressão

$$x(t) = c_1 e^{-b+\sqrt{(b^2-\omega_0^2)}t} + c_2 e^{-b-\sqrt{(b^2-\omega_0^2)}t} + \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4b^2\omega_e^2}} \cos(\omega_e t - \theta), \quad (146)$$

que é solução da equação diferencial (131). Note que pelas características da solução homogênea, conforme visto anteriormente, aqui também três tipos de amortecimento são produzidos. O sistema pode ser um oscilador subamortecido quando  $b^2 - \omega_0^2 < 0$ , um

oscilador super amortecido quando  $b^2 - \omega_0^2 > 0$  e um oscilador criticamente amortecido para  $b^2 - \omega_0^2 = 0$ .

Para o oscilador forçado subamortecido, com solução homogênea (132) é escrita como (36), conforme visto no capítulo 2, fazendo com que a solução geral seja dada por

$$x(t) = Ae^{-bt}\cos(\omega t + \varphi) + \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4b^2\omega_e^2}}\cos(\omega_e t - \theta). \quad (147)$$

Para o oscilador forçado superamortecido (132) é escrita de forma análoga a (44), e sua solução geral é dada por

$$x(t) = e^{-bt}[c_1e^{\omega t} + c_2e^{-\omega t}] + \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4b^2\omega_e^2}}\cos(\omega_e t - \theta); \quad (148)$$

para o oscilador forçado criticamente amortecido (132) tem forma análoga à (50), e solução geral

$$x(t) = (c_1 + c_2t)e^{-bt} + \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4b^2\omega_e^2}}\cos(\omega_e t - \theta). \quad (149)$$

Uma análise do oscilador forçado subamortecido, com posição  $x(t)$  dada por (147) e conjunto de parâmetros dados por massa = 0,05kg,  $k = 1\text{N/m}$ ,  $\rho = 0,05\text{kg/s}$ ,  $F_0 = 0,02\text{N}$ ,  $\omega_e = 1\text{rad/s}$ ,  $\theta = 0,052583$ ,  $A = 0,079472\text{m}$ , indica que existem dois regimes bem claros para  $x(t)$ , como pode ser observado na figura 38 onde a curva preta representa variação da posição no tempo e a curva vermelha a variação da velocidade no tempo. Para tempos muito maiores que  $\frac{1}{b}$ , o primeiro termo de (147) se torna desprezível e o segundo termo oscila normalmente com  $A\cos(\omega_e t - \theta)$ . Veja que para  $t \geq \frac{1}{b} \Rightarrow e^{-bt} \ll 1$  e o transiente é dado por

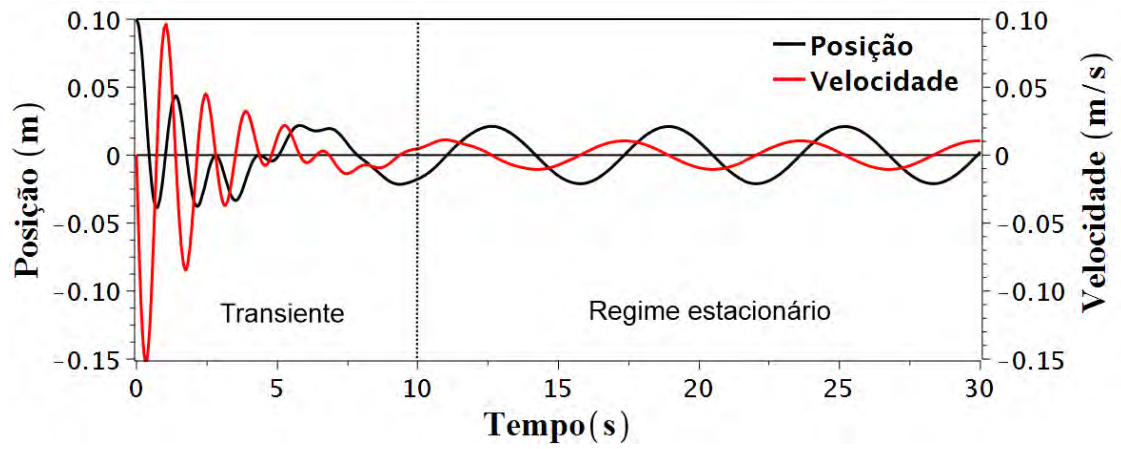
$$x_{tr}(t) = Ae^{-bt}\cos(\omega t + \varphi). \quad (150)$$

Para tempo maior que  $\frac{1}{b}$ , o sistema entra em um regime estacionário e  $x(t)$  é dado por

$$x_{est}(t) = \frac{F_0\cos(\omega_e t + \varphi)}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4b^2\omega_e^2}}. \quad (151)$$

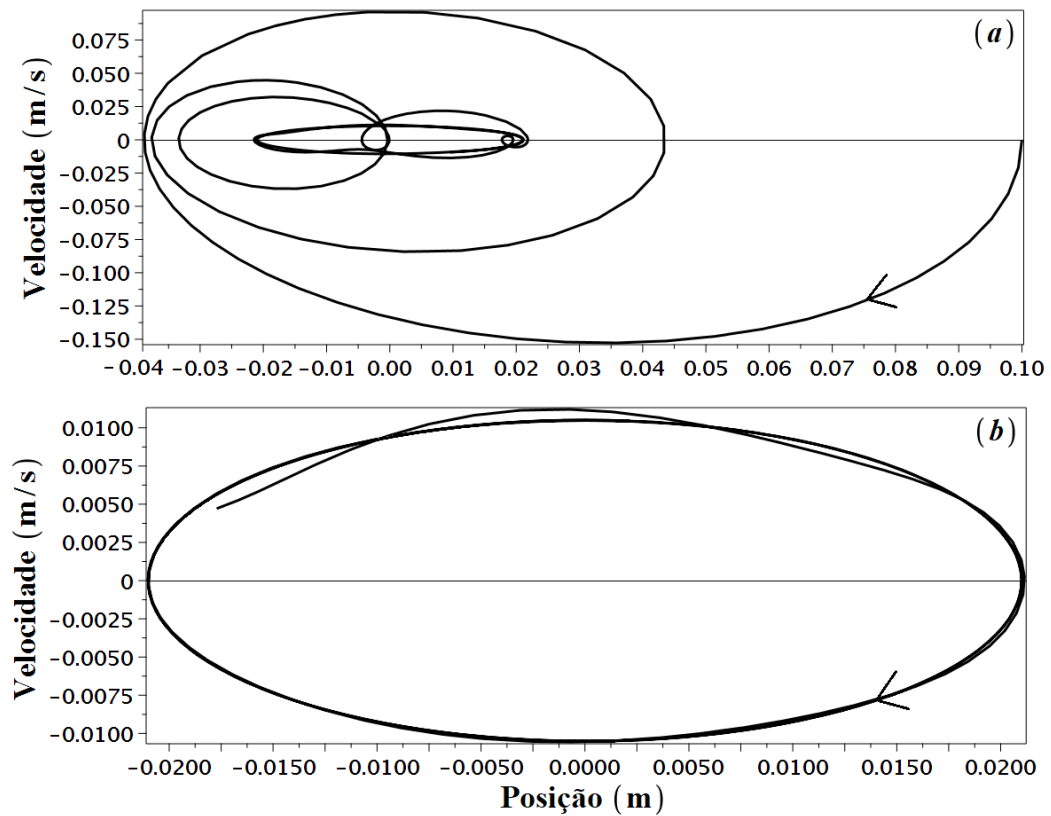
Na figura 39(a) temos o espaço de fase para este caso considerando  $t$  entre 0 e 30 segundos. Em 39(b), um subintervalo do espaço de fase confirma a entrada do sistema no regime estacionário de oscilação, com sua órbita fechada após transcorrido o tempo transiente.

Figura 38 - Gráfico da posição e velocidade para o Oscilador Forçado Subamortecido.



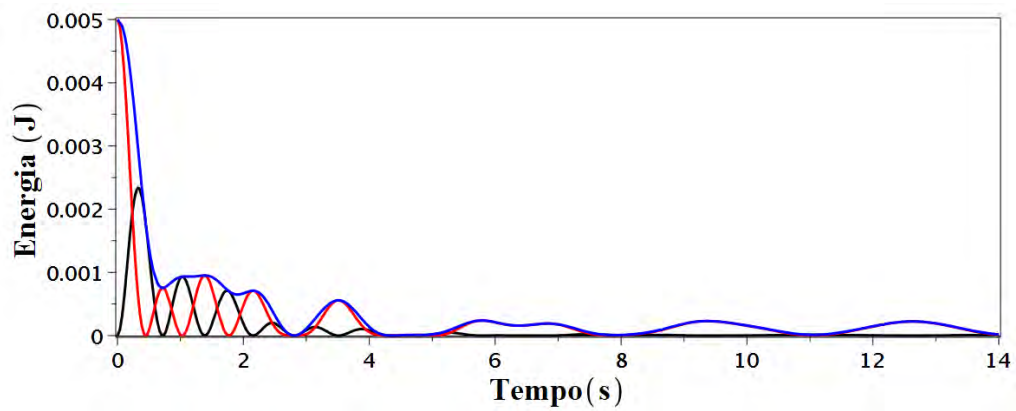
Fonte: O Autor, 2018.

Figura 39 - Espaço de fase para o Oscilador Forçado subamortecido.



Fonte: O Autor, 2018.

Figura 40 - Perfis das energias cinética, potencial e mecânica para o Oscilador Forçado Subamortecido.



Fonte: O Autor, 2018.

Assim como a posição e a velocidade, após um período transiente, as energias, também seguem o regime estacionário, como pode ser observado na figura 40, onde a curva em preto representa a energia cinética, em vermelho a energia potencial e em azul a energia mecânica.

## 7 ESTUDO EXPERIMENTAL DE OSCILAÇÕES

### 7.1 Realização Experimental

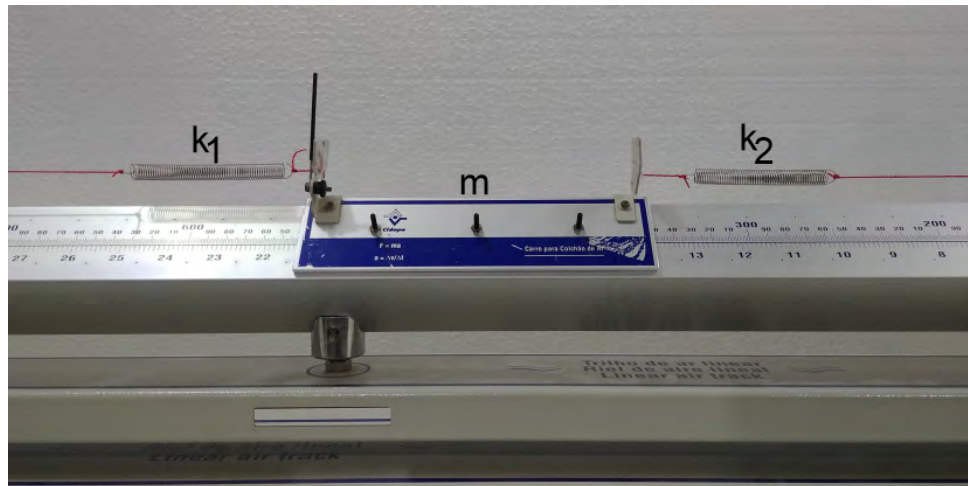
O papel da modelagem matemática de um sistema físico é de fundamental importância para a busca da compreensão do fenômeno que se deseja estudar. Além disso, quando temos a possibilidade de reproduzir em um laboratório um fenômeno físico, podemos controlar a maior parte das suas etapas de sua implementação. Este é justamente do que se trata este capítulo.

Aqui descrevemos a elaboração e construção de um experimento que tem como objetivo avaliar o que foi modelado nos capítulos anteriores.

A parte experimental deste trabalho foi realizada no Laboratório de Física do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia (IFRJ) no Campus de Nilópolis.

Com o objetivo de produzir um sistema real para o estudo dos movimentos oscilatórios em uma dimensão, tratada nos capítulos precedentes, utilizamos algumas unidades produzidas pela empresa CIDEPE<sup>2</sup>, com um trilho de ar (Cidepe EQ238F), onde foram conectados molas (Cidepe EQ028A) em ambas as extremidades conforme figura 41.

Figura 41 - Trilho de ar com corpo de massa  $m$  e duas molas  $k_1$  e  $k_2$ .



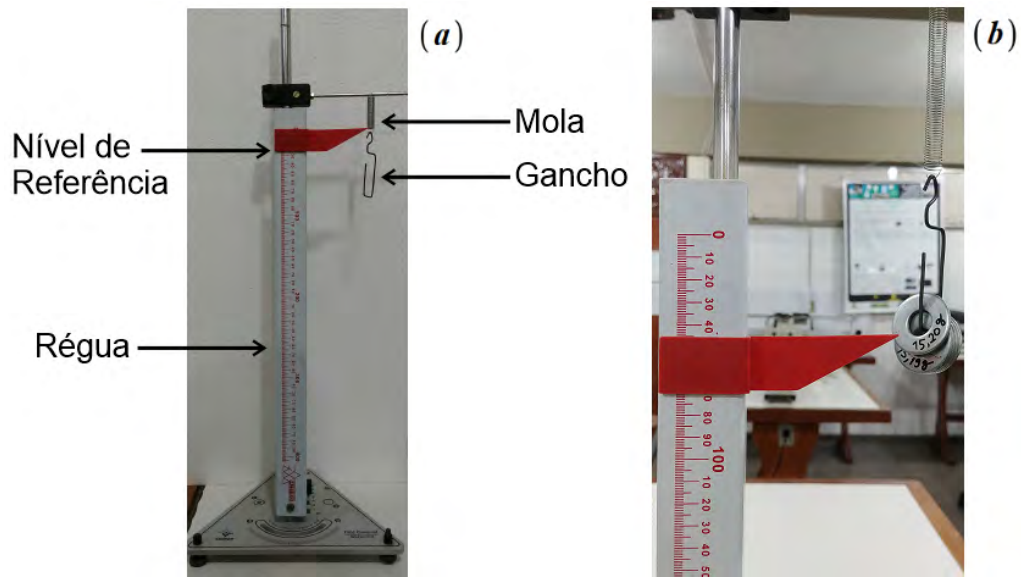
Fonte: O Autor, 2018.

Para determinarmos as constantes elásticas das molas  $k_1$  e  $k_2$ . Utilizamos o sistema (Cidepe EQ275), figura 42.

<sup>2</sup> CIDEPE (Centro Industrial de Equipamentos de Ensino e Pesquisa)



Figura 42 - Suporte para as medidas das constantes elásticas das molas.



Fonte: O Autor, 2018.

Após estabelecer um ponto de referência, paulatinamente corpos de diferentes massas foram pendurados no gancho, produzindo diferentes elongações das molas. De posse desses dados, foram construídas as tabelas 4 e 5 para as molas  $k_1$  e  $k_2$ , respectivamente.

Tabela 4 - Dados referentes a mola  $k_1$ .

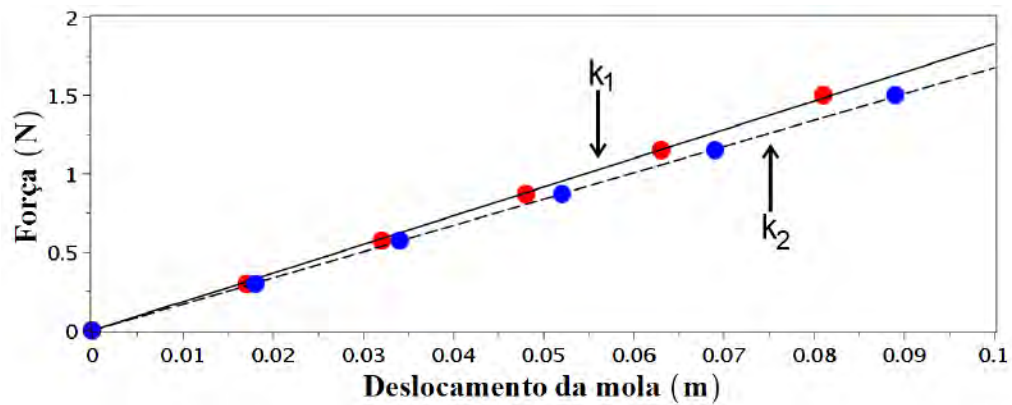
Mola $k_1$	
Massa( $10^{-3}\text{kg}$ ) ( $\pm 0,1 \times 10^{-3}\text{kg}$ )	Deslocamento( $10^{-3}\text{m}$ ) ( $\pm 0,5 \times 10^{-3}\text{m}$ )
30,29 $\pm$ 0,10	17,0 $\pm$ 0,5
58,43 $\pm$ 0,10	32,0 $\pm$ 0,5
88,83 $\pm$ 0,10	48,0 $\pm$ 0,5
117,52 $\pm$ 0,10	63,0 $\pm$ 0,5
153,29 $\pm$ 0,10	81,0 $\pm$ 0,5

Tabela 5 - Dados referentes a mola  $k_2$ .

Mola $k_2$	
Massa( $10^{-3}\text{kg}$ ) ( $\pm 0,1 \times 10^{-3}\text{kg}$ )	Deslocamento( $10^{-3}\text{m}$ ) ( $\pm 0,5 \times 10^{-3}\text{m}$ )
30,29 $\pm$ 0,10	17,0 $\pm$ 0,5
58,43 $\pm$ 0,10	32,0 $\pm$ 0,5
88,83 $\pm$ 0,10	48,0 $\pm$ 0,5
117,52 $\pm$ 0,10	63,0 $\pm$ 0,5
153,29 $\pm$ 0,10	81,0 $\pm$ 0,5

Com os dados das tabelas 4 e 5 e fazendo uso do método dos mínimos quadrados foram obtidos as constantes elásticas  $k_1 = 18,32\text{N/m}$  e  $k_2 = 16,78\text{N/m}$ , respectivamente das molas 1 e 2, conforme figura 43.

Figura 43 - Mínimos quadrados - Molas  $k_1$  e  $k_2$



Fonte: O Autor, 2018.

Os valores das massas dos corpos foram obtidos com o auxílio de uma balança de precisão Bel, com erro fornecido pela fabricante de  $\pm 100\text{mg}$  e ilustrada na figura 44. A elongação de cada mola foi medida com uma régua com escala em milímetros, com erro estimado em  $\pm 0,5\text{mm}$ , metade da menor medida. É de importância saber que as barras de erros são menores do que o tamanho do ponto e por tanto, consideraremos como sendo o tamanho dos pontos (círculos).

Figura 44 - Balança de precisão.



Fonte: O Autor, 2018.

## 7.2 Medidas e incertezas

Para analisarmos os dados experimentais é necessário termos certeza da qualidade dos dados obtidos ao longo de todo o processo experimental.

As medições experimentais estão sujeitas a incertezas que, em geral, nos dão uma ideia da qualidade e do rigor com que a experiência foi conduzida. Dois tipos de erros podem ocorrer em um procedimento, os sistemáticos e os aleatórios. Os erros sistemáticos, cujas causas podem ser identificadas e de certa forma eliminados, podem ser classificados como: (i) instrumentais; (ii) observacionais; (iii) ambientais e (iv) teóricos. No caso, os erros aleatórios, em geral, são classificados como (i) observacionais e (ii) aleatórios, e podem ser tratados em uma análise estatística e, dessa forma, quantificados (JESUS, 2017) (VUOLO, 1996).

De forma geral, uma medida deve ser expressa como:

$$\text{Medida} = \text{valor numérico} \pm \text{erro (unidade)}$$

Assim, o conhecimento dos erros das medidas, em todas as etapas de um experimento é fundamental. Ao longo de um experimento em que as medidas são dependentes uma das outras, ocorre o que é chamado de propagação da incerteza. Quando este é bem conhecido, irá contribuir para que o valor da incerteza final da grandeza que se deseja medir seja o menor possível.

Para o cálculo da incerteza sobre a constante elástica  $k$ , utilizamos o caso geral para uma função do tipo  $f = ab$  ou  $f = a/b$  como

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 \Rightarrow \sigma_f = f \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2}, \quad (152)$$

onde  $f = a/b \rightarrow k = F/x$ ;  $\sigma_a = \varepsilon_F$  e  $\sigma_b = \varepsilon_x$ , são os erros das medidas da força peso e do deslocamento, respectivamente.

Logo,

$$k = \frac{F}{x} \pm \frac{F}{x} \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_F}{F}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_x}{x}\right)^2}. \quad (153)$$

A aceleração gravidade ao nível da mesa no laboratório em que os experimentos foram realizados foi calculada como sendo  $g = 9,7877394 \pm 0,0000002\text{m/s}^2$ .

Da lei de Hooke e do valor obtido para  $k_1$  e  $k_2$  anteriormente, temos

Mola 1:

$$F_{\text{elástica}} = k_1 x = 18,32x. \quad (154)$$

Considerando  $x = 0,07\text{m}$ , temos que  $F_{\text{elástica}} = 1,2824\text{N}$ . A incerteza sobre os valores de  $\varepsilon_F$  e  $\varepsilon_x$  é dada por

$$\varepsilon_F = \frac{0,1}{1000} \cdot 9,787739 = 0,000978\text{N}, \quad e \quad \varepsilon_x = \frac{0,5}{1000} = 0,0005\text{m}. \quad (155)$$

Assim,

$$k_1 = \frac{1,2824}{0,07} \pm \frac{1,2824}{0,07} \sqrt{\left(\frac{0,000978}{1,2824}\right)^2 + \left(\frac{0,0005}{0,07}\right)^2} \Rightarrow k_1 = 18,32 \pm 0,13\text{N/m}, \quad (156)$$

isto é,  $k_1$  pertence ao intervalo  $k_1 \in [18,19 ; 18,45]$ .

Mola 2:

$$F_{\text{elástica}} = k_2 x = 16,78x. \quad (157)$$

Para um deslocamento  $x = 0,07\text{m}$  temos que  $F_{\text{elástica}} = 1,1747\text{N}$ . Assim, para a mola  $k_2$

temos

$$k_2 = \frac{1,1747}{0,07} \pm \frac{1,1747}{0,07} \sqrt{\left(\frac{0,000978}{1,1747}\right)^2 + \left(\frac{0,0005}{0,07}\right)^2} \Rightarrow k_2 = 16,78 \pm 0,12\text{N/m} \quad (158)$$

onde  $k_2$  pertence ao intervalo  $k_2 \in [16,66 ; 16,90]$ . Uma outra forma de se fazer a estimativa da incerteza é através do erro do método dos mínimos quadrados, utilizado no cálculo das constantes  $k_1$  e  $k_2$  das molas. O apêndice “A” deste trabalho traz informações a respeito do cálculo do erro dos mínimos quadrados.

### 7.3 O Software Tracker

Para a realização dos experimentos com o trilho de ar (figura 41), optamos por adotar o procedimento da vídeo análise, onde as filmagens foram realizadas utilizando-se um celular filmando em 60 quadros por segundo (60fps) e resolução full HD. A análise das filmagens foi realizada através do software livre Tracker (TRACKER, 2017) (BROWN, 2009).

O Tracker é um produto que foi desenvolvido pela Open Source Physics (OSP) que é uma comunidade aberta que contribui com recursos para a modelagem computacional. A versão em português utilizada neste trabalho foi elaborada pela Equipe da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (JUNIOR J. A. LENZ, 2011).

Após o posicionamento correto da câmera, para evitar distorções provenientes de efeitos ópticos, tais como paralaxe e se ter controle da iluminação, o sistema é posto a funcionar. O programa foi elaborado de tal modo que se possa fazer uma análise quadro a quadro da filmagem, permitindo um perfeito acompanhamento da evolução temporal do experimento.

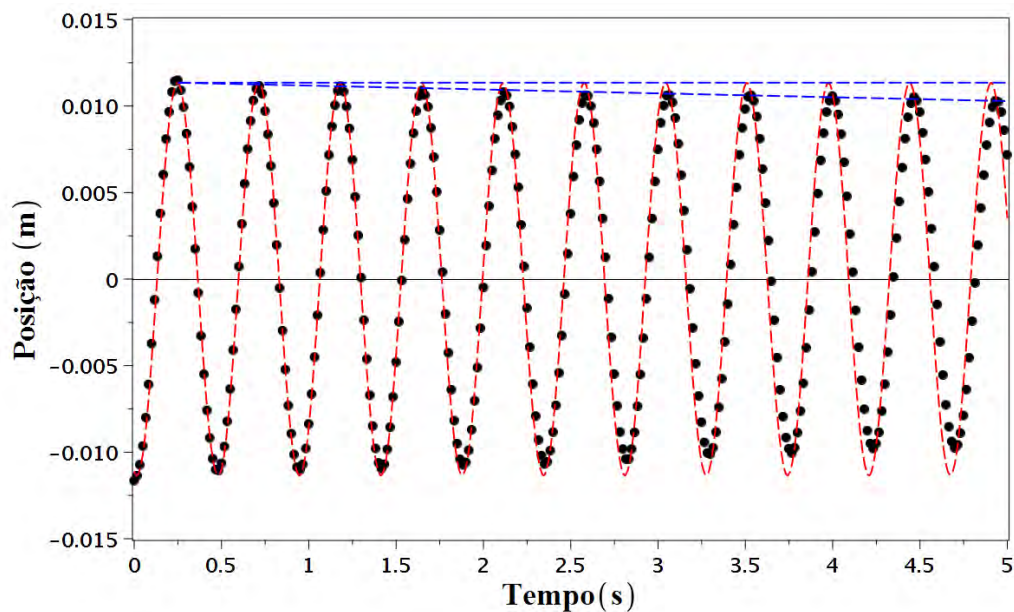
São apresentados a seguir os dados da realização experimental para diversos casos

de osciladores e a comparação com os modelos anteriormente tratados.

#### 7.4 Oscilador Harmônico Simples

O primeiro experimento foi realizado para a análise de um oscilador harmônico simples, com as molas  $k_1$  e  $k_2$  e carrinho para trilho de ar de massa  $0,19161 \times 10^{-3}\text{kg}$ . Após a vídeo análise ser realizada com a obtenção da coordenada  $x$  em função do tempo, com a marcação de um ponto que sirva de referência para as medidas, obtemos uma tabela de pontos que foi colocada em um gráfico  $x \times t$ , conforme figura 45, pontos em preto. Procedemos com a análise comparativa entre o modelo teórico, construído no capítulo 1 e os dados da experiência. Com a escolha adequada dos parâmetros, tais como amplitude  $A = 0,01134\text{m}$ , fase  $\varphi = \pi$ , constante elástica  $k = k_1 + k_2 = 35,10 \pm 0,25\text{N/m}$  e massa  $0,19161 \pm 10^{-4}\text{kg}$  obtemos a curva em vermelho, figura 45.

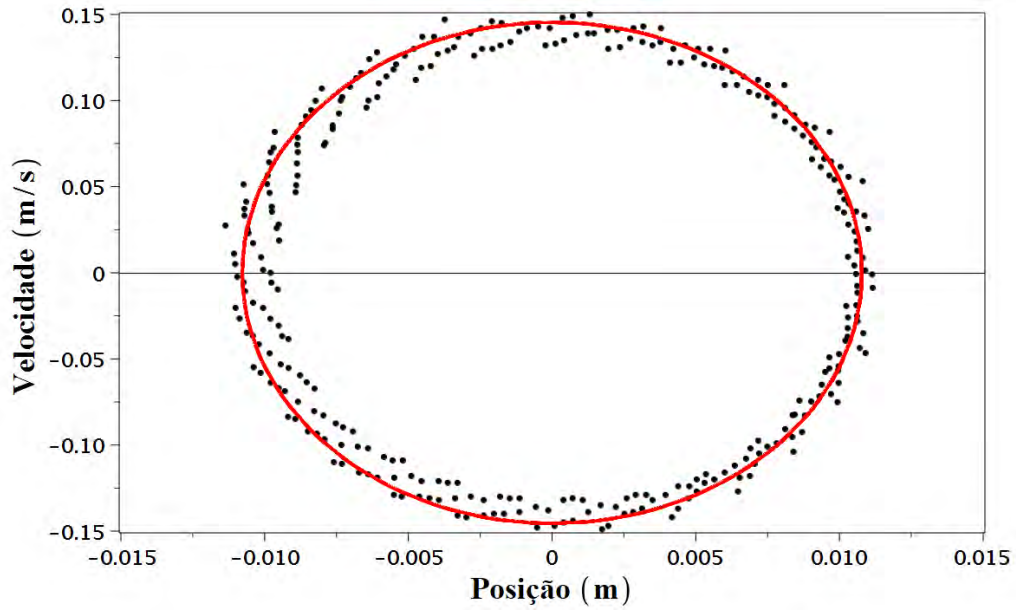
Figura 45 - Oscilador Harmônico Simples: Modelo teórico (curva em vermelho) e resultado experimental (círculos pretos).



Fonte: O Autor, 2018.

A reta decrescente possui o coeficiente angular  $a = -0,00022426$  e coeficiente linear  $b = 0,01406$ , que demonstra uma excelente concordância entre o modelo teórico, curva tracejada em vermelho e o resultado experimental, em círculos pretos. Na figura 46 é apresentado o espaço de fase no caso do oscilador harmônico simples onde a curva em vermelho representa o resultado do modelo e os pontos em preto os dados experimentais. Notamos uma dispersão dos pontos em relação a curva esperada (elipse em vermelho) devido a dissipação de energia.

Figura 46 - Oscilador Harmônico Simples - Espaço de fase: Modelo teórico (curva em vermelho) e resultado experimental (círculos pretos).



Fonte: O Autor, 2018.

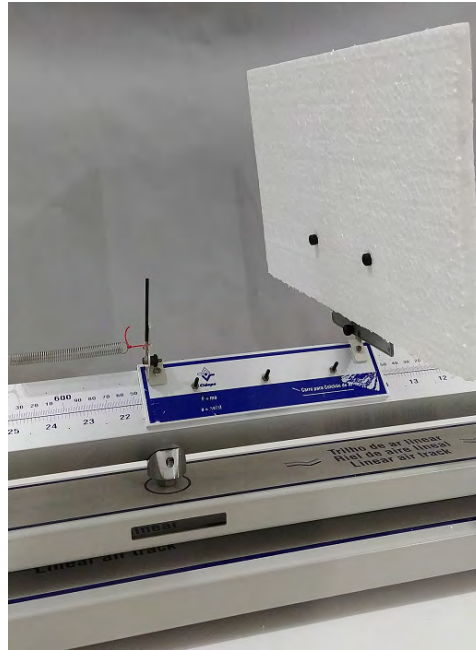
## 7.5 Oscilador Amortecido

Afim de simular uma vela e aumentar a resistência do ar, foram utilizados pedaços retangulares de isopor de diversos e massas dispostos na tabela 6. Para ligar o isopor ao carrinho de massa  $191,61 \pm 10^{-4}$ kg utilizamos um conjunto fixador como mostrado na figura 47 de massa  $30,01 \pm 10^{-4}$ kg.

Tabela 6 - Tamanho das placas de isopor.

Área( $m^2$ ) ( $(\pm 0,5 \times 10^{-3})^2 m^2$ )	Massa( $10^{-3}$ kg) ( $\pm 0,1 \times 10^{-3}$ kg)
$30,29 \pm 0,10$	$30,29 \pm 0,10$
$30,29 \pm 0,10$	$30,29 \pm 0,10$
$88,83 \pm 0,10$	$88,83 \pm 0,10$
$117,52 \pm 0,10$	$88,83 \pm 0,10$

Figura 47 - Placa usada para amortecimento.



Fonte: O Autor, 2018.

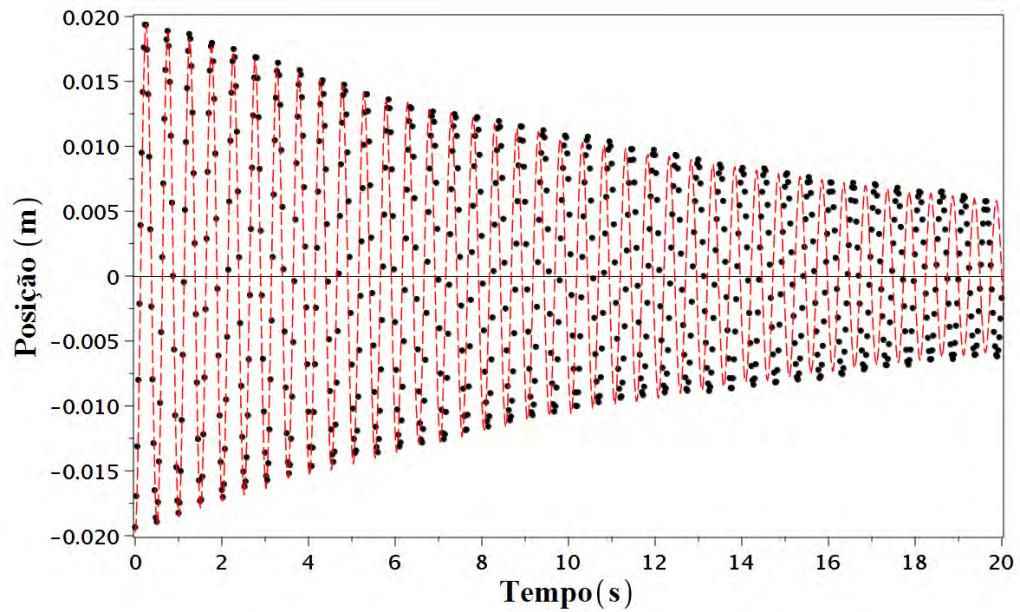
Apresentamos a seguir os resultados obtidos para cada um dos quatro tamanhos de placa. É de se esperar que as curvas obtidas sejam do tipo  $x(t) = Ae^{-bt} \cos(\omega_0 t + \varphi)$ , respectivo ao oscilador subamortecido.

#### 7.5.1 Placa 0,2m x 0,1m

A figura 48 mostra os resultados experimentais (círculo preto) comparados com a curva teórica (curva pontilhada vermelha) para o conjunto de parâmetros  $A = 0,0197\text{m}$ ,  $\varphi = \pi$ ,  $k = 34,85\text{N/m}$  e  $\rho = 0,0275\text{kg/s}$  e massa total do sistema de  $0,22349 \pm 10^{-4}\text{kg}$ . Observamos uma excelente concordância entre os resultados teórico e experimental.

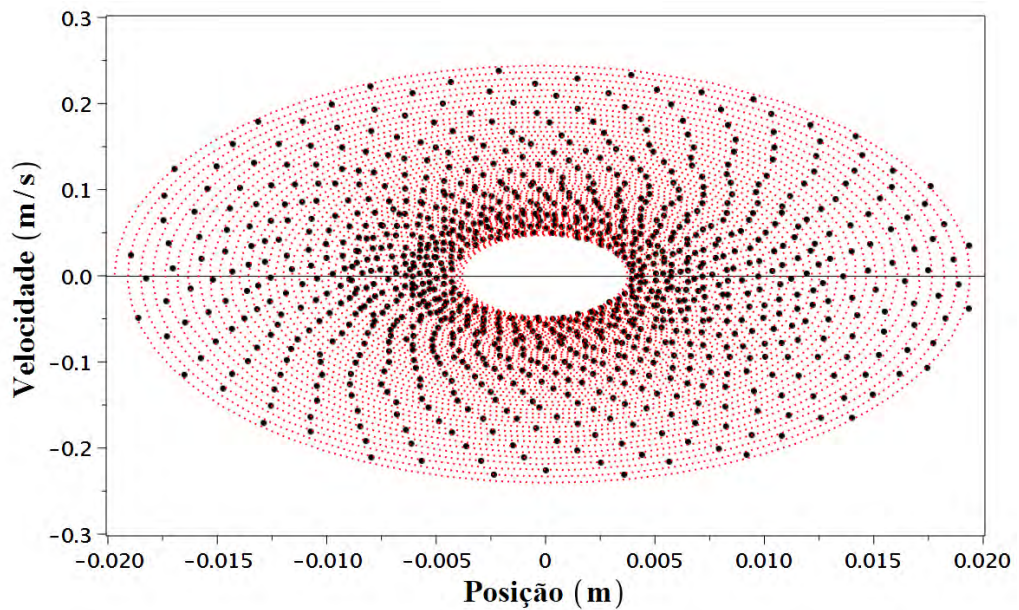
A figura 49 apresenta o espaço de fase do oscilador amortecido com placa de dimensões  $0,2\text{m} \times 0,1\text{m}$ . A curva tracejada representa a previsão teórica de acordo com a figura 12 e os círculos em preto os dados extraídos da experiência.

Figura 48 - Oscilador Amortecido: Modelo teórico (curva em vermelho) e resultado experimental (círculos pretos) para a placa  $0,2\text{m} \times 0,1\text{m}$ .



Fonte: O Autor, 2018.

Figura 49 - Oscilador Amortecido - Espaço de Fase: Modelo teórico (curva em vermelho) e resultado experimental (círculos pretos) para a placa  $0,2\text{m} \times 0,1\text{m}$ .



Fonte: O Autor, 2018.

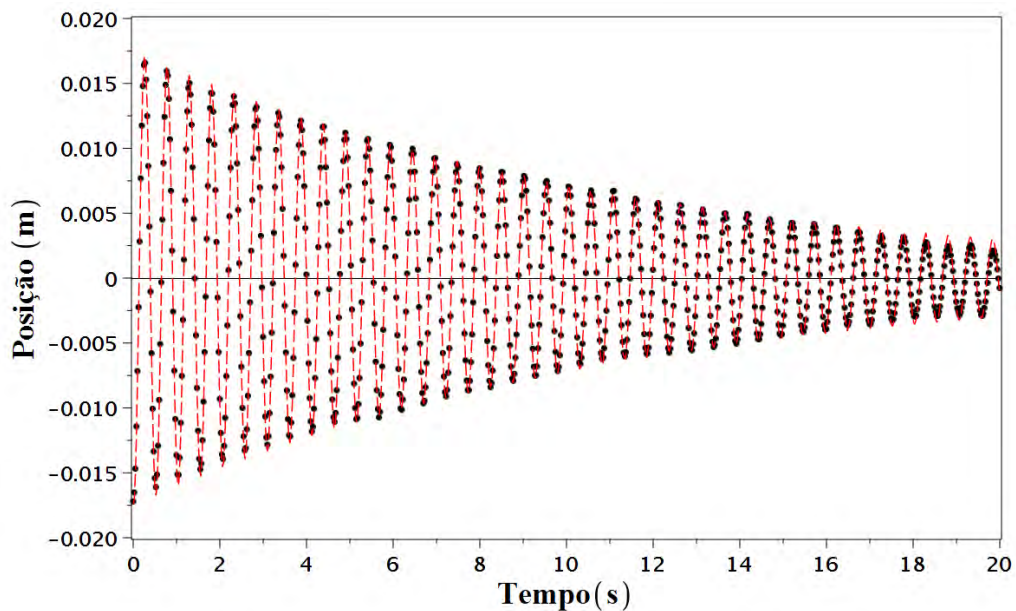


### 7.5.2 Placa 0,2m x 0,2m

As curvas (50) e 51 mostram os resultados experimentais (círculo preto) comparados com a curva teórica (curva pontilhada vermelha) da posição como função do tempo e o espaço de fase para o oscilador amortecido com placa de dimensões 0,2m  $\times$  0,2m.

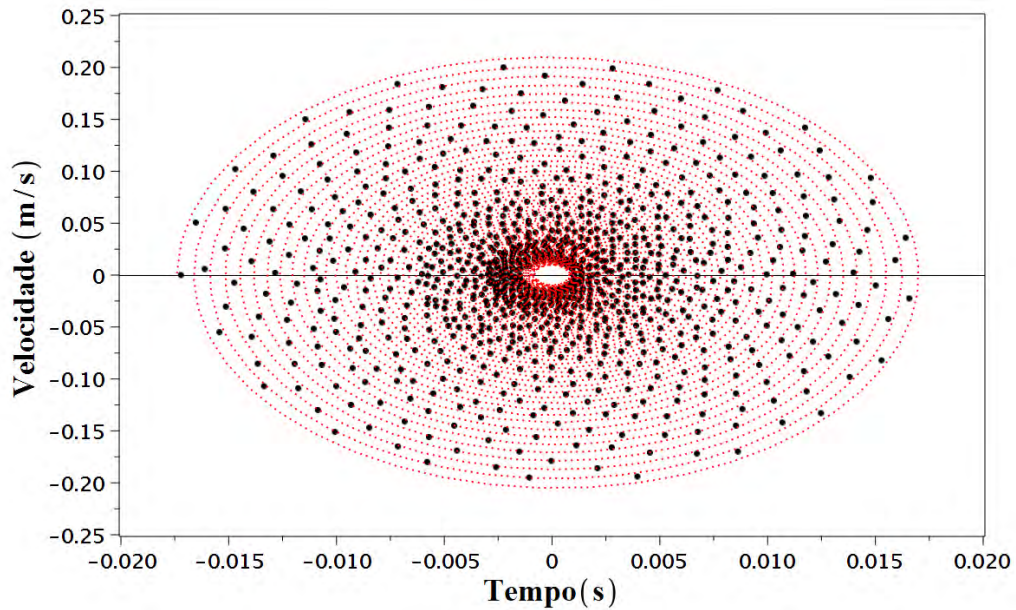
O conjunto de parâmetros para este caso é composto por:  $A = 0,0175\text{m}$ ,  $\varphi = \pi$ ,  $k = 34,85\text{N/m}$ ,  $\rho = 0,04\text{kg/s}$  e massa total do sistema igual a  $0,22505 \pm 10^{-4}\text{kg}$ . As curvas em vermelho foram obtidas através do modelo teórico e os círculos em preto extraídos experimentalmente.

Figura 50 - Oscilador Amortecido: Modelo teórico (curva em vermelho) e resultado experimental (círculos pretos) para a placa 0,2m  $\times$  0,2m.



Fonte: O Autor, 2018.

Figura 51 - Oscilador Amortecido - Espaço de Fase: Modelo teórico (curva em vermelho) e resultado experimental (círculos pretos) para a placa  $0,2\text{m} \times 0,2\text{m}$ .



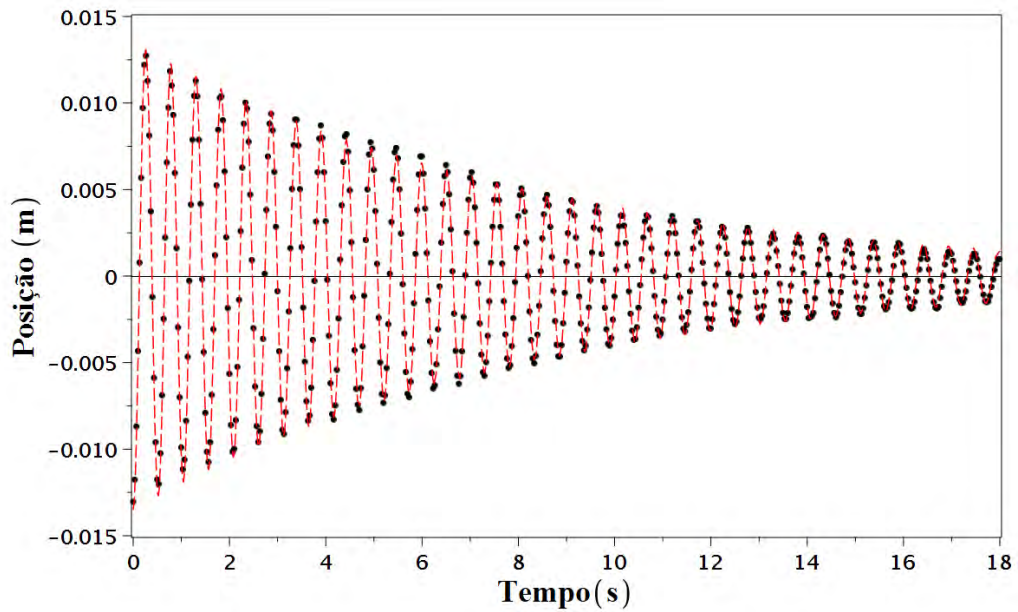
Fonte: O Autor, 2018.

### 7.5.3 Placa 0,2m x 0,3m

As curvas (52) e 53 representam a posição como função do tempo e o espaço de fase para o oscilador amortecido com placa de dimensões  $0,2\text{m} \times 0,3\text{m}$ .

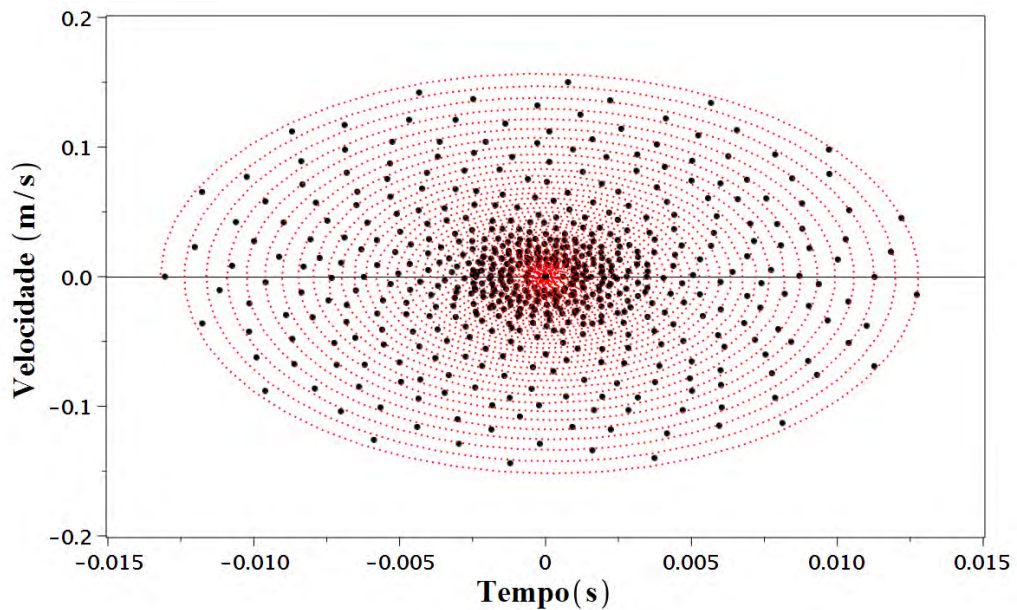
O conjunto de parâmetros para este caso é composto por:  $A = 0,0135\text{m}$ ,  $\varphi = \pi$ ,  $k = 34,85\text{N/m}$ ,  $\rho = 0,055\text{kg/s}$  e massa total do sistema igual a  $0,2269 \pm 10^{-4}\text{kg}$ . As curvas em vermelho foram obtidas por meio do modelo teórico e os círculos em preto extraídos experimentalmente.

Figura 52 - Oscilador Amortecido: Modelo teórico (curva em vermelho) e resultado experimental (círculos pretos) para a placa  $0,2\text{m} \times 0,3\text{m}$ .



Fonte: O Autor, 2018.

Figura 53 - Oscilador Amortecido - Espaço de Fase: Modelo teórico (curva em vermelho) e resultado experimental (círculos pretos) para a placa  $0,2\text{m} \times 0,3\text{m}$ .



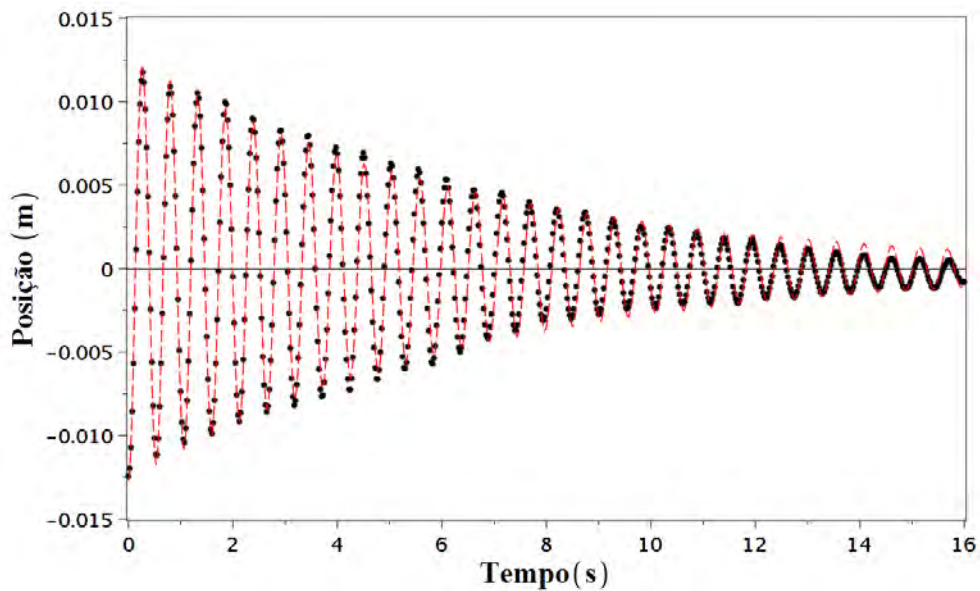
Fonte: O Autor, 2018.

#### 7.5.4 Placa 0,2m x 0,4m

As curvas (54) e 55 mostram os resultados experimentais (círculo preto) comparados com a curva teórica (curva pontilhada vermelha) da posição como função do tempo e o espaço de fase para o oscilador amortecido com placa de dimensões  $0,2\text{m} \times 0,4\text{m}$ .

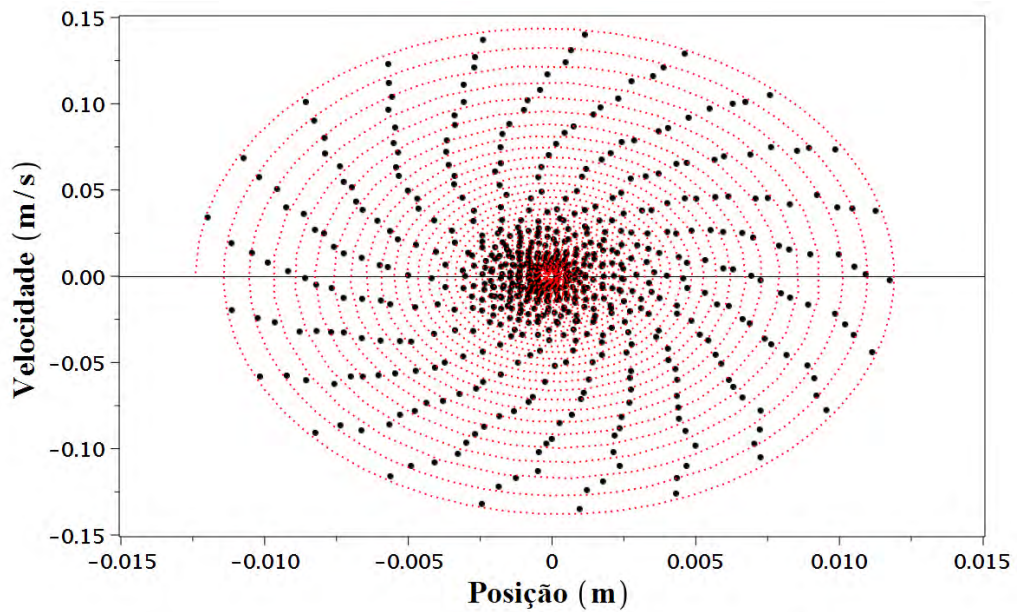
O conjunto de parâmetros para este caso é composto por:  $A = 0,0128\text{m}$ ,  $\varphi = \pi$ ,  $k = 34,85\text{N/m}$ ,  $\rho = 0,070\text{kg/s}$  e massa total do sistema igual a  $0,2288 \pm 10^{-4}\text{kg}$ . As curvas em vermelho foram obtidas por meio do modelo teórico e os círculos em preto extraídos experimentalmente.

Figura 54 - Oscilador Amortecido: Modelo teórico (curva em vermelho) e resultado experimental (círculos pretos) para a placa  $0,2\text{m} \times 0,4\text{m}$ .



Fonte: O Autor, 2018.

Figura 55 - Oscilador Amortecido - Espaço de Fase: Modelo teórico (curva em vermelho) e resultado experimental (círculos pretos) para a placa  $0,2\text{m} \times 0,4\text{m}$ .

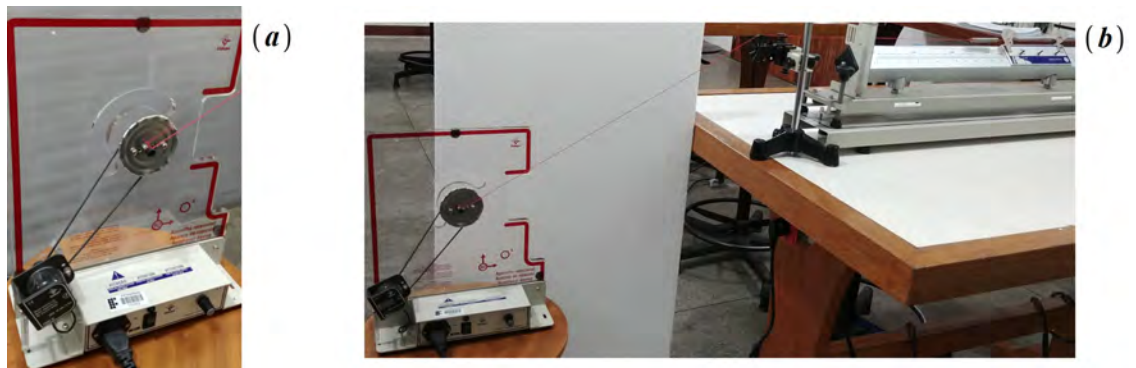


Fonte: O Autor, 2018.

## 7.6 Oscilador Forçado

Para esse experimento, foi utilizado um motor, vide figura 56(a), no qual o carrinho foi conectado, figura 56(b), produzindo uma força externa periódica. Não foram utilizados o suporte e as placas de isopor, fazendo com que a massa do sistema seja igual a massa do carrinho, dada por  $0,19161 \pm 10^{-4}\text{kg}$ .

Figura 56 - Motor gerador de força externa ligado ao carrinho.



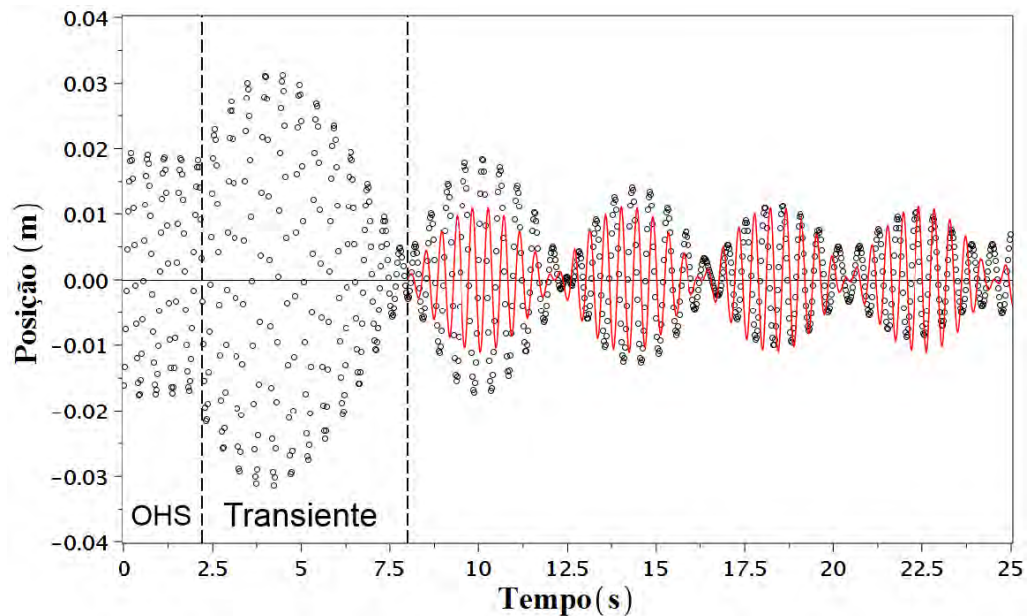
Fonte: O Autor, 2018.

Dado o sistema em regime estacionário, o carrinho foi deslocado da sua posição de equilíbrio e solto, oscilando livremente em um primeiro momento. Transcorrido alguns segundos, foi ligado o motor, fornecendo energia e fazendo com que o sistema passe por um período transiente no movimento até entrar em um regime de maior estabilidade.

As curvas (57) e 58 mostram os resultados experimentais (círculo preto) comparados com a curva teórica (curva pontilhada vermelha) da posição como função do tempo e o espaço de fase para o oscilador forçado.

O conjunto de parâmetros para este caso é composto por:  $A = 0,005662\text{m}$ ,  $\varphi = \pi$ ,  $k = 34,85\text{N/m}$ ,  $F_0 = 0,43\text{N}$ . As curvas em vermelho foram obtidas por meio do modelo teórico e os círculos em preto extraídos experimentalmente.

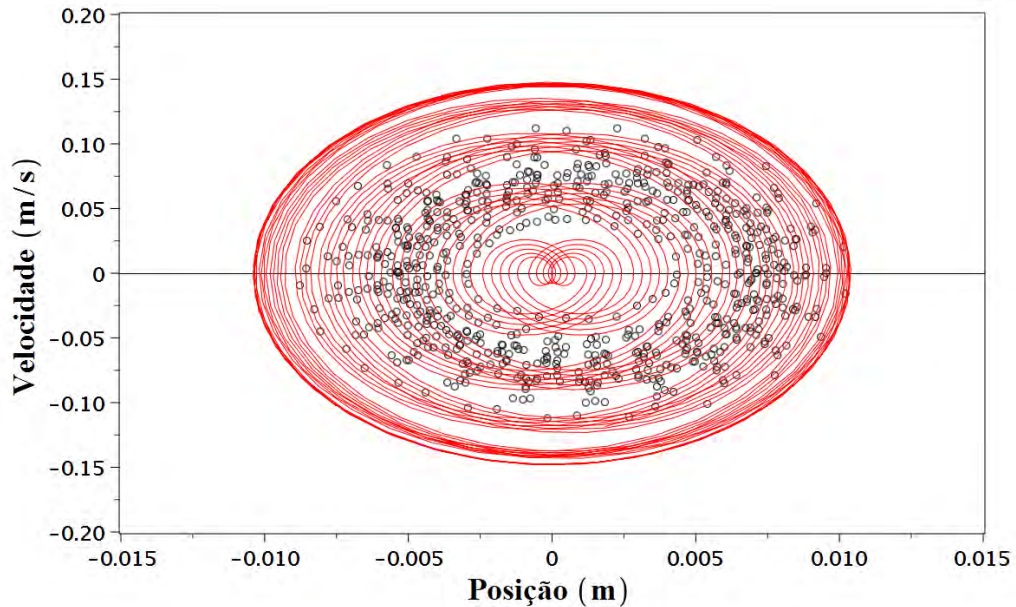
Figura 57 - Resultado experimental para o Oscilador forçado.



Fonte: O Autor, 2018.

Passado o período transiente, a análise demonstra um bom resultado com o que se esperava para este tipo de oscilação. O espaço de fase, ilustrado na figura 58 foi feito partindo de  $t = 10$ , ou seja, após o período transiente.

Figura 58 - Oscilador Forçado - Espaço de Fase: Modelo teórico (curva em vermelho) e resultado experimental (círculos pretos).



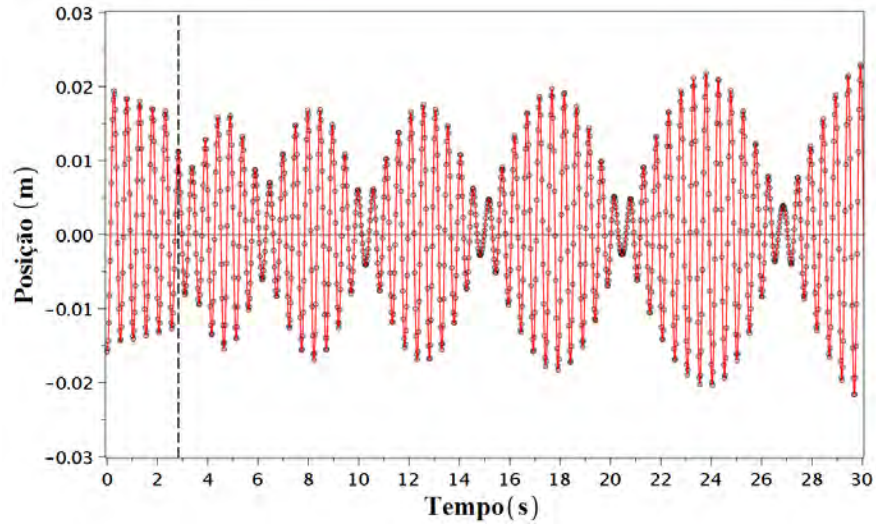
Fonte: O Autor, 2018.

## 7.7 Oscilador Forçado Amortecido

Para realização experimental desse caso, foram montados quatro diferentes sistemas, utilizando as quatro diferentes placas de isopor, dessa vez em conjunto com o motor ligado. Os pesos de cada um dos sistemas montados (carrinho, conjunto fixador e placa de isopor) são idênticos aos do caso em que tratamos experimentalmente o oscilador amortecido, uma vez que, adicionado o motor na experiência, que não influencia no peso. Buscando uma maior quantidade de informações, o motor era apenas acionado depois de alguns segundos, fazendo com que um período transiente ocorra, de forma análoga ao caso experimental do oscilador forçado. O ponto no qual o motor é acionado é identificado pela linha tracejada nos gráficos que seguem. Os resultados experimentais obtidos nas figuras 59, 61, 63 e 65 que representam as posições bem como os resultados das figuras 60, 62, 64 e 66, que representam os respectivos espaços de fase são bastante interessantes e trazem bastante informações, tais como os batimentos presentes no comportamento (LI; PAYNE; WANG, 2016). Os círculos representam os dados extraídos e a linha vermelha foi colocada para auxílio visual da curva formada.

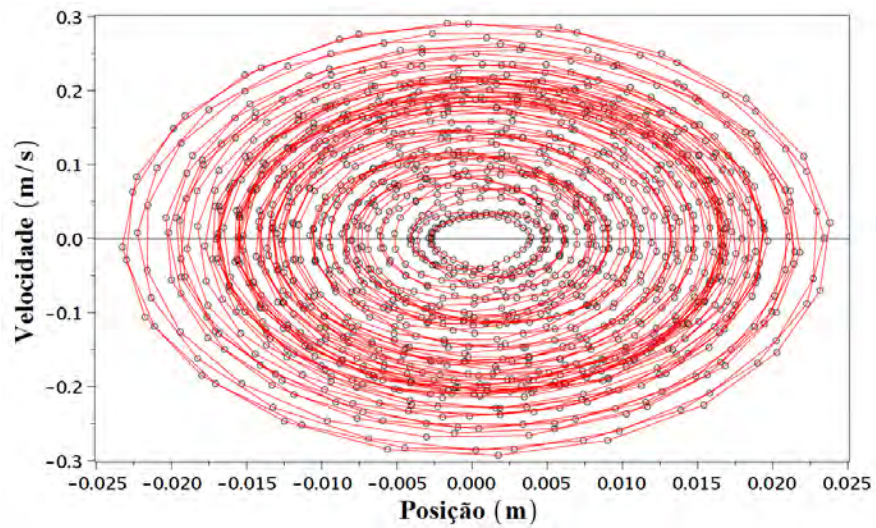
7.7.1 Placa 0,2m x 0,1m

Figura 59 - Oscilador Forçado Amortecido: Linha guia e resultado experimental (círculos pretos) para a placa 0,2m x 0,1m.



Fonte: O Autor, 2018.

Figura 60 - Espaço de Fase: Linha guia (curva vermelha) e resultado experimental (círculos pretos) para a placa 0,2m x 0,1m.

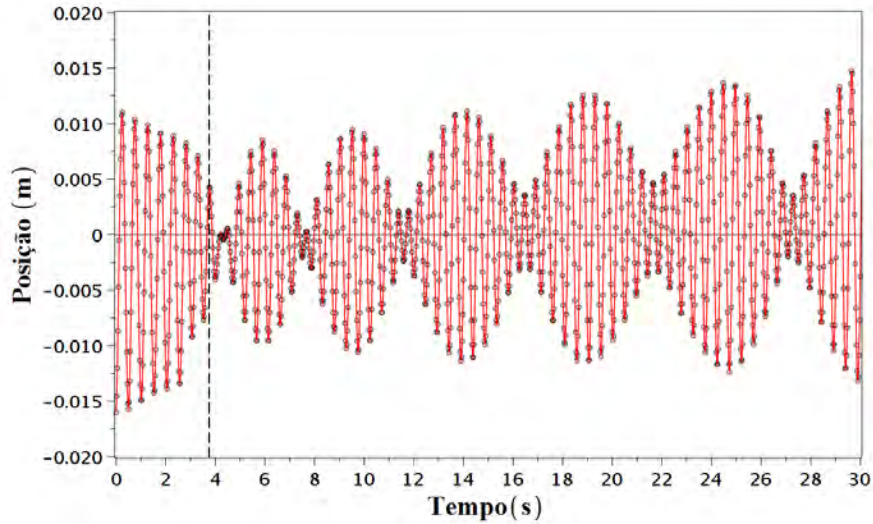


Fonte: O Autor, 2018.



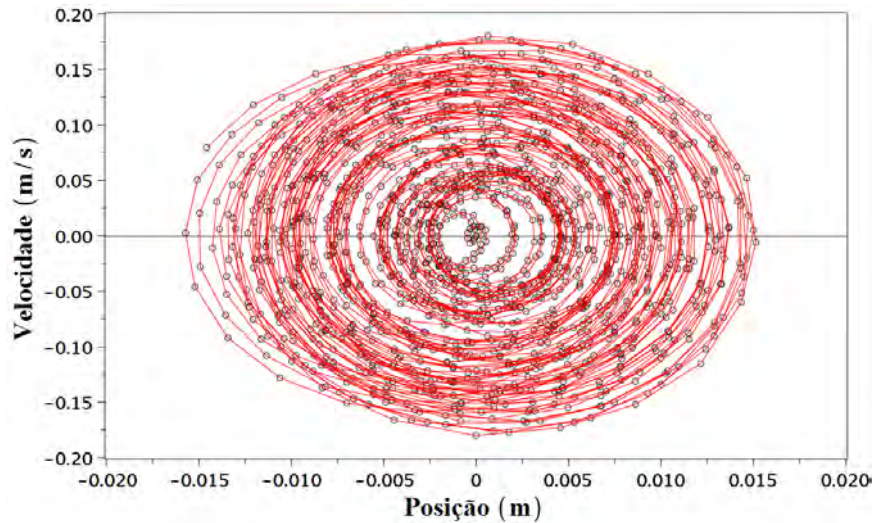
7.7.2 Placa 0,2m x 0,2m

Figura 61 - Oscilador Forçado Amortecido: Linha guia e resultado experimental (círculos pretos) para a placa 0,2m x 0,2m.



Fonte: O Autor, 2018.

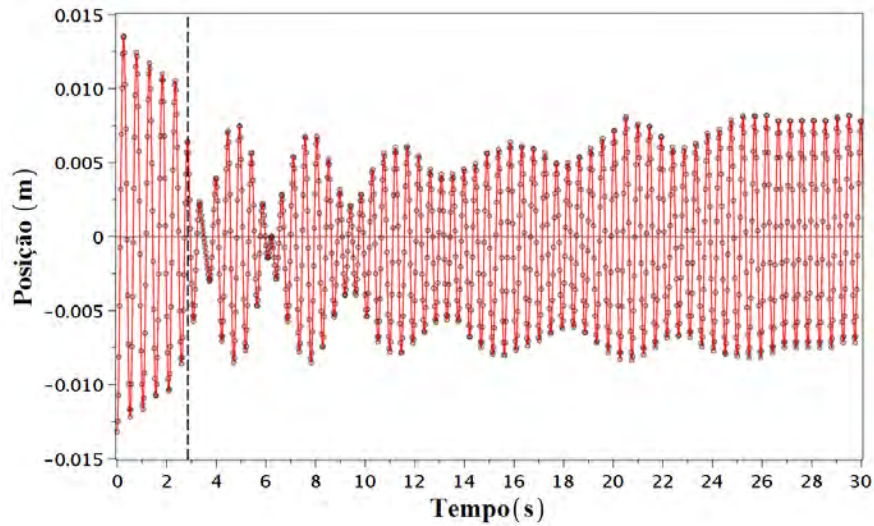
Figura 62 - Espaço de Fase: Linha guia (curva vermelha) e resultado experimental (círculos pretos) para a placa 0,2m x 0,2m.



Fonte: O Autor, 2018.

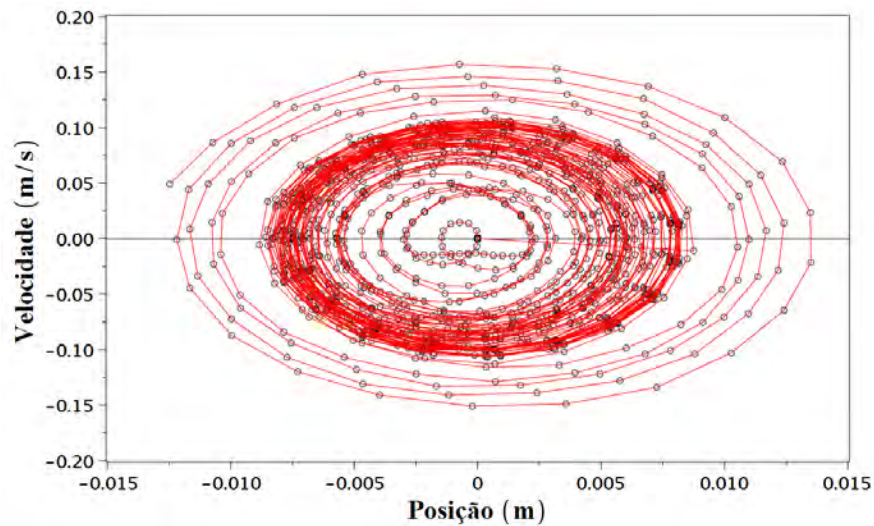
### 7.7.3 Placa 0,2m x 0,3m

Figura 63 - Oscilador Forçado Amortecido: Linha guia e resultado experimental (círculos pretos) para a placa 0,2m x 0,3m.



Fonte: O Autor, 2018.

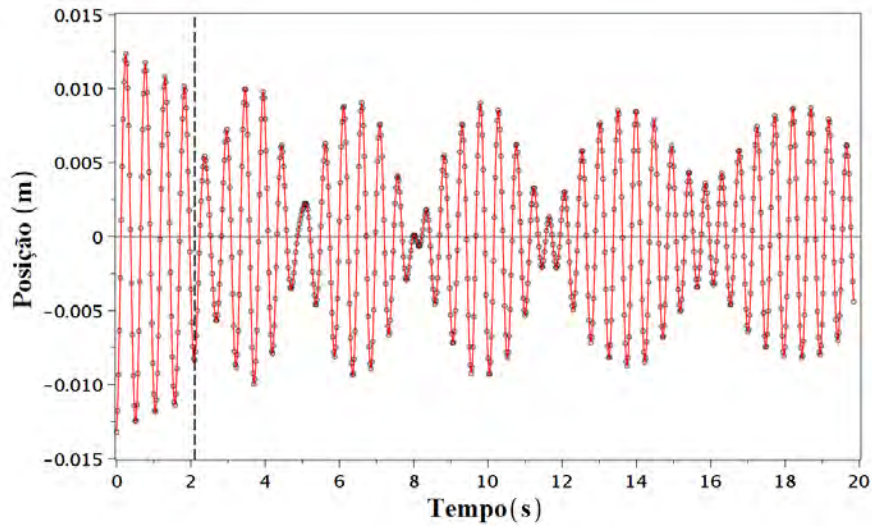
Figura 64 - Espaço de Fase: Linha guia (curva vermelha) e resultado experimental (círculos pretos) para a placa 0,2m x 0,3m.



Fonte: O Autor, 2018.

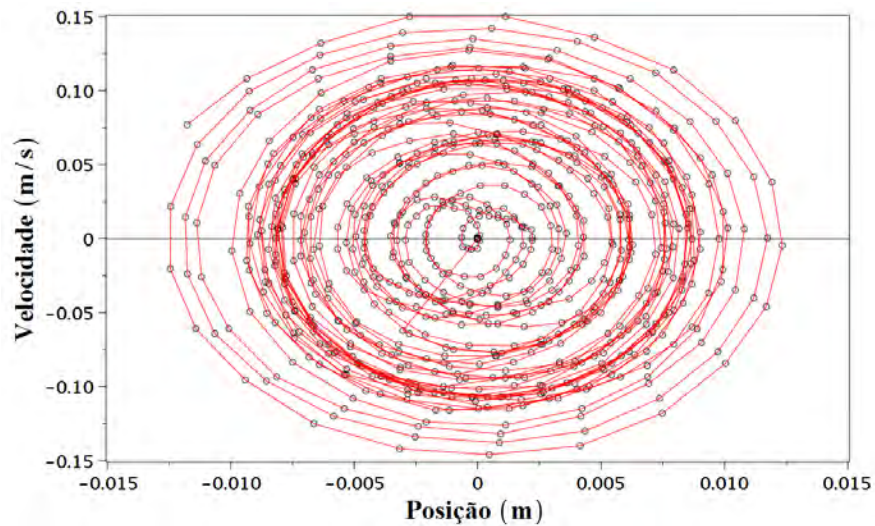
7.7.4 Placa 0,2m x 0,4m

Figura 65 - Oscilador Forçado Amortecido: Linha guia e resultado experimental (círculos pretos) para a placa 0,2m x 0,4m.



Fonte: O Autor, 2018.

Figura 66 - Espaço de Fase: Linha guia (curva vermelha) e resultado experimental (círculos pretos) para a placa 0,2m x 0,4m.



Fonte: O Autor, 2018.

## 8 AMORTECIMENTO PELO SISTEMA DE TUBO EM U

Quando um corpo é submetido a uma excitação externa, pode ser gerada uma oscilação, fazendo com que o corpo seja exposto a um nível de vibração correspondente à força a que foi submetido. Todo objeto, seja ele microscópico ou macroscópico, é capaz de oscilar de alguma maneira, edificações e moléculas são alguns exemplos que apresentam oscilações. Mecanismos de absorção de vibração se fazem necessários para redução dos níveis de vibração em diversas aplicações da engenharia como pontes, edifícios, aerogeradores, entre outros.

Absorvedores dinâmicos são osciladores que quando anexados à estrutura e devidamente sintonizados em frequência próxima a um modo de vibração ou de uma excitação harmônica, ocorre transferência de energia cinética da estrutura primária para o absorvedor. Absorvedores dinâmicos possuem diversas formas, a saber, absorvedor de massa sintonizado (AMS), absorvedor de líquido sintonizado (ALS), absorvedor de coluna de líquido sintonizado (ACLS) (ALKMIM, 2015).

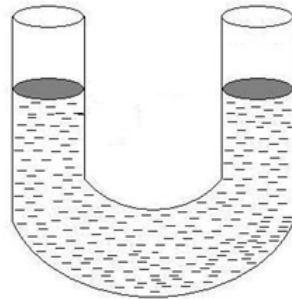
Existem diversos estudos a cerca dos vários tipos de absorvedores e um dos mais promissores dispositivos de absorção de energia são os absorvedores que utilizam líquido devido, principalmente, a sua fácil implementação, baixas exigências de manutenção e baixo custo que são algumas das vantagens desse tipo de sistema, que geralmente são retangulares ou quadrangulares com água no seu interior à pressão atmosférica e instalados no piso mais elevado do edifício, que são onde ocorrem os maiores deslocamentos.

Em especial, os Absorvedores por Colunas de Líquido Sintonizado (ACLS), do inglês Tuned Liquid Column Damper (TLCD) (MIN; PARK; JUNHEE, 2015) (MORAIS; FABRO; ALKMIM, 2016) (YALLA; KAREEM, 2000) (SADEK; MOHRAZ, 1998) (WON; HAROUN; PIRES, 1996) são uma classe de controle passivo que utilizam líquidos em um reservatório em forma de “U” para controlar a vibração da estrutura a ser preservada (estrutura primária) (SAKAI; TAKAEDA; TAMAKI, 1989). Este mecanismo de controle de vibração vem sendo estudado em diversos tipos de estruturas como, por exemplo, o controle da vibração em altos edifícios e em aerogeradores que são frequentemente abalados, somando-se com o fato que nas últimas décadas tem-se verificado uma tendência para construção de edifícios cada vez mais altos e com recursos materiais alternativos para redução do custo, resultando em estruturas mais leves e flexíveis, sujeitas a baixo amortecimento necessitando cada vez mais de um sistema que forneça proteção contra a força dos ventos, para resistir a ações dinâmicas a que estão sujeitas. Um importante aspecto a ser levado em conta quando se constrói uma estrutura desprovida de um sistema de amortecimento é a vulnerabilidade causado por essa ausência, levando não só a perdas materiais e econômicas mas também a perda de vidas humanas (PESTANA, 2012).

Nos capítulos anteriores desse trabalho, foram abordados diversos tipos de os-

cilação, mas sempre tratando de forma teórica a partir de um sistema massa mola simples, que é amplamente utilizado para fins didáticos. Nesse capítulo, vamos abordar os amortecedores de colunas de líquido sintonizado ou *tuned liquid column dampers* (TLCD). Tratam-se de sistemas que permitem um amortecimento da estrutura através da oscilação da coluna de líquido no seu reservatório em forma de tubo em “U”, viáveis de serem utilizados em edificações, se baseiam na inércia do líquido para contrariar o movimento da estrutura. A figura 67 ilustra o tubo em “U” no estado estacionário.

Figura 67 - Tubo em U.



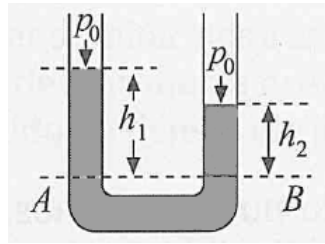
Fonte: O Autor, 2018.

Caso sejam utilizado dois fluidos imiscíveis (que não se misturam) dentro do tubo, a pressão sobre o plano AB é dada por

$$p = p_0 + \rho_1 g h_1 = p_0 + \rho_2 g h_2 \quad (159)$$

e haveria uma diferença de altura entre os ramos devido a diferença entre as densidades dos líquidos ali contidos. No modelo a ser estudado será utilizado apenas um líquido, eliminando o problema da altura, ou seja, não haverá diferença de altura na posição de equilíbrio. A ideia por trás deste mecanismo (TLCD) é diminuir a amplitude de oscilação da estrutura através das oscilações em oposição de fase do sistema auxiliar, minimizando o movimento da estrutura e amortecendo os abalos. Conforme ocorrem as oscilações, o fluido sobe a alturas diferentes em relação a um plano AB (NUSSENZVEIG, 2002), conforme ilustra a figura 68.

Figura 68 - Diferença na altura do líquido durante o movimento.



Fonte: H. Moysés Nussenzveig, 2005, p.8.

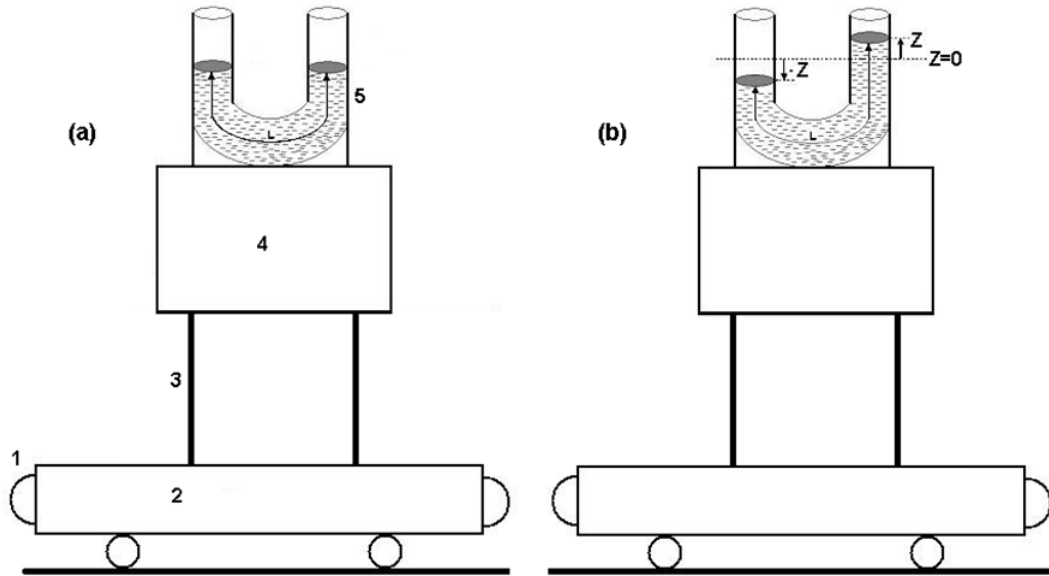
A densidade absoluta de um fluido é determinada através de um volume e sua massa equivalente (GARCIA, 2014), sendo obtida por

$$\rho = \frac{M}{V}. \quad (160)$$

A unidade SI de densidade é o quilograma por metro cúbico ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ) e essa grandeza é uma propriedade específica, ou seja, cada fluido apresenta a sua própria densidade.

Para o modelo proposto neste trabalho, ilustrado na figura 69, será utilizado água dentro do tubo. O modelo busca simular abalos feitos a uma edificação, tal como um terremoto atingindo um prédio. Nesse protótipo, um prédio é representado por uma caixa (4) em que é fixado um tubo (5) na forma de U com um fluido em seu interior. O prédio é ligado a uma placa (2) através de lâminas metálicas (3). As lâminas simulam o terreno onde o prédio foi erguido e a placa (2) representa uma estrutura rochosa mais profunda que pode ser colocada em movimento através de uma mola ligada a ela em (1). Na figura (a) a estrutura está em repouso (estado estacionário) e em (b) a placa (2) se move para esquerda (após ocorrido o abalo).

Figura 69 - Proposta experimental para utilização do TLCD.



Fonte: O Autor, 2018.

Descreveremos o movimento do fluido dentro do reservatório do tubo em U com as seguintes características: 1) o escoamento é estacionário, ou seja, a velocidade do fluido em movimento, num dado ponto, não varia no decorrer do tempo. 2) o escoamento é incompressível, ou seja, a densidade do fluido não varia, independente da posição e do tempo. 3) o escoamento é irrotacional, ou seja, nenhum elemento do fluido em movimento gira em torno do próprio eixo que passa pelo seu centro de massa. Considerando como  $\rho$  a densidade da água, o tubo em U possuindo uma seção transversal de área  $A$  e coluna de água de comprimento  $L$ , a massa total do fluido é dada pela expressão.

$$m = \rho AL. \quad (161)$$

Quando o líquido em um dos ramos do tubo em U desce de uma quantidade  $h$  a diferença de pressão da água entre os dois ramos é

$$\Delta p = 2\rho gh. \quad (162)$$

Dessa forma, a força restauradora pode ser escrita como

$$F_{\text{res}} = -A\Delta p = -2A\rho gh. \quad (163)$$

Nesse sistema, existem forças agindo na horizontal e na vertical, tais como,  $f_1 = m'\ddot{y}$  que é a força sobre a estrutura proveniente da massa horizontal do líquido sujeita a

aceleração devido a diferença de altura nos ramos do tubo em U,  $f_2 = -kx$  devido a mola acoplada, em (1),  $f_3 = -C_a\dot{x}$  que é uma força dissipativa agindo na estrutura admitida ser proporcional à velocidade e  $f_4 = F_{\text{ext}}(t)$  que é uma força externa agindo sobre a estrutura. Na direção vertical temos,  $f_5 = m'\ddot{x}$  que é a força sobre a porção horizontal de fluido devido ao movimento da estrutura,  $f_6 = 2\rho Agy$  que é a aceleração sobre a massa  $m$  de fluido devido a diferença de altura e  $f_7 = -\lambda\dot{y}$ , representando a força dissipativa devido ao movimento do líquido no interior do tubo, com  $\lambda$  sendo o coeficiente de arrasto do fluido. Considerando todas as forças descritas acima e sabendo que a segunda lei de Newton, temos

$$\sum_i F_x = (M + m)\ddot{x} \quad \text{e} \quad \sum_i F_y = m\ddot{y}, \quad (164)$$

podemos escrever um sistema de equações lineares que represente o modelo proposto acima, tal que

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + m'\ddot{y} + kx + C_a\dot{x} = F_{\text{ext}}(t) \\ m'\ddot{x} + m\ddot{y} + 2\rho Agy + \lambda\dot{y} = 0 \end{cases} \quad (165)$$

Escrevendo (165) na forma matricial, temos que

$$\begin{bmatrix} (M + m) & m' \\ m' & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_a & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & 2\rho Ag \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{\text{ext}}(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Considerando o sistema livre de forças externas,  $f_3$  e  $f_4$  iguais a zero, podemos escrever o sistema como

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + m'\ddot{y} + kx = 0 \\ m'\ddot{x} + m\ddot{y} + 2\rho Agy + \lambda\dot{y} = 0 \end{cases}, \quad (166)$$

ou que na forma matricial é dado por

$$\begin{bmatrix} (M + m) & m' \\ m' & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & 2\rho Ag \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 8.1 Resolução do sistema de EDO's

O sistema dado por (166)

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + m'\ddot{y} + kx = 0 \\ m'\ddot{x} + m\ddot{y} + 2\rho Agy + \lambda\dot{y} = 0 \end{cases}$$



e as condições iniciais

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}, \quad (167)$$

tomamos a transformada de Laplace em ambas as equações. Essa abordagem se justifica na medida em que as condições iniciais são inseridas diretamente no sistema, não sendo necessário achar uma solução para em seguida aplicá-las. Então o sistema é reescrito então como

$$\begin{cases} (M + m)\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + m'\mathcal{L}\{\ddot{y}\} + k\mathcal{L}\{x\} = 0 \\ m'\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + m\mathcal{L}\{\ddot{y}\} + 2\rho Ag\mathcal{L}\{y\} + \lambda\mathcal{L}\{\dot{y}\} = 0 \end{cases}. \quad (168)$$

sabendo-se que

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{x\} = X(s) \\ \mathcal{L}\{y\} = Y(s) \\ \mathcal{L}\{\dot{x}\} = s\mathcal{L}\{x\} - x(0) \\ \mathcal{L}\{\dot{y}\} = s\mathcal{L}\{y\} - y(0) \\ \mathcal{L}\{\ddot{x}\} = s^2\mathcal{L}\{x\} - sx(0) - \dot{x}(0) \\ \mathcal{L}\{\ddot{y}\} = s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - \dot{y}(0) \end{cases}, \quad (169)$$

e substituindo (167) em (168), obtemos

$$\begin{cases} (M + m)(s^2X(s) - sx_0) + m'(s^2Y(s)) + kX(s) = 0 \\ m'(s^2X(s) - sx_0) + m(s^2Y(s)) + 2\rho AgY(s) + \lambda sY(s) = 0 \end{cases}.$$

Daí então

$$\begin{cases} [(M + m)s^2 + k]X(s) + m's^2Y(s) = (M + m)sx_0 \\ m's^2X(s) + [ms^2 + 2\rho Ag + \lambda s]Y(s) = m'sx_0 \end{cases}. \quad (170)$$

Multiplicando a primeira equação por  $m's^2$ , a segunda por  $[(M + m)s^2 + k]$  e subtraindo  $m'^2s^4Y(s) - [(M + m)s^2 + k][ms^2 + 2\rho Ag - \lambda s]Y(s) = m'(M + m)s^3x_0 - [(M + m)s^2 + k]m'sx_0$ .

Simplificando os sinais

$$[(m'^2 - Mm - m^2)s^4 - (M + m)\lambda s^3 - [(M + m)2\rho Ag + km]s^2 - k\lambda s - 2k\rho Ag]Y(s) = -km'sx_0$$

$$Y(s) = \frac{-fs}{as^4 + bs^3 + cs^2 + ds + e}, \quad (171)$$

onde

$$\begin{cases} a = m'^2 - Mm - m^2 \\ b = -(M + m)\lambda \\ c = -[(M + m)2\rho Ag + km] \\ d = -k\lambda \\ e = -2k\rho Ag \\ f = -km'sx_0 \end{cases}$$

Escrevendo o polinômio do 4º grau na forma fatorada, temos

$$Y(s) = \frac{fs}{(s - r_1)(s - r_2)(s - r_3)(s - r_4)}.$$

Podemos agora calcular a transformada inversa de Laplace:

$$y(t) = \int_0^\infty e^{st}Y(s)ds. \quad (172)$$

dessa forma,

$$y(t) = f \left\{ \frac{r_1 e^{r_1 t}}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)(r_1 - r_4)} - \frac{r_2 e^{r_2 t}}{(r_1 - r_2)(r_2 - r_3)(r_2 - r_4)} - \frac{r_3 e^{r_3 t}}{(r_1 - r_3)(r_3 - r_2)(r_3 - r_4)} - \frac{r_4 e^{r_4 t}}{(r_1 - r_4)(r_4 - r_2)(r_4 - r_3)} \right\}. \quad (173)$$

Substituindo (171) encontrado em (170), temos

$$X(s) = \frac{(M + m)x_0 s}{[(M + m)s^2 + k]} - \frac{m' f s^3}{A_1 s^6 + B_1 s^5 + c_1 s^4 + D_1 s^3 + E_1 s^2 + F_1 s + G_1},$$

onde

$$\begin{cases} A_1 = (M + m)a \\ B_1 = (M + m)b \\ C_1 = (M + m)c + ka \\ D_1 = (M + m)d + kb \\ E_1 = (M + m)e + kc \\ F_1 = kd \\ G_1 = ke \end{cases}$$

Para encontrarmos  $x(t)$ , tomamos a transformada de Laplace inversa de  $X(s)$ . Temos então que

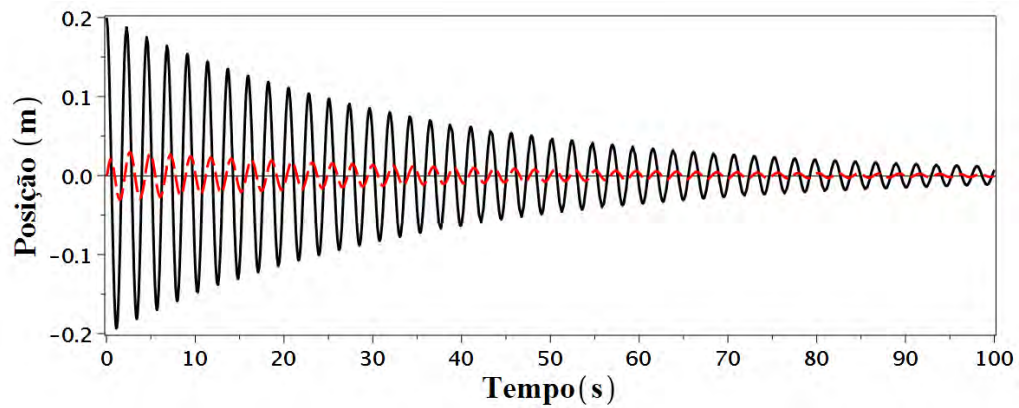
$$x(t) = \int_0^{\infty} e^{st} X(s) ds. \quad (174)$$

dai

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{1}{2} x_0 e^{-\frac{\sqrt{kt}}{\sqrt{-m-M}}} \left( e^{\frac{2\sqrt{kt}}{\sqrt{-m-M}+}} + 1 \right) - \frac{m' f w_1^3 e^{w_1 t}}{(w_1 - w_2)(w_1 - w_3)(w_1 - w_4)(w_1 - w_5)(w_1 - w_6)} \\ & + \frac{m' f w_2^3 e^{w_2 t}}{(w_1 - w_2)(w_2 - w_3)(w_2 - w_4)(w_2 - w_5)(w_2 - w_6)} \\ & + \frac{m' f w_3^3 e^{w_3 t}}{(w_1 - w_3)(w_3 - w_2)(w_3 - w_4)(w_3 - w_5)(w_3 - w_6)} \\ & + \frac{m' f w_4^3 e^{w_4 t}}{(w_1 - w_4)(w_4 - w_2)(w_4 - w_3)(w_4 - w_5)(w_4 - w_6)} \\ & + \frac{m' f w_5^3 e^{w_5 t}}{(w_1 - w_5)(w_5 - w_2)(w_5 - w_3)(w_5 - w_4)(w_5 - w_6)} \\ & + \frac{m' f w_6^3 e^{w_6 t}}{(w_1 - w_6)(w_6 - w_2)(w_6 - w_3)(w_6 - w_4)(w_6 - w_5)}. \end{aligned} \quad (175)$$

A figura 70 ilustra o comportamento da estrutura primária e do fluído utilizando com os parâmetros:  $M = 0,9\text{kg}$ ,  $m = 0,4\text{kg}$ ,  $k = 10\text{N/m}$ ,  $A = 0,4$ ,  $m' = 0,2\text{kg}$ ,  $g = 9,8\text{m/s}^2$ ,  $\rho = 0,1\text{kg/m}^3$  e  $\lambda = 1,5\text{kg/s}$

Figura 70 - Amortecimento da estrutura (curva em preto) e do fluido (curva em vermelho).



Fonte: O Autor, 2018.

Na figura 70 observa-se uma redução da amplitude do movimento da estrutura (curva preta) à no transcorrer do tempo, bem como a redução da amplitude do fluido (curva vermelha). Esse é o comportamento esperado da estrutura ao ser submetida a oscilações quando um absorvedor é ligado a ela e lhe impinge uma perda de energia. Este resultado corrobora com a ideia de se usar TLCDC como instrumento na preservação de estruturas que sofrem movimentos indesejáveis provenientes de por exemplo abalos sísmicos e ação de ventos.

Os resultados obtidos pelos cálculos bem assim como gráfico na figura 70, podem ser confirmados através do método numérico Runge-Kutta 4ª ordem. Dado o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + m'\ddot{y} + kx = 0 \\ m'\ddot{x} + m\ddot{y} + 2\rho Agy + \lambda\dot{y} = 0 \end{cases}, \quad (176)$$

podemos reescreve-lo como

$$\begin{cases} a\ddot{x} + b\ddot{y} + cx = 0 \\ b\ddot{x} + d\ddot{y} + ey + f\dot{y} = 0 \end{cases}, \quad (177)$$

onde

$$\begin{cases} a = M + m & d = m \\ b = m' & e = 2\rho Ag \\ c = k & f = \lambda \end{cases}.$$

Buscamos deixar o sistema, como um sistema linear de 1ª ordem, da forma:

$$\begin{cases} x'_1 = p_{11}(t)x_1 + \dots + p_{1n}(t) + g_1(t) \\ x'_2 = p_{21}(t)x_1 + \dots + p_{2n}(t) + g_2(t) \\ \vdots \\ x'_n = p_{n1}(t)x_1 + \dots + p_{nn}(t) + g_n(t) \end{cases}$$

Para tal, vamos realizar a mudança de variável

$$x_1 = x \quad x_2 = x' \quad x_3 = y \quad x_4 = y' \quad (178)$$

Que diz

$$x'_1 = x_2 \quad x'_2 = x'' \quad x'_3 = x_4 \quad x'_4 = y''$$

e nos permite que reescrevamos o sistema (177), como:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{-bx_4 - cx_1}{a} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{-bx_2 - ex_3 - fx_4}{d} \end{cases} \quad (179)$$

Substituindo  $\dot{x}_2$  em  $\dot{x}_4$ , obtemos

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{-bx_4 - cx_1}{a} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{\frac{bc}{ad}x_1 - \frac{1}{d}(ex_3 + fx_4)}{1 - \frac{b^2}{ad}} \end{cases}$$

Agora substituindo  $\dot{x}_4$  em  $\dot{x}_2$ , obtemos finalmente um sistema linear de 1ª ordem

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{b}{a} \left( \frac{\frac{bc}{ad}x_1 - \frac{1}{d}(ex_3 + fx_4)}{1 - \frac{b^2}{ad}} \right) - \frac{c}{a}x_1 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{\frac{bc}{ad}x_1 - \frac{1}{d}(ex_3 + fx_4)}{1 - \frac{b^2}{ad}} \end{cases} \quad (180)$$

Com esse sistema, podemos aplicar o nosso método numérico Runge-Kutta 4ª Ordem. Dado o sistema com 4 equações diferenciais, temos as funções de  $\mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por:

$$\begin{cases} f_1 : (x, x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow x_2 \\ f_2 : (x, x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow -\frac{b}{a} \left( \frac{\frac{bc}{ad}x_1 - \frac{1}{d}(ex_3 + fx_4)}{1 - \frac{b^2}{ad}} \right) - \frac{c}{a}x_1 \\ f_3 : (x, x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow x_4 \\ f_4 : (x, x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow \frac{\frac{bc}{ad}x_1 - \frac{1}{d}(ex_3 + fx_4)}{1 - \frac{b^2}{ad}} \end{cases} \quad (181)$$

E condições iniciais

$$x_1(0) = 0,2 = y_1 \quad x_2(0) = 0 = y_2 \quad x_3(0) = 0 = y_3 \quad x_4(0) = 0 = y_4 \quad (182)$$

Temos então o ponto de início  $x_0 = 0$  e vamos utilizar passo  $h = 0,1$ , temos:

$$k_{11} = f_1(x_0, y_1, y_2, y_3, y_4)$$

$$k_{12} = f_2(x_0, y_1, y_2, y_3, y_4)$$

$$k_{13} = f_3(x_0, y_1, y_2, y_3, y_4)$$

$$k_{14} = f_4(x_0, y_1, y_2, y_3, y_4)$$

$$k_{21} = f_1 \left( x_0 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_{11}h}{2}, y_2 + \frac{k_{12}h}{2}, y_3 + \frac{k_{13}h}{2}, y_4 + \frac{k_{14}h}{2} \right)$$

$$k_{22} = f_2 \left( x_0 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_{11}h}{2}, y_2 + \frac{k_{12}h}{2}, y_3 + \frac{k_{13}h}{2}, y_4 + \frac{k_{14}h}{2} \right)$$

$$k_{23} = f_3 \left( x_0 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_{11}h}{2}, y_2 + \frac{k_{12}h}{2}, y_3 + \frac{k_{13}h}{2}, y_4 + \frac{k_{14}h}{2} \right)$$

$$k_{24} = f_4 \left( x_0 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_{11}h}{2}, y_2 + \frac{k_{12}h}{2}, y_3 + \frac{k_{13}h}{2}, y_4 + \frac{k_{14}h}{2} \right)$$

$$k_{31} = f_1 \left( x_0 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_{21}h}{2}, y_2 + \frac{k_{22}h}{2}, y_3 + \frac{k_{23}h}{2}, y_4 + \frac{k_{24}h}{2} \right)$$

$$k_{32} = f_2 \left( x_0 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_{21}h}{2}, y_2 + \frac{k_{22}h}{2}, y_3 + \frac{k_{23}h}{2}, y_4 + \frac{k_{24}h}{2} \right)$$

$$k_{33} = f_3 \left( x_0 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_{21}h}{2}, y_2 + \frac{k_{22}h}{2}, y_3 + \frac{k_{23}h}{2}, y_4 + \frac{k_{24}h}{2} \right)$$

$$k_{34} = f_4 \left( x_0 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_{21}h}{2}, y_2 + \frac{k_{22}h}{2}, y_3 + \frac{k_{23}h}{2}, y_4 + \frac{k_{24}h}{2} \right)$$

$$k_{41} = f_1(x_0 + h, y_1 + k_{31}h, y_2 + k_{32}h, y_3 + k_{33}h, y_4 + k_{34}h)$$

$$k_{42} = f_2(x_0 + h, y_1 + k_{31}h, y_2 + k_{32}h, y_3 + k_{33}h, y_4 + k_{34}h)$$

$$k_{43} = f_3(x_0 + h, y_1 + k_{31}h, y_2 + k_{32}h, y_3 + k_{33}h, y_4 + k_{34}h)$$

$$k_{44} = f_4(x_0 + h, y_1 + k_{31}h, y_2 + k_{32}h, y_3 + k_{33}h, y_4 + k_{34}h)$$

$$x_1(x_0 + h) = y_1 + \frac{h(k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41})}{6}$$

$$x_2(x_0 + h) = y_2 + \frac{h(k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42})}{6}$$

$$x_3(x_0 + h) = y_3 + \frac{h(k_{13} + 2k_{23} + 2k_{33} + k_{43})}{6}$$

$$x_4(x_0 + h) = y_4 + \frac{h(k_{14} + 2k_{24} + 2k_{34} + k_{44})}{6}$$

E o processo se repete, conforme o passo  $h$  avança, a solução numericamente é dada por  $x_1$  e  $x_3$ , que corresponde as nossas soluções  $x(t)$  e  $y(t)$ . Seguindo esse procedimento com a nossos parâmetros:  $M = 0,9\text{kg}$ ,  $m = 0,4\text{kg}$ ,  $k = 10\text{N/m}$ ,  $A = 0,4$ ,  $m' = 0,2\text{kg}$ ,  $g = 9,8\text{m/s}^2$ ,  $\rho = 0,1\text{kg/m}^3$  e  $\lambda = 1,5\text{kg/s}$ , temos o sistema

$$\begin{cases} f_1 : (x, x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow x_2 \\ f_2 : (x, x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow -8,333x_1 + 3,2666x_3 + 1,25x_4 \\ f_3 : (x, x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow x_4 \\ f_4 : (x, x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow 4,166x_1 - 21,233x_3 - 8,12498x_4 \end{cases} \quad (183)$$

Que nos gera os resultados

$$k_{11} = f_1(x_0, y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$$

$$k_{12} = f_2(x_0, y_1, y_2, y_3, y_4) = -1,6666$$

$$k_{13} = f_3(x_0, y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$$

$$k_{14} = f_4(x_0, y_1, y_2, y_3, y_4) = 0,8333$$

$$k_{21} = f_1\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_{11}h}{2}, y_2 + \frac{k_{12}h}{2}, y_3 + \frac{k_{13}h}{2}, y_4 + \frac{k_{14}h}{2}\right) = -0,08333$$

$$k_{22} = f_2\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_{11}h}{2}, y_2 + \frac{k_{12}h}{2}, y_3 + \frac{k_{13}h}{2}, y_4 + \frac{k_{14}h}{2}\right) = -1,61459$$

$$k_{23} = f_3\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_{11}h}{2}, y_2 + \frac{k_{12}h}{2}, y_3 + \frac{k_{13}h}{2}, y_4 + \frac{k_{14}h}{2}\right) = 0,041666$$

$$k_{24} = f_4 \left( x_0 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_{11}h}{2}, y_2 + \frac{k_{12}h}{2}, y_3 + \frac{k_{13}h}{2}, y_4 + \frac{k_{14}h}{2} \right) = 0,494791$$

$$k_{31} = f_1 \left( x_0 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_{21}h}{2}, y_2 + \frac{k_{22}h}{2}, y_3 + \frac{k_{23}h}{2}, y_4 + \frac{k_{24}h}{2} \right) = -0,0807295$$

$$k_{32} = f_2 \left( x_0 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_{21}h}{2}, y_2 + \frac{k_{22}h}{2}, y_3 + \frac{k_{23}h}{2}, y_4 + \frac{k_{24}h}{2} \right) = -1,59421$$

$$k_{33} = f_3 \left( x_0 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_{21}h}{2}, y_2 + \frac{k_{22}h}{2}, y_3 + \frac{k_{23}h}{2}, y_4 + \frac{k_{24}h}{2} \right) = 0,0247396$$

$$k_{34} = f_4 \left( x_0 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_{21}h}{2}, y_2 + \frac{k_{22}h}{2}, y_3 + \frac{k_{23}h}{2}, y_4 + \frac{k_{24}h}{2} \right) = 0,570723$$

$$k_{41} = f_1 (x_0 + h, y_1 + k_{31}h, y_2 + k_{32}h, y_3 + k_{33}h, y_4 + k_{34}h) = -0,159421$$

$$k_{42} = f_2 (x_0 + h, y_1 + k_{31}h, y_2 + k_{32}h, y_3 + k_{33}h, y_4 + k_{34}h) = -1,51997$$

$$k_{43} = f_3 (x_0 + h, y_1 + k_{31}h, y_2 + k_{32}h, y_3 + k_{33}h, y_4 + k_{34}h) = 0,0570723$$

$$k_{44} = f_4 (x_0 + h, y_1 + k_{31}h, y_2 + k_{32}h, y_3 + k_{33}h, y_4 + k_{34}h) = 0,283452$$

$$x_1(0,1) = y_1 + \frac{h(k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41})}{6} = 0,191874 = x(0,1)$$

$$x_2(0,1) = y_2 + \frac{h(k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42})}{6} = -0,160071$$

$$x_3(0,1) = y_3 + \frac{h(k_{13} + 2k_{23} + 2k_{33} + k_{43})}{6} = 0,00316473 = y(0,1)$$

$$x_4(0,1) = y_4 + \frac{h(k_{14} + 2k_{24} + 2k_{34} + k_{44})}{6} = 0,0541302$$

São os resultados para a primeira interação do método de Runge-Kutta de 4ª ordem e batem perfeitamente com os valores das curvas obtidas na figura 70. Seguindo as interações pelo mesmo procedimento, podemos encontrar numericamente os demais pontos do gráficos. O apêndice B deste trabalho traz ao leitor um caso mais simples a respeito da utilização do método Runge-Kutta.



## CONCLUSÃO

Nesta dissertação discutimos o sistema clássico formado por um sistema massa-mola e o papel devido a um conjunto de forças sobre o movimento oscilatório durante o deslocamento no tempo da massa  $m$ . Várias situações conhecidas foram abordadas e algumas soluções propostas para o tratamento das equações diferenciais em cada caso.

A realização experimental desenvolvida dos casos estudados desempenha um papel fundamental em corroborar a modelagem de sistemas estudados. Por fim, um modelo simplificado para a abordagem do problema de preservação de estruturas sob a ação de ondas de choque provenientes de um abalo sísmico é proposto, cujo resultado está em concordância com o esperado.

Várias propostas de continuidade de trabalho podem ser enumeradas, como:

- (i) a consideração da força de arrasto proporcional ao quadrado da velocidade;
- (ii) o estudo da não harmonicidade das soluções ao considerarmos uma mola do tipo não hook como  $k = k_0 + k(x_0)$ , que é uma boa oportunidade para o estudo de sistemas não lineares e o estudo de caos;
- (iii) a consideração de sistemas lineares com mais de um corpo e várias molas;
- (iv) a realização experimental do sistema de acoplamento estrutura-tubo em U, dentre outras que estão em fase de elaboração;
- (vi) a consideração de uma força de atrito dependente da posição  $F_{at} = \mu(x)N$ .

## REFERÊNCIAS

- ABDALLA, J. H. N.; SILVA, A. C. Simulador de oscilações mecânicas. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 38, p. 3310, 2016.
- AGUIAR, M. A. Caos em sistemas clássicos conservativos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Campinas, v. 16, Maio 1994.
- ALKMIM, M. H. *Controle de Vibrações em Turbina Eólica utilizando absorvedor passivo de coluna de líquido sintonizado*. Brasília: Unb, 2015.
- ALONSO, F. E. *Física-Um curso universitário*. 2. ed. São Paulo: Ed. Edgar Blucher, 2014.
- ARANHA, N. A lei de hooke e as molas não-lineares, um estudo de caso. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Sorocaba, v. 38, Junho 2016.
- BARBOSA, A. C. d. C.; CARVALHAES, C.; COSTA, M. V. T. *Oscilador harmônico forçado amortecido por atrito*. [S.l.]: XVI Simpósio Nacional de Ensino de Física, 2005.
- BASSALO, J. M. F. *Osciladores Harmônicos Clássicos e Quânticos*. 1. ed. São Paulo: Ed. Livraria de física, 2009.
- BERNARDES, E. Oscilador 1d: Um pacote algébrico para o oscilador harmônico unidimensional amortecido e forçado. São Carlos, Novembro 2004.
- BERTUOLA, A. *Oscilador harmônico amortecido forçado revisitado*. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2005.
- BRONSON, R. *Equações Diferenciais*. 3. ed. São Paulo: Ed. Bookman, 2008.
- BROWN, A. D. Innovative uses of video analysis. *The Physics Teacher*, v. 47, p. 145–150, 2009.
- CALVAO, A.; PENNA, T. The double pendulum: a numerical study. *European Journal of Physics*, v. 36, p. 045018, 2015.
- CHRISTIAN, J. Anharmonic effects in simple physical models: introducing undergraduates to nonlinearity. *European Journal o Physics*, v. 38, 2017.
- CSERNAK, G.; STEPAN, G. On the periodic response of a harmonically excited dry friction oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, v. 295, p. 649–658, 2006.
- CUSTODIO, D. T. *Use of the direct current link for the electromechanical oscillations damping in electric power systems*. [S.l.]: Universidade Estadual de Campinas, 2009.
- GALILEI, G. *Dois Novas Ciências*. São Paulo: Nova Stella Editorial, 1985.
- GARCIA, A. *Estudo da densidade de fluidos incompressíveis através de um tubo em U*. São Paulo: Universidade Estadual Paulista, 2014.
- HALLIDAY, E.; RENSICK, D. *Fundamentos de Física*. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008. v. 1.

- HICKMANN, J.; LIBARDI, H. O oscilador linearmente amortecido. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Rio de Janeiro, v. 19, p. 359–363, 1997.
- HONG, H.-K.; LIU, C. Coulomb friction oscillator: modelling and responses to harmonic loads and base excitations. *Journal of Sound and Vibration*, v. 229, p. 1171–1192, 2000.
- JESUS, V. L. B. *Experiments and Video Analysis in Classical Mechanics - Undergraduate Lecture Notes in Physics*. 1. ed. [S.l.]: Springer International Publishing, 2017.
- JUNIOR J. A. LENZ, L. P. O. e. N. S. A. G. B. *Manual para Usuários Iniciante no Tracker*. Curitiba: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2011.
- KAVACIC, I.; BRENNAN, M. The duffing equation - nonlinear oscillators and their behaviour. John Wiley and Sons LTDA, 2011.
- LEMOS, N. *Mecânica Analítica*. 2. ed. São Paulo: Livraria de Física, 2007.
- LI, A.; PAYNE, M.; WANG, X.-J. Forced oscillations with linear and nonlinear damping. *American Journal of Physics*, v. 84, p. 32, 2016.
- LIMA, R. Utilização do software de código aberto emso para oscilações de temperaturas destinadas a análise de sua influência na taxa de reação de polimerização em suspensão de estieno. Unicamp, Campinas, 2015.
- MARCHEWKA, A.; ABBOTT, D. S.; BEICHNER, R. J. Oscillator damped by a constant-magnitude friction force. *American Journal of Physics*, v. 72, p. 477–483, 2004.
- MIN, K.-W.; PARK, C.-S.; JUNHEE, K. Easy-to-tune reconfigurable liquid column vibration absorbers with multiple cells. *Smart Materials and Structures*, v. 24, 2015.
- MORAIS, M. V.; FABRO, A. T.; ALKMIM, M. H. Response variability with random uncertainty in tuned liquid column damper. *Revista interdisciplinar de pesquisa em engenharia*, 2016.
- MORIN, D. Introduction to classical mechanics with problems and solutions. Cambridge University Press, 2008.
- NEWTON, I. *Mathematical Principles of Natural*. [S.l.]: University of California, 1962.
- NUSSENZVEIG, M. *Curso de Física básica 2*. 4. ed. São Paulo: EDGARD BLUCHER, 2002. v. 2. Fluidos, Calor, Oscilações e Ondas.
- OGURI, V.; J, M.; SANTORO, A. *Estimativas e erros em experimentos de física*. 3. ed. Rio de Janeiro: Uerj, 2015.
- ONORATO, P.; MASCOLI, D.; DEAMBRIOSIS, A. Damped oscillations and equilibrium in a mass-spring system subject to sliding friction forces: Integrating experimental and theoretical analyses. *American Journal of Physics*, USA, v. 78, p. 1120–1126, 2010.
- ORTIZ, J. E.; CORREA, E.; DUTRA, J. Oscilador harmônico com massa variável e a segunda lei de newton. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 33, p. 4307, 2011.

- PEDROSA, D. F. *Resolução numérica de Equações Diferenciais Ordinárias*. Rio Grande do Norte: Universidade Federal do Rio Grande do Norte Centro de Tecnologia, 2003.
- PESTANA, I. G. *Controlo de Vibrações em Engenharia Civil - Amortecedor de Colunas de Líquido Sintonizado*. Lisboa: Universidade Nova de Lisboa, 2012.
- PIMENTEL, D. R.; CASTRO, A. S. O oscilador harmônico singular revisitado. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 35, p. 3303, 2013.
- POPOVA, E.; POPOV, V. L. The research works of coulomb and amontons and generalized laws of friction. *Friction*, v. 3, p. 183–190, 2015.
- RAO, S. S. *Mechanical Vibrations*. 5. ed. Boston: Prentice Hall, 2011.
- REIS, M. A.; VITIELLO, S. Método variacional com monte carlo aplicado ao oscilador harmônico quântico. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 28, p. 3303, 2006.
- RODRIGUES, M. G.; BUSQUINI, J. A.; SATARINE, G. A. Oscilador harmônico amortecido e séries infinitas. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 32, p. 4304, 2010.
- SADEK, F.; MOHRAZ, B. Single-and multiple-tuned liquid column dampers for seismic applications. *Earthquake engineering and structural dynamics*, v. 27, p. 439–463, 1998.
- SAKAI, F.; TAKAEDA, S.; TAMAKI, T. Tuned liquid column damper - new type device for suppression of building vibrations. *Conference of Highrise building*, v. 2, p. 926–931, 1989.
- TRACKER. *Tracker website*. 2017. Disponível em: (<http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/>). Acesso em: 14/02/2017.
- TZUOH, L.; WALSH, K.; ALPHENAAR, B. Enhanced stochastic, subharmonic, and ultraharmonic energy harvesting. *Journal Intel Mater*, v. 24, p. 1324–1331, 2012.
- VITORINO, M.; VIEIRA, A.; RODRIGUES, M. Effect of sliding friction in harmonic oscillators. *Scientific Reports*, v. 7, p. 3726, 2017.
- VUOLO, J. H. *Fundamentos da teoria de erros*. 2. ed. São Paulo: Ed. Edgard Blucher, 1996.
- WON, A. Y.; HAROUN, M.; PIRES, J. A. Stochastic seismic performance evaluation of tuned liquid column dampers. *Earthquake engineering and structural dynamics*, v. 25, p. 1259–1274, 1996.
- WU, J.-C. C.; LIN, Y.-Y.; CHANG, C.-H. Optimal designs for non-uniform tuned liquid column dampers in horizontal motion. *Journal of sound and vibrations*, v. 329, p. 104–122, 2009.
- YALLA, S. K.; KAREEM, A. Optimum absorber parameters for tuned liquid column dampers. *Journal of Structural Engineering*, v. 24, p. 906–9015, 2000.

## APÊNDICE A – Erro do Método dos Mínimos Quadrados.

Seja uma amostra de  $N$  pares diferentes de medidas  $(x_i, y_i)$  das grandezas  $x$  e  $y$ , onde as incertezas relativas associadas às medidas de  $x$  são bem menores que as associadas a  $y$ , e para as quais se deseja ajustar uma reta  $y(x) = ax + b$ , ou seja, determinar os parâmetros  $a$  e  $b$ .

Supondo que os erros  $(\sigma_i)$  em cada medida  $y_i$  de  $y$  sejam idênticos, o método dos mínimos quadrados consiste na minimização da soma dos quadrados dos resíduos,  $y_i - y(x_i)$ , isto é, da função positiva  $S$  dos parâmetros  $a$  e  $b$ , expressa por

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^N [y_i - y(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^N [y_i - (ax_i + b)]^2 > 0 \quad (184)$$

Expandindo-se a expressão anterior, obtém-se

$$\begin{aligned} S(a, b) &= \sum_{i=1}^N [y_i^2 - 2(ax_i + b)y_i + (ax_i + b)^2] > 0 \\ &= \sum_{i=1}^N y_i^2 - 2a \sum_{i=1}^N x_i y_i - 2b \sum_{i=1}^N y_i + a^2 \sum_{i=1}^N x_i^2 + 2ab \sum_{i=1}^N x_i + Nb^2 > 0 \\ &= (\overline{y^2} - 2a\overline{xy} - 2b\overline{y} + a^2\overline{x^2} + 2ab\overline{x} + b^2)N > 0 \end{aligned}$$

Uma vez que  $N$  e  $\overline{x^2}$  são positivos, para um dado valor de  $b$ ,

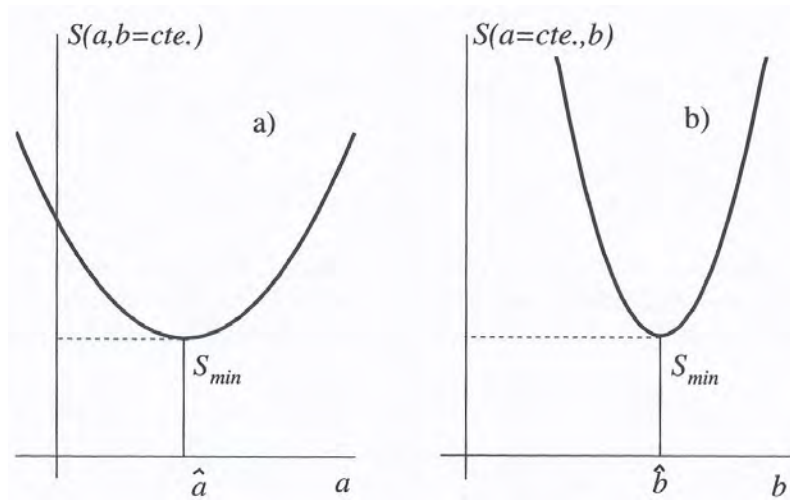
$$S(a, b = \text{cte.}) = [\overline{x^2}a^2 - 2(\overline{xy} - b\overline{x})a + \overline{y^2} - 2b\overline{y} + b^2]N > 0$$

é um trinômio positivo do segundo grau em  $a$  que apresenta um valor mínimo para  $a = \hat{a}$ . E, para um dado valor de  $a$  (Figura 71 (a)),

$$S(a = \text{cte.}, b) = [b^2 - 2(\overline{y} - a\overline{x})b + \overline{y^2} - 2a\overline{xy} + a^2\overline{x^2}]N > 0$$

é um trinômio positivo do segundo grau em  $b$  que apresenta um valor mínimo para  $b = \hat{b}$  (Figura 71 (b)).

Figura 71 - Somatório dos quadrados dos resíduos.



Fonte: Vitor Oguri, 2015, p.110.

Desse modo, os valores de  $a$  e  $b$  que minimizam simultaneamente ambos os trinômios relacionam-se por

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

e

$$a = \frac{\overline{xy} - b\bar{x}}{\bar{x}^2} = \frac{\overline{xy} - \overline{xy} + a\bar{x}^2}{\bar{x}^2} \implies (\bar{x}^2 - \bar{x}^2)a = \sigma_{xy}$$

isto é,

$$a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

Escrevendo-se a solução para os parâmetros como

$$\begin{cases} a = \sum_{i=1}^N \frac{(x_i y_i - \bar{x} y_i)}{N \sigma_x^2} = \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x}) y_i}{N \sigma_x^2} \\ b = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{N} - \frac{(x_i - \bar{x}) \bar{x}}{N \sigma_x^2} \right] y_i \end{cases}$$

de acordo com a fórmula de erros para a adição, e levando-se em conta que cada medida

de  $y$  tem a mesma incerteza ( $\sigma_i = \varepsilon_y$ ), as incertezas nos parâmetros são dadas por

$$\left\{ \begin{aligned} (\sigma_a)^2 &= \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{(N\sigma_x^2)^2} (\varepsilon_y)^2 = \frac{\varepsilon_y^2}{N\sigma_x^2} \\ (\sigma_b)^2 &= \frac{\sum_{i=1}^N [\sigma_x^2 - (x_i - \bar{x})\bar{x}]^2}{(N\sigma_x^2)^2} (\varepsilon_y)^2 \\ &= \frac{[N\sigma_x^4 - 2\sigma_x^2 \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})\bar{x} + \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \bar{x}^2]}{(N\sigma_x^2)^2} (\varepsilon_y)^2 \\ &= \frac{\sigma_x^2 + \bar{x}^2}{N\sigma_x^2} (\varepsilon_y)^2 = \bar{x}^2 \frac{\varepsilon_y^2}{N\sigma_x^2} = (\sigma_a)^2 \bar{x}^2 \end{aligned} \right.$$

ou seja,

$$\boxed{\sigma_a = \frac{1}{\sigma_x} \frac{\varepsilon_y}{\sqrt{N}} \quad \sigma_b = \sigma_a \sqrt{\bar{x}^2}} \quad (185)$$

onde

$$\boxed{\varepsilon_y = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(y_i - ax_i - b)^2}{N - 2}}} \quad (186)$$

é a estimativa para o erro ( $\sigma_i$ ) em cada uma das medidas de  $y$ . As informações contidas neste apêndice foram retiradas do livro: Estimativas e erros em experimentos de física (OGURI; J; SANTORO, 2015).

## APÊNDICE B – Método Runge-Kutta

Dada uma EDO linear de primeira ordem, com condição inicial:

$$\frac{\partial y}{\partial x} + p(x)y = q(x) \quad y(x_0) = y_0 \quad (187)$$

Isolamos a derivada, de forma que a equação diferencial fica na forma:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0. \quad (188)$$

O método consiste em um processo de interações (método iterativo), utilizando um valor chamado de passo (dado por  $h$ ) e a condição inicial:  $x_0$  e  $y_0$ , para determinar constantes  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  e  $k_4$ , que por sua vez são utilizados para determinar o valor de  $y_{n+1}$  (valor da função  $y$  no ponto  $x_0 + h$ ). A **1ª interação** parte de  $n = 0$  e as constantes utilizadas nas interações são dadas pelas fórmulas que seguem:

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_1}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_1}{2}\right)$$

$$k_4 = f\left(x_n + h, y_n + \frac{hk_2}{2}\right)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{6}$$

Terminado o processo, incrementamos o passo  $x_{n+1} = x_n + h$  ( $x$  avança de acordo com o passo  $h$  a cada final de interação). É possível utilizar uma tabela para auxiliar para organização dos cálculos.

$n$	$x_n$	$y_n$	$y_{n+1}$
0	$x_0$	$y_0$	$\vdots$
1	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
3	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$



**Exemplo:** Dada a equação diferencial:  $y' = -x+y+2$  e a condição inicial  $y(0) = 2$ , utilize o método de Runge Kutta para determinar  $y(0,2)$ . Utilize passo  $h = 0,1$ .

Temos então a nossa função  $f(x,y)$ , dada por:  $f(x,y) = -x + y + 2$ . Nosso  $x_0$  e  $y_0$  iniciais são dados pela condição inicial  $y(0) = 2$ .

**1ª Interação:**  $x_0 = 0$  e  $y_0 = 2$ .

$$k_1 = f(0,2) = -0 + 2 + 2 = 4$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_1}{2}\right) = f(0,05; 2,2) = -0,05 + 2,2 + 2 = 4,15$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_2}{2}\right) = f(0,05; 2,2075) = -0,05 + 2,2075 + 2 = 4,1575$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) = f(0,1; 2,4157) = -0,1 + 2,4157 + 2 = 4,3157$$

Obtidos,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  e  $k_4$ , obtemos  $y_{n+1}$

$$y_1 = y_0 + \frac{h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{6}$$

$$y_1 = 2 + \frac{0,1(4 + 2 \times 4,15 + 2 \times 4,1575 + 4,3147)}{6}$$

$$y_1 = 2 + \frac{0,1(4 + 8,3 + 8,315 + 4,3147)}{6}$$

$$y_1 = 2 + 0,4155 = 2,4155$$

Calculado  $y_1$ , temos a tabela até então:

$n$	$x_n$	$y_n$	$y_{n+1}$
0	0	2	2,4155
1	0,1	2,4155	⋮

**2ª Interação:**  $x_1 = 0,1$ ,  $y_1 = 2,4155$ .

$$k_1 = f(x_1, y_1) = f(0,1; 2,4155) = -0,1 + 2,4155 + 2 = 4,3155$$

$$k_2 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{hk_1}{2}\right) = f(0,15; 2,631275) = -0,15 + 2,631275 + 2 = 4,4813$$

$$k_3 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{hk_2}{2}\right) = f(0,15; 2,63956) = -0,15 + 2,63956 + 2 = 4,4896$$

$$k_4 = f(x_1 + h, y_1 + hk_3) = f(0,2; 2,864456) = -0,2 + 2,864456 + 2 = 4,6645$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{6} = 2,4155 + \frac{0,1(4,3155 + 8,9626 + 8,9792 + 4,6645)}{6}$$

$$y_2 = 2,4155 + \frac{0,1 \times 26,9218}{6} = 2,8642$$

Calculado  $y_2$ , terminamos o exemplo obtendo a tabela:

$n$	$x_n$	$y_n$	$y_{n+1}$
0	0	2	2,4155
1	0,1	2,4155	2,8642
2	0,2	2,8642	$\vdots$

Seguindo este procedimento, aplicamos o número  $n$  de interações desejadas a fim de se obter os demais valores da solução  $x_n(y)$ .